

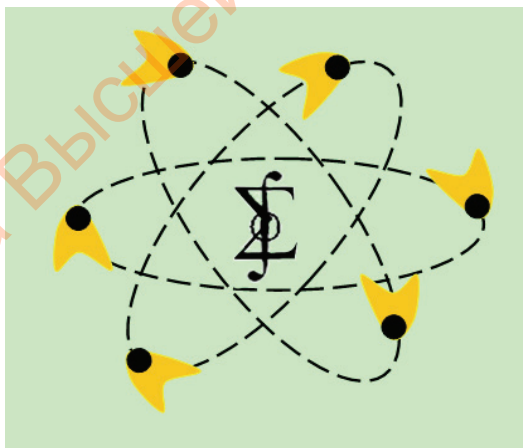
МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
РЯЗАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ РАДИОТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

**А.Н. КОНЮХОВ,
А.Б. ДЮБУА,
А.С. САФОШКИН**

ОСНОВЫ ТЕОРИИ НЕЧЕТКИХ МНОЖЕСТВ

Часть 1

Учебное пособие



Рязань 2017

Министерство образования и науки Российской Федерации

Рязанский государственный радиотехнический университет

А.Н. КОНЮХОВ,

А.Б. ДЮБУА,

А.С. САФОШКИН

ОСНОВЫ ТЕОРИИ НЕЧЕТКИХ

МНОЖЕСТВ

Часть 1

Учебное пособие

Рязань 2017

УДК 519.766.2

Основы теории нечетких множеств. Часть 1: учеб. пособие / А.Н.Конюхов, А.Б.Дюбуа, А.С.Сафошкин; Рязан. гос. радиотехн. ун-т. – Рязань, 2017. – 88 с.

В данном пособии обсуждаются базовые понятия теории нечетких множеств. По каждому разделу приведены примеры решения типовых задач и предложены упражнения для самостоятельной работы.

Предназначено для студентов специальности 10.05.01 «Компьютерная безопасность», студентов направления 10.05.03 «Информационная безопасность автоматизированных систем», а также для иных лиц, желающих изучить основы теории нечетких множеств.

Табл. 4. Ил. 28. Библиогр.: 22 назв.

Нечеткое множество, функция принадлежности, анализ иерархий, метрика, индекс нечеткости, операции над нечеткими множествами, T-нормы, S-нормы, лингвистические модификаторы, системы компьютерной математики

Печатается по решению редакционно-издательского совета Рязанского государственного радиотехнического университета.

Рецензент: кафедра эконометрики и математического моделирования Рязанского государственного радиотехнического университета (зав. кафедрой, д.т.н. В.К. Ключко)

ОГЛАВЛЕНИЕ

Условные обозначения.....	4
Предисловие.....	5
1. ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ НЕЧЕТКИХ МНОЖЕСТВ	7
Вопросы и упражнения к разделу 1.....	12
2. НЕЧЕТКИЕ МНОЖЕСТВА И ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ, СВЯЗАННЫЕ С НИМИ.....	12
Вопросы и упражнения к разделу 2.....	21
3. ВИДЫ ФУНКЦИЙ ПРИНАДЛЕЖНОСТИ НЕЧЕТКИХ МНОЖЕСТВ	22
Вопросы и упражнения к разделу 3.....	36
4. МЕТОДЫ ПОСТРОЕНИЯ ФУНКЦИЙ ПРИНАДЛЕЖНОСТИ НЕЧЕТКИХ МНОЖЕСТВ.....	38
Вопросы и упражнения к разделу 4.....	45
5. МЕРЫ НЕЧЕТКОСТИ НЕЧЕТКИХ МНОЖЕСТВ.....	45
Вопросы и упражнения к разделу 5.....	53
6. ОСНОВНЫЕ ОПЕРАЦИИ НАД НЕЧЕТКИМИ МНОЖЕСТВАМИ.....	54
Вопросы и упражнения к разделу 6.....	68
7. СВОЙСТВА ОПЕРАЦИЙ НАД НЕЧЕТКИМИ МНОЖЕСТВАМИ.....	69
Вопросы и упражнения к разделу 7.....	74
8. ЛИНГВИСТИЧЕСКИЕ МОДИФИКАТОРЫ НЕЧЕТКИХ МНОЖЕСТВ	74
Вопросы и упражнения к разделу 8.....	84
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК.....	86

Условные обозначения

<i>Опр</i>	определение
►	начало решения примера
◄	окончание решения примера
U	универсальное множество (универсум)
$\emptyset$	пустое множество
$A, B, \dots$	классические (обычные) множества
$\tilde{A}, \tilde{B}, \dots$	нечеткие множества
$supp(\tilde{A})$	носитель нечеткого множества
$core(\tilde{A})$	ядро нечеткого множества
$\tilde{A}_\alpha$	α -сечение (α -срез) нечеткого множества
$height(\tilde{A})$	высота нечеткого множества
$\forall$	квантор всеобщности (любой, для всякого)
$\exists$	квантор существования (существует)
$\Rightarrow$	импликация (если... то...)
$\Leftrightarrow$	эквиваленция (равносильно; тогда и только тогда)
НМ	нечеткое множество
ТНМ	теория нечетких множеств
ФП	функция принадлежности нечеткого множества

Предисловие

Общеизвестно, что развитие математики в немалой степени определяется текущими потребностями физики и других наук.

Например, аппарат дифференциального и интегрального исчисления специально был разработан для решения механических задач на нахождение траектории движения материальной точки под действием известных непостоянных сил при заданных начальных условиях. Результат превзошел все ожидания: расчетная траектория движения оказалась единственной и прекрасно согласовывалась с результатами наблюдений. Так возникло «детерминистическое» направление исследований окружающего мира, то есть точное (аналитическое) описание явлений с помощью соответствующего математического аппарата.

Детерминистический подход оказался чрезвычайно продуктивным. Управление работой множества механизмов и машин, летательных аппаратов и искусственных спутников построено на основе интегро-дифференциальных уравнений. Вместе с тем развитие науки порождало множество новых задач, которые не удавалось решить в рамках детерминистической парадигмы, либо применение такого подхода приводило к непреодолимым вычислительным трудностям. Таковыми оказались, к примеру, задачи молекулярной физики.

В ответ на этот вызов математиками был разработан стохастический (вероятностный) аппарат, работающий с величинами случайной природы, значения которых формируются под воздействием настолько огромного количества факторов, что их не только невозможно, но и бессмысленно учитывать по отдельности. Как результат сегодня теория вероятностей и математическая статистика успешно используются при решении многих физических и социальных задач, где существен фактор неопределенности.

Однако и стохастический подход в ряде случаев является недостаточным. Вот что указывал по этому поводу известный американский математик Р. Беллман: «Классическая теория вероятностей предполагает наличие большого материала наблюдений. Она хорошо работает, если мы, например, рассматриваем представительную выборку больных или наблюдаем за одним больным в течение длительного периода времени. Однако существует много трудностей, возникающих из-за малого объема данных, например, при лечении одного больного на малом интервале времени. Здесь уже нельзя с уверенностью использовать классическую теорию вероятностей. Такая проблема возникла давно. Для ее решения требуется ввести другое понятие неопределенности» [1, с.159].

Новый математический аппарат для решения задач в условиях неопределенности предложил американский ученый Лотфи Заде (L. Zadeh) в 1965 году [20]. Это *теория нечетких множеств* (fuzzy set theory).

Фундаментальным отличием теории нечетких множеств Л. Заде от классической теории множеств Г. Кантора стал принципиальный отказ от закона «исключения третьего». То есть в самом основании теории нечетких множеств был осуществлен переход от строго бинарных «ступенчатых» характеристических функций обычных «четких» множеств к произвольным функциям принадлежности, выражающим различные степени принадлежности элемента множеству в диапазоне от 0 до 1. Именно так удалось адаптировать классический аппарат теории множеств и математической логики для работы с такими неопределенными «человеческими» (лингвистическими) понятиями, как «более или менее», «слегка», «достаточно», «очень» и др.

Эффективность новой математической теории множеств была блестяще подтверждена на практике. Уже в начале 80-х годов несколько групп исследователей (в основном, из США и Японии) занялись созданием автоматизированных систем, использующих нечеткие управляющие алгоритмы. Стали активно развиваться такие направления исследований, как «искусственный интеллект» (artificial intelligence) и «мягкие вычисления» (soft computing). В целом за последние три десятка лет зафиксировано значительное нарастание количества практических приложений теории нечетких множеств и нечеткой логики в различных сферах науки и техники.

Вместе с тем несмотря на огромное количество диссертационных работ, монографий и статей, в которых рассматриваются различные аспекты теории нечетких множеств, на сегодняшний день отмечается ощутимый недостаток именно учебной литературы и методических разработок по дисциплине «Основы теории нечетких множеств», предусмотренной образовательными стандартами для ряда направлений подготовки в технических вузах.

Настоящее учебное пособие представляет собой попытку сжатого, но вместе с тем и наглядного введения в основные понятия теории нечетких множеств.

1. ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ НЕЧЕТКИХ МНОЖЕСТВ

Начать хочется с небольшого, но весьма поучительного примера.

Известно, что со второй половины прошлого века широкое распространение в научных исследованиях получил так называемый стохастический (вероятностный) подход. Почему так произошло? Дело в том, что ранее прекрасно зарекомендовавший себя детерминистический (точный) подход оказался бесполезным при решении целого ряда задач.

Предположим, некоторое заинтересованное лицо намерено *предсказать* рост L отдельно взятого европейского мужчины среднего возраста (скажем, от 30 до 40 лет), используя для этого иные доступные сведения об индивидууме. С точки зрения детерминистической концепции следовало бы попытаться составить некую функциональную формулу примерно следующего вида:

$$L = f(a, b, c, \dots),$$

где a – комплекс параметров, характеризующих этническую принадлежность индивидуума; b – множество параметров, характеризующих территорию проживания; c – совокупность факторов, связанных с индивидуальным развитием, и др.

Можете сами назвать еще не один десяток разнообразных факторов, которые могли бы оказать влияние на величину роста мужчины, после чего попытаться все их учесть и связать в функциональную зависимость.

Совершенно ясно, что применить детерминистический подход для исследования данной проблемы просто не представляется возможным. Ибо данная система (в нашем случае – человек) настолько сложна, что *точно* описать ее поведение с помощью комплекса математических соотношений вряд ли кому под силу.

Аппарат математической статистики подходит к подобным проблемам принципиально иначе. С данной точки зрения целесообразно провести соответствующее статистическое исследование, сформировав репрезентативную выборку, достаточно четко отражающую пропорции генеральной совокупности. Затем найти среднюю оценку случайной величины (например, рост человека), а также оценить ее «разброс» или вариацию в виде среднего квадратического отклонения σ .

Итог такого исследования может быть сформулирован следующим образом: «рост L европейского мужчины в возрасте 30 - 40 лет заключен в интервале $L_1 \leq L \leq L_2$ сантиметров с вероятностью 0,95». Для практики это вполне приемлемый результат, если учесть, что при массовом обследовании в среднем только в 5 % случаев границы довери-

тельного интервала будут превзойдены. Появление доверительного интервала оценки - естественный «штраф» за отказ от детерминистического подхода. Но он, очевидно, покрывается значительным упрощением анализа такой сложной системы.

На рис. 1.1 схематически изобразим, как могли бы выглядеть результаты такого статистического исследования.

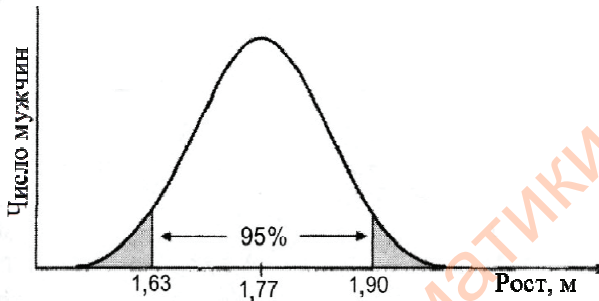


Рис. 1.1. Возможный результат статистического исследования на предмет распределения роста мужчин

Математики создали аппарат, позволяющий описывать подобные статистические зависимости в виде функций распределения вероятностей и функций плотности распределения вероятностей. Если эти понятия вам незнакомы или вы их забыли, то стоит обратиться к соответствующим учебникам, например, [2].

Кривая на рис. 1.1 напоминает кривую плотности нормального (гауссова) распределения вероятностей, описываемую известной формулой

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(x-a)^2}{2\sigma^2}},$$

где X – случайная величина (рост мужчины, см), a – математическое ожидание случайной величины X ; σ – среднее квадратическое отклонение случайной величины X от ее математического ожидания a .

В целом статистический подход весьма привлекателен, однако основным его недостатком стоит признать необходимость сбора достаточно большого количества статистической информации об объекте исследования, что сопряжено со значительными затратами средств и времени. Кроме того, предполагается, что случайные факторы, под действием которых формируется значение случайной величины, по отдельности оказывают незначительное влияние на результирующий показатель, а также действуют независимо друг от друга. Если ком-

плекс таких требований выполнен, то договоримся называть данную ситуацию *неопределенностью I рода*.

Вместе с тем все чаще в область исследовательских интересов стали попадать вопросы, связанные с особенностями восприятия окружающей действительности живыми существами, в частности человеком. Применимость же вероятностно-статистического подхода к анализу подобных проблем стала вызывать сомнения.

Вот что в данной связи отмечают некоторые исследователи. «In order to deal with indeterminacy mathematically, two axiomatic systems have been founded, namely, probability theory and uncertainty theory. When we have enough samples of the possible outcomes of the indeterminate quantity, we can obtain the probability distribution of the indeterminate quantity from the frequency of the outcomes. In this case, probability theory will work well. When we have no sample of the possible outcomes of the indeterminate quantity, we have to invite the experts to evaluate the uncertainty distribution of the indeterminate quantity according to their experiences. In this case, uncertainty theory will work well» [16, p. 243].

Возникло новое направление «uncertainty theory» - теория неопределенностей, которая потребовала создания математического аппарата, способного описывать ситуации, связанные с нечеткостью рассуждений и восприятия окружающего мира человеком. Такие ситуации будем называть *неопределенностью II рода*.

Одним из первых исследователей, предложивших концепцию новой математики (нечеткой математики), стал американский ученый азербайджанского происхождения Лотфи Заде (Lotfi Zadeh). В 1965 году вышла его фундаментальная статья «Fuzzy Sets» (Нечеткие множества) в журнале «Information and Control», в которой определены основные понятия и отношения этой теории [20].

Заде справедливо отмечает, что такие множества (классы), как «действительные числа значительно больше 1», или «красивые женщины», или «высокие мужчины», не являются множествами в классическом смысле.

Вместе с тем нельзя не признать тот факт, что именно такие «нечетко» определенные множества играют важнейшую роль в процессах восприятия человека, особенно, когда речь идет о распознавании образов, обмене информацией в процессе коммуникации, выборе предпочтений и т.п.

С точки зрения математики «*множество*» относится к так называемым *неопределяемым понятиям*, то есть не может быть сведено к понятиям более простым.

Множеством (в классическом смысле) будем называть совокупность каких-либо предметов, называемых его *элементами*. Часто добавляют, что эти предметы должны иметь какой-нибудь характерный объединяющий их признак, например «множество студентов группы 111».

Факт *принадлежности* элемента множеству записывается как $x \in A$; если элемент не принадлежит множеству, - $x \notin A$.

Универсальное множество U – это множество, состоящее из всевозможных элементов, которые могут иметь отношение к данной предметной области (задаче).

Пустое множество $\emptyset$ - это множество, не содержащее никаких элементов.

Опр. 1.1. *Характеристической функцией* классического множества A называется функция, заданная для всех $x \in U$ как

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in A, \\ 0, & \text{если } x \notin A. \end{cases}$$

В указанном смысле любой элемент x универсального множества U либо содержится в данном множестве X , либо нет.

Усмотрев в таком бинарном описании существенное препятствие для использования в системах с неопределенностью II рода, Л. Заде расширяет классическое понятие множества следующим образом.

Опр. 1.2. *Нечеткое множество* $\tilde{A}$ – это совокупность всех пар следующего вида: $\tilde{A} = \{ \langle x, \mu_{\tilde{A}}(x) \rangle \}$, где $x \in U$, а функция $\mu_{\tilde{A}}(x)$ - *функция принадлежности* элементов x множеству $\tilde{A}$, причем $0 \leq \mu_{\tilde{A}}(x) \leq 1$.

Итак, если обычное множество описывается характеристической функцией строго бинарного типа (1 - элемент принадлежит данному множеству; 0 - элемент не принадлежит ему), то нечеткое множество имеет функцию принадлежности в общем случае непрерывную, принимающую для каждого элемента универсального множества U действительное значение из отрезка $[0, 1]$.

Чем ближе значение $\mu_{\tilde{A}}(x)$ к единице, тем в большей степени элемент x принадлежит нечеткому множеству (НМ) $\tilde{A}$, чем ближе к нулю, тем в большей степени не содержится в нем. При $\mu_{\tilde{A}}(x) = 0,5$ достигается состояние максимальной неопределенности принадлежности элемента данному НМ.

L.Zadeh полагал, что расширенная таким образом теория множеств позволит выйти на значительно более широкие практические приложения. И он оказался прав.

Уже в 1975 г. англичане Мамдани и Ассилиан (Mamdani and Assilian) построили первый нечеткий контроллер, который управлял паровым двигателем [18].

Затем, в 1982 г. датчане Холмблад и Остергард (Holmblad and Ostergaard) разработали первый промышленный нечеткий контроллер для управления процессом обжига цемента [15].

Ниже приведем далеко не полный перечень наиболее существенных практических внедрений на основе ТНМ:

- нечеткая система управления движением электропоезда в метро японского города Сендай (фирма Hitachi);
- камеры с автоматической фокусировкой (Canon);
- кондиционеры воздуха (Mitsubishi);
- стиральные машины (Panasonic и Matsushita);
- автоматическая трансмиссия с нечетким управлением (Honda и Nissan);
- нечеткий контроллер лифта (Toshiba) [12].

Успехи внедренческой деятельности усилили интерес математиков к ТНМ. В частности, в 1993 году Б.Коско (Bart Kosko) была доказана *теорема о нечеткой аппроксимации*.

Теорема (Fuzzy Approximation Theorem - FAT). «Any sufficiently smooth function can be approximated arbitrarily closely on a compact set using a fuzzy system with appropriate structure» [9]. Любая достаточно гладкая функция может быть сколь угодно точно аппроксимирована при использовании системы на нечетких множествах с соответствующей структурой.

Говоря проще, с помощью вербальных правил типа «если – то» с последующей их формализацией средствами ТНМ можно выразить с заданной точностью взаимосвязь «входы-выходы» системы без использования достаточно сложного аппарата дифференциального и интегрального исчисления, применяемого в классической теории управления. Понятно, что предельная точность описания поведения системы в таком случае определяется полнотой базы знаний, сформированной из правил «если-то».

Стремительное развитие теории нечетких множеств и нечеткой логики, многочисленные удачные образцы технических решений на их основе привели к тому, что в 1997 г. язык нечеткого управления (fuzzy control language - FCL) был внесен в международный стандарт программируемых контроллеров IEC 1131-7. Указанный документ явля-

ется первым и пока единственным стандартом, формализующим программное описание систем на нечеткой логике в целях программирования нечетких контроллеров [10].

Вопросы и упражнения к разделу 1

1. Что означает «детерминистическая концепция» в исследованиях?
2. Почему детерминистический подход к описанию систем и процессов не всегда применим?
3. Что понимают под неопределенностями I и II рода? Приведите примеры систем с такими неопределенностями.
4. Что такое множество, характеристическая функция множества?
5. Дайте определение нечеткого множества. В чем состоит основное его отличие от обычного множества? Что такое функция принадлежности нечеткого множества?
6. В чем сущность теоремы о нечеткой аппроксимации (FAT)?
7. Для чего предназначен язык нечеткого управления (FCL)?
8. Как вы понимаете высказывание Л. Заде: «In almost every case you can build the same product without fuzzy logic, but fuzzy is faster and cheaper»?
9. Попробуйте найти в открытом доступе несколько публикаций о применении теории нечетких множеств и нечеткой логики для решения задач управления техническими (или иными) системами. Составьте перечень актуальных направлений исследований в данной области.

2. НЕЧЕТКИЕ МНОЖЕСТВА И ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ, СВЯЗАННЫЕ С НИМИ

Вспомним основные определения, сформулированные ранее, сопровождая их наглядными примерами. Предполагается, что студент в достаточной мере владеет основными понятиями классической теории множеств, разработанной немецким математиком Г. Кантором. В данном разделе обычные (классические) множества будем обозначать главными буквами латинского алфавита ($A, B, \dots$), в то время как нечеткие множества - теми же буквами, но с «тильдой» ($\tilde{A}, \tilde{B}, \dots$).

Опр. 2.1. *Характеристической функцией* обычного множества A называется функция, заданная для всех $x \in U$ следующим образом:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in A, \\ 0, & \text{если } x \notin A. \end{cases}$$

Пример 2.1. Составим характеристическую функцию обычного множества A - «все натуральные числа, большие 5».

► В данном случае универсальное множество – это множество всех натуральных чисел ($U=N$). Поэтому

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x > 5, \\ 0, & \text{если } x \leq 5. \end{cases}, \quad x \in N. \quad \blacktriangleleft$$

Опр. 2.2. Нечеткое множество (НМ) $\tilde{A}$ – это совокупность всех пар следующего вида: $\tilde{A} = \{ \langle x, \mu_{\tilde{A}}(x) \rangle \}$, где $x \in U$, а функция $\mu_{\tilde{A}}(x)$ - функция принадлежности (ФП) элементов x множеству $\tilde{A}$, причем $0 \leq \mu_{\tilde{A}}(x) \leq 1$. Значение функции принадлежности $\mu_{\tilde{A}}(x)$ называется *степенью принадлежности* элемента x нечеткому множеству $\tilde{A}$.

Здесь необходимо сделать существенное замечание. В ряде источников справедливо указано, что методологически правильное говорить о *нечетком подмножестве* $\tilde{A}$ универсального множества U . Мы же в целях упрощения изложения будем использовать термин *нечеткое множество* $\tilde{A}$, заданное на универсальном множестве U .

Нечеткое множество может быть *дискретным* или *непрерывным* в зависимости от вида универсального множества.

Пример 2.2. Описать с помощью соответствующих функций принадлежности множества: 1) A = «натуральные числа, большие 5»; 2) $\tilde{A}$ = «натуральные числа, немного большие 5», если универсальное множество в данной задаче $U = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$.

► Для наглядности запишем значения степеней принадлежности для отдельных элементов $x_i \in U$, ($i = 1, 2, \dots, 10$) в табл. 2.1.

Таблица 2.1

Решение примера 2.2

$x_i \in U$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\mu_A(x_i)$	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1
$\mu_{\tilde{A}}(x_i)$	0	0	0	0	0	1	0,8	0,5	0,1	0

Заметим, что для обычного множества A значения ФП однозначно определимы. Совсем не так для нечеткого множества $\tilde{A}$. Ясно, что при $x \leq 5$ $\mu_{\tilde{A}}(x) = \mu_A(x) = 0$. Однако при $x > 5$ значения $\mu_{\tilde{A}}(x)$ могут быть указаны неоднозначно в зависимости от субъективных предпочтений эксперта (компетентного в данной области лица), осуществляющего оценку. Зона максимальной неопределенности ситуации соответствует значению $\mu_{\tilde{A}}(x) = 0,5$. Это означает, что в данном случае эксперт вообще не может высказать определенное мнение о том, принадлежит ли рассматриваемый элемент x множеству $\tilde{A}$ или не принадлежит. ◀

Для дальнейших рассуждений введем некоторые дополнительные понятия.

