ISSN 1995-4565. Вестник РГРТУ. Вып. 21. Рязань, 2007

УДК 519.7

В.В. Тарасов

К ПРОБЛЕМЕ ВЫРАЗИМОСТИ БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ НАД БАЗИСОМ ИЗ БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ С ПАРАМЕТРОМ

Получены необходимые и достаточные условия, при которых система булевых функций с одним параметром, содержащая константы, способна реализовывать произвольные булевы функции, свободные от параметра.

Введение. В работах [1, 2] изучались некоторые аспекты проблемы выразимости булевых функций над базисом, зависящим от несобственных булевых переменных (параметров) – индикаторов внешних воздействий. Были найдены некоторые достаточные условия, налагаемые на базисную систему, при которых возможна реализация булевых функций, свободных от действия внешних факторов [1]. Кроме того, в работе [2] были получены условия, при которых реализуются сами индикаторы внешних воздействий.

В настоящей работе будут найдены необходимые и достаточные условия, которые надо наложить на базис булевых функций с одним параметром и содержащий константы, с тем, чтобы производить синтез произвольных булевых функций, не зависимых от параметра. Решенная задача позволит частично положительно решить и более общую проблему выразимости булевых функций над базисом с несколькими параметрами, так как при некоторых достаточно сильных подходящих условиях, налагаемых на базис, можно при синтезе освобождаться от параметров в порядке очередности одним за другим.

Пусть $N = \{f_i(\tilde{x}, z)\}$ – базис, z – параметр. Согласно диаграмме Поста [3] N содержит один из классов Поста (клонов): A_1 (класс всех монотонных функций), P_6 (класс всех положительных конъюнкций и констант), S_6 (класс всех положительных дизъюнкций и констант), L_1 (класс всех линейных функций), O_9 (класс всех функций, зависящих от не более чем от одного переменного), O_8 (класс всех функций, равных простой переменной или константе). Пусть B – один из указанных классов, $P_2(z)$ - все булевы функции от параметра z, $P_2 \subseteq P_2(z)$. Замкнутый класс $B(z)$, содержащий класс Поста B и такой, что $B = P_2 \cap B(z)$, будем называть расширением класса B. Систему расширений

$$B_1(z), \ldots, B_r(z), \ldots \qquad (1)$$

будем называть z-достаточной для B, если как только N, $N \subseteq P_2(z)$, (N содержит базис класса B) целиком не содержится ни в одном из классов списка (1), система N строит некую булеву функцию из P_2, не принадлежащую классу B. Расширения (1) будем описывать в основном как классы сохранения основания функций одного переменного с параметром z, [4].

Функции $f(\tilde{x}, z) = \varphi(\tilde{x}) z \vee \psi(\tilde{x}) \bar{z}$ позволим себе обозначать более коротко $(\varphi(\tilde{x}), \psi(\tilde{x}))$ или, если не возникает разночтений, то и просто $(\varphi\psi)$; так, например, $\bar{x} = (\bar{x}\bar{x}) = (\bar{x}, \bar{x}) = \bar{x}z \vee \bar{x}\bar{z}$.

