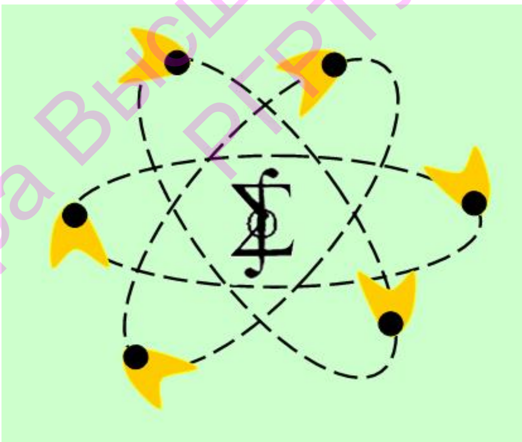
МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

РЯЗАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ РАДИОТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

И.П. КАРАСЁВ

ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА И АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ



Рязань 2016

Министерство образования и науки Российской Федерации

Рязанский государственный радиотехнический университет

И.П. КАРАСЁВ

ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА И АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Учебное пособие
(типовой расчёт с методическими указаниями)

Рязань 2016

УДК 514.12

Векторная алгебра и аналитическая геометрия: учеб. пособие (типовой расчёт с методическими указаниями) / И.П. Карасёв; Рязан. гос. радиотехн. ун-т. – Рязань, 2016. – 48 с.

Содержит типовые расчеты по векторной алгебре и аналитической геометрии в соответствии с Федеральным государственным образовательным стандартом высшего профессионального образования.

Предназначено для студентов направления 18.03.01 «Химическая технология», а также для студентов всех направлений и специальностей, изучающих векторную алгебру и аналитическую геометрию.

Ил. 9. Библиогр.: 7 назв.

Вектор, прямая, плоскость, эллипс, гипербола, парабола, ортогональность

Печатается по решению редакционно-издательского совета Рязанского государственного радиотехнического университета.

Рецензент: кафедра высшей математики Рязанского государственного радиотехнического университета (зав. кафедрой, доц., канд. физ.-мат. наук К.В. Бухенский)

К а р а с ё в Иван Петрович

Векторная алгебра и аналитическая геометрия

Редактор Р.К. Мангутова

Корректор С.В. Макушина

Подписано в печать 04.04.16. Формат бумаги 60×84 1/16.
Бумага писчая. Печать трафаретная. Усл. печ. л. 3,0.
Тираж 25 экз. Заказ
Рязанский государственный радиотехнический университет.
390005, Рязань, ул. Гагарина, 59/1.
Редакционно-издательский центр РГРТУ.

ЗАДАНИЯ НУЛЕВОГО ВАРИАНТА

Задание 1. Даны векторы $\bar{a}=(1;-2;3)$, $\bar{b}=(-1;0;2)$ и $\bar{c}=(2;-1;1)$. Найдите: 1) скалярное произведение $(\bar{b},3\bar{a}+2\bar{c})$; 2) векторное произведение $[\bar{a};3\bar{b}-\bar{c}]$; 3) смешанное произведение векторов $2\bar{a}$, $-\bar{b}$, $3\bar{c}-\bar{a}$.

Задание 2. Даны координаты вершин пирамиды $M_1M_2M_3M_4$: $M_1\left(\frac{1}{3};1;-2\right)$, $M_2(-1;3;-1)$, $M_3\left(-\frac{23}{3};4;1\right)$, $M_4\left(\frac{1}{3};-2;-1\right)$. Найти:

1) косинус угла между рёбрами M_1M_2 и M_1M_3;
2) площадь грани $M_1M_2M_3$;
3) объём пирамиды;
4) высоту пирамиды, опущенной из вершины M_4 на основание $M_1M_2M_3$.

Задание 3.Вычислить расстояние от левого фокуса гиперболы $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ до соответствующей директрисы.

Задание 4. Написать уравнение прямой, проходящей через правый фокус эллипса $9x^2+25y^2=225$ и перпендикулярной к прямой $3x+y-3=0$.

Задание 5. На параболе найти точку, расстояние от которой до директрисы равно 5.

Задание 6. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0;y_0;z_0)$ и параллельной неколлинеарным векторам $\bar{s}_1=(m_1;n_1;p_1)$ и $\bar{s}_2=(m_2;n_2;p_2)$

Задание 7. Написать уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки $M_1(x_1;y_1;z_1)$, $M_2(x_2;y_2;z_2)$ и $M_3(x_3;y_3;z_3)$, не лежащие на одной прямой.

Задание 8. Написать уравнение плоскости, проходящей через две заданные точки $M_1(x_1;y_1;z_1)$ и $M_2(x_2;y_2;z_2)$ и перпендикулярной к плоскости $Ax+By+Cz+D=0$.

Задание 9. Найти расстояние между двумя параллельными плоскостями $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$

и $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$.

Задание 10. Общие уравнения прямой

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$$

преобразовать в канонические.

Задание 11. Найти расстояние между прямыми

$$\frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1} \text{ и } \frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2}, \text{ если:}$$

1) прямые пересекаются,
2) прямые параллельны,
3) прямые скрещиваются.

Задание 12. Найти точку пересечения прямой $\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$ и плоскости $Ax+By+Cz+D=0$.

Задание 13. В предыдущем задании 12 найти угол между прямой и плоскостью.

Задание 14. В задании 12 найти условия принадлежности прямой плоскости.

Задание 15. В ортонормированном базисе $\langle \bar{i},\bar{j},\bar{k} \rangle$ даны векторы $\bar{a}=(a_x,a_y,a_z)$, $\bar{b}=(b_x,b_y,b_z)$, $\bar{c}=(c_x,c_y,c_z)$ и $\bar{d}=(d_x,d_y,d_z)$. Разложить вектор $\bar{d}$ по векторам $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$, если они образуют базис $\langle \bar{a},\bar{b},\bar{c} \rangle$.