Опр. 2.3. *Носителем (support) нечеткого множества $\tilde{A}$ называют четкое множество, состоящее из тех и только тех элементов универсального множества U , для которых функция принадлежности $\tilde{A}$ отлична от нуля: $\text{supp}(\tilde{A}) = \{x \in U \mid \mu_{\tilde{A}}(x) > 0\}$.*

Введение понятия носителя нечеткого множества вполне объяснимо: при описании НМ теперь можно «отбросить» те элементы, которые заведомо не принадлежат этому множеству, то есть те, степень принадлежности которых множеству нулевая, $\mu_{\tilde{A}}(x) = 0$.

Опр. 2.4. Нечеткое множество $\tilde{A}$ называется *пустым*, если его носитель – пустое множество: $\text{supp}(\tilde{A}) = \emptyset$.

Носитель нечеткого множества может быть дискретным или непрерывным. Это зависит от того, является ли универсальное множество задачи дискретным или непрерывным.

Существуют определенные правила записи НМ, введенные еще Л. Заде. Так, нечеткое множество с *дискретным носителем* записывается следующим образом:

$$\tilde{A} = \sum_i \frac{\mu_{\tilde{A}}(x_i)}{x_i}, \quad x_i \in \text{supp}(\tilde{A}),$$

где символический знак $\sum$ обозначает *объединение элементов* в нечеткое множество, $\frac{\mu_{\tilde{A}}(x_i)}{x_i}$ – символическое обозначение элемента x_i в со-

вокупности с его степенью принадлежности (не путать знак «/» со стандартной операцией деления!).

Пример 2.3. Записать нечеткое множество $\tilde{A}$ = «натуральные числа, немного большие 5», если универсальное множество в данной задаче $U = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$. Значения степеней принадлежности - см. в примере 2.2.

► Имеем

$$\begin{aligned} \text{supp}(\tilde{A}) &= \{6, 7, 8, 9\}; \\ \tilde{A} &= \sum_{x_i \in \text{supp}(\tilde{A})} \frac{\mu_{\tilde{A}}(x_i)}{x_i} = \frac{1}{6} + \frac{0,8}{7} + \frac{0,5}{8} + \frac{0,1}{9}. \quad \blacktriangleleft \end{aligned}$$

Опр. 2.5. Ядром (*core*) нечеткого множества $\tilde{A}$ называют четкое множество, состоящее из тех и только тех элементов универсального множества U , для которых степень принадлежности множеству $\tilde{A}$ равна 1: $\text{core}(\tilde{A}) = \{x \in U \mid \mu_{\tilde{A}}(x) = 1\}$.

Так, для множества $\tilde{A}$ из примера 2.2 ядро состоит из единственного элемента $\text{core}(\tilde{A}) = \{6\}$.

Опр. 2.6. α -сечением (α -срезом, подмножеством α -уровня, α -cut) нечеткого множества $\tilde{A}$ называют четкое множество A_{α} , состоящее из тех и только тех элементов универсального множества U , для которых степень принадлежности множеству $\tilde{A}$ не менее α , т.е. $A_{\alpha} = \{x \in U \mid \mu_{\tilde{A}}(x) \geq \alpha\}$; $0 < \alpha < 1$.

Очевидно, что для нечеткого множества $\tilde{A}$ из примера 2.2 $A_{0,3} = \{6, 7, 8\}$, $A_{0,7} = \{6, 7\}$.

Опр. 2.7. Точками перехода (*transition points*) нечеткого множества $\tilde{A}$ называются те и только те элементы x , для которых $\mu_{\tilde{A}}(x) = 0,5$.

Так, у множества $\tilde{A}$ из примера 2.2 точка перехода единственная $x_{tr} = \{8\}$. Для обозначения применяется индекс *tr* – *transition* (переход).

На рис. 2.1 наглядно представлены перечисленные выше понятия (носитель, ядро, α -сечение нечеткого множества).

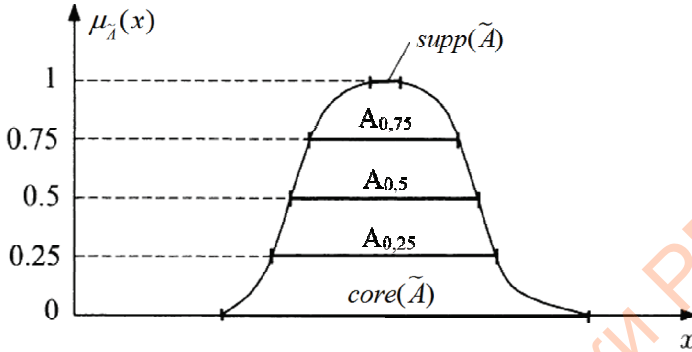


Рис 2.1. Носитель, ядро, различные α -сечения нечеткого множества, заданного своей функцией принадлежности $\mu_{\tilde{A}}(x)$

Опр. 2.8. Высотой (*height*) непустого НМ $\tilde{A}$ называется величина $height(\tilde{A}) = h(\tilde{A}) = \max_{x \in \text{supp}(\tilde{A})} \mu_{\tilde{A}}(x)$.

Как следует из данного определения, $0 < height(\tilde{A}) \leq 1$.

Опр. 2.9. Нечеткое множество $\tilde{A}$ называют *нормальным*, если $height(\tilde{A}) = 1$; иначе множество $\tilde{A}$ называют *субнормальным*.

Так, в вышеприведенном примере 2.2 $height(\tilde{A}) = 1$, то есть множество $\tilde{A}$ нормальное.

На практике удобно работать с нормальными нечеткими множествами, в связи с чем для субнормальных НМ предусмотрена *процедура нормализации*, осуществляемая в соответствии с очевидной формулой

$$\mu_{\tilde{A}}^*(x) = \frac{\mu_{\tilde{A}}(x)}{height(\tilde{A})}, \quad x \in \text{supp}(\tilde{A}),$$

где $\mu_{\tilde{A}}^*(x)$ - нормализованная функция принадлежности множества $\tilde{A}$; $\mu_{\tilde{A}}(x)$ - функция принадлежности исходного субнормального множества $\tilde{A}$.

Опр. 2.10. Нечеткое нормальное множество $\tilde{A}$ называется *универсальным*, если существует единственный элемент универсального множества U , степень принадлежности которого множеству $\tilde{A}$ равна 1.

Очевидно, что множество $\tilde{A}$ из примера 2.2 – унимодальное.

Пример 2.4. Формализовать нечеткое понятие «европейский мужчина среднего роста» в виде нечеткого множества с дискретным носителем. Считать универсальным множеством дискретное множество $U = \{155, 160, 165, 170, 175, 180, 185, 190\}$, (см). Найти носитель, ядро и $\alpha=0,5$ -сечение полученного нечеткого множества. Если это множество окажется субнормальным, то произвести его нормализацию.

► Исходя из субъективных оценок о среднем росте европейского мужчины, мы можем составить, например, следующее дискретное НМ $\tilde{A}$:

$$\tilde{A} = \frac{0}{155} + \frac{0,3}{160} + \frac{0,8}{165} + \frac{0,9}{170} + \frac{0,8}{175} + \frac{0,5}{180} + \frac{0,4}{185} + \frac{0}{190}.$$

Носитель множества $\text{supp}(\tilde{A}) = \{160, 165, 170, 175, 180, 185\}$.

С учетом того, что нечеткие множества принято задавать лишь на своих носителях, можно записать:

$$\tilde{A} = \frac{0,3}{160} + \frac{0,8}{165} + \frac{0,9}{170} + \frac{0,8}{175} + \frac{0,5}{180} + \frac{0,4}{185}.$$

Сечение $A_{0,5} = \{165, 170, 175, 180\}$. Ядро $\text{core}(\tilde{A}) = \emptyset$.

Очевидно также, что $\text{height}(\tilde{A}) = \max_{x \in \text{supp}(\tilde{A})} \mu_{\tilde{A}}(x) = 0,9$. Следова-

тельно, множество $\tilde{A}$ является субнормальным.

Проведя процедуру нормализации, получим нормальное нечеткое множество $\tilde{A}^*$ следующего вида:

$$\tilde{A}^* = \frac{0,33}{160} + \frac{0,89}{165} + \frac{1}{170} + \frac{0,89}{175} + \frac{0,56}{180} + \frac{0,44}{185}.$$

Ясно, что новые значения степеней принадлежности элементов множества $\tilde{A}$ получены делением прежних значений на величину $\text{height}(\tilde{A}) = 0,9$. ◀

До сих пор мы рассматривали лишь примеры, в которых носитель НМ был дискретным. Это позволило нам лучше понять сущность нечетких множеств как математических объектов. Однако на практике значительно больший интерес представляют НМ с непрерывными (континуальными) носителями.

Л. Заде предложил записывать нечеткие множества с непрерывным носителем в следующем виде:

$$\tilde{A} = \int_{x \in \text{supp}(\tilde{A})} \frac{\mu_{\tilde{A}}(x)}{x},$$

где символический знак $\int$ обозначает *объединение элементов* в непрерывное нечеткое множество (не путать со стандартной операцией интегрирования!).

Для описания НМ с непрерывным носителем широко используются способы аналитического и графического задания функций принадлежности.

Аналитический способ подразумевает задание непрерывной функции принадлежности в виде формулы. При этом выбор вида ФП обычно определяется сущностью данной проблемы.

Пример 2.5. Формализовать нечеткое множество $\tilde{A}$ = «числа, близкие к 5», если $U = R$, то есть универсальное множество является множеством всех действительных чисел. Найти носитель, ядро и произвольное α -сечение полученного нечеткого множества ($0 < \alpha < 1$).

► Очевидно, что мы можем предложить далеко не единственный вариант описания данного нечеткого множества с помощью различных функций принадлежности (ФП).

1. Во-первых, это может быть гладкая функция типа гауссовой (*gaussian set function*) с двумя параметрами

$$\mu_{\tilde{A}}(x, a, d) = \exp\left(-\left(\frac{x-a}{d}\right)^2\right),$$

где d - параметр, задающий характерную величину «размаха» кривой относительно модального значения a – второго параметра (рис. 2.2).

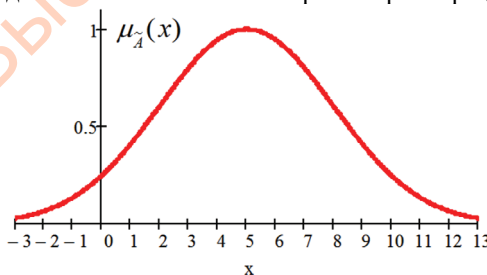


Рис. 2.2. Функция принадлежности гауссова типа с модальным значением $a=5$ и параметром «размытия» $d=3$

Применительно к нашему примеру функция принадлежности множества $\tilde{A}$ = «числа, близкие к 5» будет иметь вид:

$$\mu_{\tilde{A}}(x, d) = \exp\left(-\left(\frac{x-5}{d}\right)^2\right).$$

В данном случае носитель множества $\text{supp}(\tilde{A}) = U = R$, а ядро $\text{core}(\tilde{A}) = \{5\}$.

Для нахождения произвольного α -сечения составим уравнение:

$$\mu_{\tilde{A}}(x, d) = \alpha \Leftrightarrow \exp\left(-\left(\frac{x-5}{d}\right)^2\right) = \alpha.$$

Преобразуя, получаем:

$$-\left(\frac{x-5}{d}\right)^2 = \ln \alpha;$$

$$\frac{x-5}{d} = \pm \sqrt{\ln \alpha^{-1}};$$

$$x = 5 \pm d \sqrt{\ln \alpha^{-1}}.$$

Итак, α -сечение представляет собой отрезок вида

$$A_{\alpha} = \left[5 - d \sqrt{\ln \alpha^{-1}}; 5 + d \sqrt{\ln \alpha^{-1}}\right].$$

В частности, при $\alpha=1$ получаем ядро

$$A_1 = \text{core}(\tilde{A}) = \left[5 - d \sqrt{\ln 1}; 5 + d \sqrt{\ln 1}\right] = \{5\}.$$

2. Во-вторых, это может быть негладкая функция типа треугольной (*triangle set function*), изображенная на рис. 2.3. Для ее задания понадобится три параметра: a, b, c .

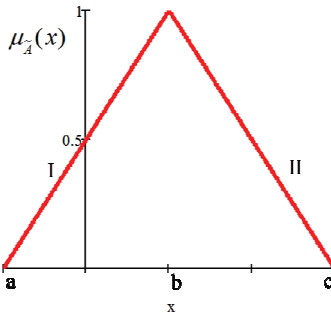


Рис. 2.3. Функция принадлежности треугольного типа с параметрами a, b, c

Получить аналитическое выражение треугольной ФП не составит труда, если вспомнить, как записывается уравнение прямой, проходящей через две заданные на плоскости точки $A(x_A, y_A), B(x_B, y_B)$:

$$\frac{x - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y - y_A}{y_B - y_A}.$$

В данном случае носителем НМ будет конечный интервал

$$\text{supp}(\tilde{A}) = (a; c) \subset U, \quad (U = R).$$

Прямая, содержащая участок I, проходит через точки $A(a; 0), B(b; 1)$, следовательно, ее уравнение

$$\frac{x - a}{b - a} = \frac{y - 0}{1 - 0}; \Leftrightarrow y = \frac{x - a}{b - a} \quad (\text{I}).$$

Прямая II проходит через точки $C(c; 0), B(b; 1)$, то есть описывается уравнением

$$\frac{x - c}{b - c} = \frac{y - 0}{1 - 0}; \Leftrightarrow y = \frac{x - c}{b - c} \quad (\text{II}).$$

С учетом сказанного записываем аналитическое выражение для функции принадлежности множества $\tilde{A}$ в виде

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} \frac{x - a}{b - a}, & \text{если } a \leq x < b, \\ \frac{x - c}{b - c}, & \text{если } b \leq x \leq c, \\ 0, & \text{если } (x < a) \text{ или } (x > c). \end{cases}$$

В данном случае носитель НМ $\tilde{A}$ ограниченный - $\text{supp}(\tilde{A}) = (a; c) \subset U$, а ядро по-прежнему содержит один элемент $\text{core}(\tilde{A}) = \{b\}$.

Для нахождения произвольного α -сечения составим уравнение:

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \alpha, \quad (0 < \alpha < 1).$$

Решаем это уравнение отдельно на участках I и II, обозначив левый конец α -интервала за x_l , а правый - за x_r :

$$\frac{x_l - a}{b - a} = \alpha; \Leftrightarrow x_l = a + \alpha(b - a);$$

$$\frac{x_r - c}{b - c} = \alpha; \Leftrightarrow x_r = c + \alpha(b - c).$$

Итак, α -сечение имеет вид $A_\alpha = [a + \alpha(b - a); c + \alpha(b - c)]$.

Нетрудно убедиться, что

$$A_{\alpha=1} = \text{core}(\tilde{A}) = [a + (b - a); c + (b - c)] = \{b\}.$$

В условиях нашего примера для НМ $\tilde{A} = \langle \text{числа, близкие к } 5 \rangle$ следует положить параметр $b=5$, а параметры a и c назначить, исходя из экспертных представлений о сути и назначении данной задачи. ◀

Вопросы и упражнения к разделу 2

1. Дайте определения следующим понятиям: множество, нечеткое множество, функция принадлежности, степень принадлежности, носитель, ядро, точки перехода, α -сечение нечеткого множества.
2. Что такое высота нечеткого множества? Какие множества называются нормальными, а какие – субнормальными?
3. Каким образом осуществляется процесс нормализации нечеткого множества: а) с дискретным носителем; б) с непрерывным носителем?
4. Приведите по одному примеру нечетких множеств с дискретным и непрерывным носителями. Опишите их с помощью любых функций, известных вам из курса математического анализа, постройте графики для непрерывных ФП или диаграммы Заде для дискретных множеств. В каждом примере укажите универсальное множество, определите носитель, ядро и получите выражения для α -сечений.
5. Попробуйте полностью воспроизвести решение примера 2.5 раздела 2, используя функцию принадлежности вида $\mu_{\tilde{A}}(x) = (1 + (5 - x)^2)^{-1}$, $x \in U$ ($U = R$).
6. Найдите в открытых источниках научно-исследовательскую статью на иностранном языке, посвященную проблеме нечетких множеств, и составьте ее краткий русскоязычный реферат. Например, можно обратиться к сайту журнала «Journal of uncertain systems» – URL: <http://www.jus.org.uk>. Обратите внимание на терминологию аппарата теории НМ.

3. ВИДЫ ФУНКЦИЙ ПРИНАДЛЕЖНОСТИ НЕЧЕТКИХ МНОЖЕСТВ

Как уже стало ясно из предыдущих двух разделов, ключевой дескриптор нечеткого множества – это функция принадлежности, заданная на всех элементах универсума U .

Очевидно также, что выбор функции принадлежности весьма неоднозначен и определяется в значительной степени представлениями экспертов о моделируемой предметной области. Поэтому возникает вопрос о выборе функции принадлежности (ФП) в каждом конкретном случае.

В этой связи отметим, что известны классы так называемых «типовых» функций принадлежности, которые используются на практике заметно чаще других. Достаточно полный обзор таких ФП можно найти в статьях одного из классиков теории нечетких множеств – В. Kosko [17, 19], а также в замечательной монографии польского исследователя в области «мягких» вычислений А. Piegat [7].

При всем многообразии используемых на практике ФП на сегодняшний день недостаточно обоснованы общие требования к ним. В данном отношении представляют интерес так называемые аксиомы Шваба (Schwab axioms) [7, 13]. Эти аксиомы касаются функций принадлежности, в наибольшей степени присущих стилю мышления человека, то есть так называемых *интуитивных* ФП. Как отмечают исследователи, эти аксиомы достаточно спорны и основаны на обобщении результатов частных психофизиологических наблюдений и экспериментов. Тем не менее, это лучше, чем ничего. В связи с этим приведем формулировки аксиом Шваба в интерпретации А. Пегат [7].

Аксиома 1. Интуитивные функции принадлежности нечетких множеств $\mu_{\tilde{A}}(x)$ должны быть непрерывными на всей своей области определения x .

Имеется в виду, что выражаемая человеком качественная оценка некой величины x не изменяется «скачкообразно» ни при каком достаточно малом изменении ее значения. Для описания такого свойства в математическом анализе предусмотрена категория «непрерывности» функций. Представим, к примеру, что осуществляется классификация ощущений человека при оценке массы предмета (градации: очень легкий, легкий, средней тяжести, тяжелый, очень тяжелый). Маловероятно, что один и тот же респондент при увеличении массы предмета всего лишь на 1 грамм сразу же отнесет его в следующую категорию.

Аксиома 2. Первая производная интуитивной функции принадлежности $\mu_A(x)$ по x также является непрерывной на всей своей области определения.

Как показали психофизиологические исследования, скорость изменения оценки человеком некой величины x также не меняется скачкообразно при достаточно малом изменении x .

Аксиома 3. Вторая производная интуитивной функции принадлежности по x является непрерывной на всей своей области определения.

Аксиома 4. Интуитивная функция принадлежности имеет минимальное значение кривизны в классе возможных ФП.

Для оценки максимальной кривизны k_{max} функции принадлежности может использоваться формула для плоской кривой:

$$k_{max} = \max_{x \in U} \frac{|\mu_A''(x)|}{\left(1 + (\mu_A'(x))^2\right)^{3/2}},$$

где $\mu_A''(x)$ - вторая производная ФП по x ; U – универсум.

Смысл аксиомы 4 в том, что из n альтернативных ФП выбор осуществляется по критерию $\min_{i=1,n} \{k_{max_i}\}$.

В данном разделе мы обсудим количественно и качественно основные классы функций принадлежности нечетких множеств.

I. К первому классу относятся наиболее простые с аналитической точки зрения *кусочно-линейные* ФП, а именно:

- *треугольная* (*triangle set function*);
- *трапецевидная* (*trapezoid set function*);
- а также их разновидности - крайняя левая (*infinite left*) и крайняя правая (*infinite right*) кусочно-линейные ФП.

1.1. *Треугольная* функция принадлежности (рис. 3.1, а) характеризуется в общем (несимметричном) случае тремя независимыми параметрами (a, b, c) :

$$\mu_A(x) = \begin{cases} \frac{x-a}{b-a}, & \text{если } a \leq x < b, \\ \frac{c-x}{c-b}, & \text{если } b \leq x \leq c, \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \quad (triangle)$$

1.2. *Трапецевидная* функция принадлежности (рис. 3.1, б) описывается в общем случае четырьмя параметрами (a, b, c, d) :

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} \frac{x-a}{b-a}, & \text{если } a \leq x < b, \\ 1, & \text{если } b \leq x < c, \\ \frac{d-x}{d-c}, & \text{если } c \leq x \leq d, \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \quad (\text{trapezoid})$$

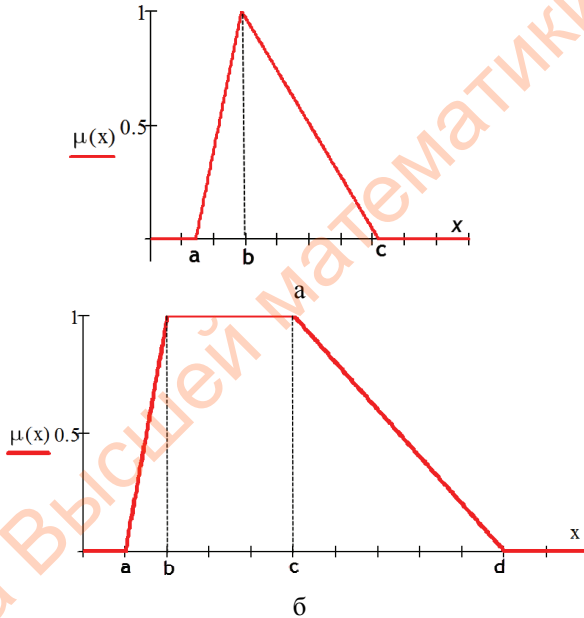
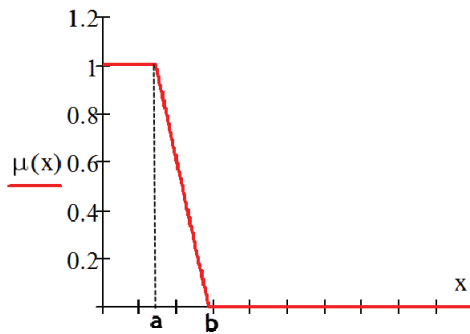


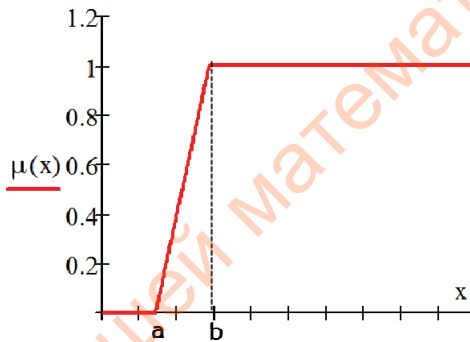
Рис. 3.1. Треугольная (а) и трапецевидная (б) функции принадлежности

Треугольная и трапецевидная функции принадлежности могут быть использованы для моделирования таких нечетких понятий, как «приблизительно равно», «около среднего значения», «расположено примерно в интервале от... и до...» и т.д.

