УДК 681.3

А.П. Шибанов, Н.В. Кравчук

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МОДЕЛЕЙ GERT ПРИ ОПТИМИЗАЦИИ КОМПЬЮТЕРНЫХ СЕТЕЙ

Рассматриваются методы локальной параметрической оптимизации компьютерных сетей на основе моделей GERT. В GERT-сети выделяется множество ветвей по функциональным, информационным или структурным характеристикам. Рассматриваются GERT-сети, составленные из частичных графов с выполнением условий аддитивности их выходных случайных величин. Предлагается метод параметрической оптимизации с использованием средних значений времени прохождения ветвей и учетом степени их влияния на конечный результат.

Введение. При моделировании компьютерных сетей можно выделить множество последовательно выполняемых операций, возможно с вероятностным выбором, которые отражают процесс перехода некоторой системы из состояния в состояние (с конечным или бесконечным числом состояний). Такой процесс связан с выполнением специфических функций, например процедур тестирования канала, восстановления работоспособности системы после отказа, реконфигурации отказоустойчивой сети, применения методов защиты информации, получения доступа к среде передачи, пересылки информации через канал связи и т.д. Отдельные процессы логически связаны друг с другом и естественным образом чередуются во времени. Режимы работы можно разделить на вспомогательные, такие как тестирование, реконфигурация сети, установление соединения для выполнения сеанса связи и т.п., и такие, в которых непосредственно выполняются основные функции системы, например передача пакетов по установленному соединению. Относительное уменьшение времени функционирования вспомогательных режимов повышает быстродействие и производительность системы. Разумеется, уменьшение этого времени не должно отрицательно сказываться на функционировании сети.

При проектировании или модернизации сети центральной задачей является обеспечение показателей качества (задержек передачи пакетов, ее вариации, допустимого коэффициента потерь и т.п.) для наиболее требовательных приложений: речи, видеоконференций и других приложений реального времени. Необходимые требования качества передачи трафика определенного профиля могут быть достигнуты как за счет физического увеличения полосы пропускания трактов передачи информации, так и методами “конструирования трафика”, что особенно характерно для новой сетевой технологии – многопротокольной коммутации с помощью меток (MPLS, *MultiProtocol Label Switching*). Конструирование трафика заключается: 1) в передаче информации не по одному кратчайшему пути, а по множеству самых коротких путей; 2) в резервировании полосы пропускания виртуальных каналов на участках между коммутирующими маршрутизаторами и вдоль всего туннеля между пограничными маршрутизаторами MPLS; 3) в разработке стратегии маршрутизации, обеспечивающей сбалансированность передающих трактов по коэффициенту нагрузки MPLS-маршрутизаторов на основе минимаксного критерия; 4) в оптимизации сети с учетом таких параметров, как максимальная длина передаваемого кадра – MTU (*Maximum Transmission Unit*), время жизни пакета – TTL (*Time To Live*), длина окна неподтвержденных пакетов, величина тайм-аута доставки и т.п.

Для проведения процесса оптимизации компьютерной сети в настоящее время введен термин “тонкая настройка сети” (под “грубой настройкой сети” понимают устранения явных отказов оборудования) [1]. Оптимизация на реальной сети практически невозможна из-за неприемлемой размерности решаемой задачи, ведь для изменения некоторого множества варьируемых параметров требуется перезагрузка операционных систем сетевых устройств. При проведении оптимизации стараются устранить причины, которые в наибольшей степени снижают показатели качества сети. Фактически решается некоторое множество задач локальной оптимизации с использованием методов математического моделирования.