Задание 16. Провести процесс ортогонализации Грама – Шмидта для векторов $\bar{a}=(1;2;2)$, $\bar{b}=(-3;6;0)$, $\bar{c}=(-3;0;6)$, построить ортонормированный базис $\langle \bar{e}_1,\bar{e}_2,\bar{e}_3 \rangle$.

Задание 17. Привести общее уравнение кривой второго порядка

$$4xy+3y^2+16x+12y-36=0$$

к каноническому виду двумя способами:
1) с помощью поворота осей координат на некоторый угол φ и параллельного переноса;
2) с помощью собственных значений и собственных векторов матрицы.

РЕШЕНИЯ ЗАДАНИЙ НУЛЕВОГО ВАРИАНТА

Задание 1

1. Краткие теоретические сведения

(см. [3], главы 8, 9, 10; [4], глава 2; [6], глава 3)

Определение 1. Скалярным произведением двух векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называется число, обозначаемое символом $(\bar{\boldsymbol{a}},\bar{\boldsymbol{b}})$ или $\bar{\boldsymbol{a}}\cdot\bar{\boldsymbol{b}}$ и равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними:

$$(\bar{\boldsymbol{a}},\bar{\boldsymbol{b}})=|\bar{\boldsymbol{a}}|\cdot|\bar{\boldsymbol{b}}|\cos\boldsymbol{\varphi}. \qquad (1)$$

В ортонормированном базисе $\langle\bar{\boldsymbol{i}},\bar{\boldsymbol{j}},\bar{\boldsymbol{k}}\rangle$ скалярное произведение

$$(\bar{\boldsymbol{a}},\bar{\boldsymbol{b}})=\boldsymbol{a_x b_x}+\boldsymbol{a_y b_y}+\boldsymbol{a_z b_z}, \qquad (2)$$

где $\bar{a}=(a_x;a_y;a_z)$, $\bar{b}=(b_x;b_y;b_z)$.

Если $\bar{a}\perp\bar{b}$, то $(\bar{a},\bar{b})=0$.

Длина вектора $\bar{a}$ вычисляется по формуле $|\bar{a}|=\sqrt{\bar{a}^2}$, где $\bar{a}^2=(\bar{a},\bar{a})$ – скалярный квадрат вектора $\bar{a}$. В базисе $\langle\bar{i},\bar{j},\bar{k}\rangle$

$$|\bar{a}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}, \text{ где } \bar{a}=a_x\bar{i}+a_y\bar{j}+a_z\bar{k}. \qquad (3)$$

Определение 2. Векторным произведением двух векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называется третий вектор $\bar{c}$, обозначаемый символом

$\left[\bar{a},\bar{b}\right]$ или $\bar{a}\times\bar{b}$ и удовлетворяющий следующим трём требованиям:

1) длина вектора $\bar{c}$ равна произведению длин векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ на синус угла φ между ними:

$$|\bar{c}| = \left|\left[\bar{a},\bar{b}\right]\right| = |\bar{a}|\cdot\left|\bar{b}\right|\cdot\sin\varphi;$$

2) вектор $\bar{c}$ ортогонален к векторам $\bar{a}$ и $\bar{b}$;

3) вектор $\bar{c}$ направлен так, что тройка векторов $\left(\bar{a},\bar{b},\bar{c}\right)$ – правая.

Длина $|\bar{c}|$ векторного произведения численно равна площади параллелограмма, построенного на векторах $\bar{a}$ и $\bar{b}$: $S_{\square} = \left|\left[\bar{a},\bar{b}\right]\right|$.

Если векторы $\bar{a} = \left(a_x;a_y;a_z\right)$ и $\bar{b} = b_x\bar{i} + b_y\bar{j} + b_z\bar{k}$ заданы в базисе $\left\langle\bar{i},\bar{j},\bar{k}\right\rangle$, то

$$\left[\bar{a},\bar{b}\right] = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}. \qquad (4)$$

Определение 3. Смешанным произведением трёх векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ называется скалярное произведение векторов $\left[\bar{a},\bar{b}\right]$ и $\bar{c}$, обозначается $\left(\left[\bar{a},\bar{b}\right],\bar{c}\right)$, или $\left(\bar{a},\bar{b},\bar{c}\right)$, или $\bar{a}\bar{b}\bar{c}$.

В базисе $\left\langle\bar{\boldsymbol{i}},\bar{\boldsymbol{j}},\bar{\boldsymbol{k}}\right\rangle$ смешанное произведение векторов $\bar{a} = \left(a_x;a_y;a_z\right)$, $\bar{b} = \left(b_x;b_y;b_z\right)$, $\bar{c} = \left(c_x;c_y;c_z\right)$ вычисляется по формуле:

$$\bar{a}\bar{b}\bar{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}. \qquad (5)$$

Объём параллелепипеда, построенного на векторах $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$, равен $V = \left|\bar{a}\bar{b}\bar{c}\right|$.

Объём пирамиды $V_{\text{пир}} = \frac{1}{6}\left|\bar{a}\bar{b}\bar{c}\right|$.