1.3. *Крайняя левая* и *крайняя правая* кусочно-линейные ФП требуют для своего задания лишь два параметра (a, b) и имеют вид, изображенный на рис. 3.2 (а, б).



a



б

Рис. 3.2. Крайняя левая (а) и крайняя правая (б) кусочно-линейные ФП

Нетрудно убедиться, что крайняя левая и крайняя правая кусочно-линейные функции принадлежности описываются следующими аналитическими выражениями:

$$\mu_{\bar{A}}(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x < a, \\ \frac{b-x}{b-a}, & \text{если } a \leq x \leq b, \quad (\text{infinite left}) \\ 0, & \text{если } x > b. \end{cases}$$

и соответственно

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < a, \\ \frac{x-a}{b-a}, & \text{если } a \leq x \leq b, \\ 1, & \text{если } x > b. \end{cases} \quad (\text{infinite right})$$

Крайняя левая ФП используется для формализации в виде нечетких множеств таких нечетких понятий, как «малая величина», «небольшое количество», «незначительная величина», «низкий уровень». Крайняя правая ФП, напротив, для описания понятий: «большое значение», «большое количество», «значительная величина», «высокий уровень» и др.

Кусочно-линейные ФП обладают очевидными *достоинствами*. Во-первых, это простота их аналитического описания: необходимо задать всего несколько параметров и простейшие линейные соотношения связи. Во-вторых, с точки зрения практиков, в процессе нечеткой аппроксимации систем с помощью таких ФП на выходе получается весьма легко интерпретируемая зависимость.

Основной недостаток кусочно-линейных функций принадлежности очевиден для математика: они не являются гладкими (первая производная ФП по x претерпевает разрыв в точках $x=a, b, c, d$). Это может стать препятствием для последующих аналитических преобразований функций принадлежности.

Но, что более существенно, некоторые исследователи полагают, что отсутствие непрерывной дифференцируемости ФП является совершенно *нетипичным для нечеткого мышления человека*. Для более глубокого понимания данного замечания рекомендуем обратиться к уже упомянутым выше аксиомам Шваба [7, 13].

II. Ко второму классу относят *колоколообразные функции принадлежности*. Такое название, очевидно, происходит от их формы, в чем убедимся ниже.

2.1. *Усеченная парабола (clipped-parabola; quadratic set function)* описывается формулой с двумя независимыми параметрами (m, d), рис. 3.3:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1 - \left(\frac{x-m}{d} \right)^2, & \text{если } \left(\frac{x-m}{d} \right)^2 < 1, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \quad (\text{clipped parabola})$$

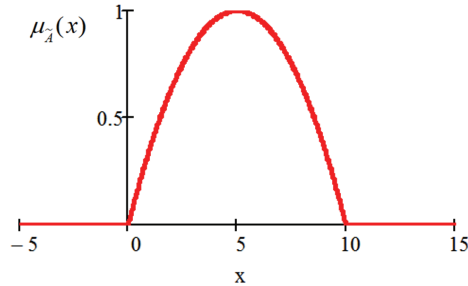


Рис. 3.3. Функция принадлежности типа «усеченная парабола» с $m=5$ и $d=5$

Несложно убедиться в том, что параметр m является ядром НМ $\tilde{A}$, а параметр $d>0$ характеризует ширину интервала носителя этого нечеткого множества:

$$-1 < \left(\frac{x-m}{d} \right) < 1 \Leftrightarrow m-d < x < m+d.$$

2.2. Гауссова функция принадлежности (*Gaussian set function*) также имеет два определяющих независимых параметра:

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \exp \left(- \left(\frac{x-m}{d} \right)^2 \right), \quad (\text{Gaussian})$$

где параметр m - ядро НМ $\tilde{A}$; $d / \sqrt{2}$ - стандартное отклонение, определяющее «размытость» кривой относительно m . Очевидно, что носитель множества в данном случае бесконечный.

График гауссовой ФП был приведен ранее в разделе 2 пособия (рис. 2.2).

2.3. Функция принадлежности *Kouuu* (*Cauchy set function*) напоминает внешне гауссову ФП, однако характер убывания этой функции более «умеренный» - квадратический, а не слишком «быстрый» - экспоненциальный (рис. 3.4):

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \frac{1}{1 + \left(\frac{x-m}{d} \right)^2}. \quad (\text{Cauchy})$$

Для нечеткого множества с ФП Коши m является ядром НМ $\tilde{A}$, а параметр $d>0$ - определяет «размах» кривой относительно прямой симметрии $x = m$.

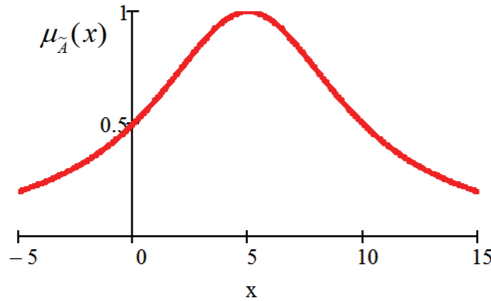


Рис. 3.4. Функция принадлежности Коши с параметрами $m=5$ и $d=5$

ФП Коши предназначена для описания нечетких множеств с бесконечным носителем.

2.4. Функция принадлежности *Лапласа* (*Laplace set function*) также экспоненциальная и по форме напоминает гауссову ФП

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \exp\left(-\frac{|x-m|}{d}\right), \quad (\text{Laplace})$$

где $m = \text{core}(\tilde{A})$, а параметр $d > 0$ характеризует степень «размытости» кривой ФП относительно модального значения m .

2.5. *Синусоидальная ФП* (*sinc set function*) основана на представлении о первом замечательном пределе и описывается следующим аналитическим выражением:

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} \frac{\sin\left(\frac{x-m}{d}\right)}{\frac{x-m}{d}}, & \text{если } m - \pi d < x < m + \pi d \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Легко убедиться, что данная ФП описывает нормальное НМ. Действительно

$$\text{height}(\tilde{A}) = \lim_{x \rightarrow m} \mu_{\tilde{A}}(x) = \lim_{x \rightarrow m} \frac{\sin\left(\frac{x-m}{d}\right)}{\frac{x-m}{d}} = 1.$$

При использовании синусоидальной ФП приходится использовать логическое условие, так как значение ФП не может быть отрица-

тельным числом по определению. В такой интерпретации рассматриваемая функция описывает нечеткие множества с конечным носителем (рис. 3.5), который можно выразить, найдя левую x_L и правую x_R точки обращения ФП в нуль:

$$\frac{x_L - m}{d} = -\pi, \Leftrightarrow x_L = m - \pi d;$$

$$\frac{x_R - m}{d} = \pi, \Leftrightarrow x_R = m + \pi d; \quad \text{supp}(\tilde{A}) = (m - \pi d; m + \pi d).$$

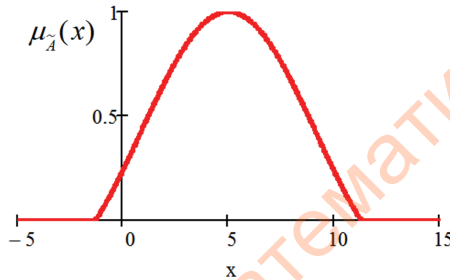


Рис. 3.5. Синусоидальная функция принадлежности (с отсечением отрицательных значений) при $m=5$ и $d=2$

2.6. Симметричная логистическая ФП (*symmetric logistic set function*) (рис. 3.6), описываемая функцией:

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \frac{2}{1 + \exp\left(\frac{x-m}{d}\right)^2}, \quad (\text{symmetric logistic})$$

также имеет неограниченный носитель и ядро, состоящее из единственной точки $\{m\}$.

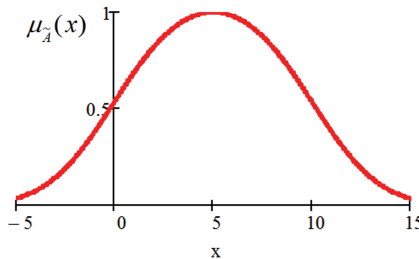


Рис. 3.6. Симметричная логистическая ФП при $m=5$ и $d=5$

Несомненным достоинством колоколообразных функций принадлежности с бесконечным носителем является их гладкость (непрерыв-

ная дифференцируемость) во всех точках универсума. Вместе с тем неограниченность носителя означает, что любой элемент $x \in U$ будет в любом случае с некоторой степенью принадлежать нечеткому множеству, что несколько затрудняет применение таких ФП для описания реальных нечетких множеств.

В то же время в случае колоколообразных ФП с ограниченным носителем (усеченная парабола, синусоидальная ФП) на границах носителя даже уже первая производная терпит разрыв, что противоречит аксиомам Шваба.

Пример 3.1. Предложить функцию принадлежности гауссова типа, но с ограниченным носителем и гладкую на всей действительной числовой оси.

► Необходимо позаботиться о том, чтобы при переходе через крайние точки носителя первая производная такой ФП по x обращалась в нуль. Рассмотрим, например, следующий вариант ФП (предполагается $a < b$), изображенный на рис. 3.7:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} \exp \left[1 - \frac{(b-a)^2}{4(b-x)(x-a)} \right], & \text{если } a < x < b \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

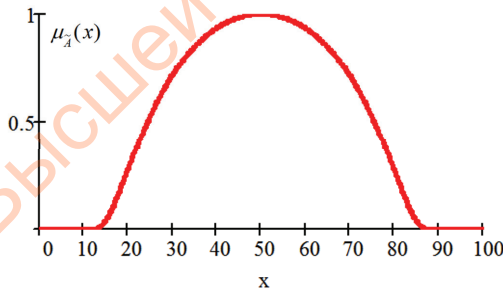


Рис. 3.7. Симметричная гладкая гауссова ФП с ограниченным носителем при $a=10$ и $b=90$ из примера 3.1

Вычислим односторонние пределы функции принадлежности в граничных точках носителя $x=a$ и $x=b$:

$$\lim_{x \rightarrow a+0} \mu_A(x) = \lim_{x \rightarrow a+0} \exp \left(1 - \frac{(b-a)^2}{4(b-x)(x-a)} \right) = [e^{-\infty}] = 0;$$

$$\lim_{x \rightarrow b-0} \mu_{\tilde{A}}(x) = \lim_{x \rightarrow b-0} \exp\left(1 - \frac{(b-a)^2}{4(b-x)(x-a)}\right) = [e^{-\infty}] = 0;$$

$$\lim_{x \rightarrow a-0} \mu_{\tilde{A}}(x) = 0; \quad \lim_{x \rightarrow b+0} \mu_{\tilde{A}}(x) = 0,$$

следовательно, данная ФП непрерывна в граничных точках носителя $x=a$ и $x=b$.

Найдем правостороннюю производную ФП в точке $x = a$:

$$\begin{aligned} \left. \frac{d\mu_{\tilde{A}}(x)}{dx} \right|_{x=a+0} &= \mu_{\tilde{A}}(a+0) \cdot \left(1 - \frac{(b-a)^2}{4(b-x)(x-a)} \right)' \Big|_{x=a+0} = \\ &= \mu_{\tilde{A}}(a+0) \cdot \frac{(b-a)^2}{4} \left(\frac{(b-x) - (x-a)}{(b-x)^2(x-a)^2} \right)' \Big|_{x=a+0} = \\ &= \mu_{\tilde{A}}(a+0) \cdot \frac{b-a}{4} \left(\frac{1}{(x-a)^2} \right)' \Big|_{x=a+0} = 0, \end{aligned}$$

так как экспонента стремится к нулю быстрее любой степени x (в данном случае – второй степени).

С другой стороны, очевидно, что левосторонняя производная ФП в точке $x = a$ также равна нулю (так как $\mu_{\tilde{A}}(x) \equiv 0$ при $x < a$).

В виду того, что функция симметрична относительно прямой $x=(a+b)/2$, рассуждения, проведенные выше, справедливы и для точки $x = b$.

Следовательно, рассматриваемая ФП непрерывно дифференцируема в граничных точках носителя, что согласуется с аксиоматикой Шваба. ◀

III. S-образные и Z-образные функции принадлежности.

3.1. Сигмоидная (sigmoid) функция принадлежности (рис. 3.8) может быть как правой, так и левой (параметр $a>0$):

$$\mu_{\tilde{A}}^r(x) = \frac{1}{1 + \exp(-a(x-b))} \quad (\text{sigmoid right}),$$

$$\mu_{\tilde{A}}^l(x) = \frac{1}{1 + \exp(a(x-b))} \quad (\text{sigmoid left}).$$

Иногда используется выражение «сигмоидальная» ФП.

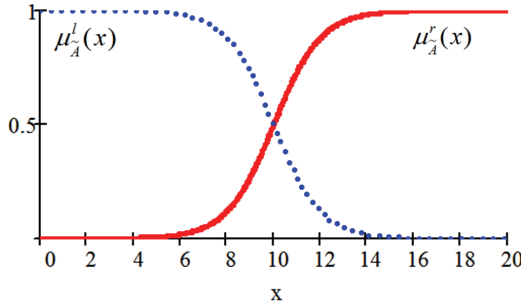


Рис. 3.8. Сигмоидная правая (сплошная) и левая (пунктирная) функции принадлежности при $a=4$ и $b=10$

Пример 3.2. Исследовать асимптотическое поведение сигмоидной функции принадлежности и раскрыть смысл параметров ($a>0$ и b).

► Найдем пределы «правой» сигмоидной ФП на бесконечности ($a>0$):

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \mu_A^r(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 + \exp(-a(x-b))} = \left[\frac{1}{1 + e^{-\infty}} \right] = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \mu_A^r(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{1 + \exp(-a(x-b))} = \left[\frac{1}{1 + e^{+\infty}} \right] = 0.$$

Найдем первую производную ФП:

$$\frac{d\mu_A^r(x)}{dx} = \left([1 + \exp(-a(x-b))]^{-1} \right)' = \frac{a \exp(-a(x-b))}{[1 + \exp(-a(x-b))]^2}.$$

В точке $x=b$ получим:

$$\left. \frac{d\mu_A^r(x)}{dx} \right|_{x=b} = \frac{a}{4}.$$

Таким образом, величина параметра a определяет «крутизну» переходного участка кривой ФП. Угол наклона в точке перегиба тем больше, чем больше значение $a>0$. Так, при $a=4$ угол наклона будет $\pi/4$ радиан. В пределе при $a \rightarrow \infty$ угол наклона равен $\pi/2$ (то есть, сигмоидная ФП нечеткого множества вырождается в ступенчатую характеристическую функцию обычного множества).

Кроме того, точка $x=b$ является точкой перегиба кривой, так как

$$\left. \frac{d^2\mu_A^r(x)}{dx^2} \right|_{x=b} = 0.$$

Очевидно также, что

$$\mu_{\tilde{A}}(b) = \frac{1}{1 + \exp(0)} = \frac{1}{2},$$

то есть $x=b$ – точка перехода нечеткого множества, описываемого сигмоидной функцией принадлежности. ◀

3.2. *Полиномиальная левая и правая функции принадлежности (polynomial left / right set function).*

Очевидно, что для описания S-образной кривой, являющейся ФП некоторого нечеткого множества, можно использовать полином n -й степени

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_1 x + a_0.$$

В частности, если $n=1$, то получается уже знакомая нам кусочно-линейная Z-образная ФП (см. п. 1.3). В случае полинома второй степени ($n=2$) кривая может быть описана следующим аналитическим соотношением для крайней правой (рис. 3.9):

$$\mu_{\tilde{A}}^r(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < b-a \\ 1 - \left(\frac{x-b}{a} \right)^2, & \text{если } (b-a) \leq x \leq b \\ 1, & \text{если } x > b \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{quadratic} \\ \text{right} \end{matrix}$$

или крайней левой ФП (рис. 3.9):

$$\mu_{\tilde{A}}^l(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x < b \\ 1 - \left(\frac{x-b}{a} \right)^2, & \text{если } b \leq x \leq (b+a) \\ 0, & \text{если } x > b+a. \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{quadratic} \\ \text{left} \end{matrix}$$

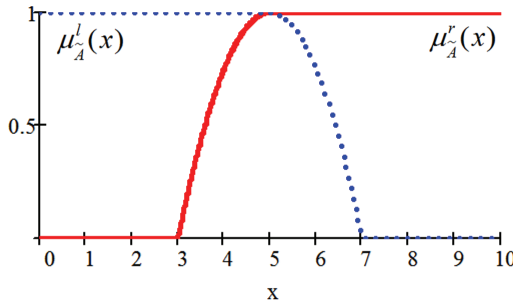


Рис. 3.9. Квадратическая правая (сплошная) и левая (пунктирная) ФП при $a=2$ и $b=5$

3.3. Гармоническая левая и правая функции принадлежности (harmonic left/right set function):

- правая

$$\mu_A^r(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x > (b+a) \\ \frac{1}{2} \left(1 + \sin \left(\frac{x-b}{2a} \pi \right) \right), & \text{если } (b-a) \leq x \leq (b+a) \\ 0, & \text{если } x < (b-a); \end{cases}$$

- левая

$$\mu_A^l(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x > (b+a) \\ \frac{1}{2} \left(1 - \sin \left(\frac{x-b}{2a} \pi \right) \right), & \text{если } (b-a) \leq x \leq (b+a) \\ 1, & \text{если } x < (b-a), \end{cases}$$

где $a \neq 0$, b - некоторые числовые параметры, принимающие произвольные действительные значения и упорядоченные отношением: $a < b$. График этой функции для некоторого нечеткого множества приведен на рис. 3.10.

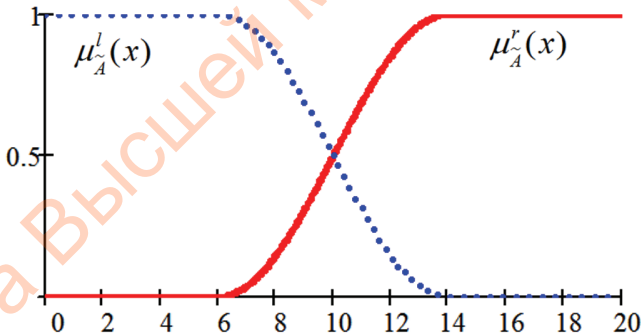


Рис. 3.10. Гармоническая правая (сплошная) и левая (пунктирная) ФП при $a=4$ и $b=10$

Пример 3.3. Выяснить, насколько хорошо крайняя гармоническая ФП согласуется с аксиомами Шваба.

► Рассмотрим для определенности правую гармоническую ФП:

$$\mu_A^r(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x > (b+a) \\ \frac{1}{2} \left(1 + \sin \left(\frac{x-b}{2a} \pi \right) \right), & \text{если } (b-a) \leq x \leq (b+a) \\ 0, & \text{если } x < (b-a). \end{cases}$$

Найдем правостороннюю производную первого порядка в точке $x=b-a$:

$$\begin{aligned} \left. \frac{d\mu_A^r(x)}{dx} \right|_{x=(b-a)+0} &= \left(\frac{1}{2} \left(1 + \sin \left(\frac{x-b}{2a} \pi \right) \right) \right)' \Big|_{x=(b-a)+0} = \\ &= \frac{\pi}{4a} \cos \left(\frac{x-b}{2a} \pi \right) \Big|_{x=(b-a)+0} = \frac{\pi}{4a} \cos \left(\frac{-a}{2a} \pi \right) = \frac{\pi}{4a} \cos \left(-\frac{\pi}{2} \right) = 0. \end{aligned}$$

С другой стороны, очевидно, что левосторонняя производная ФП в точке $x=(b-a)$ также равна нулю (так как $\mu_A^r(x) \equiv 0$ при $x < (b-a)$).

Аналогично найдем левостороннюю производную первого порядка в точке $x=b+a$:

$$\begin{aligned} \left. \frac{d\mu_A^r(x)}{dx} \right|_{x=(b+a)-0} &= \left(\frac{1}{2} \left(1 + \sin \left(\frac{x-b}{2a} \pi \right) \right) \right)' \Big|_{x=(b+a)-0} = \\ &= \frac{\pi}{4a} \cos \left(\frac{x-b}{2a} \pi \right) \Big|_{x=(b+a)-0} = \frac{\pi}{4a} \cos \left(\frac{a}{2a} \pi \right) = \frac{\pi}{4a} \cos \left(\frac{\pi}{2} \right) = 0. \end{aligned}$$

При этом правосторонняя производная ФП в точке $x=(b+a)$ также равна нулю (так как $\mu_A^r(x) \equiv 0$ при $x > (b+a)$).

Следовательно, рассматриваемая ФП непрерывно дифференцируема на всем универсальном множестве, что согласуется с аксиомами Шваба. ◀

Рассмотренные выше ФП классов II и III являются гладкими на носителях. Этот факт, безусловно, следует отнести к преимуществам, так как непрерывная дифференцируемость облегчает теоретический анализ таких систем. К недостаткам можно отнести более сложный математический вид этих функций по сравнению с треугольной и трапециевидной ФП, а также то, что носитель многих из них – бесконечный, что ограничивает их применение при моделировании большинства реальных нечетких систем.

Важным для ТНМ представляется то, что используемые нечеткие множества и их ФП должны быть выпуклыми. В частности, требова-

ние выпуклости является обязательным при представлении нечетких чисел в виде НМ [11]. Особо отметим, что «выпуклость» в ТНМ понимается вовсе не в смысле традиционного математического анализа.

Опр. 3.1. *Выпуклое нечеткое множество* – это нечеткое множество, функция принадлежности которого удовлетворяет следующему условию:

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \mu_{\tilde{A}}(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_3) \geq \min(\mu_{\tilde{A}}(x_1), \mu_{\tilde{A}}(x_3)),$$

$$\forall \lambda \in [0, 1] \text{ и } \forall x_1, x_3 \in X.$$

Наглядно отличие выпуклого множества от невыпуклого представлено на рис. 3.11. Выпуклое нечеткое множество обладает тем свойством, что все его α -сечения являются связными, одноинтервальными подмножествами области определения x (рис. 3.11, а). У невыпуклого множества имеются несвязные α -сечения, состоящие из нескольких областей (рис. 3.11, б).

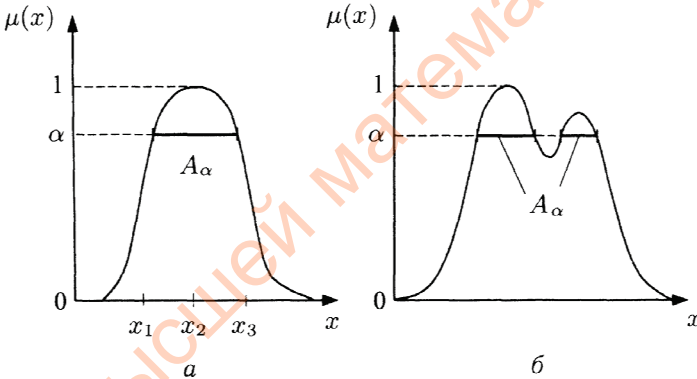


Рис. 3.11. Примеры выпуклого (а) и невыпуклого (б) нечетких множеств

Нетрудно убедиться, что все типовые функции принадлежности, рассмотренные в данном разделе, описывают выпуклые нечеткие множества.

Вопросы и упражнения к разделу 3

1. Попробуйте привести примеры, подтверждающие (опровергающие) положения четырех аксиом Шваба.
2. Придумайте пример нечеткого множества, для формализации которого было бы уместно использовать: а) треугольную ФП; б) трапециевидную ФП?