Процесс оптимизации сети носит итерационный характер. Для повышения качества функционирования сетевых программных или аппаратных средств весьма важно оценить влияние задержек, вносимых операциями различных процессов. Можно представить себе примерную последовательность действий сетевого интегратора по оптимизации показателей качества сети:

1) моделирование всей системы для первоначальной оценки ее вероятностно-временных характеристик;

2) моделирование вероятностно-временных характеристик отдельных процессов с целью определения критических операций, вносящих в общую задержку наибольший вклад;

3) выработка рекомендаций по совершенствованию некоторого процесса, например изменение параметров отдельных операций, замена их на другие операции или (и) изменение последовательности и вероятности их выполнения;

4) моделирование вероятностно-временных характеристик выбранного процесса после изменения его параметров или структуры. Вычисление математического ожидания, дисперсии и оценка полученных результатов. Если они все еще не являются удовлетворительными применительно к данному процессу, то выполняется переход на п. 3. В противном случае – переход на п. 5;

5) моделирование GERT-сети целиком. Если нужные характеристики еще не достигнуты, то выполняется переход на п. 2. Иначе – конец оптимизации сети.

В настоящей статье рассматриваются вопросы оптимизации компонент сети на основе операционных моделей алгоритмов и программ сетевых устройств [2]. В дальнейшем предполагаем, что функционирование некоторой сетевой системы отражается графовой моделью с ориентированными дугами, в которой вершины соответствуют разным состояниям процесса и связываются дугами графа. Непрерывное время выполнения операций соотносится с дугами графа и является случайным с произвольным распределением. Такие модели широко используются для исследования протоколов и программ функций взаимодействия компьютерных сетей, методов и алгоритмов доступа к среде передачи данных. Результаты, полученные на данном уровне детализации компьютерной сети (в виде функций распределения выхода графа), могут быть использованы на более высоком иерархическом уровне – уровне имитационных систем массового обслуживания. Полученная функция распределения используется как выборочная и характеризует задержку заявки в обслуживающем приборе.

Используем метод исследования ориентированных графов на основе производящих функций моментов. В литературе он получил название “метод графической оценки и анализа систем” (GERT, *Graphical Evaluation and Review Technique*) [3]. При известных вероятностях ветвлений, а также распределений случайных величин, характеризующих ветви сети, можно по топологическому уравнению Мейсона найти производящую функцию моментов, определяемую в выходном узле-стоке сети. В работах [4, 5] рассмотрены численные методы и реализация программ получения распределения выходной величины GERT-сети.

GERT-сети с разными группами ветвей. Рассмотрим GERT-сеть с непрерывным временем, имеющую группы ветвей $\widetilde{G}_1,\ldots,\widetilde{G}_i,\ldots,\widetilde{G}_\delta$. Каждая группа $\widetilde{G}_i=\left\{g_1^{(i)},\ldots,g_k^{(i)}\right\}$ содержит ветви, характеризующие операции, относящиеся к какому-то одному процессу или режиму работы. При этом любая ветвь GERT-сети входит только в одну группу. Символом G обозначим обычную GERT-сеть. Если $\widetilde{G}_i$ – рассматриваемая группа, то остальное множество дополняющих до полной сети ветвей (подразумевается, что ветви образуют частичный граф вместе с соединяющими их вершинами) обозначим через $\overline{G}$. На каждой итерации мы сосредоточим свое внимание на варьировании только тех проектных переменных, которые связаны со спецификациями ветвей некоторой группы $\widetilde{G}_i$. Задержки во всех остальных ветвях GERT-сети (или во множестве $\overline{G}$) полагаются равными нулю. Это означает, что производящие функции моментов случайных величин, описывающих эти ветви, равны единице. Вероятности прохождений этих ветвей не изменяются. Откорректированное таким образом множество $\overline{G}$ обозначим через $\breve{G}$. В общем случае свойство связности для ветвей любой группы $\widetilde{G}_i$ может не соблюдаться. Это означает, что операции, относящиеся к разным процессам, могут выполняться в произвольной последовательности.

Наиболее желательным является проведение независимой оптимизации временных параметров отдельных процессов или технологических режимов при условии, что полное время выполнения процесса было бы равно сумме времен выполнения частных подпроцессов (именно для этого мы и вводим условие равенства нулю времени прохождения ветвей $g \notin \widetilde{G}_i$).

