

УДК 004.42

А.А. Хорева

## ЧИСЛЕННОЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ ТРАССЫ ПРОКЛАДКИ ПРОВОДА

*Рассмотрена задача построения трасс проводников в трехмерном пространстве. Дан вывод итерационного алгоритма нахождения точек трассы. Проведено тестирование алгоритма на устойчивость и удовлетворение требованиям точности систем автоматизированного проектирования.*

На современном этапе развития трехмерной графики наиболее трудоемкими являются задачи трассировки - в общей массе вычислений решение задач трассировки занимает до 95% расчетов. Трассировка проводов по многим признакам схожа с этими задачами, но, вдобавок, от обычных задач трассировки отличается повышенной сложностью траекторий и накладываемыми практикой краевыми условиями [1]. Как следствие, точное определение трассы провода приводит к решению системы из большого количества нелинейных уравнений.

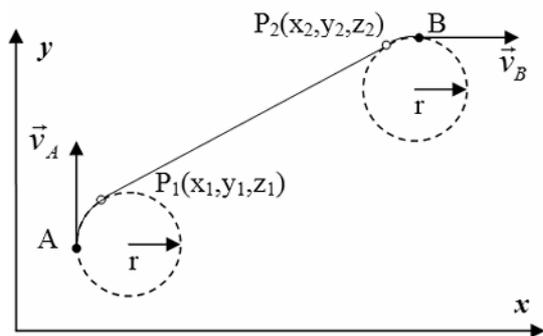


Рисунок 1

Рассмотрим общую постановку задачи трассировки провода на схематически упрощенном примере (рисунок 1): «проложить провод от точки  $A(x_A, y_A, z_A)$  до точки  $B(x_B, y_B, z_B)$  следующим образом»:

1. Провод из точки  $A(x_A, y_A, z_A)$  выходит вдоль вектора  $\vec{v}_A = \{v_{Ax}, v_{Ay}, v_{Az}\}$  и входит в точку  $B(x_B, y_B, z_B)$  вдоль вектора  $\vec{v}_B = \{v_{Bx}, v_{By}, v_{Bz}\}$ .

2. От точки  $A(x_A, y_A, z_A)$  до точки  $P_1(x_1, y_1, z_1)$  огибает сферу радиуса  $r$  с центром в точке  $P(x_{Ac}, y_{Ac}, z_{Ac})$ :

$$(x - x_{Ac})^2 + (y - y_{Ac})^2 + (z - z_{Ac})^2 = r^2. \quad (1)$$

3. От точки  $B(x_B, y_B, z_B)$  до точки  $P_2(x_2, y_2, z_2)$  огибает сферу радиусом  $r$  с центром в точке  $P(x_{Bc}, y_{Bc}, z_{Bc})$ :

$$(x - x_{Bc})^2 + (y - y_{Bc})^2 + (z - z_{Bc})^2 = r^2. \quad (2)$$

4. Точки  $P_1(x_1, y_1, z_1)$  и  $P_2(x_2, y_2, z_2)$  лежат на прямой, касающейся сфер (1) и (2).

5. Центры сфер (1) и (2) и касательная к ним прямая расположены так, что результирующая длина провода минимальная.

При этом известны следующие параметры:

1. Координаты точки  $A(x_A, y_A, z_A)$  и вектор

$$\vec{v}_A = \{v_{Ax}, v_{Ay}, v_{Az}\}.$$

2. Радиус изгиба провода  $r$ .

3. Координаты точки  $B(x_B, y_B, z_B)$  и вектор

$$\vec{v}_B = \{v_{Bx}, v_{By}, v_{Bz}\}.$$

Точное решение этой задачи требует решения системы из 12 очень сложных нелинейных уравнений относительно 12 неизвестных. Сложность нелинейных уравнений обусловлена:

1. Квадратичной зависимостью в зонах изгиба.

2. Тем, что изгиб не всегда происходит по окружности.

3. Сложным условием минимальности длины провода.

На практике допускается некоторое превышение длины провода от расчетного точного минимального значения. Конкретные значения такого превышения определяются условиями эксплуатации. Например, необходим запас длины для компенсации температурных деформаций. При этом рассчитанный провод будет связан в жгут и жестко прикреплен к некоторой конструкции в заданных точках.

Эти допуски и ограничения позволяют разделить общую задачу трассировки провода на несколько задач меньшей сложности:

1. Вычисление центров  $P(x_{Ac}, y_{Ac}, z_{Ac})$  и

$P(x_{Bc}, y_{Bc}, z_{Bc})$  сфер (1) и (2).