z-Достаточная система для O_8

Д1) $O_8 \times P_2$; Д2) $P_2 \times O_8$; Д3) (00), (01), (10), (11), (xx), (x0), (0x), ($\bar{x}$0), (0$\bar{x}$); [9_0, ДЕ_0]; Д4) (00), (10), (11), (xx), (x0), ($\bar{x}$0), (1$\bar{x}$), (1x); [8_1, ВО_1]; Д5) (00), (01), (10), (11), (xx), (x0), ($\bar{x}$0), ($x\bar{x}$), ($\bar{x}$1), (x1); [10_1, ДС_1]; Д6) (00), (01), (11), (xx), (0x), (0$\bar{x}$), ($\bar{x}$1), (x1); [$8'_1$, $\text{ВО}'_1$]; Д7) (00), (01), (10), (11), (xx), (0x), (0$\bar{x}$), ($\bar{x}x$), (1$\bar{x}$), (1x); [$10'_1$, $\text{ДС}'_1$]; Д8) [9^*_0, ДЕ^*_0]; Д9) 9_0, (1x), (1$\bar{x}$); [11_1, ОД_1]; Д10) 9_0, (x1), ($\bar{x}$1); [$11'_1$, $\text{ОД}'_1$]; Д11) [11^*_1, ОД^*_1]; Д12) [$11'^*_1$, $\text{ОД}'^*_1$]; Д13) 9_0, (1x), (1$\bar{x}$), (x1), ($\bar{x}$1); [13_0, ТР_0]; Д14) 9_0, (1x), (1$\bar{x}$), ($\bar{x}x$); [12_1, ДВ_1]; Д15) 9_0, (x1), ($\bar{x}$1), ($x\bar{x}$); [$12'_1$, $\text{ДВ}'_1$]; Д16) [12^*_1, ДВ^*_1]; Д17) [$12'^*_1$, $\text{ДВ}'^*_1$]; Д18) 13_0, ($x\bar{x}$); [14_1, ЧЕ_1]; Д19) 13_0, ($\bar{x}x$); [$14'_1$, $\text{ЧЕ}'_1$]; Д20) 8_1, (01); [9_1, ДЕ_1]; Д21) [$9'_1$, $\text{ДЕ}'_1$]; Д22) (00), (01), (10), (11), (xx), (0x), (x0), ($\bar{x}$0); [8_2, ВО_2]; Д23) (00), (01), (10), (11), (xx), (x0), (0x), (0$\bar{x}$); [$8'_2$, $\text{ВО}'_2$]; Д24) (00), (01), (10), (11), (xx), (x1), (1x), (1$\bar{x}$); [$8'^*_2$, $\text{ВО}'^*_2$]; Д25) (00), (01), (10), (11), (xx), (1x), (x1), ($\bar{x}$1); [8^*_2, ВО^*_2]; Д26) 8_2, (1x); [9_2, ДЕ_2]; Д27) [$9'_2$, $\text{ДЕ}'_2$]; Д28) [9^*_2, ДЕ^*_2]; Д29) [$9'^*_2$, $\text{ДЕ}'^*_2$]; Д30) 8_2, (x1), ($\bar{x}$1); [10_2, ДС_2]; Д31) [$10'_2$, $\text{ДС}'_2$]; Д32) [10^*_2, ДС^*_2];

Д33) [$10_2'^*$, ДС$_2'^*$]; Д34) 8_2, ($\bar{x}x$), ($1x$); [10_3, ДС$_3$]; Д35) [$10_3'$, ДС$_3'$]; Д36) [10_3^*, ДС$_3^*$]; Д37) [$10_3'^*$, ДС$_3'^*$]; Д38) 8_2, ($x\bar{x}$), ($\bar{x}1$), ($x1$); [11_2, ОД$_2$]; Д39) [$11_2'$, ОД$_2'$]; Д40) [11_2^*, ОД$_2^*$]; Д41) [$11_2'^*$, ОД$_2'^*$]; Д42) 9_2, ($x1$), ($\bar{x}1$); [11_3, ОД$_3$]; Д43) [$11_3'$, ОД$_3'$]; Д44) [11_3^*, ОД$_3^*$]; Д45) [$11_3'^*$, ОД$_3'^*$]; Д46) 9_2, ($1\bar{x}$); [10_4, ДС$_4$]; Д47) [$10_4'$, ДС$_4'$]; Д48) [10_4^*, ДС$_4^*$]; Д49) [$10_4'^*$, ДС$_4'^*$]; Д50) 10_2, ($\bar{x}x$), ($1x$); [12_2, ДВ$_2$]; Д51) [$12_2'$, ДВ$_2'$]; Д52) [12_2^*, ДВ$_2^*$]; Д53) [$12_2'^*$, ДВ$_2'^*$]; Д54) (00), (01), (11), (xx), ($\bar{x}1$), ($x1$), ($0x$); [7_1, СЕ$_1$]; Д55) (00), (10), (11), (xx), ($1\bar{x}$), ($1x$), ($x0$); [$7_1'$, СЕ$_1'$]; Д56) [7_1^*, СЕ$_1^*$]; Д57) [$7_1'^*$, СЕ$_1'^*$]; Д58) (00), (01), (11), (xx), ($x1$), ($\bar{x}1$), (10), ($0x$); [8_3, ВО$_3$]; Д59) [8_3^*, ВО$_3^*$]; Д60) [$8_3'$, ВО$_3'$]; Д61) [$8_3'^*$, ВО$_3'^*$]; Д62) 8_3, ($\bar{x}x$), ($1x$); [10_5, ДС$_5$]; Д63) [$10_5'$, ДС$_5'$]; Д64) [10_5^*, ДС$_5^*$];

Д65) [$10_5'^*$, ДС$_5'^*$]; Д66) (00), (01), (10), (11), ($0x$), ($\bar{x}x$), ($1x$), (xx); [8_4, ВО$_4$]; Д67) [$8_4'$, ВО$_4'$];