Постановка задачи. Рассмотрим постановку задачи в двух вариантах:

1. GERT-сеть строится из частичных графов, каждый из которых содержит ветви групп $\widetilde{G}$ или $\overline{G}$. Должно соблюдаться соотношение $t_G = t_{\widetilde{G}} + t_{\overline{G}}$, где $t_{\widetilde{G}}$, $t_{\overline{G}}$ – времена выполнения соответствующих частичных графов. При нахождении распределения величины $t_{\widetilde{G}}$ производящие функции моментов ветвей группы $\overline{G}$ равны единице, а при нахождении распределения времени $t_{\overline{G}}$ производящие функции моментов ветвей группы $\widetilde{G}$ также полагаются равными единице. Наилучшие характеристики сети G находятся путем пошагового изменения параметров ветвей группы $\widetilde{G}_i$. При этом достаточно трудоемкий метод нахождения плотности и функции распределения подграфа $\overline{G}$ используется лишь однажды.

2. GERT-сеть содержит в себе группы ветвей $\widetilde{G}_1, \ldots, \widetilde{G}_\delta$. Выполнение условия аддитивности выходных величин частичных графов, составленных из ветвей групп $\widetilde{G}_i$ и $\overline{G}$, не требуется. Итерационный процесс варьирования значений параметров частичной сети, порожденной ветвями группы $\widetilde{G}_i$, будем проводить, оперируя не с распределениями выходных случайных величин частичных графов $\widetilde{G}_i$ и $\overline{G}$, а с первыми моментами этих распределений. Никаких ограничений на структуру GERT-сети не накладывается.

Решение задачи. *В первом варианте* постановки задачи GERT-сеть строится из типовых фрагментов. Для выходных величин частичных графов, состоящих из ветвей групп $\widetilde{G}$ и $\overline{G}$, выполняются условия аддитивности. Известно, что произвольная GERT-сеть может быть построена из типовых фрагментов: последовательных ветвей, параллельных ветвей и элементарного частичного графа “ветвь и петля”. Кроме того, распределение любой GERT-сети может быть найдено численным методом с использованием эквивалентных упрощающих преобразований ее структуры [5].

Если GERT-сеть G состоит из двух *последовательных* ветвей g_1, g_2 и $g_1 \in \widetilde{G}$, $g_2 \in \overline{G}$, то при проведении оптимизации будет выполняться соотношение

$$W_{g_1}(s) W_{g_2}(s) = M_{g_1}(s) M_{g_2}(s) = M_{g_1}(s),$$

где $M_{g_1}(s)$, $M_{g_2}(s)$ – производящие функции моментов времени прохождения ветвей g_1 и g_2; $W_{g_1}(s)$, $W_{g_2}(s)$ – W-функции ветвей g_1 и g_2.

Если считать, что $g_2 \in \widetilde{G}$, $g_1 \in \overline{G}$, то

$$W_{g_2}(s) W_{g_1}(s) = M_{g_2}(s) M_{g_1}(s) = M_{g_2}(s).$$

То есть, если в выражениях для эквивалентных W-функций частичных графов $\widetilde{G}$ и $\overline{G}$ значения производящих функций моментов времени прохождения ветвей поочередно приравнивать к единице, то эквивалентная функция GERT-сети

$$W_E(s) = \left(M_{g_1}(s) \middle| \, g_1 \in \widetilde{G} \right) \left(M_{g_2}(s) \middle| \, g_2 \in \widetilde{G} \right).$$

А это означает, что случайные величины $t_{\widetilde{G}}$ и $t_{\overline{G}}$ аддитивны при сформулированных условиях решения задачи. Результат легко обобщается на множество последовательных ветвей.

Рассмотрим частичный граф *ветвь и петля* (рис. 1). Пунктиром изображены ветви, для которых производящие функции моментов соответствующих случайных величин равны единице.