Необходимым и достаточным условием компланарности трёх векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ является равенство нулю их смешанного произведения: $\bar{a}\bar{b}\bar{c} = 0$

2. Решение задания 1

1. Найдём скалярное произведение векторов $\left(\bar{b}, 3\bar{a} + 2\bar{c}\right)$, если $\bar{a} = (1;-2;3)$, $\bar{b} = (-1;0;2)$, $\bar{c} = (2;-1;1)$.

$$3\bar{a} + 2\bar{c} = 3\left(\bar{i} - 2\bar{j} + 3\bar{k}\right) + 2\left(2\bar{i} - \bar{j} + \bar{k}\right) = 7\bar{i} - 8\bar{j} + 11\bar{k}.$$

По формуле (2) найдём

$$\left(\bar{b}, 3\bar{a} + 2\bar{c}\right) = \left(-\bar{i} + 2\bar{k}\right)\cdot\left(7\bar{i} - 8\bar{j} + 11\bar{k}\right) =$$
$$= -1\cdot 7 + 0\cdot(-8) + 2\cdot 11 = 15.$$

2. Найдём векторное произведение векторов $\bar{a}$ и $3\bar{b} - \bar{c}$.

$3\bar{b} - \bar{c} = 3(-1;0;2) - (2;-1;1) = (-5;1;5)$ – одноимённые координаты вычитаются; при умножении вектора на число его координаты умножаются на это число.

Векторное произведение векторов $\bar{a} = (1;-2;3)$ и $3\bar{b} - \bar{c} = (-5;1;5)$ вычислим по формуле (4):

$\left[\bar{a}, 3\bar{b} - \bar{c}\right] = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & -2 & 3 \\ -5 & 1 & 5 \end{vmatrix} = |$определитель разлагаем по первой строке$|$ $= A_{11}\bar{i} + A_{12}\bar{j} + A_{13}\bar{k} = M_{11}\bar{i} - M_{12}\bar{j} + M_{13}\bar{k} =$

$$= \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}\bar{i} - \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -5 & 5 \end{vmatrix}\bar{j} + \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -5 & 1 \end{vmatrix}\bar{k} = -13\bar{i} - 20\bar{j} - 9\bar{k}.$$

3. Найдём смешанное произведение векторов $2\bar{a}$, $-\bar{b}$, $3\bar{c} - \bar{a}$.

$2\bar{a} = 2(1;-2;3) = (2;-4;6)$, $\ -\bar{b} = -(-1;0;2) = (1;0;-2)$,
$3\bar{c} - \bar{a} = 3(2;-1;1) - (1;-2;3) = (6;-3;3) - (1;-2;3) = (5;-1;0)$.

По формуле (5) найдём смешанное произведение векторов:

$$(2\bar{a}, -\bar{b}, 3\bar{c} - a) = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 6 \\ 1 & 0 & -2 \\ 5 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 10 \\ 1 & 0 & 0 \\ 5 & -1 & 10 \end{vmatrix} = 1 \cdot A_{21} =$$

$$= -M_{21} = -\begin{vmatrix} -4 & 10 \\ -1 & 10 \end{vmatrix} = -(-40 + 10) = 30\,.$$

Ответ: 1) 15; 2) $(-13;-20;-9)$; 3) 30.

Задание 2

1. Найдём косинус угла между рёбрами M_1M_2 и M_1M_3.

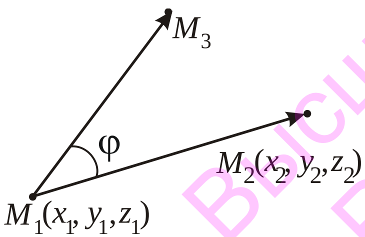


Рис. 1

Угол между рёбрами равен углу между векторами $\overline{M_1M_2}$ и $\overline{M_1M_3}$. Известно, что координаты вектора $\overline{M_1M_2}$ равны соответственно $x_2 - x_1$, $y_2 - y_1$, $z_2 - z_1$ (рис. 1):

если $M_1\left(\frac{1}{3};1;-2\right)$, $M_2(-1;3;-1)$, $M_3\left(-\frac{23}{3};4;1\right)$,

то $\overline{M_1M_2} = \left(-\frac{4}{3};2;1\right)$, $\overline{M_1M_3} = (-8;3;3)$. Из формулы (1)

$$\cos\varphi = \frac{(\bar{a}, \bar{b})}{|\bar{a}| \cdot |\bar{b}|}\,.$$

В базисе $\langle \bar{i}; \bar{j}; \bar{k} \rangle$ скалярное произведение $(\bar{a}, \bar{b})$ вычисляется по формуле (2), а длина $|\bar{a}|$ – по формуле (3). Имеем

$$\cos\varphi = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \cdot \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}} .$$

В задании 2

$$\left(\overline{M_1M_2}, \overline{M_1M_3}\right) = \left(-\frac{4}{3}\right) \cdot (-8) + 2 \cdot 3 + 1 \cdot 3 = \frac{59}{3} ,$$

$$\left|\overline{M_1M_2}\right| = \sqrt{\frac{16}{9} + 4 + 1} = \sqrt{\frac{61}{9}} = \frac{\sqrt{61}}{3} ;$$

$$\left|\overline{M_1M_3}\right| = \sqrt{64 + 9 + 9} = \sqrt{82} .$$

Тогда

$$\cos\varphi = \frac{\left(\overline{M_1M_2}, \overline{M_1M_3}\right)}{\left|\overline{M_1M_2}\right| \cdot \left|\overline{M_1M_3}\right|} = \frac{\frac{59}{3}}{\frac{\sqrt{61}}{3} \cdot \sqrt{82}} = \frac{59}{\sqrt{5002}} .$$

2. Площадь грани $M_1M_2M_3$:

$$S_{\Delta M_1M_2M_3} = \frac{1}{2} S_{\square} = \frac{1}{2} \left|\left[\overline{M_1M_2}, \overline{M_1M_3}\right]\right| ;$$