Д68) (00), (01), (10), (11), (xx), ($0x$), ($x0$); [7_2, СЕ$_2$]; Д69) (00), (01), (10), (11), (xx), ($1x$), ($x1$); [7_2^*, СЕ$_2^*$]; Д70) 7_2, ($1x$); [8_5, ВО$_5$]; Д71) [$8_5'$, ВО$_5'$]; Д72) [8_5^*, ВО$_5^*$]; Д73) [$8_5'^*$, ВО$_5'^*$];

Д74) (00), (01), (11), (xx), ($x1$), ($0x$); [6_1, Ш$_1$]; Д75) [$6_1'$, Ш$_1'$]; Д76) (00), (01), (10), (11), (xx), ($x1$), ($0x$); [7_3, СЕ$_3$]; Д77) (00), (01), (10), (11), (xx), ($1x$), ($x0$); [$7_3'$, СЕ$_3'$].

Теорема 1. *Для того чтобы система N , содержащая константы, порождало булеву функцию, отличную от 0, 1, x, необходимо и достаточно, чтобы она целиком не содержалась ни в одном классе z-достаточной системы:* $O_8 \times P_2$, $P_2 \times O_8$, *Ш*$_1$, *Ш*$_1'$, *СЕ*$_1$, *СЕ*$_1'$, *СЕ*$_1^*$, СЕ$_1'^*$, *СЕ*$_2$, *СЕ*$_2^*$, *СЕ*$_3$, *СЕ*$_3'$, *ВО*$_j$, *ВО*$_j'$, $j = \overline{\quad}$, *ВО*$_k$, *ВО*$_k'$, *ВО*$_k^*$, *ВО*$_k'^*$, $k = \overline{\quad}$, *ДЕ*$_m$, *ДЕ*$_m^*$, $m = 0,1$, *ДЕ*$_2$, *ДЕ*$_2'$, *ДЕ*$_2^*$, *ДЕ*$_2'^*$, *ДС*$_1$, *ДС*$_1'$, *ДС*$_e$, *ДС*$_e'$, *ДС*$_e^*$, *ДС*$_e'^*$, $e = \overline{\quad}$, *ОД*$_r$, *ОД*$_r'$, *ОД*$_r^*$, *ОД*$_r'^*$, $r = \overline{\quad}$, *ДВ*$_p$, *ДВ*$_p'$, *ДВ*$_p^*$, *ДВ*$_p'^*$, $p = 1,2$, *ТР*$_0$, *ЧЕ*$_1$, *ЧЕ*$_1'$ *(всего 77 классов, с точностью до изоморфизма их 25).*

При построении функции при фиксированной системе N предлагаемый алгоритм использует не более 11 классов из 77.

z-Достаточная система для $\mathbf{P_6}$

Д78) $P_6 \times P_2$; Д79) $P_2 \times P_6$; Д3) ($0\bar{x}$), ($\bar{x}0$), ($x0$), ($0x$), (xx), (00), (01), (10), (11); [9_0, ДЕ$_0$]; Д4) ($0\bar{x}$), ($\bar{x}1$), ($0x$), ($x1$), (xx), (00), (01), (11); [8_1, ВО$_1$];

Д5) ($\bar{x}0$), ($1\bar{x}$), ($x0$), ($1x$), (xx), (00), (10), (11); [$8_1'$, ВО$_1'$]; Д9) 9_0, ($1\bar{x}$), ($1x$); [11_1, ОД$_1$]; Д10) [$11_1'$, ОД$_1'$]; Д14) 9_0, ($1x$), ($1\bar{x}$), ($\bar{x}x$); [12_1, ДВ$_1$]; Д15) [$12_1'$, ДВ$_1'$]; Д21) $8_1'$, (10); [$9_1'$, ДЕ$_1'$];

Д20) 8_1, (01); [9_1, ДЕ$_1$]; Д23) (00), (01), (10), (11), (xx), ($0x$), ($0\bar{x}$), ($x0$); [$8_2'$, ВО$_2'$]; Д22) [8_2, ВО$_2$]; Д26) 8_2, ($1x$); [9_2, ДЕ$_2$]; Д27) [$9_2'$, ДЕ$_2'$]; Д30) [10_2, ДС$_2$]; Д31) [$10_2'$, ДС$_2'$]; Д34) [10_3, ДС$_3$]; Д35) [$10_3'$, ДС$_3'$]; Д46) [10_4, ДС$_4$]; Д47) [$10_4'$, ДС$_4'$]; Д50) [12_2, ДВ$_2$]; Д51) [$12_2'$, ДВ$_2'$]; Д54) [7_1, СЕ$_1$];