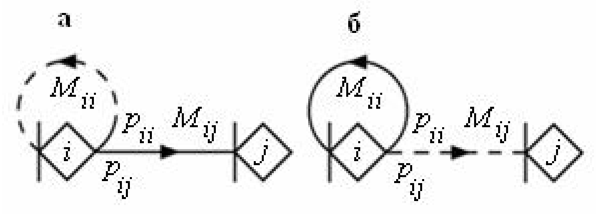

Рис. 1

Вес $W_{Eij}(s)$ эквивалентной ветви (i, j) определяется по топологическому уравнению Мейсона: $W_{Eij}(s) = W_{ij}(s) / (1 - W_{ii}(s))$, где W_{ii} и W_{ij} есть W-функции ветвей (i, i) и (i, j) соответственно. Если $(i, j) \in \widetilde{G} \wedge (i, i) \in \overline{G}$ (рис. 1,а), то эквивалентная W-функция частичного графа $\widetilde{G}$ для данного случая

$$W_E^{(a)}(s) = \left. \frac{p_{ij} M_{ij}(s)}{1 - p_{ii} M_{ii}(s)} \right|_{M_{ii}=1} = M_{ij}(s),$$

где $M_{ii}(s)$, $M_{ij}(s)$ – производящие функции моментов времени прохождения ветвей (i, i) и (i, j), а $p_{ii}(s)$, $p_{ij}(s)$ – вероятности выбора этих ветвей.

Если $(i,i) \in \widetilde{G} \wedge (i,j) \in \overline{G}$ (рис. 1,б), то соответствующая эквивалентная W-функция частичного графа $\widetilde{G}$

$$W_E^{(б)}(s) = \left.\frac{p_{ij} M_{ij}(s)}{1 - p_{ii} M_{ii}(s)}\right|_{M_{ij}=1} = \frac{p_{ij}}{1 - p_{ii} M_{ii}(s)}.$$

Тогда $W_E^{(a)}(s) \cdot W_E^{(б)}(s) = \dfrac{p_{ij} M_{ij}(s)}{1 - p_{ii} M_{ii}(s)} =$

$$= \frac{W_{ij}(s)}{1 - W_{ii}(s)} = W_{Eij}(s).$$

Это означает, что условие аддитивности величин $t_{\widetilde{G}}$ и $t_{\overline{G}}$ выполняется.

Рассмотрим *параллельные* ветви.

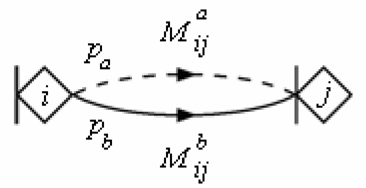

Рис. 2

На рис. 2 изображена GERT-сеть, в которой ветвь $(i,j)_a \notin \widetilde{G}$, а ветвь $(i,j)_b \in \widetilde{G}$. Положим поочередно $M_{ij}^a(s) = 1$ и $M_{ij}^b(s) = 1$, где $M_{ij}^a(s)$ и $M_{ij}^b(s)$ – производящие функции моментов времени прохождения ветвей $(i,j)_a$ и $(i,j)_b$ соответственно. Далее посмотрим, будут ли выполняться условия аддитивности для переменных $t_{\widetilde{G}}$ и $t_{\overline{G}}$. Если $\left((i,j)_a \in \overline{G}\right) \wedge \left((i,j)_b \in \widetilde{G}\right)$, то $M_{ij}^a(s) = 1$. Здесь $p_{ij} = p_a + p_b$, p_a и p_b – вероятности выбора ветвей $(i,j)_a$ и $(i,j)_b$, p_{ij} – вероятность попадания из узла i в узел j. Тогда

$$\left[p_a M_{ij}^a(s) + p_b M_{ij}^b(s)\right] / (p_a + p_b) =$$
$$= \left[p_a + p_b M_{ij}^b(s)\right] / (p_a + p_b).$$