3. Охарактеризуйте достоинства и недостатки кусочно-линейных ФП.
4. Придумайте пример нечеткого множества, для формализации которого было бы уместно использовать одну из гладких функций принадлежности.
5. Получите аналитическое выражение для точек перехода нечеткого множества, описываемого с помощью гауссовой ФП.
6. Составьте аналитическое выражение для произвольного α -сечения НМ, описываемого функцией принадлежности: а) Коши; б) Лапласа; в) правой сигмоидной.
7. Формализовать в виде НМ нечеткое определение «юношеский возраст, лет», если универсум непрерывный $U = [12, 30]$. Построить ФП этого множества, выбрав ее из числа типовых функций принадлежности. Записать ядро, носитель полученного НМ и выражение для произвольного его α -сечения.
8. Формализовать в виде НМ нечеткие определения: а) «близкое к нулю действительное число»; б) «очень большое действительное число». Построить функции принадлежности множеств, выбрав их из числа типовых. Записать ядро, носитель полученного НМ и выражение для произвольного α -сечения.
9. Найдите максимальные значения кривизн гармонической и гауссовой ФП с ограниченными носителями и сделайте вывод, какая из этих функций предпочтительнее с точки зрения четвертой аксиомы Шваба.
10. Предположим, что к левой полиномиальной функции принадлежности предъявляются следующие требования:

$$\mu_{\bar{A}}(x_L) = 1, \mu_{\bar{A}}(x_R) = 0, \mu_{\bar{A}}'(x_L) = 0, \mu_{\bar{A}}'(x_R) = 0,$$
 где x_L, x_R – заданные левая и правая узловые точки функции принадлежности. Получить выражение соответствующей полиномиальной функции 3-го порядка.
11. Приведите пример ФП, которая является выпуклой с точки зрения ТНМ, но не является выпуклой в смысле классического математического анализа.

4. МЕТОДЫ ПОСТРОЕНИЯ ФУНКЦИЙ ПРИНАДЛЕЖНОСТИ НЕЧЕТКИХ МНОЖЕСТВ

Как мы убедились в разделе 3, функция принадлежности играет ключевую роль при описании нечетких множеств. Более того, все операции с нечеткими объектами так или иначе сводятся к действиям с их функциями принадлежности. Поэтому обоснование функций принадлежности нечетких множеств - это один из важнейших вопросов теории нечетких множеств и ее приложений.

Принято делить методы построения функции принадлежности на прямые и косвенные [5, 12].

1. *Прямые методы* (статистические методы). В данном случае эксперт (т.е. компетентное в данной предметной области лицо) самостоятельно определяет правила оценки значений ФП $\mu_{\tilde{A}}(x)$ для конкретных элементов x . Такая процедура эффективна в случае измеряемых величин, как правило, физической природы: (расстояние, время, скорость, температура и т.п.). Результаты оценки могут быть представлены в виде таблицы, диаграммы или аналитической зависимости.

Ясно, что прямой метод в значительной степени страдает субъективизмом, отражая личные представления эксперта об объекте исследования. Для снижения субъективной составляющей прибегают к процедуре усреднения, когда оценку производит не один эксперт, а группа экспертов. Это *прямой групповой метод*.

Как правило, группе из N экспертов предъявляют конкретный объект, и каждый должен дать один из двух ответов: принадлежит ли этот объект к заданному множеству или не принадлежит. Тогда значение эмпирической функции принадлежности элемента определяется по формуле:

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \frac{n_+(x)}{N},$$

где $n_+(x)$ - количество экспертов, давших утвердительный ответ на вопрос о принадлежности элемента x множеству $\tilde{A}$.

Пример 4.1. Группа из пяти экспертов выносит суждение о нечеткой величине: «достаточное время для полноценного сна человека среднего возраста, ч». В качестве универсума приняты все натуральные числа в промежутке $[2; 10]$.

► Возможные ответы экспертов сведем в табл. 3.1.

Таблица 3.1

Ответы экспертов на вопрос «достаточное время для полноценного сна человека среднего возраста, ч»

Номер эксперта	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0	0	0	0	0	0	0	1	1
2	0	0	1	1	1	1	1	1	1
3	0	0	0	0	0	0	1	1	1
4	0	0	0	0	1	1	1	1	1
5	0	0	0	0	0	1	1	1	1
$n_+(x)$	0	0	1	1	2	3	4	5	5
$\mu_{\tilde{A}}(x)$	0	0	0,2	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,0

В итоге получим формализованное НМ $\tilde{A}$ = «достаточное время для полноценного сна человека среднего возраста, ч» в виде

$$\tilde{A} = \frac{0,2}{4} + \frac{0,2}{5} + \frac{0,4}{6} + \frac{0,6}{7} + \frac{0,8}{8} + \frac{1,0}{9} + \frac{1,0}{10}; \quad U = \{2, 3, \dots, 10\}.$$

II. Косвенные методы

В тех случаях, когда затруднительно найти количественный показатель, описывающий нечеткую систему, можно использовать процедуру *парных сравнений*. В этом случае эксперты оценивают преимущество одного элемента множества над другим, в результате чего формируется матрица парных сравнений.

Предположим, что имеются элементы нечеткого множества $\tilde{A}: x_1, x_2, \dots, x_n$. Результаты попарного сравнения этих элементов можно записать в виде матрицы

$$\begin{matrix} & x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{matrix} & \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \end{matrix},$$

где a_{ij} - преимущество элемента x_i над элементом x_j ,

Остается лишь создать порядковую шкалу, по которой эксперты будут оценивать относительное «преимущество» одного элемента НМ $\tilde{A}$ над другим его элементом.

В качестве примера приведем так называемую девятибалльную шкалу Т. Саати (T. Saati) [9].

Преимущество x_i над x_j :

- 1 балл – отсутствует;
- 2 балла – почти слабое;
- 3 балла – слабое;
- 4 балла – почти существенное;
- 5 баллов – существенное;
- 6 баллов – почти явное;
- 7 баллов – явное;
- 8 баллов – почти абсолютное;
- 9 баллов – абсолютное.

При использовании шкалы Томаса Саати, если элементу x_i при сравнении с элементом x_j приписывается одно из вышеприведенных чисел, то элементу x_j при сравнении с элементом x_i приписывается обратное значение.

Применение данного подхода обеспечивает следующие свойства матрицы парных сравнений:

- диагональные элементы – все единицы: $a_{ii} = 1, \forall i = \overline{1, n}$. Действительно, всякий элемент x_i не имеет никакого преимущества перед самим собой (оценка 1 по шкале Саати);

- свойство обратной симметрии: $a_{ij} = \frac{1}{a_{ji}}, \forall i, j = \overline{1, n}$, то есть

элементы a_{ij} и a_{ji} обратно пропорциональны. Иными словами, чем выше преимущество элемента x_j над x_i , тем ниже преимущество элемента x_i над x_j . Обратная пропорциональность – один из простейших естественных способов описания такого отношения.

То есть матрица попарных сравнений по Саати - положительная обратнo-симметрическая:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 1/a_{12} & 1 & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1/a_{1n} & 1/a_{2n} & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Для построения функции принадлежности методом Саати (в литературе часто используется название – метод анализа иерархий, МАИ) необходимо следующее [12].

1. Найти наибольшее собственное значение $\lambda_{\max}$ данной матрицы A . Собственное значение является мерой согласованности суждений. Под согласованностью подразумевается то, что при наличии основного массива необработанных данных все другие данные логически могут быть получены из них. Матрица A называется согласованной, если для любых i, k и l имеет место равенство $a_{ik}a_{kl} = a_{il}$. Существует утверждение, согласно которому в случае полностью согласованной матрицы $\lambda_{\max} = n$ (порядок матрицы). В любом случае для положительной обратнo-симметрической матрицы $\lambda_{\max} \geq n$. Чем ближе $\lambda_{\max}$ к n , тем более согласован результат [9].

2. Найти собственный вектор, отвечающий $\lambda_{\max}$. Собственный вектор обеспечивает упорядочение приоритетов. Поэтому его координаты естественно принять в качестве значений функции принадлежности.

3. Нормализовать полученную на шаге 2 функцию принадлежности, если она получилась субнормальной.

Пример 4.2. Построить ФП некоторого нечеткого множества $\tilde{A}$, носитель которого состоит из трех элементов $\{x_1, x_2, x_3\}$, если методом Саати получена следующая матрица парных сравнений:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/4 \\ 2 & 1 & 1/2 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

► Для нахождения собственных значений λ_i матрицы A составим характеристическое уравнение:

$$\det(A - \lambda E) = 0,$$

где E – единичная матрица той же размерности, что и A ; $\det(X)$ – определитель (детерминант) матрицы X .

Имеем:

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 1/2 & 1/4 \\ 2 & 1 - \lambda & 1/2 \\ 4 & 2 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрывая определитель, например, по правилу треугольников, получаем:

$$(1 - \lambda)^3 + 2 \cdot 2 \cdot \frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} - 4 \cdot (1 - \lambda) \cdot \frac{1}{4} - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot (1 - \lambda) \cdot 2 = 0;$$

$$(1 - \lambda)^3 - (1 - \lambda) - 2(1 - \lambda) + 2 = 0;$$

$$(1-\lambda)^3 - 3(1-\lambda) + 2 = 0;$$

$$(1-\lambda)^3 + 3\lambda - 1 = 0;$$

$$1 - 3\lambda + 3\lambda^2 - \lambda^3 + 3\lambda - 1 = 0;$$

$$3\lambda^2 - \lambda^3 = 0;$$

$$\lambda^2(3-\lambda) = 0.$$

Получено два корня: один простой $\lambda_1=3$, а другой $\lambda_2=0$ имеет кратность 2. Максимальное собственное значение $\lambda_{\max}=3$.

Найдем собственный вектор $\bar{X}$ для собственного значения $\lambda_{\max}=3$, для чего решим систему уравнений:

$$(A - \lambda_{\max} E) \bar{X} = \bar{0} \Leftrightarrow \begin{cases} (1-3)x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{4}x_3 = 0 \\ 2x_1 + (1-3)x_2 + \frac{1}{2}x_3 = 0 \\ 4x_1 + 2x_2 + (1-3)x_3 = 0 \end{cases}$$

Получаем линейную однородную систему уравнений:

$$\begin{cases} -2x_1 + 0,5x_2 + 0,25x_3 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 + 0,5x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

Решаем данную однородную СЛАУ методом Гаусса, предварительно переставив местами первое и второе уравнения:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0,25 \\ -2 & 0,5 & 0,25 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0,25 \\ 0 & -1,5 & 0,75 \\ 0 & 3 & -1,5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0,25 \\ 0 & 3 & -1,5 \\ 0 & 3 & -1,5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0,25 \\ 0 & 3 & -1,5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Получили семейство собственных векторов, соответствующих $\lambda_{\max}=3$:

$$\overline{X}_{\lambda \max} = t \begin{pmatrix} 0,25 \\ 0,5 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in R.$$

Запишем нечеткое множество $\tilde{A}$ в виде

$$\tilde{A} = \frac{0,25}{x_1} + \frac{0,5}{x_2} + \frac{1}{x_3}.$$

Множество получилось нормальным. ◀

Даже из приведенного выше сравнительно несложного примера становится ясно, что отыскание значений ФП посредством нахождения собственных чисел и векторов (*eigenvalue problem*) – трудоемкая вычислительная задача. В случае реальных матриц высокой размерности приходится прибегать к математическим пакетам для получения решения. В частности, весьма удобна в этом отношении система компьютерной математики *MathCad*. Мы не будем здесь углубляться в особенности решения вычислительных задач в этой системе [4]. Лучше рассмотрим пример, который наглядно иллюстрирует эти возможности.

Пример 4.3. Формализовать нечеткое множество $\tilde{A}$ = «высокий мужчина», если считать, что универсум дискретный $U = \{170, 175, 180, 185, 190, 195\}$ (см.), а матрица парных сравнений имеет следующий вид:

$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} 170 & 175 & 180 & 185 & 190 & 195 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 170 \\ 175 \\ 180 \\ 185 \\ 190 \\ 195 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/4 & 1/6 & 1/8 & 1/9 \\ 2 & 1 & 1/3 & 1/5 & 1/7 & 1/8 \\ 4 & 3 & 1 & 1/4 & 1/4 & 1/5 \\ 6 & 5 & 4 & 1 & 1/3 & 1/3 \\ 8 & 7 & 4 & 3 & 1 & 1 \\ 9 & 8 & 5 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

► Нам предстоит составить и решить характеристическое уравнение, которое будет иметь шестой алгебраический порядок.

В пакете MathCad мы можем сразу найти собственные числа и собственные векторы этой матрицы, применив соответствующий оператор:

$$\text{eigenvals}(A) = \begin{pmatrix} 6,249 \\ 0,032 + 1,223i \\ 0,032 - 1,223i \\ -0,157 + 0,239i \\ -0,157 - 0,239i \\ 3,985 \cdot 10^{-4} \end{pmatrix}.$$

Всего получилось шесть собственных чисел, причем максимальное (действительное) из них $\lambda_{\max} = 6,249$. Затем найдем собственный вектор, отвечающий $\lambda_{\max}$:

$$\text{eigenvec}(A, \lambda_{\max}) = \begin{pmatrix} 0,055 \\ 0,077 \\ 0,158 \\ 0,339 \\ 0,629 \\ 0,675 \end{pmatrix}.$$

Координаты полученного вектора берем в качестве значений ФП. Итак, мы формализовали данное НМ:

$$\tilde{A} = \frac{0,055}{170} + \frac{0,077}{175} + \frac{0,158}{180} + \frac{0,339}{185} + \frac{0,629}{190} + \frac{0,675}{195}.$$

Полученное нечеткое множество субнормально с высотой $\text{height}(A) = 0,675$. Проведя процедуру нормализации, получим:

$$\tilde{A}^* = \frac{0,081}{170} + \frac{0,114}{175} + \frac{0,233}{180} + \frac{0,502}{185} + \frac{0,931}{190} + \frac{1}{195}. \blacktriangleleft$$

Вопросы и упражнения к разделу 4

1. Формализовать в виде нечеткого множества нечеткое определение «привычная температура воздуха летом, $^{\circ}\text{C}$ ». Универсальное множество принять дискретным $U = \{15, 18, 21, 24, 26, 29, 32, 35\}$. Решение оформить по образцу примера 4.1.
2. Построить нормальную ФП некоторого нечеткого множества $\tilde{A}$, носитель которого состоит из четырех элементов $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, если методом Саати была получена следующая матрица парных сравнений:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/4 & 1/5 \\ 2 & 1 & 1/4 & 1/6 \\ 4 & 4 & 1 & 1/8 \\ 5 & 6 & 8 & 1 \end{pmatrix}$$

Характеристическое уравнение решить численно с точностью $\varepsilon \leq 0,01$.

3. Используя программу MS Excel или любую доступную вам систему компьютерной алгебры, формализовать косвенным методом нечеткое множество $\tilde{A} =$ «недорогие гостиницы города N ». Принять количество гостиниц равным десяти.

5. МЕРЫ НЕЧЕТКОСТИ НЕЧЕТКИХ МНОЖЕСТВ

Одной из важнейших задач в ТНМ является поиск меры нечеткости НМ. Действительно, об элементах, чья степень принадлежности близка к единице, мы можем сказать, что они определенно принадлежат данному множеству. Точно так же, если степень принадлежности какого-либо элемента близка к нулю, мы вправе считать его «практически» не входящим в рассматриваемое множество. Между тем элементы со степенью принадлежности, близкой к 0,5, вносят наибольший вклад в нечеткость. Для того, чтобы все эти соотношения описать количественно, необходимо ввести метрику на пространстве нечетких множеств.

Опр. 5.1. Метрика $d(x, y)$ - это вещественное число, которое ставится в соответствие двум любым элементам x и y метрического пространства M произвольной природы. Это мера расстояния между элементами, удовлетворяющая четырем аксиомам (аксиомам метрики):

- A1. $d(x, y) \geq 0 \quad \forall x, y \in M$ (неотрицательность);
 A2. $d(x, x) = 0 \quad \forall x \in M$ (идентичность - расстояние от любого элемента до самого себя равно нулю);
 A3. $d(x, y) = d(y, x) \quad \forall x, y \in M$ (симметричность);
 A4. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) \quad \forall x, y, z \in M$ (неравенство треугольника).

Нетрудно проверить, что аксиомам метрики полностью удовлетворяет общеизвестное *евклидово расстояние* между двумя точками $a(a_1, a_2, \dots, a_n)$ и $b(b_1, b_2, \dots, b_n)$ n -мерного пространства:

$$d^E(a, b) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (a_i - b_i)^2}.$$

Естественно, это не единственно возможный вариант задания метрики. Например, можно пользоваться линейной метрикой Хэмминга, которая также удовлетворяет аксиомам A1-A4.

$$d^H(a, b) = \sum_{i=1}^n |a_i - b_i|.$$

Опр. 5.2. Ближайшим к данному нечеткому множеству $\tilde{A}$ называется четкое множество A , характеристическая функция которого задается следующим выражением:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } 0,5 < \mu_{\tilde{A}}(x) \leq 1 \\ 0, & \text{если } 0 \leq \mu_{\tilde{A}}(x) < 0,5 \\ 1 \text{ или } 0, & \text{если } \mu_{\tilde{A}}(x) = 0,5. \end{cases}$$

Смысл определения очень прост: элементы нечеткого множества $\tilde{A}$ со степенью принадлежности больше 0,5 включаются в четкое множество A , элементы со степенью принадлежности меньше 0,5 не включаются в него; относительно элементов со степенью принадлежности, равной 0,5, – на усмотрение исследователя. Для однозначности дальнейшего изложения условимся элементы, относящиеся к точкам перехода НМ, не включать в четкое множество A , являющееся ближайшим к $\tilde{A}$, то есть

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } 0,5 < \mu_{\tilde{A}}(x) \leq 1 \\ 0, & \text{если } 0 \leq \mu_{\tilde{A}}(x) \leq 0,5 \end{cases}$$

Пример 5.1. Найти четкое множество, ближайшее к данному:

$$\tilde{A} = \frac{0,1}{3} + \frac{0,3}{4} + \frac{0,5}{5} + \frac{1,0}{6} + \frac{0,7}{7} + \frac{0,3}{8},$$

если универсальное множество $U = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$.

► В соответствии с определением 5.2 запишем четкое множество A , являющееся ближайшим к $\tilde{A}$:

$$A = \frac{0}{1} + \frac{0}{2} + \frac{0}{3} + \frac{0}{4} + \frac{0}{5} + \frac{1,0}{6} + \frac{1,0}{7} + \frac{0}{8} + \frac{0}{9} + \frac{0}{10},$$

или в классической записи $A = \{6, 7\}$. ◀

Теперь рассмотрим, каким образом следует поступать в случае НМ с непрерывным носителем.

Пример 5.2. Нечеткое множество $\tilde{A}$ задано своей функцией принадлежности на универсальном множестве неотрицательных действительных чисел $U = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$:

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } 0 \leq x < 1 \\ \frac{x-1}{3}, & \text{если } 1 \leq x \leq 4 \\ 1, & \text{если } x > 4. \end{cases}$$

Записать четкое множество A , ближайшее к данному.

► Сначала необходимо найти точку перехода данного НМ, то есть такое значение x_{tr} , при котором $\mu_{\tilde{A}}(x_{tr}) = 0,5$:

$$\mu_{\tilde{A}}(x_{tr}) = 0,5 \Leftrightarrow \frac{x_{tr}-1}{3} = 0,5 \Leftrightarrow x_{tr} = 2,5.$$

В соответствии с определением 5.2 запишем четкое множество A , являющееся ближайшим к $\tilde{A}$:

$$A = (2,5; +\infty).$$

ФП нечеткого множества $\tilde{A}$ и характеристическая функция ближайшего к нему четкого множества A приведены на рис. 5.1. ◀

Теперь, определив понятие четкого множества, ближайшего к данному, используя ту или иную метрику, мы можем предложить количественный показатель меры нечеткости НМ. Разумно за основу взять расстояние между множествами по метрике, потребовав при этом, чтобы показатель нечеткости был равен нулю для обычных (четких) множеств и равен единице для самых «нечетких» множеств, у каждого элемента которых степень принадлежности равна 0,5.

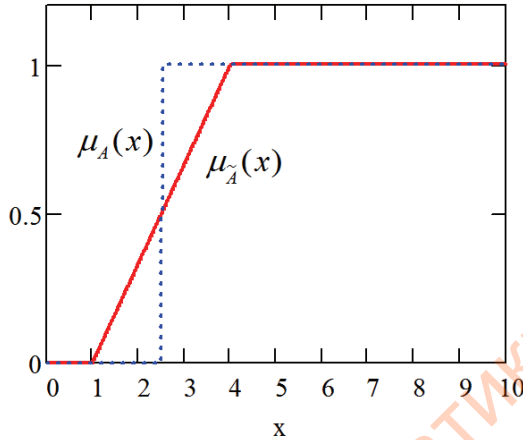


Рис. 5.1. ФП нечеткого множества $\tilde{A}$ (сплошная линия) и характеристическая функция ближайшего к нему четкого множества A (пунктирная линия) для примера 5.2

Опр. 5.3. Индексом нечеткости НМ $\tilde{A}$ по Хэммингу назовем величину

$$I_{\tilde{A}}^H = \frac{2}{m(\text{Supp}(\tilde{A}))} d^H(\tilde{A}, A),$$

где $m(\text{Supp}(\tilde{A}))$ - мощность носителя НМ $\tilde{A}$ (в случае, если носитель непрерывен, то берется длина интервала носителя); $d^H(\tilde{A}, A)$ - расстояние Хэмминга между НМ $\tilde{A}$ и ближайшим к нему четким множеством A .

Запишем практические формулы для вычисления индекса нечеткости по Хэммингу:

- для НМ с дискретным носителем мощности n :

$$I_{\tilde{A}}^H = \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n |\mu_{\tilde{A}}(x_i) - \mu_A(x_i)|;$$

- для НМ с непрерывным носителем – отрезком $[a, b]$ действительной оси:

$$I_{\tilde{A}}^H = \frac{2}{b-a} \int_a^b |\mu_{\tilde{A}}(x_i) - \mu_A(x_i)| dx.$$

Пример 5.3. Убедиться, что для индекса нечеткости Хэмминга любого множества выполнено условие $0 \leq I_{\tilde{A}}^H \leq 1$.

► С одной стороны, по определению модуля (абсолютной величины)

$$I_{\tilde{A}}^H = \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n |\mu_{\tilde{A}}(x_i) - \mu_A(x_i)| \geq 0$$

или

$$I_{\tilde{A}}^H = \frac{2}{b-a} \int_a^b |\mu_{\tilde{A}}(x_i) - \mu_A(x_i)| \geq 0,$$

причем нулевое значение достигается в том случае, если $\tilde{A}$ - обычное (канторовское) множество – в таком случае ближайшее к $\tilde{A}$ четкое множество тождественно ему, то есть $\mu_{\tilde{A}}(x) \equiv \mu_A(x)$.

С другой стороны, из определения множества A , ближайшего к заданному нечеткому множеству $\tilde{A}$, следует, что для любого дискретного НМ

$$|\mu_{\tilde{A}}(x_i) - \mu_A(x_i)| \leq 0,5 \quad \forall x_i \in U,$$

а следовательно,

$$I_{\tilde{A}}^H \leq \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n 0,5 = \frac{2}{n} \cdot 0,5n = 1.$$

Аналогично в случае НМ с непрерывным носителем:

$$I_{\tilde{A}}^H \leq \frac{2}{b-a} \int_a^b 0,5 dx = \frac{2 \cdot 0,5}{b-a} \int_a^b dx = \frac{1}{b-a} (b-a) = 1.$$

Итак, мы доказали, что $0 \leq I_{\tilde{A}}^H \leq 1$. ◀

Опр. 5.4. Индексом нечеткости НМ $\tilde{A}$ по Евклиду назовем величину

$$I_{\tilde{A}}^E = \frac{2}{\sqrt{m(\text{Supp}(\tilde{A}))}} d^E(\tilde{A}, A),$$

где $m(\text{Supp}(\tilde{A}))$ - мощность носителя $\tilde{A}$ (в случае, если носитель непрерывен, то берется длина интервала носителя); $d^E(\tilde{A}, A)$ - расстояние Евклида между $\tilde{A}$ и ближайшим к нему четким множеством A .