Д55) (00), (10), (11), (xx), ($1\bar{x}$), ($1x$), ($x0$); [$7_1'$, СЕ$_1'$];

Д56) [7_1^*, СЕ$_1^*$]; Д57) (00), (01), (11), (xx), ($0\bar{x}$), ($0x$), ($x1$); [$7_1'^*$, СЕ$_1'^*$];Д58) [8_3, ВО$_3$];

Д59) [8_3^*, ВО$_3^*$]; Д60) [$8_3'$, ВО$_3'$];

Д61) [$8_3'^*$, ВО$_3'^*$]; Д62) [10_5, ДС$_5$]; Д63) [$10_5'$, ДС$_5'$]; Д64) [10_5^*, ДС$_5^*$]; Д65) [$10_5'^*$, ДС$_5'^*$].

Д66) [8_4, ВО$_4$]; Д67) (00), (01), (10), (11), (xx), ($x0$), ($x\bar{x}$), ($x1$); [$8_4'$, ВО$_4'$];

Д68) (00), (01), (10), (11), (xx), ($0x$), ($x0$); [7_2, СЕ$_2$];

Д70) [8_5, ВО$_5$]; Д71) [$8_5'$, ВО$_5'$];

Д74) (00), (01), (11), (xx), ($0x$), ($x1$); [6_1, Ш$_1$];

Д75) [$6_1'$, Ш$_1'$]; Д76) 6_1, (10); [7_3, СЕ$_3$];

Д77) [$7_3'$, СЕ$_3'$].

Теорема 2. *Для того чтобы система N, содержащая базис класса* P_6 *, порождала булеву функцию, отличную от 0, 1, x, xy, необходимо и достаточно, чтобы она целиком не содержалась в классе z-достаточной системы:* $P_6 \times P_2$, $P_2 \times P_6$, *ДЕ*$_0$,*ВО*$_i$, *ВО*$_i'$, $i = \overline{\quad}$, *ДЕ*$_j$, *ДЕ*$_j'$, $j = 1,2$, *ДС*$_k$, *ДС*$_k'$, $k = \overline{\quad}$, *ОД*$_1$, *ОД*$_1'$, *ДВ*$_r$, *ДВ*$_r'$, $r = 1,2$, *СЕ*$_1^*$, СЕ$_1'^*$, *СЕ*$_l$, *СЕ*$_l'$, $l = \overline{\quad}$, *ВО*$_3^*$, *ВО*$_3'^*$, *ДС*$_5^*$, *ДС*$_5'^*$, *Ш*$_1$, *Ш*$_1'$ *(всего 45, с точностью до изоморфизма их 21).*

При построении функции при фиксированной системе N предлагаемый алгоритм использует не более 11 классов из 45.

В силу двойственности верна теорема 3.

Теорема 3. *Для того чтобы система N, содержащая базис класса* S_6 *, порождала булеву функцию, отличную от 0, 1, x,* $x \vee y$, *необходимо и достаточно, чтобы она целиком не содержалась в классе z-достаточной системы:* $S_6 \times P_2$,

$P_2 \times S_6$, $ДЕ_0^*$, $ВО_i^*$, $ВО_i'^*$, $i = \overline{\quad}$, $ДЕ_j^*$, $ДЕ_j'^*$, $j = 1,2$, $ДС_k^*$, $ДС_k'^*$, $k = \overline{\quad}$, $ОД_1^*$, $ОД_1'^*$, $ДВ_r^*$, $ДВ_r'^*$, $r = 1,2$, CE_1 , CE_1', CE_l^*, $CE_l'^*$, $l = \overline{\quad}$, $ВО_3$, $ВО_3'$, $ДС_5$, $ДС_5'$, $Ш_1^*$, $Ш_1'^*$ *(всего 45 классов, с точностью до изоморфизма их 21).*

При построении функции при фиксированной системе N предлагаемый алгоритм использует не более 11 классов из 45.

z-Достаточная система для класса O_9

Д80) ($\bar{x}$, $\bar{x}$), (00), (01), (10), (11), (xx), ($0x$), ($x0$), ($1x$), ($x1$), ($1\bar{x}$), ($\bar{x}1$), ($0\bar{x}$), ($\bar{x}0$); [14_0, $ЧЕ_0$].