Эквивалентная W-функция GERT-сети при условии, что $\left((i,j)_a \in \overline{G}\right) \wedge \left((i,j)_b \in \widetilde{G}\right)$,

$$W_{b \in \widetilde{G}}(s) = (p_a + p_b)\, \frac{p_a + p_b M_{ij}^b(s)}{p_a + p_b} =$$
$$= p_a + p_b M_{ij}^b(s).$$

Если справедливо $\left((i,j)_a \in \widetilde{G}\right) \wedge \left((i,j)_b \in \overline{G}\right)$, то в силу симметричности задачи эквивалентная W-функция GERT-сети при выполнении данного условия имеет вид

$$W_{a \in \widetilde{G}}(s) = p_a M_{ij}^a(s) + p_b.$$

Из этого следует, что

$$W_{b \in \widetilde{G}}(s)\, W_{a \in \widetilde{G}}(s) =$$
$$= \left[p_a M_{ij}^b(s) + p_b\right] \cdot \left[p_a + p_b M_{ij}^a(s)\right] \neq W_{EG},$$

где W_{EG} – эквивалентная W-функция полной сети G. Поэтому условия аддитивности не выполняются.

Использование для моделирования и оптимизации структур и режимов GERT-сетей, составленных из простейших фрагментов, таких как “последовательная ветвь” и “ветвь с петлей”, позволяет проводить многократное изменение проектных параметров одной части моделируемой системы при условии, что время задержки передачи пакета в остальных ее частях характеризуется известным распределением вероятностей. В рассмотренных типовых фрагментах ветви могут быть и эквивалентными, представляющими собой GERT-сеть нижнего уровня иерархии. На основе фрагмента типа “ветвь с петлей” можно строить более сложные модели и оптимизировать системы с вложенными циклами.

Во втором варианте постановки задачи знания распределения величины $t_{\overline{G}}$ не требуется.

Определение. Совокупность ветвей и узлов простого $s-t$-пути и петель первого порядка, имеющих общие узлы с рассматриваемым простым $s-t$-путем, назовем частичным графом GERT-сети, порожденным данным простым $s-t$-путем. Частичный граф, порожденный φ-м простым $s-t$-путем, обозначим через $G_\varphi^{(s-t)}$.

В работе [6] показано, что любая GERT-сеть может быть эквивалентно представлена совокупностью параллельно соединенных частичных графов GERT-сети, порожденных простыми $s-t$-путями.

Для выполнения предварительных оценок быстродействия преобразуемого частичного графа будем искать первые моменты выходных величин частичных графов относительно начала координат. Можно за короткое время найти значения дисперсий этих величин и оценить вероятность их попадания в интервал “трех сигм” [2]. Таких оценок достаточно для проведения предварительных итерационных расчетов частичных графов, состоящих из ветвей множества $\widetilde{G}$. В конечном итоге, после получения нужных значений параметров преобразуемого частичного графа на основе первых двух моментов распределения, находится распределение выходной величины этого частичного графа $\widetilde{G}$ методом, изложенным в [4, 5].

ISBN 978-5-7722-0272-2. Вестник РГРТА. Вып. 20. Рязань, 2007

Теорема. *Среднее время прохождения частичного графа $G^{(s-t)}$, порожденного простым $s-t$-путем, можно представить в виде суммы средних времен прохождения каждой ветви, взятых с некоторыми постоянными коэффициентами.*

Эквивалентная W-функция *частичного графа* $G^{(s-t)}$

$$W_E^{(s-t)}(s)= \frac{\prod_{\beta=1}^{B} W_\beta(s)}{1-\sum_i\prod_j W_{ij}^{(1)}(s)+\ldots+(-1)^r\sum_k\prod_l W_{kl}^{(r)}(s)}, \quad (1)$$

где $\prod_{\beta=1}^{B} W_\beta(s)$ – произведение W-функций ветвей простого $s-t$-пути;

$\sum_i\prod_j W_{ij}^{(1)}(s)$ – сумма произведений W-функций петель первого порядка;

$(-1)^r\sum_k\prod_l W_{kl}^{(r)}(s)$ – сумма произведений W-функций петель r-го порядка.