И для меры Евклида запишем практические формулы для вычисления индекса нечеткости:

- для НМ с дискретным носителем мощности n :

$$I_A^E = \frac{2}{\sqrt{n}} \sqrt{\sum_{i=1}^n (\mu_{\tilde{A}}(x_i) - \mu_A(x_i))^2};$$

- для НМ с непрерывным носителем – отрезком $[a, b]$ действительной оси:

$$I_A^E = \frac{2}{\sqrt{b-a}} \sqrt{\int_a^b (\mu_{\tilde{A}}(x_i) - \mu_A(x_i))^2 dx}.$$

Теперь поупражняемся в практическом исчислении индексов нечеткости для дискретных и непрерывных НМ.

Пример 5.4. Сравнить индексы нечеткости двух следующих нечетких множеств:

$$\begin{aligned}\tilde{A} &= \frac{0,3}{1} + \frac{0,4}{2} + \frac{0,8}{3} + \frac{0,6}{4} + \frac{0,1}{5}, \\ \tilde{B} &= \frac{0,4}{1} + \frac{0,5}{2} + \frac{0,6}{3}.\end{aligned}$$

► Найдем ближайшее к НМ $\tilde{A}$ четкое множество A и ближайшее к НМ $\tilde{B}$ четкое множество B .

$$A = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \text{ или } A = \{3, 4\}.$$

$$B = \frac{1}{3} \text{ или } B = \{3\}.$$

Индекс нечеткости НМ $\tilde{A}$ по Хэммингу:

$$I_A^H = \frac{2}{5} (|0,3-0| + |0,4-0| + |0,8-1| + |0,6-1| + |0,1-0|) = 0,56.$$

Индекс нечеткости НМ $\tilde{B}$:

$$I_B^H = \frac{2}{3} (|0,4-0| + |0,5-0| + |0,6-1|) \approx 0,87.$$

Так как $I_B^H > I_A^H$, то НМ $\tilde{B}$ «более нечеткое», чем $\tilde{A}$. ◀

Мы убедились, что индекс нечеткости подходит для сравнения нечеткости множеств с неодинаковыми по мощности носителями.

Пример 5.5. Вычислить индекс нечеткости множества $\tilde{A}$, заданного квадратической функцией принадлежности с параметрами (m, d) , $d > 0$:

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} 1 - \left(\frac{x-m}{d} \right)^2, & \text{если } \left(\frac{x-m}{d} \right)^2 < 1 \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

► Параметр m является ядром $\tilde{A}$, а параметр d характеризует ширину интервала носителя НМ, которую легко выразить:

$$-1 < \left(\frac{x-m}{d} \right)^2 < 1 \Leftrightarrow -d + m < x < d + m.$$

То есть величина интервала носителя НМ равна $2d$.

Определим точки перехода x_{tr} множества $\tilde{A}$:

$$1 - \left(\frac{x_{tr} - m}{d} \right)^2 = \frac{1}{2}; \quad \frac{x_{tr} - m}{d} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}};$$

$$x_{tr} = m \pm \frac{d}{\sqrt{2}}.$$

Найдем четкое множество A , ближайшее к данному:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } m - \frac{d}{\sqrt{2}} < x < m + \frac{d}{\sqrt{2}} \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Индекс нечеткости множества $\tilde{A}$ по Хэммингу:

$$\begin{aligned} I_{\tilde{A}}^H &= \frac{2}{2d} \int_{m-d}^{m+\frac{d}{\sqrt{2}}} \left| 1 - \left(\frac{x-m}{d} \right)^2 - 0 \right| dx + \frac{2}{2d} \int_{m-\frac{d}{\sqrt{2}}}^{m+\frac{d}{\sqrt{2}}} \left| 1 - \left(\frac{x-m}{d} \right)^2 - 1 \right| dx + \\ &+ \frac{2}{2d} \int_{m+\frac{d}{\sqrt{2}}}^{m+d} \left| 1 - \left(\frac{x-m}{d} \right)^2 - 0 \right| dx = \frac{2}{d} \int_{m+\frac{d}{\sqrt{2}}}^{m+d} \left(1 - \left(\frac{x-m}{d} \right)^2 \right) dx + \\ &+ \frac{1}{d} \int_{m-\frac{d}{\sqrt{2}}}^{m+\frac{d}{\sqrt{2}}} \left(\frac{x-m}{d} \right)^2 dx = \frac{2}{d} \left(x - \frac{d}{3} \left(\frac{x-m}{d} \right)^3 \right) \Bigg|_{m+\frac{d}{\sqrt{2}}}^{m+d} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{d} \cdot \frac{d}{3} \left(\frac{x-m}{d} \right)^3 \Big|_{m-\frac{d}{\sqrt{2}}}^{m+\frac{d}{\sqrt{2}}} = \frac{2}{d} \left(m+d-\frac{d}{3}-m-\frac{d}{\sqrt{2}}+\frac{d}{3} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^3 \right) + \\
& + \frac{1}{3} \left(\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^3 - \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^3 \right) = \frac{8-5\sqrt{2}}{6} + \frac{\sqrt{2}}{6} = \frac{4-2\sqrt{2}}{3} \approx 0,391.
\end{aligned}$$

Получили, что для параболической функции принадлежности индекс нечеткости не зависит от параметров m и d . ◀

В заключение раздела отметим, что описанный выше подход оценки нечеткости множеств с помощью индексов нечеткости, разумеется, не является единственно возможным. В частности, один из первых способов измерения степени нечеткости был заимствован из физики.

Известно, что мерой неупорядоченности физической системы может служить энтропия. Именно поэтому известны попытки применить энтропийный подход и в теории нечетких множеств. Однако выяснилось, что он обладает существенными недостатками, а потому представляет скорее теоретический интерес [6, 8].

Более продуктивным оказался так называемый «аксиоматический подход», который состоит в формулировании некоторого набора аксиом, которым должна удовлетворять мера нечеткости F множества. Они могут быть, например, такими:

A1. $F(\tilde{A}) = 0$, если $\tilde{A}$ - обычное (четкое) множество;

A2. $F(\tilde{A}_r) = 0$, где $\tilde{A}_r$ - НМ, состоящее из одних лишь точек перехода;

A3. $F(\tilde{A}) \leq F(\tilde{B})$, если имеет место

$$\begin{cases} \mu_{\tilde{A}}(x) \leq \mu_{\tilde{B}}(x) \\ \mu_{\tilde{B}}(x) < 0,5 \\ \mu_{\tilde{A}}(x) \geq \mu_{\tilde{B}}(x) \\ \mu_{\tilde{B}}(x) > 0,5; \end{cases} \quad \forall x \in U$$

A4. $F(\tilde{A}) = F(\tilde{\tilde{A}})$, т.е. нечеткость НМ $\tilde{A}$ равна нечеткости его дополнения (забегая вперед, скажем, что ФП дополнения нечеткого

множества задается следующим очевидным образом: $\mu_{\bar{A}}(x) = 1 - \mu_A(x)$, $\forall x \in U$.

Легко убедиться, что рассмотренные в данном разделе индексы нечеткости удовлетворяют всем указанным четырем аксиомам.

Вопросы и упражнения к разделу 5

1. Что такое метрика? Сформулируйте аксиомы метрики.
2. Что такое четкое множество A , ближайшее к данному нечеткому множеству $\tilde{A}$?
3. Показать, что метрики Хэмминга и Евклида удовлетворяют всем четырем аксиомам метрики.
4. Как определяется индекс нечеткости НМ? Почему необходимо учитывать мощность носителя?
5. Сравнить индексы нечеткости нечетких множеств $A = \frac{0,3}{1} + \frac{0,5}{2} + \frac{0,2}{3} + \frac{0,7}{4} + \frac{0,6}{5}$ и $B = \frac{0,5}{1} + \frac{0,7}{2} + \frac{0,5}{3}$, заданных на $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

6. Сравнить индексы нечеткости по метрике Хэмминга для НМ с непрерывными носителями, заданных на отрезке $U=[0,3]$ следующими функциями принадлежности:

$$\mu_A(x) = \frac{x^2}{9}, \quad \mu_B(x) = \frac{(x-3)^2}{9}, \quad \forall x \in [0,3].$$

7. Вычислить индекс нечеткости по метрике Хэмминга для НМ, описываемого гармонической ФП с ограниченным носителем:

$$\mu_A^h(x) = \begin{cases} 0,5 \left(1 + \cos \left(\pi \frac{x-b}{c-b} \right) \right), & \text{если } a \leq x \leq c \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

8. Вычислить индекс нечеткости по метрике Хэмминга для НМ, описываемого гауссовой ФП с ограниченным носителем:

$$\mu_A^g(x) = \begin{cases} \exp \left[\frac{4(c-x)(x-a) - (c-a)^2}{4(c-x)(x-a)} \right], & \text{если } a \leq x \leq c \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

9. Попробуйте предложить альтернативную меру нечеткости, удовлетворяющую аксиомам A1-A4, приведенным в конце раздела 5.

6. ОСНОВНЫЕ ОПЕРАЦИИ НАД НЕЧЕТКИМИ МНОЖЕСТВАМИ

Сначала вспомним основные операции над классическими (четкими) множествами. При этом будем дополнительно определять эти операции через характеристические функции. Это позволит нам лучше понять, каким образом обобщаются классические операции на случай нечетких множеств.

Опр. 6.1. *Дополнением (complement) множества A называется множество всех элементов $\bar{A}$, входящих в универсальное множество U и вместе с тем не входящих в A , то есть*

$$\bar{A} = \{x : (x \in U) \wedge (x \notin A)\}.$$

Несложно убедиться, что данная операция в терминах характеристических функций будет описываться как

$$\mu_{\bar{A}}(x) = 1 - \mu_A(x), \quad \forall x \in U.$$

Опр. 6.2. *Пересечением (intersection) множеств A и B ($A \cap B$) называется множество, состоящее из тех и только тех элементов, которые одновременно принадлежат и A , и B , то есть*

$$A \cap B = \{x : (x \in A) \wedge (x \in B)\}.$$

Операция пересечения в терминах характеристических функций может быть представлена как

$$\mu_{A \cap B}(x) = \min(\mu_A(x), \mu_B(x)).$$

Опр. 6.3. *Объединением (union) множеств A и B ($A \cup B$) называется множество, состоящее из тех и только тех элементов, которые принадлежат по меньшей мере одному из множеств A или B , то есть*

$$A \cup B = \{x : (x \in A) \vee (x \in B)\},$$

или через характеристические функции множеств

$$\mu_{A \cup B}(x) = \max(\mu_A(x), \mu_B(x)).$$

В статье «Fuzzy sets» L. Zadeh определяет операции дополнения, пересечения и объединения нечетких множеств через функции принадлежности операндов. При этом при переходе к четким множествам сохраняется классическое содержание этих операций [20]. Однако сна-

чала исследователь вводит отношения включения на нечетких множествах.

Опр. 6.4. Два нечетких множества $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$ называются *равными* (обозначение $\tilde{A} = \tilde{B}$) тогда и только тогда, когда $\mu_{\tilde{A}}(x) = \mu_{\tilde{B}}(x), \forall x \in U$.

Опр. 6.5. Нечеткое множество $\tilde{A}$ *содержится* (включено) во множестве $\tilde{B}$ (обозначение $\tilde{A} \subseteq \tilde{B}$) тогда и только тогда, когда $\mu_{\tilde{A}}(x) \leq \mu_{\tilde{B}}(x), \forall x \in U$.

Опр. 6.6. *Дополнением* нечеткого множества $\tilde{A}$ называется нечеткое множество $\tilde{\bar{A}}$, описываемое функцией принадлежности $\mu_{\tilde{\bar{A}}}(x) = 1 - \mu_{\tilde{A}}(x), \forall x \in U$.

Опр. 6.7. *Пересечением* нечетких множеств $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$ с функциями принадлежности $\mu_{\tilde{A}}(x)$ и $\mu_{\tilde{B}}(x)$ соответственно называется нечеткое множество $\tilde{A} \cap \tilde{B}$ с функцией принадлежности

$$\mu_{\tilde{A} \cap \tilde{B}}(x) = \min(\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)), \forall x \in U.$$

По своему смыслу пересечение множеств $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$ не что иное, как *наибольшее* нечеткое множество, содержащееся как в $\tilde{A}$, так и в $\tilde{B}$ одновременно.

Опр. 6.8. *Объединением* нечетких множеств $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$ с функциями принадлежности $\mu_{\tilde{A}}(x)$ и $\mu_{\tilde{B}}(x)$ соответственно называется нечеткое множество $\tilde{A} \cup \tilde{B}$ с функцией принадлежности

$$\mu_{\tilde{A} \cup \tilde{B}}(x) = \max(\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)), \forall x \in U.$$

По своему смыслу объединение $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$ можно трактовать как *наименьшее* нечеткое множество, содержащее в себе одновременно как множество $\tilde{A}$, так и множество $\tilde{B}$.

Пример 6.1. Пусть на универсуме $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ заданы дискретные нечеткие множества:

$$\tilde{A} = \frac{0,6}{3} + \frac{0,8}{4} + \frac{1}{5} + \frac{0,2}{6}; \quad \tilde{B} = \frac{0,3}{1} + \frac{0,8}{2} + \frac{1}{3}.$$

Найти множества $\bar{\tilde{A}}$; $\bar{\tilde{B}}$; $\tilde{A} \cup \tilde{B}$; $\tilde{A} \cup \bar{\tilde{A}}$; $\tilde{B} \cap \bar{\tilde{B}}$. Для двух последних множеств проверить, выполняемы ли следующие тождества классической теории множеств $A \cup \bar{A} = U$; $B \cap \bar{B} = \emptyset$?

► Применяя определения операций над НМ, перечисленные выше, получаем:

$$1) \tilde{A} = \frac{0}{1} + \frac{0}{2} + \frac{0,6}{3} + \frac{0,8}{4} + \frac{1}{5} + \frac{0,2}{6} + \frac{0}{7};$$

$$\bar{\tilde{A}} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{0,4}{3} + \frac{0,2}{4} + \frac{0}{5} + \frac{0,8}{6} + \frac{1}{7};$$

$$2) \tilde{B} = \frac{0,3}{1} + \frac{0,8}{2} + \frac{1}{3} + \frac{0}{4} + \frac{0}{5} + \frac{0}{6} + \frac{0}{7};$$

$$\bar{\tilde{B}} = \frac{0,7}{1} + \frac{0,2}{2} + \frac{0}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7};$$

$$3) \tilde{A} \cup \tilde{B} = \frac{0,3}{1} + \frac{0,8}{2} + \frac{1}{3} + \frac{0,8}{4} + \frac{1}{5} + \frac{0,2}{6} + \frac{0}{7};$$

$$4) \tilde{A} \cup \bar{\tilde{A}} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{0,6}{3} + \frac{0,8}{4} + \frac{1}{5} + \frac{0,8}{6} + \frac{1}{7} \neq U;$$

$$5) \tilde{B} \cap \bar{\tilde{B}} = \frac{0,3}{1} + \frac{0,2}{2} + \frac{0}{3} + \frac{0}{4} + \frac{0}{5} + \frac{0}{6} + \frac{0}{7} \neq \emptyset. \blacktriangleleft$$

Вывод: законы «нуля» и «единицы» в теории нечетких множеств, вообще говоря, несправедливы. В этом легко убедиться, рассматривая в общем виде операции объединения и пересечения множеств в терминах функций принадлежности.

Пример 6.2. Пусть на универсальном множестве в виде отрезка на действительной оси $U=[0,3]$ заданы нечеткие множества с непрерывными носителями, описываемые следующими функциями принадлежности:

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \frac{x^2}{9}, \quad \mu_{\tilde{B}}(x) = \frac{(x-3)^2}{9}, \quad \forall x \in [0; 3].$$

Найти ФП множеств $\tilde{A} \cup \tilde{B}$, $\tilde{A} \cap \tilde{B}$, $\tilde{A} \cup \bar{\tilde{B}}$, $\tilde{A} \cap \bar{\tilde{B}}$, $\overline{(\tilde{A} \cap \tilde{B})}$ и построить их графики.

► Сначала построим графики функций принадлежности двух заданных НМ (рис. 6.1).

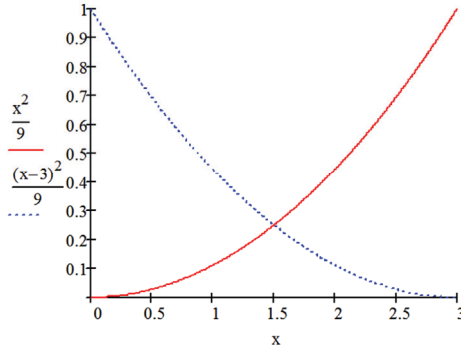


Рис. 6.1. Графики ФП нечетких множеств $\tilde{A}$ (сплошная линия) и $\tilde{B}$ (пунктирная линия), заданных в примере 6.1

Найдем координаты точки пересечения двух кривых, отвечающих функциям принадлежности НМ $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{9} = \frac{(x-3)^2}{9} \\ 0 \leq x \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}.$$

Применяя определения соответствующих операций над НМ, получаем:

$$\mu_{\tilde{A} \cap \tilde{B}}(x) = \min(\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)) = \begin{cases} \frac{x^2}{9}, & \text{если } 0 \leq x < \frac{3}{2} \\ \frac{(x-3)^2}{9}, & \text{если } \frac{3}{2} \leq x \leq 3; \end{cases}$$

$$\mu_{\tilde{A} \cup \tilde{B}}(x) = \max(\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)) = \begin{cases} \frac{(x-3)^2}{9}, & \text{если } 0 \leq x < \frac{3}{2} \\ \frac{x^2}{9}, & \text{если } \frac{3}{2} \leq x \leq 3. \end{cases}$$

Дополнение множества $\tilde{B}$

$$\mu_{\tilde{B}^c}(x) = 1 - \mu_{\tilde{B}}(x) = 1 - \frac{(x-3)^2}{9}, \quad 0 \leq x \leq 3.$$

Построим графики ФП $\mu_{\tilde{A}}(x)$ и $\mu_{\tilde{B}^c}(x)$ (рис. 6.2):

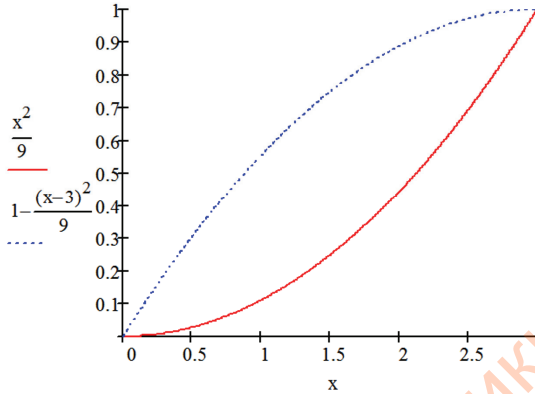


Рис. 6.2. Графики ФП $\mu_{\tilde{A}}(x)$ (сплошная) и $\mu_{\tilde{B}}(x)$ (пунктир) для примера 6.1

Легко убедиться, что

$$\frac{x^2}{9} \leq 1 - \frac{(x-3)^2}{9}, \quad \forall x \in [0, 3].$$

Поэтому при $0 \leq x \leq 3$

$$\mu_{\tilde{A} \cup \tilde{B}} = \max(\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)) = \mu_{\tilde{B}}(x) = 1 - \frac{(x-3)^2}{9};$$

$$\mu_{\tilde{A} \cap \tilde{B}} = \min(\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)) = \mu_{\tilde{A}}(x) = \frac{x^2}{9}.$$

Запишем выражение для функции принадлежности множества $\overline{(\tilde{A} \cap \tilde{B})}$:

$$\mu_{\overline{(\tilde{A} \cap \tilde{B})}}(x) = 1 - \mu_{\tilde{A} \cap \tilde{B}}(x) = \begin{cases} 1 - \frac{x^2}{9}, & \text{если } 0 \leq x < \frac{3}{2}, \\ 1 - \frac{(x-3)^2}{9}, & \text{если } \frac{3}{2} \leq x \leq 3. \end{cases}$$

Графики функций принадлежности полученных нечетких множеств предлагаем студенту построить самостоятельно, по возможности применяя программу Excel или любую из доступных систем компьютерной математики (СКМ). ◀

Особо отметим, что данные L. Zadeh определения основных операций над нечеткими множествами являются не единственно возможными.

Например, операцию пересечения нечетких множеств можно было бы определить с помощью оператора PROD следующим образом:

$$\mu_{\tilde{A} \cap \tilde{B}}(x) = \mu_{PROD(\tilde{A}, \tilde{B})}(x) = \mu_{\tilde{A}}(x) \cdot \mu_{\tilde{B}}(x), \quad \forall x \in U.$$

Отличие оператора PROD от оператора MIN очевидно. Значение оператора MIN зависит лишь от меньшего из значений ФП $\mu_{\tilde{A}}(x)$ и $\mu_{\tilde{B}}(x)$, в то время как PROD учитывает «вклад» каждого компонента. Следовательно, в последнем случае происходит как бы меньшая потеря информации о нечеткой системе.

Вообще, можно определить операцию пересечения нечетких множеств через так называемые *T-нормы*, то есть функции, удовлетворяющие на универсуме некоторому набору аксиом [7, 12].

Опр. 6.9. *Треугольной нормой (T-нормой)* называется бинарная операция на единичном интервале $[0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$, удовлетворяющая следующим аксиомам для любых $\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{D}$.

1. Свойство «обнуления»: $T(0, 0) = 0$.
2. Граничное условие при единичных значениях аргументов:

$$T(\mu_{\tilde{A}}(x), 1) = \mu_{\tilde{A}}(x); \quad T(1, \mu_{\tilde{B}}(x)) = \mu_{\tilde{B}}(x).$$

3. Коммутативность: $T(\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)) = T(\mu_{\tilde{B}}(x), \mu_{\tilde{A}}(x))$.

4. Ассоциативность:

$$T(\mu_{\tilde{A}}(x), T(\mu_{\tilde{B}}(x), \mu_{\tilde{C}}(x))) = T(T(\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)), \mu_{\tilde{C}}(x)).$$

5. Монотонность:

$$\begin{aligned} \mu_{\tilde{A}}(x) \leq \mu_{\tilde{C}}(x), \quad \mu_{\tilde{B}}(x) \leq \mu_{\tilde{D}}(x) &\Rightarrow \\ \Rightarrow T(\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)) &\leq T(\mu_{\tilde{C}}(x), \mu_{\tilde{D}}(x)). \end{aligned}$$

Приведем в табл. 6.1 некоторые наиболее распространенные *T-нормы*, которые обычно используются в качестве операции пересечения нечетких множеств. Выбор той или иной *T-нормы* определяется в каждом конкретном случае спецификой решаемой задачи.