найдём

$$\left[\overline{M_1M_2}, \overline{M_1M_3}\right] = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -\frac{4}{3} & 2 & 1 \\ -8 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 3\bar{i} - 4\bar{j} + 12\bar{k} ,$$

$$s_{\square} = \left|\left[\overline{M_1M_2}, \overline{M_1M_3}\right]\right| = \sqrt{9 + 16 + 144} = 13 ; \ S_{\Delta} = 6{,}5 .$$

3. Объём пирамиды. Найдём смешанное произведение трёх векторов

$$\overline{M_1M_2} = \left(-\frac{4}{3}; 2; 1\right), \ \overline{M_1M_3} = (-8; 3; 3), \ \overline{M_1M_4} = (0; -3; 1)$$

по формуле (5):

$$\overline{M_1M_2}\cdot\overline{M_1M_3}\cdot\overline{M_1M_4}=\begin{vmatrix}-\frac{4}{3} & 2 & 1\\ -8 & 3 & 3\\ 0 & -3 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-\frac{4}{3} & 5 & 1\\ -8 & 12 & 3\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=$$

$$=1\cdot A_{33}=M_{33}=\begin{vmatrix}-\frac{4}{3} & 5\\ -8 & 12\end{vmatrix}=\left(-\frac{4}{3}\right)\cdot 12-5(-8)=$$

$$=-16+40=24\quad\Rightarrow\quad V_{пир}=24.$$

$$V_{пир}=\frac{1}{6}V_{пар}=\frac{1}{6}\cdot 24=4.$$

4. Найдём высоту H. $V_{пар}=S_{осн}\cdot H$. Так как $S_{\square}=13$, $V_{пар}=24$, то $H=\dfrac{V_{пар}}{S_{осн}}=\dfrac{24}{13}$.

Ответ: 1) $\cos\varphi=\dfrac{59}{\sqrt{5002}}$; 2) $S_{\Delta}=6{,}5$;

3) $V_{пир}=4$; 4) $H=\dfrac{24}{13}$.

Задание 3

1. Краткие теоретические сведения

Прямая на плоскости в ДПСК может быть задана различными видами уравнений (см. [3], главы 4,5; [4], глава 5, §1, глава 6, §1,2, 3; [6], главы 4,6).

1. Общее уравнение прямой $Ax+By+D=0$, вектор $\bar{n}=A\bar{i}+B\bar{j}$ перпендикулярен к прямой и называется ***нормальным вектором*** прямой.

2. Каноническое уравнение прямой

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n},$$

где вектор $\bar{s}=(m;n)$ параллелен прямой и ***называется направляющим вектором***, $M_0(x_0;y_0)$ – заданная точка, через которую проходит прямая, $M(x;y)$ – любая точка прямой.

3. Уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(x_0;y_0)$ перпендикулярно к нормальному вектору $\bar{n}=(A;B)$:

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)=0.$$

4. Параметрические уравнения прямой

$$\begin{cases} x=x_0+mt, \\ y=y_0+nt, \end{cases}$$ где $t\in\mathbf{R}$ – параметр.

5. Уравнение прямой в отрезках

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1,$$

где a и b – величины отрезков, отсекаемых на координатных осях Ox и Oy.

6. Уравнение прямой с угловым коэффициентом

$$y=kx+b,$$

где $k=tg\alpha$, α – угол наклона прямой к оси Ox, b – величина отрезка, отсекаемого прямой на оси Oy.

7. Уравнение прямой с угловым коэффициентом k, проходящей через заданную точку $M_0(x_0,y_0)$:

$$y-y_0=k(x-x_0).$$

8. Уравнение прямой, проходящей через две заданные точки $M_1(x_1,y_1)$ и $M_2(x_2,y_2)$:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}.$$

Прямые параллельны, если $k_1 = k_2$, прямые перпендикулярны, если $k_1 \cdot k_2 = -1$, где k_1 и k_2 – угловые коэффициенты прямых.

Алгебраические кривые 2-го порядка

1. ***Окружность.*** Каноническое уравнение окружности $x^2 + y^2 = R^2$, R – радиус окружности.

2. ***Эллипс.*** Каноническое уравнение эллипса $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, где a и b – полуоси эллипса.

Если $a > b$, то фокусы эллипса левый $F_1(-c,0)$ и правый $F_2(c,0)$ лежат на оси Ox, $b^2 = a^2 - c^2$.

Число $e = \dfrac{c}{a}$ называется эксцентриситетом эллипса.

3. ***Гипербола.*** Каноническое уравнение гиперболы с фокусами левым $F_1(-c,0)$ и правым $F_2(c,0)$ имеет вид: $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, где $b^2 = c^2 - a^2$.

Числа a и b называются соответственно ***действительной*** и ***мнимой*** полуосями гиперболы.

Асимптоты гиперболы $y = \pm \dfrac{b}{a} x$, эксцентриситет гиперболы $e = \dfrac{c}{a}$.

Директрисы эллипса и гиперболы:

$$\text{левая директриса } x = -\frac{a}{e},$$

$$\text{правая директриса } x = \frac{a}{e}.$$

4. ***Парабола.*** Каноническое уравнение параболы $y^2 = 2px$, где $p > 0$ – параметр, уравнение директрисы $x = -\frac{p}{2}$, фокус $F\left(\frac{p}{2};0\right)$.

Эксцентриситет: 1) для эллипса $e < 1$,
2) для гиперболы $e > 1$,
3) для параболы $e = 1$,
4) для окружности $e = 0$.

2. Решение задания 3

Дана гипербола $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$. Найти расстояние от левого фокуса до соответствующей директрисы.