Петлей первого порядка в GERT-сети называется связная последовательность ориентированных ветвей, каждый узел которых является общим ровно для двух ветвей. Петля порядка l определяется как множество l не связанных между собой петель первого порядка.

Прологарифмируем, а потом продифференцируем по переменной s выражение (1) и положим $s=0$.

$$\left.\frac{\dfrac{\partial W_E^{(s-t)}(s)}{\partial s}}{W_E^{(s-t)}(s)}\right|_{s=0} = \sum_{\beta=1}^{B}\left.\frac{\partial\left[\ln W_\beta(s)\right]}{\partial s}\right|_{s=0} - \quad (2)$$

$$-\left.\frac{\dfrac{\partial\left[1-\sum_i\prod_j W_{ij}^{(1)}(s)+\ldots+(-1)^r\sum_k\prod_l W_{kl}^{(r)}(s)\right]}{\partial s}}{1-\sum_i\prod_j W_{ij}^{(1)}(s)+\ldots+(-1)^r\sum_k\prod_l W_{kl}^{(r)}(s)}\right|_{s=0}.$$

В данном выражении $\partial W_E^{(s-t)}(s)/\partial s\big|_{s=0}=\mu_1$ – среднее время прохождения рассматриваемого частичного графа $G^{(s-t)}$, $W_E^{(s-t)}(s)\big|_{s=0}=1$. Преобразуем первое слагаемое в правой части уравнения (2).

$$\sum_{\beta=1}^{B}\left.\frac{\partial\left[\ln W_\beta(s)\right]}{\partial s}\right|_{s=0} = \sum_{\beta=1}^{B}\left.\frac{\dfrac{\partial\left[p_\beta M_\beta(s)\right]}{\partial s}}{p_\beta M_\beta(s)}\right|_{s=0} = \quad (3)$$

$$=\bar t_1+\bar t_2+\ldots+\bar t_B,$$

где $\bar t_1,\bar t_2,\ldots,\bar t_B$ – средние времена прохождения ветвей простого $s-t$-пути; p_β – вероятность выбора ветви β, принадлежащей простому $s-t$-пути, $M_\beta(s)$ – производящая функция моментов времени прохождения этой ветви.

Упростим второе слагаемое в правой части уравнения (2). Сначала рассмотрим числитель этого слагаемого и найдем результат дифференцирования произведения $\prod_{h=1}^{H} W_h^{(l)}(s)$, определяющего эквивалентную W-функцию петли порядка l.

$$\left.\frac{\partial}{\partial s}\left[W_1(s)W_2(s)\ldots W_H(s)\right]\right|_{s=0} =$$

$$=\left.\frac{\partial\left[p_1M_1(s)\right]}{\partial s}p_2M_2(s)\ldots p_HM_H(s)\right|_{s=0}+$$

$$+\left.p_1M_1(s)\frac{\partial\left[p_2M_2(s)\right]}{\partial s}p_3M_3(s)\ldots p_HM_H(s)\right|_{s=0}+$$

$$\ldots$$

$$+\left.p_1M_1(s)\ldots p_{H-1}M_{H-1}(s)\frac{\partial\left[p_HM_H(s)\right]}{\partial s}\right|_{s=0},$$

где H – число ветвей в петле порядка l, а $p_1,p_2,\ldots,p_H$ и $M_1(s)$, $M_2(s)$, …, $M_H(s)$ – соответственно вероятности выбора и производящие функции моментов, характеризующих время прохождения ветвей петли порядка l.