Таблица 6.1

Некоторые Т-нормы, используемые в ТНМ

Наименование	Выражение
Произведение Заде (MIN)	$\mu_{\tilde{A} \cap \tilde{B}}(x) = \min(\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x))$
Произведение (PROD)	$\mu_{\tilde{A} \cap \tilde{B}}(x) = \mu_{\tilde{A}}(x) \mu_{\tilde{B}}(x)$
Ограниченная разность (пере- сечение по Лу- касевичу)	$\mu_{\tilde{A} \cap \tilde{B}}(x) = \max(0, \mu_{\tilde{A}}(x) + \mu_{\tilde{B}}(x) - 1)$
Произведение Гамахера	$\mu_{\tilde{A} \cap \tilde{B}}(x) = \frac{\mu_{\tilde{A}}(x) \mu_{\tilde{B}}(x)}{\mu_{\tilde{A}}(x) + \mu_{\tilde{B}}(x) - \mu_{\tilde{A}}(x) \mu_{\tilde{B}}(x)}$
Произведение Эйнштейна	$\mu_{\tilde{A} \cap \tilde{B}}(x) = \frac{\mu_{\tilde{A}}(x) \mu_{\tilde{B}}(x)}{2 - (\mu_{\tilde{A}}(x) + \mu_{\tilde{B}}(x) - \mu_{\tilde{A}}(x) \mu_{\tilde{B}}(x))}$

Пример 6.3. Показать, что операция «ограниченная разность» (пересечение по Лукасевичу) удовлетворяет всем вышеперечисленным свойствам Т-нормы.

► Операция «ограниченная разность» описывается следующим образом (см. табл. 6.1):

$$\mu_{\tilde{A} \cap \tilde{B}}(x) = \max(0, \mu_{\tilde{A}}(x) + \mu_{\tilde{B}}(x) - 1).$$

Вид отображения должен быть $T : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$. Действительно, при $\forall x \in U$ $0 \leq \mu_{\tilde{A}}(x) \leq 1$ и $0 \leq \mu_{\tilde{B}}(x) \leq 1$, имеет место

$$\max \mu_{\tilde{A} \cap \tilde{B}}(x) = \max(0, 1 + 1 - 1) = \max(0, 1) = 1;$$

$$\min \mu_{\tilde{A} \cap \tilde{B}}(x) = \max(0, 0 + 0 - 1) = \max(0, -1) = 0.$$

То есть $0 \leq \mu_{\tilde{A} \cap \tilde{B}}(x) \leq 1$.

Теперь проверим последовательно выполнимость всех свойств Т-нормы.

С1. При нулевых значениях функций принадлежности операндов должно быть $T(0, 0) = 0$. Действительно для всех $x \in U$:

$$\mu_{\tilde{A} \cap \tilde{B}}(x) = \max(0, 0 + 0 - 1) = \max(0, -1) = 0.$$

Свойство 1 выполнено.

C2. Свойство 2, очевидно, также выполняется. При единичных значениях одной из ФП получается:

$$\max(0, 1 + \mu_{\bar{B}}(x) - 1) = \max(0, \mu_{\bar{B}}(x)) = \mu_{\bar{B}}(x);$$

$$\max(0, 1 + \mu_{\bar{A}}(x) - 1) = \max(0, \mu_{\bar{A}}(x)) = \mu_{\bar{A}}(x).$$

То есть, $T(\mu_{\bar{A}}(x), 1) = \mu_{\bar{A}}(x)$; $T(1, \mu_{\bar{B}}(x)) = \mu_{\bar{B}}(x)$.

C3. Коммутативность ограниченной разности очевидно следует из коммутативности операции обычного арифметического сложения.

C4. Свойство ассоциативности подразумевает, что

$$T(\mu_{\bar{A}}(x), T(\mu_{\bar{B}}(x), \mu_{\bar{C}}(x))) = T(T(\mu_{\bar{A}}(x), \mu_{\bar{B}}(x)), \mu_{\bar{C}}(x)).$$

Действительно:

$$\mu_{\bar{B} \cap \bar{C}} = \max(0, \mu_{\bar{B}} + \mu_{\bar{C}} - 1);$$

$$\mu_{\bar{A} \cap (\bar{B} \cap \bar{C})} = \max(0, \mu_{\bar{A}} + \max(0, \mu_{\bar{B}} + \mu_{\bar{C}} - 1) - 1).$$

С другой стороны,

$$\mu_{\bar{A} \cap \bar{B}} = \max(0, \mu_{\bar{A}} + \mu_{\bar{B}} - 1);$$

$$\mu_{(\bar{A} \cap \bar{B}) \cap \bar{C}} = \max(0, \mu_{\bar{C}} + \max(0, \mu_{\bar{A}} + \mu_{\bar{B}} - 1) - 1).$$

Рассмотрим различные случаи.

Пусть сначала $\mu_{\bar{A}} + \mu_{\bar{B}} \geq 1$ и $\mu_{\bar{B}} + \mu_{\bar{C}} \geq 1$. Тогда

$$\mu_{\bar{A} \cap (\bar{B} \cap \bar{C})} = \max(0, \mu_{\bar{A}} + \mu_{\bar{B}} + \mu_{\bar{C}} - 1 - 1) \text{ и}$$

$$\mu_{(\bar{A} \cap \bar{B}) \cap \bar{C}} = \max(0, \mu_{\bar{C}} + \mu_{\bar{A}} + \mu_{\bar{B}} - 1 - 1),$$

то есть $\mu_{\bar{A} \cap (\bar{B} \cap \bar{C})} = \mu_{(\bar{A} \cap \bar{B}) \cap \bar{C}}$.

Пусть теперь $\mu_{\bar{A}} + \mu_{\bar{B}} \geq 1$, а $\mu_{\bar{B}} + \mu_{\bar{C}} < 1$. Тогда

$$\mu_{\bar{A} \cap (\bar{B} \cap \bar{C})} = \max(0, \mu_{\bar{A}} - 1) = 0 \text{ и}$$

$$\mu_{(\bar{A} \cap \bar{B}) \cap \bar{C}} = \max(0, \mu_{\bar{C}} + \mu_{\bar{A}} + \mu_{\bar{B}} - 1 - 1) \leq \max(0, \mu_{\bar{A}} - 1) = 0,$$

так как заведомо $\mu_{\bar{C}} + \mu_{\bar{B}} - 1 < 0$. То есть $\mu_{\bar{A} \cap (\bar{B} \cap \bar{C})} = \mu_{(\bar{A} \cap \bar{B}) \cap \bar{C}}$.

Аналогично C4 доказывается при других возможных соотношениях между $\mu_{\bar{A}}$, $\mu_{\bar{B}}$, $\mu_{\bar{C}}$.

C5. Наконец, проверим выполнения свойства монотонности. Действительно, пусть при всех $x \in U$ выполняются неравенства:

$\mu_{\bar{A}}(x) \leq \mu_{\bar{C}}(x)$, $\mu_{\bar{B}}(x) \leq \mu_{\bar{D}}(x)$. Из этого следует выполнимость C5:

$$\mu_{\bar{A} \cap \bar{B}} = \max(0, \mu_{\bar{A}} + \mu_{\bar{B}} - 1) \leq \max(0, \mu_{\bar{C}} + \mu_{\bar{D}} - 1) = \mu_{\bar{C} \cap \bar{D}}.$$

Вывод: для операции «ограниченная разность» выполнены все свойства T -нормы, то есть ее можно использовать в качестве «полноценной» операции пересечения нечетких множеств. ◀

Пример 6.4. Пусть имеются два нечетких множества $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$, описываемых соответственно функциями принадлежности:

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} \frac{x}{5}, & \text{если } 0 \leq x < 5 \\ \frac{10-x}{5}, & \text{если } 5 \leq x \leq 10 \\ 0, & \text{если } x > 10. \end{cases}$$

$$\mu_{\tilde{B}}(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < 7 \\ \frac{x-7}{5}, & \text{если } 7 \leq x \leq 12 \\ 1, & \text{если } x > 12. \end{cases}$$

Найти множество $\tilde{A} \cap \tilde{B}$, используя различные T -нормы.

► Сначала построим графики функций принадлежности данных множеств (рис. 6.3).

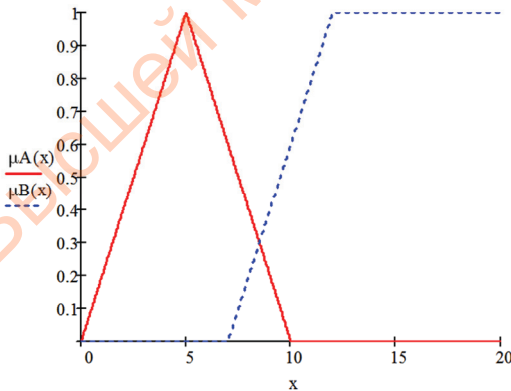


Рис. 6.3 Графики ФП $\mu_{\tilde{A}}(x)$ (сплошная линия) и $\mu_{\tilde{B}}(x)$ (пунктирная линия) для примера 6.4

На рис. 6.4 изобразим результаты операций:

- произведение Заде $\mu_{\tilde{A} \cap \tilde{B}}(x) = \min(\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x))$;

- произведение PROD $\mu_{\tilde{A} \cap \tilde{B}}(x) = \mu_{\tilde{A}}(x) \cdot \mu_{\tilde{B}}(x)$;
- ограниченная разность $\mu_{\tilde{A} \cap \tilde{B}}(x) = \max(0, \mu_{\tilde{A}}(x) + \mu_{\tilde{B}}(x) - 1)$;
- произведение Гамахера

$$\mu_{\tilde{A} \cap \tilde{B}}(x) = \frac{\mu_{\tilde{A}}(x) \cdot \mu_{\tilde{B}}(x)}{\mu_{\tilde{A}}(x) + \mu_{\tilde{B}}(x) - \mu_{\tilde{A}}(x) \cdot \mu_{\tilde{B}}(x)};$$

- произведение Эйнштейна

$$\mu_{\tilde{A} \cap \tilde{B}}(x) = \frac{\mu_{\tilde{A}}(x) \cdot \mu_{\tilde{B}}(x)}{2 - (\mu_{\tilde{A}}(x) + \mu_{\tilde{B}}(x) - \mu_{\tilde{A}}(x) \cdot \mu_{\tilde{B}}(x))}.$$

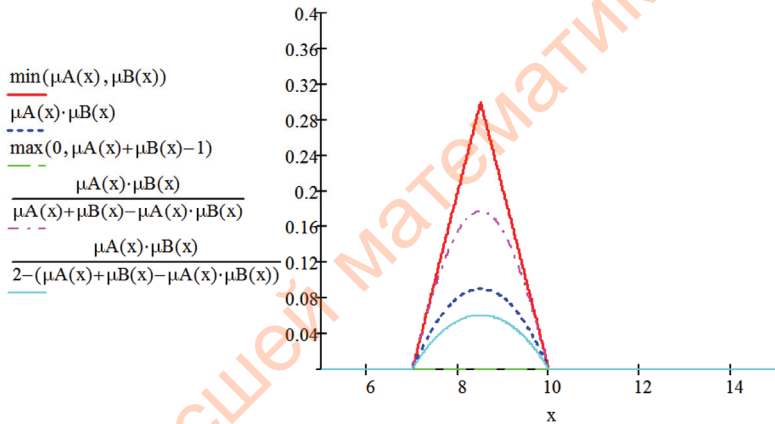


Рис. 6.4. Графики ФП нечеткого множества $\tilde{A} \cap \tilde{B}$ с использованием различных T -норм для примера 6.4

Как мы видим из графиков, наиболее «оптимистичен» оператор MIN, а наиболее «пессимистичен» оператор ограниченной разности.

На практике находят применение так называемые *параметризованные T-нормы*. В них содержится параметр, варьируя значения которого, мы можем влиять на результат операции. За счет этого достигается большая гибкость.

Пример 6.5. Рассмотрим параметризованный оператор пересечения Дюбуа.

► Параметризованный оператор пересечения Дюбуа (с параметром α) имеет следующий вид:

$$\mu_{\tilde{A} \cap \tilde{B}}(x, \alpha) = \frac{\mu_{\tilde{A}}(x) \cdot \mu_{\tilde{B}}(x)}{\max(\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x), \alpha)}; \quad 0 \leq \alpha \leq 1.$$

При $\alpha=0$ имеем:

$$\begin{aligned} \mu_{\tilde{A} \cap \tilde{B}}(x, 0) &= \frac{\mu_{\tilde{A}}(x) \cdot \mu_{\tilde{B}}(x)}{\max(\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x), 0)} = \frac{\mu_{\tilde{A}}(x) \cdot \mu_{\tilde{B}}(x)}{\max(\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x))} = \\ &= \begin{cases} \frac{\mu_{\tilde{A}}(x) \cdot \mu_{\tilde{B}}(x)}{\mu_{\tilde{A}}(x)}, & \text{если } \mu_{\tilde{A}}(x) \geq \mu_{\tilde{B}}(x) \\ \frac{\mu_{\tilde{A}}(x) \cdot \mu_{\tilde{B}}(x)}{\mu_{\tilde{B}}(x)}, & \text{если } \mu_{\tilde{A}}(x) < \mu_{\tilde{B}}(x) \end{cases} = \\ &= \begin{cases} \mu_{\tilde{B}}(x), & \text{если } \mu_{\tilde{A}}(x) \geq \mu_{\tilde{B}}(x) \\ \mu_{\tilde{A}}(x), & \text{если } \mu_{\tilde{A}}(x) < \mu_{\tilde{B}}(x) \end{cases} = \min(\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)). \end{aligned}$$

То есть, при $\alpha=0$ оператор Дюбуа есть классический оператор пересечения Заде.

При $\alpha=1$ получим оператор пересечения PROD:

$$\begin{aligned} \mu_{\tilde{A} \cap \tilde{B}}(x, 1) &= \frac{\mu_{\tilde{A}}(x) \cdot \mu_{\tilde{B}}(x)}{\max(\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x), 1)} = \frac{\mu_{\tilde{A}}(x) \cdot \mu_{\tilde{B}}(x)}{1} = \\ &= \text{PROD}(\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)). \end{aligned}$$

Таким образом, варьируя параметр α , мы можем менять «оптимальность» операции пересечения НМ. ◀

Перейдем к рассмотрению операции объединения нечетких множеств.

Классик теории нечетких множеств L. Zadeh предложил для этой цели использовать оператор максимума - MAX.

Наиболее общей формой оператора объединения являются так называемые T -конормы или S -нормы.

Опр. 6.10. Треугольной конормой (S -нормой) называется бинарная операция на единичном интервале $[0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$, удовлетворяющая следующим аксиомам для любых $\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{D}$.

1. Свойство «обнуления»: $S(0, 0) = 0$.
2. Граничное условие при нулевых значениях аргументов:

$$S(\mu_{\tilde{A}}(x), 0) = \mu_{\tilde{A}}(x); \quad S(0, \mu_{\tilde{B}}(x)) = \mu_{\tilde{B}}(x).$$
3. Коммутативность: $S(\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)) = S(\mu_{\tilde{B}}(x), \mu_{\tilde{A}}(x))$.

4. Ассоциативность:

$$S(\mu_{\bar{A}}(x), S(\mu_{\bar{B}}(x), \mu_{\bar{C}}(x))) = S(S(\mu_{\bar{A}}(x), \mu_{\bar{B}}(x)), \mu_{\bar{C}}(x)).$$

5. Монотонность:

$$\begin{aligned} \mu_{\bar{A}}(x) \leq \mu_{\bar{C}}(x), \mu_{\bar{B}}(x) \leq \mu_{\bar{D}}(x) &\Rightarrow \\ \Rightarrow S(\mu_{\bar{A}}(x), \mu_{\bar{B}}(x)) &\leq S(\mu_{\bar{C}}(x), \mu_{\bar{D}}(x)). \end{aligned}$$

Приведем в табл. 6.2 некоторые S -нормы, которые можно использовать для операции пересечения НМ.

Таблица 6.2

Некоторые S -нормы, используемые в теории НМ

Наименование	Выражение
Сумма Заде (MAX)	$\mu_{\bar{A} \cup \bar{B}}(x) = \max(\mu_{\bar{A}}(x), \mu_{\bar{B}}(x))$
Алгебраическая сумма (вероятностное ИЛИ)	$\mu_{\bar{A} \cup \bar{B}}(x) = \mu_{\bar{A}}(x) + \mu_{\bar{B}}(x) - \mu_{\bar{A}}(x) \cdot \mu_{\bar{B}}(x)$
Ограниченная сумма (объединение по Лукасевичу)	$\mu_{\bar{A} \cup \bar{B}}(x) = \min(1, \mu_{\bar{A}}(x) + \mu_{\bar{B}}(x))$
Сумма Гамахера	$\mu_{\bar{A} \cup \bar{B}}(x) = \frac{\mu_{\bar{A}}(x) + \mu_{\bar{B}}(x) - 2\mu_{\bar{A}}(x) \cdot \mu_{\bar{B}}(x)}{1 - \mu_{\bar{A}}(x) \cdot \mu_{\bar{B}}(x)}$
Сумма Эйнштейна	$\mu_{\bar{A} \cup \bar{B}}(x) = \frac{\mu_{\bar{A}}(x) + \mu_{\bar{B}}(x)}{1 + \mu_{\bar{A}}(x) \cdot \mu_{\bar{B}}(x)}$

Пример 6.6. Показать, что операция «алгебраическая сумма» удовлетворяет всем вышеперечисленным свойствам S -нормы.

► Операция «алгебраическая сумма» описывается следующим образом:

$$\mu_{\bar{A} \cup \bar{B}}(x) = \mu_{\bar{A}}(x) + \mu_{\bar{B}}(x) - \mu_{\bar{A}}(x) \cdot \mu_{\bar{B}}(x).$$

Вид отображения должен быть $S : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$.

Рассмотрим функцию двух независимых переменных при $0 \leq x \leq 1$ и $0 \leq y \leq 1$:

$$f(x, y) = x + y - xy;$$

$$f'_x = 1 - y \geq 0; \quad f'_y = 1 - x \geq 0.$$

Знаки частных производных показывают, что данная функция является неубывающей по каждой из переменных в промежутке от 0 до 1. Следовательно, экстремальные значения достигаются на границах, то есть при всех допустимых значениях

$\mu_{\tilde{A}}(x)$ и $\mu_{\tilde{B}}(x)$ наибольшие и наименьшие значения ФП объединения множеств будут

$$\max \mu_{\tilde{A} \cup \tilde{B}}(x) = 1 + 1 - 1 \cdot 1 = 1;$$

$$\min \mu_{\tilde{A} \cup \tilde{B}}(x) = 0 + 0 - 0 \cdot 0 = 0.$$

C1. При нулевых значениях функций принадлежности должно быть $S(0, 0) = 0$. Действительно, если $\mu_{\tilde{A}}(x) = 0$ и $\mu_{\tilde{B}}(x) = 0$, то

$$\mu_{\tilde{A} \cup \tilde{B}}(x) = 0 + 0 - 0 \cdot 0 = 0.$$

C2. Свойство 2, очевидно, также выполняется.

$$S(\mu_{\tilde{A}}(x), 0) = \mu_{\tilde{A}}(x) + 0 - \mu_{\tilde{A}}(x) \cdot 0 = \mu_{\tilde{A}}(x);$$

$$S(0, \mu_{\tilde{B}}(x)) = 0 + \mu_{\tilde{B}}(x) - 0 \cdot \mu_{\tilde{B}}(x) = \mu_{\tilde{B}}(x).$$

C3. Коммутативность алгебраической суммы следует из коммутативности обычных операций сложения и умножения действительных чисел.

C4. Докажем свойство ассоциативности:

$$\begin{aligned} S(\mu_{\tilde{A}}, S(\mu_{\tilde{B}}, \mu_{\tilde{C}})) &= \mu_{\tilde{A}} + (\mu_{\tilde{B}} + \mu_{\tilde{C}} - \mu_{\tilde{B}}\mu_{\tilde{C}}) - \\ &- \mu_{\tilde{A}}(\mu_{\tilde{B}} + \mu_{\tilde{C}} - \mu_{\tilde{B}}\mu_{\tilde{C}}) = (\mu_{\tilde{A}} + \mu_{\tilde{B}} - \mu_{\tilde{A}}\mu_{\tilde{B}}) + \mu_{\tilde{C}} - \\ &- (\mu_{\tilde{A}} + \mu_{\tilde{B}} - \mu_{\tilde{A}}\mu_{\tilde{B}})\mu_{\tilde{C}} = S(S(\mu_{\tilde{A}}, \mu_{\tilde{B}}), \mu_{\tilde{C}}). \end{aligned}$$

C5. Наконец, проверим свойство монотонности. В самом начале примера мы показали, что алгебраическая сумма является неубывающей функцией каждого из аргументов. Поэтому из неравенств $\mu_{\tilde{A}}(x) \leq \mu_{\tilde{C}}(x)$, $\mu_{\tilde{B}}(x) \leq \mu_{\tilde{D}}(x)$ следует, что

$$S(\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)) \leq S(\mu_{\tilde{C}}(x), \mu_{\tilde{D}}(x)). \quad \blacktriangleleft$$

Пример 6.7. Для нечетких множеств $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$ из примера 6.4 найти множество $\tilde{A} \cup \tilde{B}$, используя различные S -нормы.

► Функции принадлежности исходных НМ:

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} \frac{x}{5}, & \text{если } 0 \leq x < 5 \\ \frac{10-x}{5}, & \text{если } 5 \leq x \leq 10 \\ 0, & \text{если } x > 10. \end{cases}$$

- сумма Заде

$$\mu_{\tilde{B}}(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < 7 \\ \frac{x-7}{5}, & \text{если } 7 \leq x \leq 12 \\ 1, & \text{если } x > 12. \end{cases}$$

$$\mu_{\tilde{A} \cup \tilde{B}}(x) = \max(\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x));$$

- алгебраическая сумма

$$\mu_{\tilde{A} \cup \tilde{B}}(x) = \mu_{\tilde{A}}(x) + \mu_{\tilde{B}}(x) - \mu_{\tilde{A}}(x) \cdot \mu_{\tilde{B}}(x);$$

- ограниченная сумма

$$\mu_{\tilde{A} \cup \tilde{B}}(x) = \min(1, \mu_{\tilde{A}}(x) + \mu_{\tilde{B}}(x));$$

- сумма Гамахера

$$\mu_{\tilde{A} \cup \tilde{B}}(x) = \frac{\mu_{\tilde{A}}(x) + \mu_{\tilde{B}}(x) - 2\mu_{\tilde{A}}(x) \cdot \mu_{\tilde{B}}(x)}{1 - \mu_{\tilde{A}}(x) \cdot \mu_{\tilde{B}}(x)};$$

- сумма Эйнштейна

$$\mu_{\tilde{A} \cup \tilde{B}}(x) = \frac{\mu_{\tilde{A}}(x) + \mu_{\tilde{B}}(x)}{1 + \mu_{\tilde{A}}(x) \cdot \mu_{\tilde{B}}(x)}.$$

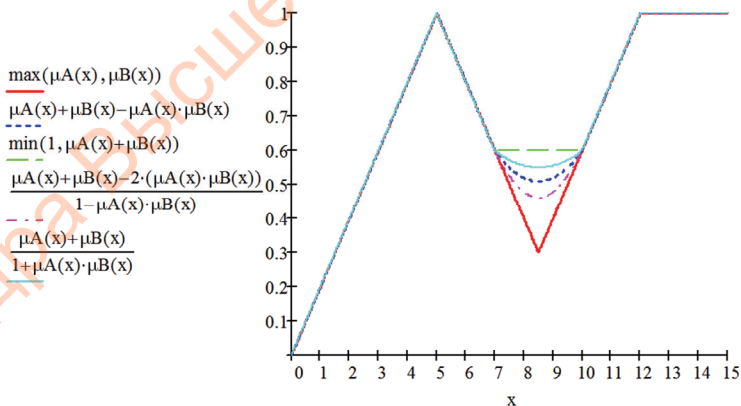


Рис. 6.5. Графики ФП нечеткого множества $\tilde{A} \cup \tilde{B}$ с использованием различных S -норм для примера 6.7

Как мы видим из графиков, наиболее «оптимистичен» оператор «ограниченная сумма», а наиболее «пессимистичен» оператор суммы Заде MAX. ◀

Заметим, что каждой T -норме можно поставить в соответствие так называемую *комплементарную* S -норму, связанную с ней очевидным соотношением:

$$T(\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)) = 1 - S(1 - \mu_{\tilde{A}}(x), 1 - \mu_{\tilde{B}}(x)).$$

По мнению некоторых исследователей, различные люди в процессе мышления реализуют по разному операции над множествами. Это зависит от особенностей индивидуума, конкретной ситуации и других факторов. Поэтому не существует единой точки зрения на выбор надлежащих операторов. В этом смысле можно считать, что T -нормы и S -нормы основаны на предположениях о некотором «усредненном» стиле выполнения указанных операций людьми [7].