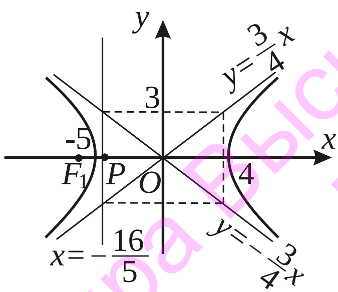


Рис. 2

Найдём левый фокус:

$c^2 = b^2 + a^2$,

$c^2 = 9 + 16 = 25 \Rightarrow c = 5$, левый фокус $F_1(-5;0)$. Уравнение левой директрисы $x = -\frac{a}{e}$, где $a = 4$, $e = \frac{c}{a} = \frac{5}{4}$, тогда $x = -\frac{4}{\frac{5}{4}} = -\frac{16}{5}$ (см. рис. 2). Точки $P = \left(-\frac{16}{5};0\right)$, $F_1(-5;0)$.

Найдём расстояние F_1P между точками $P = \left(-\frac{16}{5};0\right)$ и $F_1(-5;0)$:

$$F_1P = -\frac{16}{5} - (-5) = -\frac{16}{5} + 5 = \frac{9}{5} = 1{,}8.$$

Ответ: $1{,}8$.

Решение задания 4

Изобразим схематично эллипс $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ (рис. 3).

Найдём правый фокус $c^2=a^2-b^2$, $c^2=25-9=16\Rightarrow c=4$, правый фокус $F_2(4;0)$. Так как исходная прямая F_2M перпендикулярна к прямой $y=-3x+3$, то её угловой коэффициент $k=\frac{1}{3}$. Уравнение искомой прямой, проходящей через точку $F_2(4;0)$ имеет вид: $y=\frac{1}{3}(x-4)\Rightarrow x-3y-4=0$.

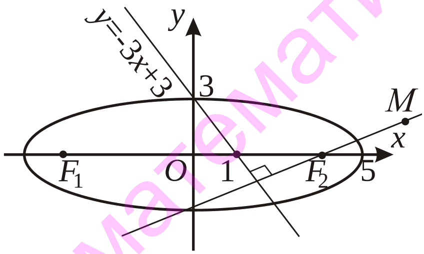


Рис. 3

Ответ: $x-3y-4=0$.

Решение задания 5

Изобразим параболу $y^2=-4x$ (рис. 4). $2p=-4$, $p=-2$ – параметр.

Фокус $F(-1;0)$, директриса: $x=1$. Пусть точка $M(x;y)$ на параболе, расстояние от которой до директрисы равно 5: $MD=5$

$$MD=M_1O+OD_1\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5=M_1O+1\Rightarrow M_1O=4,$$

точка $M_1(-4;0)$, следовательно, $M(-4;y)$ лежит на параболе $y^2=-4x\Rightarrow y^2=16\Rightarrow y=\pm 4$. На параболе имеем две точки: $M(-4;4)$ и $N(-4;-4)$.

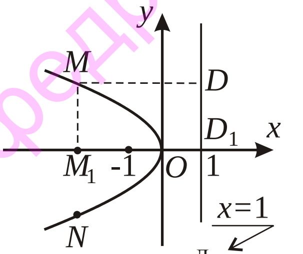


Рис. 4

Ответ: $(-4;\pm 4)$.

Задание 6

Краткие теоретические сведения (см. [3], глава 12; [4], глава 5, §3,4,5; [6], глава5).

1. Общее уравнение плоскости

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

где вектор $\bar{n} = (A; B; C)$ – нормальный вектор плоскости.

2. Уравнение плоскости, проходящей через заданную точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ перпендикулярно вектору $\bar{n} = (A; B; C)$

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

Решение задания 6

Пусть $M(x; y; z)$ – любая точка плоскости. Векторы $\overline{M_0 M} = (x - x_0; y - y_0; z - z_0)$, $\bar{s}_1 = (m_1; n_1; p_1)$ и $\bar{s}_2 = (m_2; n_2; p_2)$ компланарны, поэтому их смешанное произведение равно нулю: $(\overline{M_0 M} \cdot \bar{s}_1 \cdot \bar{s}_2) = 0$

или в координатной форме

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Разлагая определитель по первой строке, получаем общее уравнение плоскости.

Ответ: $Ax + By + Cz + D = 0$.

Решение задания 7

Пусть $M(x; y; z)$ – любая точка плоскости. Векторы $\overline{M_1 M}$, $\overline{M_1 M_2}$ и $\overline{M_1 M_3}$ компланарны, поэтому

$$\overline{M_1 M} \cdot \overline{M_1 M_2} \cdot \overline{M_1 M_3} = 0$$

или в координатной форме

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Разлагая определитель по первой строке, получаем *ответ:* $Ax+By+Cz+D=0$.

Решение задания 8

Пусть $M(x;y;z)$ – любая точка плоскости. Векторы $\overline{M_1M}=(x-x_1;y-y_1;z-z_1)$, $\overline{M_1M_2}=(x_2-x_1;y_2-y_1;z_2-z_1)$ и $\overline{n}=(A,B,C)$ – компланарны, поэтому

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ A & B & C \end{vmatrix}=0\Rightarrow$$

Ответ: $Ax+By+Cz+D=0$.

Решение задания 9

Плоскости параллельны, поэтому их нормальные векторы коллинеарны: $\overline{n}_1=(A_1;B_1;C_1)\parallel \overline{n}_2=(A_2;B_2;C_2)$.

На любой плоскости, например $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$, фиксируем точку $M_0(x_0,y_0,z_0)$ и находим расстояние до второй плоскости.

Расстояние d от точки $M_0(x_0,y_0,z_0)$ до плоскости $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ вычисляется по формуле

$$d=\frac{|A_2x_0+B_2y_0+C_2z_0+D_2|}{\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}.$$

Задание 10

1. Краткие теоретические сведения

Прямая в пространстве может быть задана:

1) общими уравнениями, как пересечение двух плоскостей:

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0; \end{cases}$$

2) каноническими уравнениями

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p},$$

где $M_0(x_0,y_0,z_0)$ – точка, через которую проходит прямая, $\bar{s}=(m;n;p)$ – направляющий вектор прямой;

3) параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x=x_0+mt, \\ y=y_0+nt, \\ z=z_0+pt, \end{cases}$$

где $t\in\mathbf{R}$ – параметр.

