

Физико-математическая Олимпиада РГРТУ
среди школьников и абитуриентов,
посвященная 110-летию со дня рождения академика И.К. Кикоина
Математика. Демонстрационный вариант.

1. Два равнобедренных прямоугольных треугольника ABM и CDM с гипотенузами AB и CD расположены так, что $ABCD$ – четырехугольник. Одна диагональ этого четырехугольника равна d . Найдите его площадь.

2. Четверо ребят – Алеша, Боря, Ваня и Гриша – соревновались в беге. На следующий день на вопрос, кто какое место занял, они ответили так:

Алеша: Я не был ни первым, ни последним.

Боря: Я не был последним.

Ваня: Я был первым.

Гриша: Я был последним.

Известно, что три из этих ответов – правильные, а один – неверный. Кто из ребят сказал неправду? В каком порядке они финишировали?

3. Докажите, что $2^{100} + 3^{100} < 4^{100}$.

4. Можно ли в клетках квадратной таблицы 5×5 расположить числа $+1$, -1 и 0 так, чтобы все суммы – в каждом столбце, в каждой строке и на обеих диагоналях – были различны?

5. Решите систему уравнений, если известно, что y и z – простые положительные числа.

$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z} \\ x = y \cdot z \end{cases}$$