2. Вычисление координат точек касания  $P_1(x_1, y_1, z_1)$  и  $P_2(x_2, y_2, z_2)$ .

3. Вычисление общей длины провода.

Задачи пунктов 1 и 3 решаются точными методами и никакой сложности не представляют.

Решение второй задачи наталкивается на следующую проблему: при итерационном приближении к точному решению процесс перестает сходиться.

Рассмотрим задачу вычисления координат точек  $P_1(x_1, y_1, z_1)$  и  $P_2(x_2, y_2, z_2)$  более подробно.

Пусть уже определены центры сфер  $P(x_{Ac}, y_{Ac}, z_{Ac})$  и  $P(x_{Bc}, y_{Bc}, z_{Bc})$ .

Для определения координат  $P_1(x_1, y_1, z_1)$  и  $P_2(x_2, y_2, z_2)$  нужно решить следующую систему уравнений с неизвестными  $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2$ :

$$\begin{cases} A_A x_1 + B_A y_1 + C_A z_1 + D_A = 0, \\ (x_1 - x_{Ac})^2 + (y_1 - y_{Ac})^2 + (z_1 - z_{Ac})^2 = r^2, \\ (x_2 - x_1)(x_1 - x_{Ac}) + (y_2 - y_1)(y_1 - y_{Ac}) + \\ + (z_2 - z_1)(z_1 - z_{Ac}) = 0, \\ A_B x_2 + B_B y_2 + C_B z_2 + D_B = 0, \\ (x_2 - x_{Bc})^2 + (y_2 - y_{Bc})^2 + (z_2 - z_{Bc})^2 = r^2, \\ (x_2 - x_1)(x_2 - x_{Bc}) + (y_2 - y_1)(y_2 - y_{Bc}) + \\ + (z_2 - z_1)(z_2 - z_{Bc}) = 0, \end{cases} \quad (3)$$

где  $A_A = v_{Az}(y_B - y_A) - v_{Ay}(z_B - z_A)$ ,

$B_A = v_{Ax}(z_B - z_A) - v_{Az}(x_B - x_A)$ ,

$C_A = v_{Ay}(x_B - x_A) - v_{Ax}(y_B - y_A)$ ,

$D_A = -A_A x_A - B_A y_A - C_A z_A$ , а  $A_B, B_B, C_B$  и  $D_B$  вычисляются аналогично.

Эта система неудобна тем, что имеет избыточные связи между уравнениями. Именно эти связи приводят к вырождению СНАУ при численном решении методом Ньютона.

Для устранения избыточных связей упростим систему к виду:

$$\begin{cases} A_A x_1 + B_A y_1 + C_A z_1 + D_A = 0, \\ A_B x_2 + B_B y_2 + C_B z_2 + D_B = 0, \\ x_1 x_{ABc} + y_1 y_{ABc} + z_1 z_{ABc} + \\ + x_2 x_{ABc} + y_2 y_{ABc} + z_2 z_{ABc} = r_2 - r_1, \\ x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 - x_2 x_{Bc} - \\ - y_2 y_{Bc} - z_2 z_{Bc} - x_1 x_{Bc} - \\ - y_1 y_{Bc} - z_1 z_{Bc} = r_2, \\ x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 - 2x_1 x_{Ac} - 2y_1 y_{Ac} - \\ - 2z_1 z_{Ac} = r_1, \\ x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 - 2x_2 x_{Bc} - 2y_2 y_{Bc} - \\ - 2z_2 z_{Bc} = r_2, \end{cases} \quad (4)$$

где  $x_{ABc} = x_{Ac} - x_{Bc}$ ,  $y_{ABc} = y_{Ac} - y_{Bc}$ ,

$z_{ABc} = z_{Ac} - z_{Bc}$ ,  $r_1 = r^2 - x_{Ac}^2 - y_{Ac}^2 - z_{Ac}^2$ ,

$r_2 = r^2 - x_{Bc}^2 - y_{Bc}^2 - z_{Bc}^2$ .

Перепишем эту систему в виде:

$$\begin{cases} f_1 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 - 2x_1 x_{Ac} - 2y_1 y_{Ac} - \\ - 2z_1 z_{Ac} - r_1 = 0, \\ f_2 = A_A x_1 + B_A y_1 + C_A z_1 + D_A = 0, \\ f_3 = x_1 x_{ABc} + y_1 y_{ABc} + z_1 z_{ABc} + x_2 x_{ABc} + \\ + y_2 y_{ABc} + z_2 z_{ABc} - r_2 + r_1 = 0, \\ f_4 = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 - (x_2 + x_1) x_{Bc} - \\ - (y_2 + y_1) y_{Bc} - (z_2 + z_1) z_{Bc} - r_2 = 0, \\ f_5 = A_B x_2 + B_B y_2 + C_B z_2 + D_B = 0, \\ f_6 = x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 - 2x_2 x_{Bc} - 2y_2 y_{Bc} - \\ - 2z_2 z_{Bc} - r_2 = 0. \end{cases}$$

Вектор неизвестных  $\vec{x} = \{x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2\}$ .