2. Решение задания 10

Чтобы преобразовать общие уравнения прямой

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases} \qquad (6)$$

в канонические

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p},$$

достаточно найти хотя бы одну точку $M_0(x_0,y_0,z_0)$ прямой и направляющий вектор $\bar{s}=(m,n,p)$.

Ранг системы (6) равен двум, поэтому система имеет бесконечное множество решений.

Пусть, например, минор $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}$ – базисный, неизвестные x и y – базисные, свободной переменной z можно дать конкретное значение z_0 и затем из системы (5) найти x_0 и y_0. Таким образом, точка M_0 найдена.

Направляющий вектор $\bar{s}$ ортогонален нормальным векторам $\bar{n}_1=(A_1,B_1,C_1)$ и $\bar{n}_2=(A_2,B_2,C_2)$, поэтому вектор $\bar{s}$ можно принять равным векторному произведению векторов $\bar{n}_1$ и $\bar{n}_2$:

$$\bar{s} = [\bar{n}_1, \bar{n}_2] = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix}.$$

Задача 10 решена.

Решение задания 11

Случай 1. Прямые параллельны. Направляющие векторы коллинеарны: $\bar{s}_1 \parallel \bar{s}_2$ (рис. 5), $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$ – точки, через которые проходят прямые. Векторы $\overline{M_1M_2}$ и $\bar{s}_1$ приведём в точку M_1, найдём площадь параллелограмма, построенного на этих векторах: $S_{\square} = \left|\left[\overline{M_1M_2}, \bar{s}_1\right]\right|$.

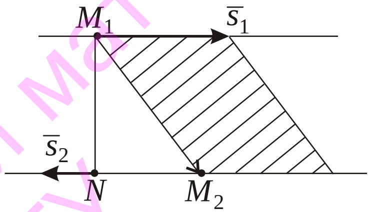


Рис. 5

$$\left[\overline{M_1M_2}, \bar{s}_1\right] = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \end{vmatrix} = A_{11}\bar{i} + A_{12}\bar{j} + A_{13}\bar{k},$$

$$S_{\square} = \left|\left[\overline{M_1M_2}, \bar{s}_1\right]\right| = \sqrt{A_{11}^2 + A_{12}^2 + A_{13}^2}, \quad |\bar{s}_1| = \sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2}.$$

Из формулы $S_{\square} = |\bar{s}_1| \cdot h \Rightarrow$ высота $h = \dfrac{S}{|\bar{s}_1|}$ – расстояние между прямыми. ►

Случай 2. Прямые скрещиваются.

Векторы $\overline{M_1M_2}$, $\bar{s}_1$ и $\bar{s}_2$ некомпланарны. Найдём объём параллелепипеда, построенного на этих векторах (рис. 6):

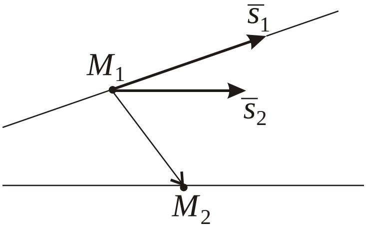


Рис. 6

$$V = \left|\overline{M_1M_2} \cdot \bar{s}_1 \cdot \bar{s}_2\right|.$$

Затем вычислим площадь основания, построенного на векторах $\bar{s}_1$ и $\bar{s}_2$: $S_{\square} = \left|\left[\bar{s}_1, \bar{s}_2\right]\right|$. Так как $V = S_{\square} \cdot H$, то $H = \dfrac{V}{S}$ – высота параллелепипеда является расстоянием между скрещивающимися прямыми. ►

Случай 3. Прямые пересекаются. Расстояние между ними равно нулю.

Решение задания 12

Для нахождения точки пересечения прямой $\dfrac{x - x_0}{m} = \dfrac{y - y_0}{n} = \dfrac{z - z_0}{p}$ и плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$ решаем систему уравнений

$$\begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt, \\ z = z_0 + pt, \\ Ax + By + Cz + D = 0. \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A(x_0 + mt) + B(y_0 + nt) + C(z_0 + pt) + D \Rightarrow$$

параметр

$$t = -\frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{Am + Bn + Cp} = t_0, \text{ где } Am + Bn + Cp \neq 0.$$

Значение параметра t_0 подставляем в параметрические уравнения прямой (при решении мы перешли от канонических уравнений к параметрическим):

$$x = x_0 + mt_0, \; y = y_0 + nt_0, \; z = z_0 + pt_0.$$

Ответ: $(x_0 + mt_0, y_0 + nt_0, z_0 + pt_0)$.

Вопрос: что будет, если $Am + Bn + Cp = 0$?

Решение задания 14

Найти условия принадлежности прямой

$$\ell: \frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}$$

плоскости

$$\pi: Ax + By + Cz + D = 0.$$

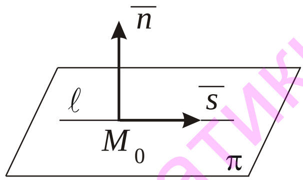


Рис. 7

Для выполнения этих условий необходимо и достаточно чтобы 1) $\overline{n} \perp \overline{s}$ и 2) прямая ℓ и плоскость π имели хотя бы одну общую точку, например, $M_0(x_0, y_0, z_0)$. Таким образом, эти условия выражаются двумя равенствами:

$$\overline{n} \perp \overline{s} \Leftrightarrow Am + Bn + Cp = 0,$$

$$M_0(x_0, y_0, z_0) \in \ell \text{ и}$$

$$M_0(x_0, y_0, z_0) \in \pi: Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0.$$

Решение задания 15

Приведём векторы $\overline{a} = (a_x, a_y, a_z)$, $\overline{b} = (b_x, b_y, b_z)$, $\overline{c} = (c_x, c_y, c_z)$ и $\overline{d} = (d_x, d_y, d_z)$ (см. рис. 8) к общему началу O.