Производные от производящих функций моментов случайных величин, взятые при $s=0$, равны среднему времени прохождения этих ветвей, а соответствующие производящие функции моментов при $s=0$ обращаются в единицы. Поэтому имеем:

$$\left.\frac{\partial}{\partial s}\left[W_1(s)W_2(s)\ldots W_H(s)\right]\right|_{s=0} = \bar t_1p_1p_2\ldots p_H+$$

$$+\quad p_1p_2\bar t_2p_3\ldots p_H + p_1p_2\ldots p_{H-1}p_H\bar t_H=$$

$$=\quad\left(\bar t_1+\bar t_2+\ldots+\bar t_H\right)\prod_{h=1}^{H}p_h.$$

Величина $\prod_{h=1}^{H}p_h$ есть произведение вероятностей прохождения всех ветвей рассматриваемой петли порядка l, а переменные $\bar t_1,\bar t_2,\ldots,\bar t_H$ определяют среднее время прохождения каждой из этих ветвей.

Аналогичный результат получается при дифференцировании *W*-функций и других петель порядка *l*. Таким образом, можно сделать вывод о том, что в результате дифференцирования по переменной *s* множества сумм произведений *W*-функций петель порядка *l* получается линейное соотношение относительно средних времен прохождения ветвей данной петли.

Так как этот вывод справедлив и для всех петель других порядков, то числитель второго слагаемого в правой части уравнения (2) можно представить в виде $\sum_{\mu=1}^{R} k_\mu \bar{t}_\mu$, где $\bar{t}_\mu$ – среднее время прохождения ветви, входящей хотя бы в одну из петель первого или более высоких порядков, за исключением тех, которые входят в простой $s-t$-путь и не входят ни в одну из других петель первого порядка, k_μ– постоянные коэффициенты, определяемые значениями вероятностей прохождения ветвей, *R* – число ветвей.

Знаменатель второго слагаемого в правой части уравнения (2) содержит суммы произведений *W*-функций петель всевозможных порядков, и после приравнивания переменной *s* к нулю его значение равно некоторому постоянному коэффициенту, зависящему от вероятностей прохождения ветвей. Тогда правая часть выражения (2) равна $a_1 \bar{t}_1 + \ldots + a_R \bar{t}_R$, где $a_1, \ldots, a_R$ – постоянные коэффициенты. Из этого соотношения и выражения (3) и следует вывод о справедливости теоремы.

Рассмотрим пример применения данного метода для GERT-сети, изображенной на рис. 3.

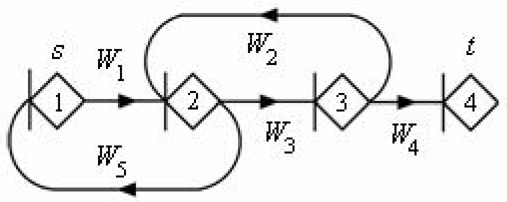

Рис. 3

Принятые на рис. 3 обозначения поясняются в таблице.

Эквивалентная *W*-функция сети

$$W_E(s) = \frac{W_1(s) W_3(s) W_4(s)}{1 - W_1(s) W_5(s) - W_2(s) W_3(s)}.$$

После логарифмирования левой и правой частей этого выражения имеем

$$\ln W_E(s) = \ln W_1(s) + \ln W_3(s) + \ln W_4(s) - $$
$$- \ln\left[1 - W_1(s) W_5(s) - W_2(s) W_3(s)\right].$$

Таблица

Ветвь	*W*-функция	Вероятность выполнения	Производящая функция моментов	Среднее время прохождения
(1,2)	$W_1(s)$	p_1	$M_1(s)$	$\bar{t}_1$
(3,2)	$W_2(s)$	p_2	$M_2(s)$	$\bar{t}_2$
(2,3)	$W_3(s)$	p_3	$M_3(s)$	$\bar{t}_3$
(3,4)	$W_4(s)$	p_4	$M_4(s)$	$\bar{t}_4$
(2,1)	$W_5(s)$	p_5	$M_5(s)$	$\bar{t}_5$