Для решения полученной системы применим метод Ньютона.

В области допустимого решения все функции  $f_i, i = 1, 2, \dots, 6$ , непрерывны и имеют непрерывные частные производные первого порядка:

$$f_1' = \left\{ \frac{\partial f_1}{\partial x_1}, \frac{\partial f_1}{\partial y_1}, \frac{\partial f_1}{\partial z_1}, \frac{\partial f_1}{\partial x_2}, \frac{\partial f_1}{\partial y_2}, \frac{\partial f_1}{\partial z_2} \right\} = \\ = \{2(x_1 - x_{Ac}), 2(y_1 - y_{Ac}), 2(z_1 - z_{Ac}), 0, 0, 0\}, \\ f_2' = \{A_A, B_A, C_A, 0, 0, 0\},$$

$$f_3' = \{x_{ABc}, y_{ABc}, z_{ABc}, x_{ABc}, y_{ABc}, z_{ABc}\},$$

$$f_4' = \{x_2 - x_{Bc}, y_2 - y_{Bc}, z_2 - z_{Bc}, x_1 - x_{Bc}, \\ y_1 - y_{Bc}, z_1 - z_{Bc}\},$$

$$f_5' = \{0, 0, 0, A_B, B_B, C_B\},$$

$$f_6' = \{0, 0, 0, 2(x_2 - x_{Bc}), 2(y_2 - y_{Bc}), 2(z_2 - z_{Bc})\}.$$

$$F = \{f_1', f_2', f_3', f_4', f_5', f_6'\}^T.$$

Пусть задано некоторое начальное условие:

$$\vec{x}(0) = \{x_1(0), y_1(0), z_1(0), x_2(0), y_2(0), z_2(0)\}.$$

Тогда для отыскания решения системы нелинейных уравнений построим итерационный процесс:

$$\vec{x}(i+1) = \vec{x}(i) - \Delta \vec{x}(i), \quad i = 0, 1, 2, \dots,$$

где  $\Delta \vec{x}(i)$  является решением следующей СЛАУ:

$$F(i) \Delta \vec{x}(i) = \vec{f}(i),$$

где  $\vec{f}(i) = \{f_1(i), f_2(i), f_3(i), f_4(i), f_5(i), f_6(i)\}$ .

Начальные условия вычисляются геометрическими методами и записываются в следующем виде:

$$\begin{cases} x_1 = r v_{Ax} + x_A - x_{Ac} + r x_{Ac}, \\ y_1 = r v_{Ay} + y_A - y_{Ac} + r y_{Ac}, \\ z_1 = r v_{Az} + z_A - z_{Ac} + r z_{Ac}, \end{cases} \quad (5)$$

$$\begin{cases} x_2 = x_{Bc} - r v_{Bx}, \\ y_2 = y_{Bc} - r v_{By}, \\ z_2 = z_{Bc} - r v_{Bz}. \end{cases}$$

Для тестирования алгоритма рассмотрим два примера.

**Пример 1** (рисунок 2).

В этом примере:

$$A(x_A, y_A, z_A) = A(1, 1, 0);$$

$$\vec{v}_A = \{v_{Ax}, v_{Ay}, v_{Az}\} = \{0, 1, 0\};$$

$$B(x_B, y_B, z_B) = B(7, 5, 0);$$

$$\vec{v}_B = \{v_{Bx}, v_{By}, v_{Bz}\} = \{1, 0, 0\}.$$

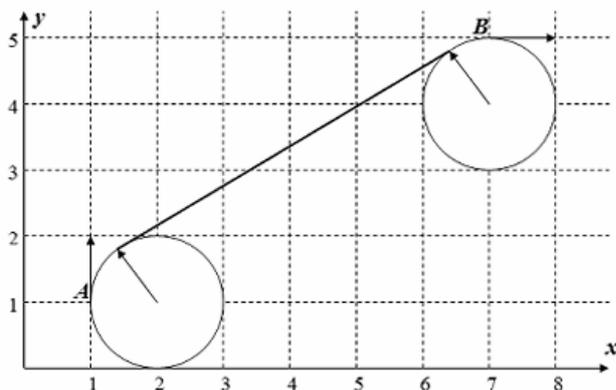


Рисунок 2

Сфера, которую огибает провод в точке  $A(1,1,0)$ , имеет центр  $(2,1,0)$ .