Существуют числа α, β, γ такие, что соответственно

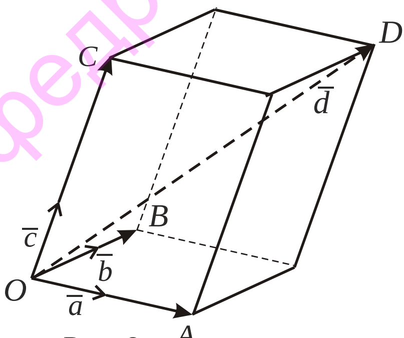


Рис. 8

$\overline{OA} = \alpha\overline{a}$, $\overline{OB} = \beta\overline{b}$, $\overline{OC} = \gamma\overline{c}$, вектор

$$\overline{OD} = \overline{d} = \overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} = $$
$$= \alpha\overline{a} + \beta\overline{b} + \gamma\overline{c}.$$

Найдём числа α, β γ – координаты вектора $\overline{d}$ в базисе $\langle \overline{a}, \overline{b}, \overline{c} \rangle$. Имеем

$$\overline{d} = d_x\overline{i} + d_y\overline{j} + d_z\overline{k},$$

$\bar{a} = a_x\bar{i} + a_y\bar{j} + a_z\bar{k}$, $\bar{b} = b_x\bar{i} + b_y\bar{j} + b_z\bar{k}$, $\bar{c} = c_x\bar{i} + c_y\bar{j} + c_z\bar{k}$,

$$d_x\bar{i} + d_y\bar{j} + d_z\bar{k} =$$
$$= \alpha\left(a_x\bar{i} + a_y\bar{j} + a_z\bar{k}\right) + \beta\left(b_x\bar{i} + b_y\bar{j} + b_z\bar{k}\right) + \gamma\left(c_x\bar{i} + c_y\bar{j} + c_z\bar{k}\right).$$

Два вектора в равенстве равны, поэтому

$$\begin{cases} a_x\alpha + b_x\beta + c_x\gamma = d_x, \\ a_y\alpha + b_y\beta + c_y\gamma = d_y, \\ a_z\alpha + b_z\beta + c_z\gamma = d_z. \end{cases}$$

Из полученной системы линейных уравнений любым способом найдём единственные $\alpha, \beta \;\; \gamma$, так как для базиса $\langle \bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \rangle$ определитель системы отличен от нуля. ►

Задание 16

1. Краткие теоретические сведения

Для любого базиса $\langle \bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \rangle$ существует единственный ортонормированный базис $\langle \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3 \rangle$, определяемый базисом $\langle \bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \rangle$. Процесс преобразования любого базиса в ортогональный называется процессом ортогонализации Грама – Шмидта.

Рассмотрим этот процесс.

Очевидно, что вектор $\bar{e}_1$ можно положить равным орту $\bar{a}^o = \dfrac{1}{|\bar{a}|}\bar{a}$, $\bar{e}_1 = \bar{a}^o$. Найдём $\bar{e}_2' = \bar{b} + \alpha\bar{e}_1$, причём $\bar{e}_2' \perp \bar{e}_1$, α – некоторое число.

Умножим скалярно предыдущее равенство на вектор $\bar{e}_1$: $\left(\bar{e}_2', \bar{e}_1\right) = \left(\bar{b}, \bar{e}_1\right) + \alpha\left(\bar{e}_1, \bar{e}_1\right) \Rightarrow \alpha = -\left(\bar{b}, \bar{e}_1\right)$, так как $\left(\bar{e}_2', \bar{e}_1\right) = 0$. Таким образом $\bar{e}_2' = \bar{b} + \alpha\bar{e}_1$, где $\alpha = -\left(\bar{b}, \bar{e}_1\right)$. Орт $\bar{e}_2 = \dfrac{1}{|\bar{e}_2'|}\bar{e}_2'$.

Найдем орт $\bar{e}_3$ аналогично. $\bar{e}_3' = \bar{c} + \alpha_1\bar{e}_1 + \alpha_2\bar{e}_2$, (*)

где $\bar{e}_3' \perp \bar{e}_1$ и $\bar{e}_3' \perp \bar{e}_2$.

Умножаем это равенство скалярно сначала на $\bar{e}_1$, а затем на $\bar{e}_2$: $\alpha_1 = -(\bar{c}, \bar{e}_1)$, $\alpha_2 = -(\bar{c}, \bar{e}_2)$. Полученные числа α_1 и α_2 подставляем в равенство (*), затем вектор $\bar{e}_3'$ нормируем: $\bar{e}_3 = \dfrac{1}{|\bar{e}_3'|}\bar{e}_3'$.

В результате получаем ортонормированный единственный базис $\langle \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3 \rangle$.

2. Решение задания 16

Покажем, что данные векторы $\bar{a} = (1;2;2)$, $\bar{b} = (-3;6;0)$ и $\bar{c} = (-3;0;6)$ образуют базис.