Вопросы и упражнения к разделу 6

1. Дайте определение отношениям включения и равенства нечетких множеств в смысле Заде.
2. Дайте определение операциям объединения, пересечения нечетких множеств, дополнения в смысле Заде.
3. Сформулируйте понятия T -нормы и T -конормы (S -нормы) и их аксиомы.
4. Пусть имеются два нечетких множества с дискретными носителями. $\tilde{A}$ - множество недорогих отелей, $\tilde{B}$ - множество комфортабельных отелей в некотором городе N .

$$\tilde{A} = \frac{0,1}{a} + \frac{0,3}{b} + \frac{0,5}{c} + \frac{0,7}{d} + \frac{0,8}{e} + \frac{0,9}{f};$$

$$\tilde{B} = \frac{0,9}{a} + \frac{0,7}{b} + \frac{0,7}{c} + \frac{0,5}{d} + \frac{0,4}{e} + \frac{0,3}{f}.$$

Используя различные виды норм, найдите множества $\tilde{A} \cap \tilde{B}$ - недорогие и комфортабельные отели; $\tilde{A} \cup \tilde{B}$ - недорогие или комфортабельные отели. Постройте диаграммы Заде.

5. Найдите нечеткое множество $\tilde{C} = \tilde{A} \cap (\tilde{B} \cup \tilde{A})$, если

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < 0 \\ 2x^2, & \text{если } 0 \leq x \leq 1/2 \\ 1 - 2(x-1)^2, & \text{если } 1/2 < x \leq 1 \\ 1, & \text{если } x > 1. \end{cases}$$

$$\mu_{\tilde{B}}(x) = \begin{cases} 1 - |x-1|, & \text{если } 0 \leq x \leq 2 \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

6. Рассмотрите параметризованный оператор пересечения Гамахера

$$\mu_{A \cap B}(x, \gamma) = \gamma \frac{\mu_{\tilde{A}}(x) \cdot \mu_{\tilde{B}}(x)}{\gamma + (1 - \gamma)(\mu_{\tilde{A}}(x) + \mu_{\tilde{B}}(x) - \mu_{\tilde{A}}(x) \cdot \mu_{\tilde{B}}(x))}.$$

Какие операторы пересечения получаются из данного при значениях параметра $\gamma=0, 1, 2$ и в случае $\gamma \rightarrow \infty$?

7. Покажите, что операция «произведение» (PROD) удовлетворяет всем свойствам T -нормы.
 8. Покажите, что сумма Эйнштейна удовлетворяет всем свойствам S -нормы.
 9. Рассмотрите параметризованный оператор объединения Ягера

$$\mu_{A \cup B}(x, \gamma) = \min \left\{ 1, \left[(\mu_{\tilde{A}}(x))^{\gamma} + \mu_{\tilde{B}}(x)^{\gamma} \right]^{\frac{1}{\gamma}} \right\}, \quad \gamma \geq 1.$$

Какие операторы получаются из данного при значениях параметра $\gamma=1$ и при $\gamma \rightarrow \infty$?

7. СВОЙСТВА ОПЕРАЦИЙ НАД НЕЧЕТКИМИ МНОЖЕСТВАМИ

Перейдем к рассмотрению некоторых основных свойств перечисленных в разделе 6 операций над множествами.

1. Коммутативность:

- пересечения $A \cap B = B \cap A$;
- объединения $A \cup B = B \cup A$.

Свойство коммутативности, очевидно, справедливо как для классических, так и для нечетких множеств.

Последнее утверждение следует из соответствующих аксиом T -норм и T -конорм (S -норм), рассмотренных в предыдущем разделе (определения 6.9 и 6.10).

2. Ассоциативность:

- пересечения $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$;
- объединения $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$.

Как и коммутативность, ассоциативность также имеет место для операций над НМ в силу того, что данное свойство заложено в аксиоматику T -норм и S -норм.

3. Дистрибутивность:

- пересечения $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$;
- объединения $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Пример 7.1. Показать справедливость свойства дистрибутивности объединения на примере операций произведения Заде:

$$\mu_{A \cap B}^-(x) = \min(\mu_A^-(x), \mu_B^-(x))$$

и суммы Заде:

$$\mu_{A \cup B}^-(x) = \max(\mu_A^-(x), \mu_B^-(x)).$$

► Рассмотрим три произвольных нечетких множества $\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}$, заданные на универсальном множестве U своими функциями принадлежности: $\mu_{\tilde{A}}^-(x), \mu_{\tilde{B}}^-(x), \mu_{\tilde{C}}^-(x), x \in U$.

Пусть сначала $\mu_{\tilde{B}}^-(x) \geq \mu_{\tilde{C}}^-(x)$. Тогда при любых $x \in U$

$$\begin{aligned} \mu_{\tilde{A} \cap (\tilde{B} \cup \tilde{C})}^- &= \min(\mu_{\tilde{A}}^-(x), \max(\mu_{\tilde{B}}^-(x), \mu_{\tilde{C}}^-(x))) = \\ &= \min(\mu_{\tilde{A}}^-(x), \mu_{\tilde{B}}^-(x)). \end{aligned}$$

С другой стороны, при $\mu_{\tilde{B}}^-(x) \geq \mu_{\tilde{C}}^-(x)$ очевидно, что

$$\begin{aligned} \mu_{(\tilde{A} \cap \tilde{B}) \cup (\tilde{A} \cap \tilde{C})}^- &= \max(\min(\mu_{\tilde{A}}^-(x), \mu_{\tilde{B}}^-(x)), \min(\mu_{\tilde{A}}^-(x), \mu_{\tilde{C}}^-(x))) = \\ &= \min(\mu_{\tilde{A}}^-(x), \mu_{\tilde{B}}^-(x)). \end{aligned}$$

Предположим теперь, что $\mu_{\tilde{B}}^-(x) < \mu_{\tilde{C}}^-(x)$. В таком случае при любых $x \in U$ имеет место:

$$\begin{aligned} \mu_{\tilde{A} \cap (\tilde{B} \cup \tilde{C})}^- &= \min(\mu_{\tilde{A}}^-(x), \max(\mu_{\tilde{B}}^-(x), \mu_{\tilde{C}}^-(x))) = \\ &= \min(\mu_{\tilde{A}}^-(x), \mu_{\tilde{C}}^-(x)). \end{aligned}$$

Вместе с тем при $\mu_{\tilde{B}}^-(x) < \mu_{\tilde{C}}^-(x)$ очевидно, что

$$\begin{aligned} \mu_{(\tilde{A} \cap \tilde{B}) \cup (\tilde{A} \cap \tilde{C})}^- &= \max(\min(\mu_{\tilde{A}}^-(x), \mu_{\tilde{B}}^-(x)), \min(\mu_{\tilde{A}}^-(x), \mu_{\tilde{C}}^-(x))) = \\ &= \min(\mu_{\tilde{A}}^-(x), \mu_{\tilde{C}}^-(x)). \end{aligned}$$

Свойство доказано. ◀

4. Свойство «нуля»:

- для пересечения $A \cap \emptyset = \emptyset$;
- для объединения $A \cup \emptyset = A$.

Известно, что указанные свойства выполняются для классических множеств. Они справедливы также и для НМ. Действительно, функция принадлежности пустого множества на всем универсуме $\mu_{\emptyset}(x) \equiv 0$. Но мы знаем, что по одной из аксиом для любой S -нормы имеет место $S(\mu_{\tilde{A}}(x), 0) = \mu_{\tilde{A}}(x)$. Это означает, что $\tilde{A} \cup \emptyset = \tilde{A}$. В то же время одна из аксиом T -нормы предполагает, что $T(\mu_{\tilde{A}}(x), 0) = 0 = \mu_{\emptyset}(x)$.

А это и означает, что $\tilde{A} \cap \emptyset = \emptyset$.

5. Свойство «единицы»:

- для пересечения $A \cap U = A$;
- для объединения $A \cup U = U$.

Покажем справедливость этих свойств для НМ. Действительно, функция принадлежности универсального множества $\mu_U(x) \equiv 1$. В соответствии со свойствами S -норм - $S(\mu_{\tilde{A}}(x), 1) = 1$; $S(1, \mu_{\tilde{B}}(x)) = 1$.

Из этого следует, что $\tilde{A} \cup U = U$.

Для T -нормы $T(\mu_{\tilde{A}}(x), 1) = \mu_{\tilde{A}}(x)$, $T(1, \mu_{\tilde{B}}(x)) = \mu_{\tilde{B}}(x)$. Что и означает $\tilde{A} \cap U = \tilde{A}$.

6. Свойство «поглощения»:

- для пересечения $A \cap (A \cup B) = A$;
- для объединения $A \cup (A \cap B) = A$.

Пример 7.2. Показать справедливость свойств поглощения в том случае, если операции пересечения и объединения над нечеткими множествами заданы в смысле Заде: $\mu_{\tilde{A} \cap \tilde{B}}(x) = \min(\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x))$ и $\mu_{\tilde{A} \cup \tilde{B}}(x) = \max(\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x))$.

► Проверим выполнимость свойства поглощения для пересечения $\tilde{A} \cap (\tilde{A} \cup \tilde{B}) = \tilde{A}$:

$$\begin{aligned} \mu_{\tilde{A} \cap (\tilde{A} \cup \tilde{B})}(x) &= \min(\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{A} \cup \tilde{B}}(x)) = \\ &= \min(\mu_{\tilde{A}}(x), \max(\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x))) = \end{aligned}$$

$$= \begin{cases} \min(\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{A}}(x)) = \mu_{\tilde{A}}(x), & \text{если } \mu_{\tilde{A}}(x) \geq \mu_{\tilde{B}}(x) \\ \min(\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)) = \mu_{\tilde{B}}(x), & \text{если } \mu_{\tilde{A}}(x) < \mu_{\tilde{B}}(x). \end{cases}$$

Аналогично проверяется свойство $\tilde{A} \cup (\tilde{A} \cap \tilde{B}) = \tilde{A}$. Действительно,

$$\begin{aligned} \mu_{\tilde{A} \cup (\tilde{A} \cap \tilde{B})}(x) &= \max(\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{A} \cap \tilde{B}}(x)) = \\ &= \max(\mu_{\tilde{A}}(x), \min(\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x))) = \\ &= \begin{cases} \max(\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)) = \mu_{\tilde{A}}(x), & \text{если } \mu_{\tilde{A}}(x) \geq \mu_{\tilde{B}}(x) \\ \max(\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{A}}(x)) = \mu_{\tilde{A}}(x), & \text{если } \mu_{\tilde{A}}(x) < \mu_{\tilde{B}}(x), \end{cases} \end{aligned}$$

что и требовалось доказать. ◀

7. Законы де Моргана:

- для объединения $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$;

- для пересечения $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

Пример 7.3. Проверить выполнимость законов де Моргана в том случае, если операции пересечения и объединения над нечеткими множествами заданы в смысле Заде: $\mu_{\tilde{A} \cap \tilde{B}}(x) = \min(\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x))$ и $\mu_{\tilde{A} \cup \tilde{B}}(x) = \max(\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x))$.

► Проверим справедливость свойства $\overline{\tilde{A} \cup \tilde{B}} = \overline{\tilde{A}} \cap \overline{\tilde{B}}$.

Очевидно, что

$$\begin{aligned} \mu_{\overline{\tilde{A} \cup \tilde{B}}}(x) &= 1 - \mu_{\tilde{A} \cup \tilde{B}}(x) = 1 - \max(\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)) = \\ &= \begin{cases} 1 - \mu_{\tilde{A}}(x), & \text{если } \mu_{\tilde{A}}(x) \geq \mu_{\tilde{B}}(x) \\ 1 - \mu_{\tilde{B}}(x), & \text{если } \mu_{\tilde{A}}(x) < \mu_{\tilde{B}}(x) \end{cases} = \\ &= \begin{cases} \mu_{\overline{\tilde{A}}}(x), & \text{если } 1 - \mu_{\tilde{A}}(x) \leq 1 - \mu_{\tilde{B}}(x) \\ \mu_{\overline{\tilde{B}}}(x), & \text{если } 1 - \mu_{\tilde{A}}(x) > 1 - \mu_{\tilde{B}}(x) \end{cases} = \\ &= \begin{cases} \mu_{\overline{\tilde{A}}}(x), & \text{если } \mu_{\tilde{A}}(x) \leq \mu_{\tilde{B}}(x) \\ \mu_{\overline{\tilde{B}}}(x), & \text{если } \mu_{\tilde{A}}(x) > \mu_{\tilde{B}}(x) \end{cases} = \\ &= \min(\mu_{\overline{\tilde{A}}}(x), \mu_{\overline{\tilde{B}}}(x)) = \mu_{\overline{\tilde{A} \cap \tilde{B}}}(x). \end{aligned}$$

Аналогично доказывается свойство $\overline{\tilde{A} \cap \tilde{B}} = \tilde{\bar{A}} \cup \tilde{\bar{B}}$:

$$\begin{aligned} \mu_{\overline{\tilde{A} \cap \tilde{B}}}(x) &= 1 - \mu_{\tilde{A} \cap \tilde{B}}(x) = 1 - \min(\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)) = \\ &= \begin{cases} 1 - \mu_{\tilde{A}}(x), & \text{если } \mu_{\tilde{A}}(x) \leq \mu_{\tilde{B}}(x) \\ 1 - \mu_{\tilde{B}}(x), & \text{если } \mu_{\tilde{A}}(x) > \mu_{\tilde{B}}(x) \end{cases} = \\ &= \begin{cases} \mu_{\tilde{\bar{A}}}(x), & \text{если } 1 - \mu_{\tilde{A}}(x) \geq 1 - \mu_{\tilde{B}}(x) \\ \mu_{\tilde{\bar{B}}}(x), & \text{если } 1 - \mu_{\tilde{A}}(x) < 1 - \mu_{\tilde{B}}(x) \end{cases} = \\ &= \begin{cases} \mu_{\tilde{\bar{A}}}(x), & \text{если } \mu_{\tilde{A}}(x) \geq \mu_{\tilde{B}}(x) \\ \mu_{\tilde{\bar{B}}}(x), & \text{если } \mu_{\tilde{A}}(x) < \mu_{\tilde{B}}(x) \end{cases} = \\ &= \max(\mu_{\tilde{\bar{A}}}(x), \mu_{\tilde{\bar{B}}}(x)) = \mu_{\tilde{\bar{A} \cup \bar{B}}}(x). \end{aligned}$$

Законы де Моргана доказаны для НМ. ◀

8. Особо следует сказать о законе «исключения третьего» $A \cup \bar{A} = U$ и законе противоречия $A \cap \bar{A} = \emptyset$. Известно, что указанные соотношения имеют большое значение в классической теории множеств и классической математической логике.

В случае нечетких множеств эти законы, вообще говоря, не выполняются. Сказанное нетрудно доказать.

Пример 7.4. Показать, что свойства $\tilde{A} \cup \tilde{\bar{A}} = U$ и $\tilde{A} \cap \tilde{\bar{A}} = \emptyset$ не состоятельны в случае нечетких множеств.

► В смысле Заде функция принадлежности множества $\tilde{A} \cup \tilde{\bar{A}}$ имеет вид $\mu_{\tilde{A} \cup \tilde{\bar{A}}}(x) = \max(\mu_{\tilde{A}}(x), 1 - \mu_{\tilde{A}}(x))$.

Если предположить, что при некотором $x \in U$ функция принадлежности $0 < \mu_{\tilde{A}}(x) < 1$, как это обычно и имеет место в случае НМ, то приходим к противоречию. Действительно, в таком случае $\mu_{\tilde{A} \cup \tilde{\bar{A}}}(x) = \max(\mu_{\tilde{A}}(x), 1 - \mu_{\tilde{A}}(x)) < 1$, в то время как функция принадлежности универсального множества – тождественная единица. Точно так же при $0 < \mu_{\tilde{A}}(x) < 1$ очевидно выполняется неравенство $\mu_{\tilde{A} \cap \tilde{\bar{A}}}(x) = \min(\mu_{\tilde{A}}(x), 1 - \mu_{\tilde{A}}(x)) > 0$.

То есть, в общем случае $\tilde{A} \cup \tilde{\bar{A}} \neq U$ и $\tilde{A} \cap \tilde{\bar{A}} \neq \emptyset$. ◀

«Нарушение» указанных законов как раз и определяет своеобразие теории нечетких множеств.

Вопросы и упражнения к разделу 7

1. Сформулировать основные свойства операций над классическими (четкими) множествами. Какие из этих свойств справедливы и для нечетких множеств?
2. Доказать справедливость свойств дистрибутивности операций пересечения и объединения нечетких множеств в случае произведения $\text{PROD } \mu_{\tilde{A} \cap \tilde{B}}(x) = \mu_{\tilde{A}}(x) \cdot \mu_{\tilde{B}}(x)$ и алгебраической суммы $\mu_{\tilde{A} \cup \tilde{B}}(x) = \mu_{\tilde{A}}(x) + \mu_{\tilde{B}}(x) - \mu_{\tilde{A}}(x) \cdot \mu_{\tilde{B}}(x)$.
3. Показать справедливость свойств поглощения в том случае, если операции пересечения и объединения над нечеткими множествами заданы как ограниченная разность $\mu_{\tilde{A} \cap \tilde{B}}(x) = \max(0, \mu_{\tilde{A}}(x) + \mu_{\tilde{B}}(x) - 1)$ и ограниченная сумма $\mu_{\tilde{A} \cup \tilde{B}}(x) = \min(1, \mu_{\tilde{A}}(x) + \mu_{\tilde{B}}(x))$.
4. Показать выполнимость законов де Моргана в том случае, если операции пересечения и объединения над НМ заданы как произведение и сумма Гамахера (см. раздел 6).
5. Доказать, что для нечетких множеств в общем не выполняются законы «расщепления»: $(A \cup B) \cap (A \cup \bar{B}) = A$ и $(A \cap B) \cup (A \cap \bar{B}) = A$.
6. Доказать, что для нечетких множеств в общем случае не выполняются законы Порецкого: $(A \cup (\bar{A} \cap B)) = A \cup B$ и $(A \cap (\bar{A} \cup B)) = A \cap B$.
7. Доказать свойства: $\emptyset \subset \tilde{A} \cap \bar{\tilde{A}} \subset \tilde{A} \cup \bar{\tilde{A}} \subset U$;
 $(\tilde{A} \cap \tilde{B}) \cup (\tilde{B} \cap \tilde{C}) \cup (\tilde{C} \cap \tilde{A}) = (\tilde{A} \cup \tilde{B}) \cap (\tilde{B} \cup \tilde{C}) \cap (\tilde{C} \cup \tilde{A})$.

8. ЛИНГВИСТИЧЕСКИЕ МОДИФИКАТОРЫ НЕЧЕТКИХ МНОЖЕСТВ

Одним из актуальных направлений исследований в теории нечетких множеств является математическая формализация так называемых «лингвистических модификаторов», используемых для передачи нечетких градаций человеческого восприятия и мышления.

Лингвистические модификаторы (англ. - hedges) определяются как слова, способные изменять аспекты значений других слов, на которые они направлены.

Например, если имеется нечеткое множество объектов, именуемых как «хороший», то с помощью модификаторов можно преобразовать данное НМ во множества, описывающие понятия «очень хороший», «более или менее хороший» и т.д. Как правило, каждому лингвистическому модификатору ставится в соответствие некоторый оператор, оказывающий необходимое воздействие на исходное нечеткое множество [14, 21].

Чтобы разобраться в сути вопроса, начнем с рассмотрения операции *возведения нечеткого множества в положительную степень*, которую можно определить следующим образом:

$$\tilde{A}^{\alpha} : \mu_{\tilde{A}^{\alpha}}(x) = (\mu_{\tilde{A}}(x))^{\alpha}, \quad \alpha > 0, \quad \forall x \in U.$$

Обратим внимание на следующую особенность действия оператора возведения в степень на нормальное НМ: при $0 < \alpha < 1$ значения функции принадлежности при соответственных значениях аргументов становятся больше прежних, а при $\alpha > 1$ - меньше прежних. Связано это, очевидно, с тем, что для нормального НМ всегда $0 \leq \mu_{\tilde{A}}(x) \leq 1$. Наглядно результат возведения нечеткого множества в степень проиллюстрирован рис. 8.1.

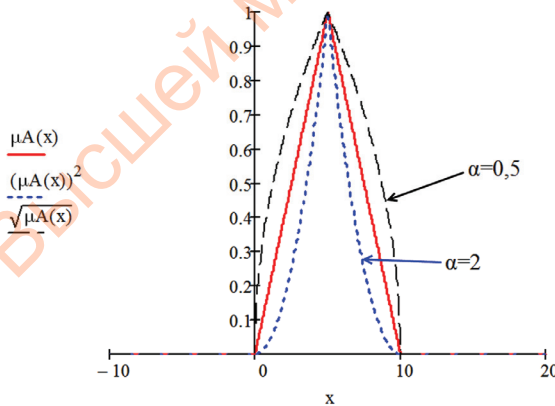


Рис. 8.1. Результат действия оператора возведения в степень $\alpha > 0$ на НМ с треугольной ФП

На практике чаще других применяется так называемый оператор *концентрирования* (*concentration*), отвечающий показателю степени $\alpha=2$:

$$CON(\tilde{A}) = \tilde{A}^2 \Leftrightarrow (\mu_{\tilde{A}}(x))^2, \quad \forall x \in U.$$

Этот оператор можно использовать для описания лингвистических градаций «очень», «сильно».

Для усиления нечеткости используется обычно оператор *растяжения* (*dilatation*), у которого показатель степеней $\alpha=0,5$:

$$DIL(\tilde{A}) = \tilde{A}^{0,5} \Leftrightarrow \sqrt{\mu_{\tilde{A}}(x)}, \quad \forall x \in U.$$

С его помощью можно формализовать такие лингвистические градации, как «почти», «более или менее».

Пример 8.1. На универсальном множестве $U=\{1,2,3,4\}$ задано нечеткое множество $\tilde{A} = \frac{0,1}{1} + \frac{0,4}{2} + \frac{0,8}{3} + \frac{0,6}{4}$. Применим к множеству

$\tilde{A}$ поочередно операторы DIL и CON и выясним, как изменится индекс нечеткости множества в результате этих операций.