Д81) $Ш_2$ – класс всех функций, сохраняющих основание

$o(Ш_2) = P_2(x, z) \cup P_2(y, z)$;

Д82) Mp – класс всех функций, сохраняющих основание

$o(Mp) = o(Ш_2) \cup \{(x^\alpha, y^\beta), (y^\beta, x^\alpha)\}$;

Д83) LO_7' – класс всех функций, сохраняющих основание

$o(LO_7') = o(Ш_2) \cup L_1(x, y) \times O_7$;

(см. в [3] обозначения Поста: $O_7 = \{0, 1\}$, $L_1(x, y)$ – все линейные функции от двух переменных);

Д84) O_7L' – класс, симметричный классу LO_7';

Д85) P_2O_7' – класс всех функций, сохраняющих основание

$o(P_2O_7') = o(Ш_2) \cup P_2(x, y) \times O_7$;

Д86) O_7P_2' – класс, симметричный классу P_2O_7';

Д87) LL' – класс всех функций, сохраняющих основание

$o(LL') = o(Ш_2) \cup L(x, y) \times O_7 \cup O_7 \times L(x, y)$;

Д88) P_2P_2' – класс всех функций, сохраняющих основание

$o(P_2P_2') = o(P_2O_7') \cup o(O_7P_2')$;

Д89) P_2L' – класс всех функций, сохраняющих основание

$o(P_2L') = o(P_2O_7') \cup o(LO_7')$;

Д90) LP_2' – класс, симметричный классу P_2L'.

Теорема 4. *Для того чтобы система N, содержащая 0, 1, $\bar{x}$, порождала булеву функцию, существенно зависящую более чем от одного переменного, необходимо и достаточно, чтобы она целиком не содержалась ни в одном из классов z-достаточной системы: $ЧЕ_0$, $P_2 \times O_9$, $O_9 \times P_2$, $Ш_2$, Mp, LO_7', O_7L', P_2O_7', O_7P_2', LL', P_2P_2', P_2L', LP_2' (всего 13 классов, с точностью до изоморфизма их 9).*

При построении функции при фиксированной системе N предлагаемый алгоритм использует не более 8 классов из 13.

z-Достаточная система для класса A_1

Д91) $P_2 \times A_1$; Д92) $A_1 \times P_2$;

Д6) (00), (01), (11), (xx), ($\bar{x}1$), ($x1$), ($0\bar{x}$), ($0x$); [$8_1'$, $ВО_1'$];

Д21) (00), (01), (10), (11), (xx), ($\bar{x}1$), ($x1$), ($0\bar{x}$), ($0x$); [$9_1'$, $ДЕ_1'$].

Теорема 5. *Для того чтобы система N, содержащая базис класса A_1, порождала немонотонную функцию, необходимо и достаточно, чтобы она целиком не содержалась ни в одном из классов z-достаточной системы: $P_2 \times A_1$, $A_1 \times P_2$, $ВО_1$, $ВО_1'$, $ДЕ_1$, $ДЕ_1'$ (всего 6 классов, с точностью до изоморфизма их 3).*

При построении функции при фиксированной системе N предлагаемый алгоритм использует не более 4-х классов из 6.

z-Достаточная система для L_1

Д93) $L_1 \times P_2$; Д94) $P_2 \times L_1$.

Теорема 6. *Для того чтобы система N, содержащая базис класса L_1, порождала нелинейную функцию, необходимо и достаточно,*

чтобы она целиком не содержалась ни в одном из классов z-достаточной системы: $L_1 \times P_2$, $P_2 \times L_1$.

Основная теорема. *Для того, чтобы система N, содержащая константы, порождала булеву функцию f, необходимо и достаточно, чтобы она не содержалась целиком ни в одном классе из списка Д1÷Д94, за вычетом классов, содержащих f.*

Библиографический список

1. *Тарасов В.В.* Функции алгебры логики с несобственными параметрами // Пробл. передачи информ. 2000. Т.36. № 4. С.113-116.

2. *Тарасов В.В.* Булевы функции с несобственными параметрами // Пробл. передачи информ. 2003. Т.39. № 2. С.75-79.

3. *Яблонский С.В., Гаврилов Г.П., Кудрявцев В.Б.* Функции алгебры логики и классы Поста. М.: Наука, 1966.

4. *Яблонский С.В.* Функциональные построения в k-значной логике // Тр. Матем. ин-та АН СССР. 1958. Т.51. С.5-142.