Продифференцировав левую и правую части выражения по переменной *s* и учитывая, что $W(s) = pM(s)$, получаем

$$\mu_1 = \left.\left(\frac{M_1'(s)}{M_1(s)} + \frac{M_3'(s)}{M_3(s)} + \frac{M_4'(s)}{M_4(s)}\right)\right|_{s=0} +$$
$$+ \frac{p_1 M_1'(s) p_5 M_5(s) + p_1 M_1(s) p_5 M_5'(s) +}{1 - p_1 M_1(s) p_5 M_5(s) - p_2 M_2(s) p_3 M_3(s)} \to$$
$$\to \left.\frac{+ p_2 M_2'(s) p_3 M_3(s) + p_2 M_2(s) p_3 M_3'(s)}{}\right|_{s=0}.$$

Производные по переменной *s* от производящих функций моментов времени прохождения ветвей при *s* = 0 равны средним значениям времени их прохождения, а производящие функции моментов времени прохождения ветвей при *s* = 0 равны единице. С учетом этого и того, что $p_1 = 1$, получаем

$$\mu_1 = \bar{t}_1 + \bar{t}_3 + \bar{t}_4 + \frac{p_5}{p_3 p_4}\left(\bar{t}_1 + \bar{t}_5\right) + \frac{p_2}{p_4}\left(\bar{t}_2 + \bar{t}_3\right)$$
$$= \left(1 + \frac{p_5}{p_3 p_4}\right)\bar{t}_1 + \frac{p_2}{p_4}\bar{t}_2 + \frac{1}{p_4}\bar{t}_3 + \bar{t}_4 + \frac{p_5}{p_3 p_4}\bar{t}_5.$$

Среднее время прохождения GERT-сети μ_1 является линейной функцией от среднего времени прохождения отдельных ветвей. Переменные $\bar{t}$ легко разделяются на те из них, которые относятся к множеству $\widetilde{G}$, и те, которые входят во множество $\overline{G}$. Коэффициенты при переменных $\bar{t}$ определяют степень их относительного влияния на конечный результат.

Заключение. Использование методов выделения частичных графов в GERT-модели позволяет более эффективно выполнять варьирование проектных параметров при оптимизации компьютерных сетей. В наибольшей степени проблема оптимизации стоит перед разработчиками новой сетевой технологии MPLS. Такие сети называют конвергентными, так как они сочетают в себе такие достоинства, как высокая скорость передачи и защищенность информации, заимствованные из сетей на основе виртуальных каналов frame relay и ATM, и хорошее масштабирование сетей стека протоколов TCP/IP (сети Интернет). В настоящее время является актуальной задача создания внешних по отношению к ядру сети MPLS программно-аппаратных комплексов моделирования структур и режимов функционирования сети, методов оптимального резервирования полосы пропускания для разных приложений пользователей, профилирования и конструирования трафика. Создание таких автоматизированных комплексов важно для достижения гарантированных показателей качества современных компьютерных сетей.

Работа поддержана Российским Фондом фундаментальных исследований, грант № 07-07-00146.

Библиографический список

1. *Олифер В.Г., Олифер Н.А.* Средства анализа и оптимизации локальных сетей. Источник – Интернет. http://www.d-link.ru/technology/olifer.php.

2. *Головкин Б.А.* Расчет характеристик и планирование параллельных вычислительных процессов. М.: Радио и связь, 1983. – 272 с.

3. *Филлипс Д., Гарсиа-Диас А.* Методы анализа сетей. – М.: Мир, 1984. – 496 с.

4. *Корячко В.П., Шибанов А.П., Шибанов В.А.* Численный метод нахождения закона распределения выходных величин GERT-сети // Информационные технологии.– № 7. – 2001. – С. 16 – 21.

5. *Шибанов А.П.* Нахождение плотности распределения времени исполнения GERT-сети на основе эквивалентных упрощающих преобразований // Автоматика и телемеханика. – № 2. – 2003. – С. 117 – 126.

6. *Кравчук Н.В.* Способ эквивалентного представления GERT-сети через параллельно соединяемые подсети // Информационные технологии и телекоммуникации в образовании и науке. – Рязань, 2006. – С. 44 – 49.