► 1. Сначала рассчитаем индекс нечеткости исходного НМ $\tilde{A}$, для чего запишем ближайшее к нему четкое множество:

$$A = \frac{0}{1} + \frac{0}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}.$$

Тогда индекс нечеткости по Хэммингу

$$\begin{aligned} I_{\tilde{A}}^H &= \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n |\mu_{\tilde{A}}(x_i) - \mu_A(x_i)| = \\ &= \frac{2}{4} (0,1 + 0,4 + 0,2 + 0,4) = 0,55. \end{aligned}$$

Подеиствуем на $\tilde{A}$ оператором концентрирования:

$$\tilde{B} = CON(\tilde{A}) = \frac{0,01}{1} + \frac{0,16}{2} + \frac{0,64}{3} + \frac{0,36}{4}$$

и вычислим индекс нечеткости полученного нечеткого множества

$\tilde{B}$.

Ближайшее к $\tilde{B}$ четкое множество B

$$B = \frac{0}{1} + \frac{0}{2} + \frac{1}{3} + \frac{0}{4},$$

тогда индекс нечеткости $\tilde{B}$ равен

$$I_{\tilde{B}}^H = \frac{2}{4} (0,01 + 0,16 + 0,36 + 0,36) = 0,445.$$

Получается, что оператор концентрации снизил значение индекса нечеткости НМ ($0,445 < 0,55$). Этот результат является ожидаемым, так как по своему смыслу оператор *CON* предназначен для «конкретизации» лингвистических определений.

2. Аналогично исследуем действие на множество $\tilde{A}$ оператора растяжения:

$$\tilde{C} = DIL(\tilde{A}) = \frac{0,32}{1} + \frac{0,63}{2} + \frac{0,89}{3} + \frac{0,77}{4};$$

$$C = \frac{0}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4};$$

$$I_{\tilde{C}}^H = \frac{2}{4}(0,32 + 0,37 + 0,11 + 0,23) = 0,515.$$

Результат показывает, что оператор растяжения также вызвал снижение нечеткости исходного НМ ($0,515 < 0,55$), хотя, судя по его назначению, результат должен бы быть обратным. ◀

Рассмотрим теперь операторы управления контрастностью нечетких множеств. Их действие более «тонкое», чем у рассмотренных только что операторов *DIL* и *CON*. Если последние работают одинаково на всем носителе нечеткого множества, то операторы управления контрастностью действуют по-разному до и после точек перехода нечеткого множества. По сути, они меняют углы наклона функции принадлежности в окрестности точек перехода ($\mu_{\tilde{A}} = 0,5$), не сдвигая при этом сами эти точки.

Так, оператор *повышения контрастности INT* (intensification) (лингвистический модификатор «определенно») описывается формулой для всех $x \in U$:

$$\mu_{INT(\tilde{A})}(x) = INT(\mu_{\tilde{A}}(x)) = \begin{cases} 2(\mu_{\tilde{A}}(x))^2, & \text{если } \mu_{\tilde{A}}(x) < 0,5 \\ 1 - 2(1 - \mu_{\tilde{A}}(x))^2 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Смысл его действия становится ясным из рис. 8.2. Кроме того, параметризуя оператор *INT* по показателю степени k и применяя более высокие их значения ($k > 2$), мы имеем возможность все более и более контрастировать исходное НМ. В пределе при $k \rightarrow \infty$ очевидно получится ступенчатая характеристическая функция обычного «четкого» множества.

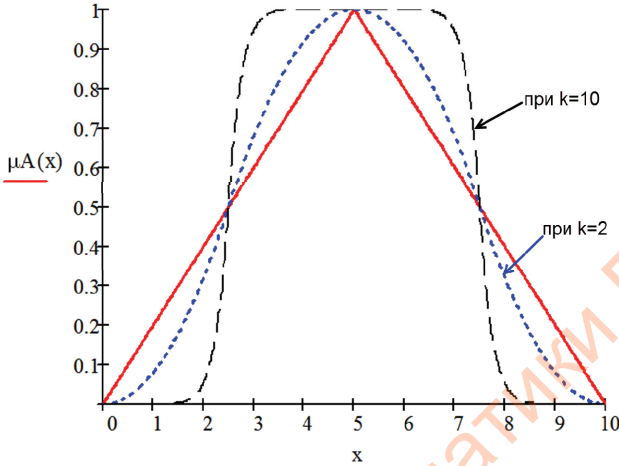


Рис. 8.2. Результат действия оператора INT на НМ с треугольной ФП при $k=2$ и $k=10$

В литературе встречается также описание оператора *понижения контрастности* BLR (*blurring* – размытие) [7]:

$$\mu_{BLR(\tilde{A})}(x) = BLR(\mu_{\tilde{A}}(x)) = \begin{cases} 1 - 2(1 - \mu_{\tilde{A}}(x))^2, & \text{если } \mu_{\tilde{A}}(x) < 0,5 \\ 2(\mu_{\tilde{A}}(x))^2 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Однако, даже поверхностное рассмотрение особенностей оператора BLR отмечает существенные недостатки:

- во первых, он нарушает нормальность полученного НМ: трудно видеть, что $BLR(1) = 2$;
- во-вторых, при $\mu_{\tilde{A}}(x) \rightarrow 0$ $\mu_{BLR(\tilde{A})} \rightarrow -1$.

Предоставим возможность читателю попытаться самостоятельно «подправить» описанный выше оператор BLR с тем, чтобы его воздействие на НМ было адекватным и противоположным характеру действия оператора INT .

Из приведенных выше примеров видно, что, несмотря на широкое применение лингвистических модификаторов в теории нечетких множеств, пока еще недостаточно проработана проблема количественной оценки их действия на НМ.

В связи с этим попробуем провести исследование действия операторов, соответствующих рассмотренным лингвистическим модификаторам, путем их параметризации. В качестве модельных нечетких

множеств возьмем нормальные НМ с ограниченными носителями, описываемые некоторыми типовыми функциями принадлежности.

1. Оператор повышения контрастности (с параметром $k>1$) на нечетком множестве $\tilde{A}$ с функцией принадлежности $\mu_{\tilde{A}}(x)$, возвращающий новое множество с ФП $\mu_{INT_k(\tilde{A})}(x)$:

$$\mu_{INT_k(\tilde{A})}(x) = INT_k(\mu_{\tilde{A}}(x)) = \begin{cases} 2^{k-1}(\mu_{\tilde{A}}(x))^k, & \text{если } \mu_{\tilde{A}}(x) < 0,5 \\ 1 - 2^{k-1}(1 - \mu_{\tilde{A}}(x))^k & \text{иначе.} \end{cases}$$

2. Оператор концентрирования (с параметром $k>1$):

$$\mu_{CON_k(\tilde{A})}(x) = CON_k(\mu_{\tilde{A}}(x)) = (\mu_{\tilde{A}}(x))^k.$$

3. Оператор растяжения (с параметром $0 < k < 1$):

$$\mu_{DIL_k(\tilde{A})}(x) = DIL_k(\mu_{\tilde{A}}(x)) = (\mu_{\tilde{A}}(x))^k.$$

В качестве меры эффекта воздействия операторов на НМ при каждом значении параметра k будем рассчитывать коэффициент относительного изменения индекса нечеткости

$$\alpha(k) = \frac{I_0 - I_k}{I_0},$$

где I_0 – индекс нечеткости исходного НМ (предполагается $I_0 \neq 0$, т.е. исходное множество – нечеткое); I_k – индекс нечеткости НМ, полученного в результате воздействия оператора с параметром k .

Значения коэффициента α позволяют количественно и качественно оценивать эффект воздействия операторов на нечеткость множества. При $\alpha=0$ изменения нечеткости НМ не наблюдается (эффект отсутствует); при $\alpha=1$ действие оператора приводит к формированию четкого множества; отрицательные значения α свидетельствуют о том, что нечеткость множества увеличилась.

Индекс нечеткости множества $\tilde{A}$ будем определять с использованием меры Хемминга (см. раздел 5).

Действие модификаторов исследуем на НМ с непрерывными функциями принадлежности с ограниченными носителями в виде отрезка $[a, c]$, вследствие чего расчетная формула для индекса нечеткости приобретет вид

$$I_{\tilde{A}_k} = \frac{2}{c-a} \int_a^c \left| \mu_{OPER_k(\tilde{A})}(x) - \mu_{\tilde{A}}(x) \right| dx,$$

где $\tilde{A}_k$ - нечеткое множество, полученное после воздействия на НМ $\tilde{A}$ одного из трех вышеперечисленных операторов $OPER_k$ с параметром k .

В качестве модельных возьмем нормальные НМ, описываемые следующими типовыми функциями принадлежности с модальным значением b на носителе $[a, c]$:

- гармоническая:

$$\mu_{\tilde{A}}^h(x) = \begin{cases} 0,5 \left(1 + \cos \left(\pi \frac{x-b}{c-b} \right) \right), & \text{если } a \leq x \leq c \\ 0 & \text{иначе;} \end{cases}$$

- треугольная:

$$\mu_{\tilde{A}}^t(x) = \begin{cases} \frac{x-a}{b-a}, & \text{если } a \leq x < b \\ \frac{c-x}{c-b}, & \text{если } b \leq x \leq c \\ 0 & \text{иначе;} \end{cases}$$

- гауссова:

$$\mu_{\tilde{A}}^g(x) = \begin{cases} \exp \left[1 - \frac{(c-a)^2}{4(c-x)(x-a)} \right], & \text{если } a < x < c \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Моделирование действия операторов INT_k , CON_k и DIL_k выполним в системе компьютерной математики MathCad, варьируя значения параметра k .

Получаются следующие результаты.

1. Исследование оператора INT_k показывает, что на всех трех модельных НМ действие его устойчиво (приводит к ожидаемому увеличению четкости множества), причем количественно отличается несильно (рис. 8.3). В области значений параметра $1 < k < 3$ «разгон» эффекта действия оператора максимальный. Нарастивание значений параметра k свыше 4 едва ли целесообразно, так как прирост относительного эффекта уже незначительный.

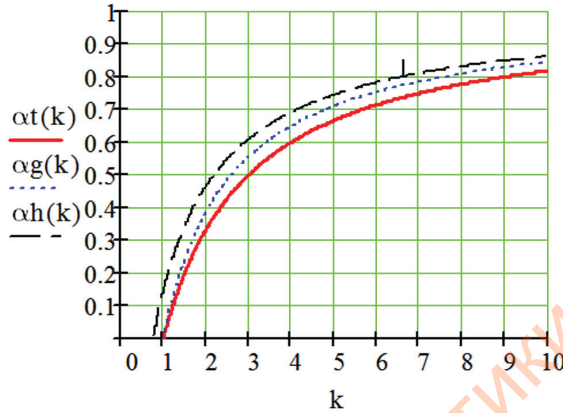


Рис. 8.3. Зависимость коэффициента относительного изменения индекса нечеткости $\alpha(k)$ для оператора INT_k от параметра k . Здесь и далее обозначения «t» - для НМ с треугольной ФП, «g» - для гауссовой ФП, «h» - для гармонической ФП

2. Исследование оператора CON_k показывает, что лишь на двух модельных НМ (с треугольной и гармонической ФП) действие его приводит к ожидаемому росту четкости во всем диапазоне значений k (рис. 8.4). На нечетком множестве с гауссовой функцией принадлежности оператор имеет небольшую область значений k (от 0 до $\approx 1,368$), в которой его эффект вообще противоположен ожидаемому: нечеткость возрастает. Кроме того, видно, что чувствительность различных НМ к действию данного оператора существенно различная: максимальная для НМ с треугольной ФП, минимальная – для гауссовой ФП. По сравнению с оператором INT_k скорость роста эффекта для CON_k существенно ниже при одних и тех же значениях параметра $1 < k < 3$.

В соответствии с выявленными недостатками индикатора $\alpha(k)$ введем дополнительный показатель оценки действия оператора CON_k . Это коэффициент концентрации, рассчитываемый по формуле

$$K_{CON_k} = \frac{\int_a^c (\mu_{\bar{A}}(x) - \mu_{CON_k(\bar{A})}(x)) dx}{\int_a^c \mu_{\bar{A}}(x) dx}.$$

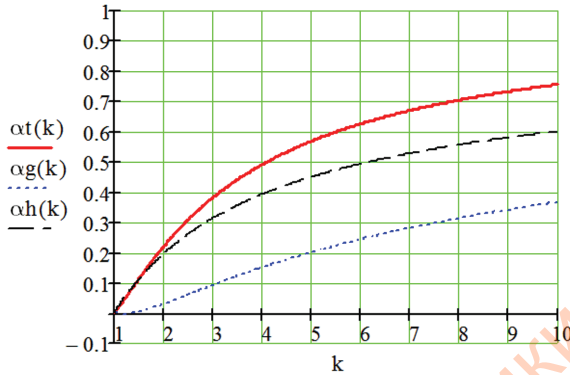


Рис. 8.4. Зависимость коэффициента относительного изменения индекса нечеткости $\alpha(k)$ для оператора CON_k от k

Данный коэффициент имеет прозрачный геометрический смысл: он показывает величину относительного «сжатия» площади, заключенной между кривыми ФП множеств до и после воздействия оператора, по сравнению с площадью под кривой ФП исходного множества $\tilde{A}$. Нулевое значение соответствует нулевому эффекту оператора, предельное значение 1 получается при бесконечном наращивании параметра k , в результате чего образуется четкое множество, состоящее из единственного элемента b .

Результат параметрического исследования оператора по данному показателю представлен на рис. 8.5. Видно, что вышеуказанные противоречия снимаются, т.е. коэффициент концентрации в большей мере подходит для количественной оценки действия оператора CON .

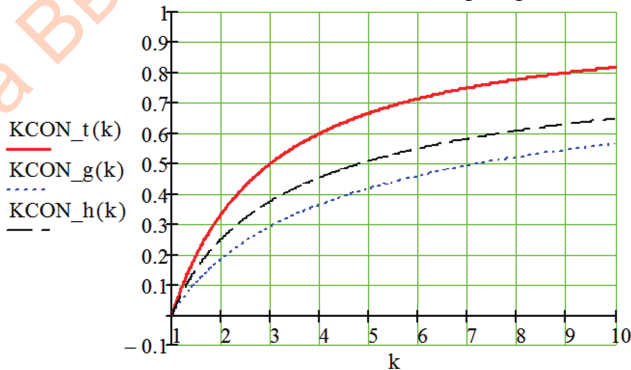


Рис. 8.5. Зависимость коэффициента концентрации K_{CON} для оператора CON_k от параметра k

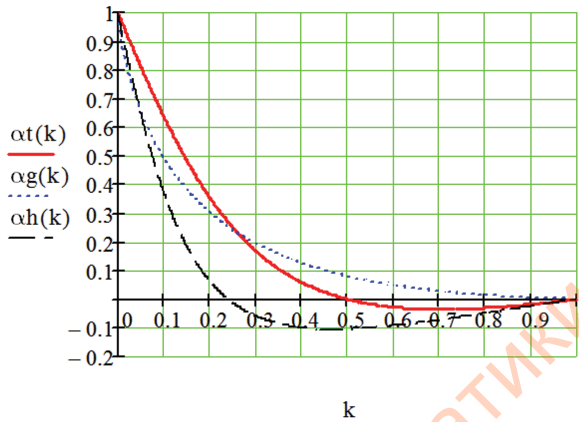


Рис. 8.6. Зависимость коэффициента относительного изменения индекса нечеткости $\alpha(k)$ для оператора DIL_k от k

3. Исследование оператора DIL_k показывает, что ожидаемое его действие (повышение нечеткости) проявляется не во всех диапазонах значений параметра k , а лишь от 0,5 до 1 для треугольной ФП и от 0,24 до 1 для гармонической ФП. Для нечеткого множества с гауссовой ФП действие оператора DIL_k всегда приводит к снижению нечеткости (рис. 8.6).

Как и в случае оператора концентрации, введем альтернативный показатель оценки действия оператора DIL_k – коэффициент растяжения:

$$K_{DIL_k} = \frac{\int_a^c \left(\mu_{DIL_k(\tilde{A})}(x) - \mu_{\tilde{A}}(x) \right) dx}{\int_a^c \left(1 - \mu_{\tilde{A}}(x) \right) dx}.$$

Результат параметрического исследования оператора DIL_k по данному показателю приведен на рис. 8.7. Сопоставляя кривые на рис. 8.6 и 8.7, можно предположить, что практически целесообразно применять оператор DIL_k при значениях k от 0,5 до 0,8 для треугольной ФП; от 0,3 до 0,8 для гармонической ФП.

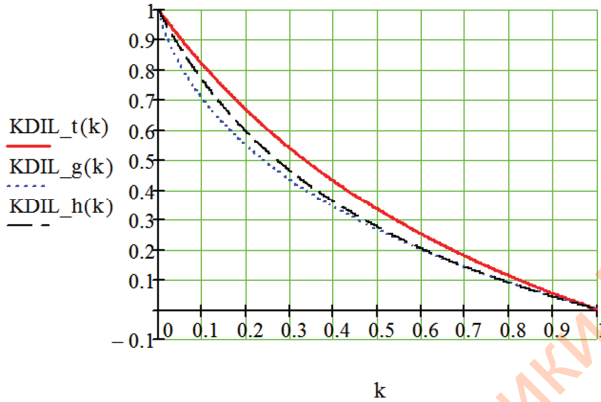


Рис. 8.7. Зависимость коэффициента растяжения K_{DIL} для оператора DIL_k от параметра k

Вопросы и упражнения к разделу 8

1. Пусть универсальное множество $U = \{a, b, c, d, e\}$ - множество людей, на котором задано нечеткое множество $\tilde{A}$ - «человек, хорошо владеющий английским языком»:

$$\tilde{A} = \frac{0,8}{a} + \frac{0,3}{b} + \frac{0,6}{c} + \frac{0,7}{d} + \frac{1}{e}.$$

Используя операции концентрирования и растяжения, записать множества: $\tilde{B} = CON(\tilde{A})$ - «человек, очень хорошо владеющий английским языком»; $\tilde{C} = DIL(\tilde{A})$ - «человек, более или менее владеющий английским языком».

2. Пусть $\tilde{A}$ - нечеткое множество, заданное на универсальном множестве $U = R^+ \cup \{0\}$ функцией принадлежности:

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sin\left(\frac{\pi}{2}(x-1)\right), & \text{если } 0 \leq x \leq 2 \\ 0, & \text{если } x > 2. \end{cases}$$

Требуется: а) записать множества $CON(\tilde{A})$, $DIL(\tilde{A})$, $INT(\tilde{A})$; б) построить графики функций принадлежности для

множеств $CON(\tilde{A})$, $DIL(\tilde{A})$, $INT(\tilde{A})$; в) сравнить индексы нечеткости множеств $\tilde{A}$, $CON(\tilde{A})$, $DIL(\tilde{A})$, $INT(\tilde{A})$.

3. Доказать, что для любого нечеткого множества $\tilde{A}$ имеет место $CON(\tilde{A}) \subseteq \tilde{A} \subseteq DIL(\tilde{A})$.
4. Попробуйте предложить аксиоматическую базу для лингвистических модификаторов на унимодальных нормальных НМ с непрерывными носителями.
5. Попробуйте предложить свой вариант оператора понижения контрастности нечеткого множества (BLR), чтобы его воздействие было противоположным действию оператора INT.
6. Найдите функции принадлежности для нечеткого множества «очень-очень богатых людей», если $\tilde{A}$ - нечеткое множество «богатых людей» с функцией принадлежности

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{2(x-9)}, & \text{если } x \geq 10 \\ \frac{x}{20 \cdot (11-x)}, & \text{если } 0 \leq x < 10, \end{cases}$$

где x – доход человека в тысячах условных единиц.
Постройте графики этих функций.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Беллман Р.* Математические методы в медицине / Р. Беллман. - М.: Мир, 1987. - 200 с.
2. *Гмурман В.Е.* Теория вероятностей и математическая статистика. - 9-е изд., стер. - М.: Высшая школа, 2003. - 479 с.
3. *Заде Л.* Понятие лингвистической переменной и ее применение к принятию приближенных решений. - М.: Мир, 1976. - 166 с.
4. *Кирьянов Д.В.* Самоучитель Mathcad 13. СПб.: БХВ-Петербург, 2006. - 528 с.
5. *Коньшьева, Л.К., Назаров Д.М.* Основы теории нечетких множеств: учеб. пособие. - СПб.: Питер, 2011. - 192 с.
6. *Кофман А.* Введение в теорию нечетких множеств: пер. с франц. - М.: Радио и связь, 1982. - 432 с.
7. *Пегат А.* Нечеткое моделирование и управление / А. Пегат: пер. с англ. - М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2009. - 798 с.: ил. - (Адаптивные и интеллектуальные системы).
8. *Рыжов А. П.* Элементы теории нечетких множеств и ее приложений. - М., 2003. - 125 с.
9. *Саати Т.* Принятие решений. Метод анализа иерархий: пер. с англ. - М.: Радио и связь, 1993. - 278 с.
10. *Соколов Д.П.* Нечеткое программирование. Нечеткие системы ИЕС 1131-7 // T-Comm. 2010. №10. С.68-69.
11. *Халов Е.А.* Систематический обзор четких одномерных функций принадлежности интеллектуальных систем // Информационные технологии и вычислительные системы. 2009. № 3. С. 60-74.
12. *Штовба С.Д.* Проектирование нечетких систем средствами MATLAB. - М.: Горячая линия - Телеком, 2007. - 288 с.
13. *Altrock C.* Fuzzy logic. Band 1. Technologie. Munchen, BRD: R. Oldenburg Verlag GmbH, 1993. P. 475.
14. *Dubois D., Prade H.,* Fuzzy sets in approximate reasoning, Part 1: Inference with possibility distributions, Fuzzy Sets and Systems 40 (1991), p. 143-202.
15. *Holmblad L.P., Osregard J.J.* Control of Cement Kiln by Fuzzy Logic. In Approximate Reasoning in Decision Analysis (Gupta M.M. and Sanchez E. Eds.): Amsterdam, New York, Oxford. 1982 P.389-400.
16. *Kai Yao; Jian Zhou.* Uncertainty Theory and Its Applications. Journal of Uncertain Systems. Vol.8, No.4, p.243, 2014.

17. *Kosko B.* Fuzzy Systems as Universal Approximators // IEEE Trans, on Computers. - 1994. - Vol. 43. - №11. - P. 1329-1333.

18. *Mamdani E.H., Assilian S.* An Experiment in Linguistic Synthesis with Fuzzy Logic Controller // Int. J. Man-Machine Studies. - 1975 . Vol. 7. №1. P.1-13.

19. *S. Mitaim and B. Kosko.* The Shape of Fuzzy Sets in Adaptive Function Approximation, IEEE Transactions on Fuzzy Systems, Vol.9, No. 4, August 2001. P.637-656.

20. *Zadeh L.* Fuzzy sets / L. Zadeh // Information and Control. - 1965. - V. 8. - P. 338-353.

21. *Zadeh L.A.*, A fuzzy-set-theoretic interpretation of linguistic hedges, Journal of Cybernetics, 1972, 2, p. 434.

22. *Zimmermann H.-J.* Fuzzy Set Theory and Its Applications. Allied Publishers, Kluwer Academic Publishers, 1992. – 407 p. – 2nd ed.

К о н ю х о в Алексей Николаевич
Д ю б у а Александр Борисович
С а ф о ш к и н Алексей Сергеевич

Основы теории нечетких множеств. Часть 1

Редактор М.Е. Цветкова
Корректор С.В. Макушина

Подписано в печать 05.07.17. Формат бумаги 60×84 1/16.

Бумага писчая. Печать трафаретная. Усл. печ. л. 5,5.

Тираж 50 экз. Заказ 3347

Рязанский государственный радиотехнический университет.

390005, Рязань, ул. Гагарина, 59/1.

Редакционно-издательский центр РГРТУ.