Сфера, которую огибает провод в точке  $B(7,5,0)$ , имеет центр  $(7,4,0)$ .

Начальные приближения для решения системы:

$$\vec{x}(0) = \{1, 2, 0, 6, 4, 0\}.$$

Максимальная невязка системы нелинейных уравнений для этих начальных условий  $Error = 7.000000$ .

Решение системы достигается за 6 итераций и имеет значения:

$$\{1.485504, 1.857493, 0, 6.485504, 4.857493, 0\}.$$

Максимальная невязка системы нелинейных уравнений при этом равна  $Error = 4.36557e-011$ .

**Пример 2** (рисунок 3).

В этом примере:

$$A(x_A, y_A, z_A) = A(1, 1, 0);$$

$$\vec{v}_A = \{v_{Ax}, v_{Ay}, v_{Az}\} = \{0, 1, 0\};$$

$$B(x_B, y_B, z_B) = B(7, 5, 0);$$

$$\vec{v}_B = \{v_{Bx}, v_{By}, v_{Bz}\} = \{-1, 0, 0\}.$$

Сфера, которую огибает провод в точке  $A(1,1,0)$ , имеет центр  $(2,1,0)$ .

Сфера, которую огибает провод в точке  $B(7,5,0)$ , имеет центр  $(7,4,0)$ .

Начальные приближения для решения системы:

$$\vec{x}(0) = \{1, 2, 0, 8, 4, 0\}$$

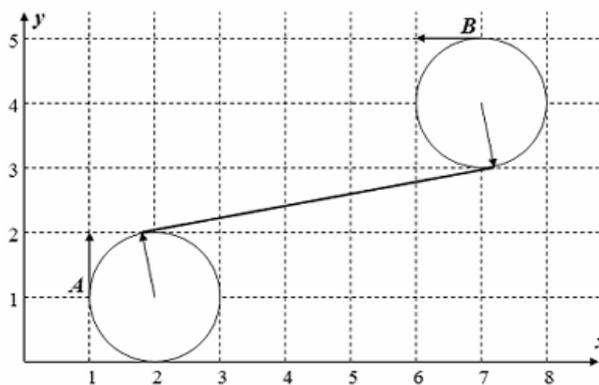


Рисунок 3

Максимальная невязка системы нелинейных уравнений для этих начальных условий  $Error = 7.000000$ .

Решение системы достигается за 6 итераций и имеет значения:

$$\{1.810833, 1.981945, 0, 7.189167, 3.018055, 0\}.$$

Максимальная невязка системы нелинейных уравнений при этом равна  $Error = 5.71391e-009$ .

Точно такая же устойчивость решения наблюдается и при решении задач в трехмерном случае.

Например, даны:  $A(1,1,3)$ ,  $\vec{v}_A = \{0,1,1\}$ ,  $B(7,5,0)$  и  $\vec{v}_B = \{-1,0,1\}$ .

Сфера, которую огибает провод в точке  $A(1,1,3)$ , имеет центр  $(1.771389, 1.449977, 2.550023)$ .

Сфера, которую огибает провод в точке  $B(7,5,0)$ , имеет центр  $(6.668705, 4.116548, -0.331295)$ .

Начальные приближения для решения системы:

$$\vec{x}(0) = \{1, 1.7, 3.7, 7.4, 4.1, -1\}.$$

Максимальная невязка системы нелинейных уравнений для этих начальных условий  $Error = 7.863961$ .

Решение системы достигается за 6 итераций и имеет значения:

$$\{2.034214, 2.268089, 3.061506, 6.468742, 3.247241, -0.783312\}.$$

Максимальная невязка системы нелинейных уравнений при этом равна  $Error = 4.94865e-10$ .

Таким образом, упрощение системы (3) к виду (4) позволяет методом Ньютона получить решение за малое количество шагов и итерационный процесс никогда не расходится. При этом достигаемая практически всегда за 6 итераций точность удовлетворяет требованиям точности САД-систем.

**Библиографический список**

1. Хорева А.А. Автоматизированная трассировка электрических жгутов в трехмерном пространстве // Математическое и программное обеспечение

вычислительных систем: межвуз. сб. науч. тр. М.: Горячая линия – Телеком, 2006. - 102 с.