Вычислим их смешанное произведение

$$\bar{a}\bar{b}\bar{c} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -3 & 6 & 0 \\ -3 & 0 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -3 & 6 & -6 \\ -3 & 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= -3A_{31} = -3M_{31} = -3\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 6 & -6 \end{vmatrix} = 108 \neq 0.$$

Следовательно, $\langle \bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \rangle$ – базис.

$$\bar{e}_1 = \frac{1}{|\bar{a}|}\bar{a} = \frac{1}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2}} \cdot (1,2,2) = \left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right).$$

Найдём $\bar{e}_2$: $\bar{e}_2' = \bar{b} + \alpha\bar{e}_1 \Rightarrow \alpha = -(\bar{b}, \bar{e}_1) =$

$$= -(-3;6;0) \cdot \left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right) = -(-1 + 4 + 0) = -3,$$

$$\bar{e}_2' = (-3;6;0) - 3\left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right) = (-3;6;0) - (1;2;2) = (-4;4;-2),$$

$$\bar{e}_2=\frac{1}{|\bar{e}_2'|}\bar{e}_2'=\frac{1}{\sqrt{16+16+4}}(-4;4;-2)=\left(-\frac{2}{3};\frac{2}{3};-\frac{1}{3}\right).$$

Аналогично найдём $\bar{e}_3$.

$$\bar{e}_3'=\bar{c}+\alpha_1\bar{e}_1+\alpha_2\bar{e}_2\Rightarrow\alpha_1=-(\bar{c},\bar{e}_1)=$$

$$=-(-3;0;6)\cdot\left(\frac{1}{3};\frac{2}{3};\frac{2}{3}\right)=-(-1+4)=-3.$$

$$\alpha_2=-(\bar{c},\bar{e}_2)=-(-3;0;6)\cdot\left(-\frac{2}{3};\frac{2}{3};-\frac{1}{3}\right)=-(2-2)=0.$$

Таким образом,

$$\bar{e}_3'=(-3;0;6)-3\left(\frac{1}{3};\frac{2}{3};\frac{2}{3}\right)=(-3;0;6)-(1;2;2)=(-4;-2;4),$$

$$\bar{e}_3=\frac{1}{|\bar{e}_3'|}\bar{e}_3'=\frac{1}{\sqrt{16+4+16}}(-4;-2;4)=\frac{1}{6}(-4;-2;4)=\left(-\frac{2}{3};-\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right).$$

Проверка:

$$(\bar{e}_1,\bar{e}_2)=\left(\frac{1}{3};\frac{2}{3};\frac{2}{3}\right)\cdot\left(-\frac{2}{3};\frac{2}{3};-\frac{1}{3}\right)=-\frac{2}{9}+\frac{4}{9}-\frac{2}{9}=0,$$

$$(\bar{e}_1,\bar{e}_3)=\left(\frac{1}{3};\frac{2}{3};\frac{2}{3}\right)\cdot\left(-\frac{2}{3};-\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right)=-\frac{2}{9}-\frac{2}{9}+\frac{4}{9}=0,$$

$$(\bar{e}_2,\bar{e}_3)=\left(-\frac{2}{3};\frac{2}{3};-\frac{1}{3}\right)\cdot\left(-\frac{2}{3};-\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right)=0.$$

Ответ: $\bar{e}_1=\left(\frac{1}{3};\frac{2}{3};\frac{2}{3}\right)$, $\bar{e}_2=\left(-\frac{2}{3};\frac{2}{3};-\frac{1}{3}\right)$,

$\bar{e}_3=\left(-\frac{2}{3};-\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right)$.

Задание 17

1. Краткие теоретические сведения

(см. [4], глава 6, §5; [6], глава 7; [2], глава 1, §4; глава 4, §3)

Задача. Общее уравнение линии 2-го порядка

$$A_{20}x^2 + 2A_{11}xy + A_{02}y^2 + 2A_{10}x + 2A_{01}y + A_{00} = 0 \qquad (7)$$

привести к каноническому уравнению.

Способ первый. Поворотом осей координат Ox и Oy на некоторый угол φ по формулам

$$\begin{aligned} x &= x'\cos\varphi - y'\sin\varphi, \\ y &= x'\sin\varphi + y'\cos\varphi \end{aligned} \qquad (**)$$

получаем новую систему координат $Ox'y'$, в которой не будет слагаемого с произведением $2A'_{11}x'y'$. Угол поворота находится из уравнения

$$A_{11}tg^2\varphi + (A_{20} - A_{02})tg\,\varphi - A_{11} = 0 \qquad (8)$$

или $$ctg\,2\varphi = \frac{A_{20} - A_{02}}{2A_{11}}.$$

Общее уравнение примет вид:

$$A'_{20}x'^2 + A'_{02}y'^2 + 2A'_{10}x' + 2A'_{01}y' + A_{00} = 0. \qquad (9)$$

Выполнив параллельный перенос по формулам

$$\begin{cases} X = x' + x_0, \\ Y = y' + y_0 \end{cases}$$

где x_0 и y_0 – координаты нового начала O', получаем простейшее (каноническое) уравнение.

Второй способ. В этом способе преобразований уравнения (7) к уравнению (9) применяется теория собственных векторов и собственных значений матрицы (см. [2]).

Определение. Ненулевой вектор $\bar{x}$ называется собственным вектором матрицы A, если выполняется равенство

$$\mathrm{A}\bar{x} = \lambda\bar{x}. \qquad (10)$$

Число λ называется собственным значением (собственным числом) матрицы A.

Собственные векторы $\bar{x}$ и соответствующие собственные значения λ являются решениями матричного уравнения (10), записанного в координатной форме.

П р и м е р. Найти собственные векторы и собственные значения симметрической матрицы второго порядка $A = \begin{Vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{Vmatrix}$.

Решение. Запишем матричное уравнение (10) $A\bar{x} = \lambda\bar{x}$, $\begin{Vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Vmatrix} = \lambda \begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Vmatrix}$, где $\bar{x}^T = \begin{Vmatrix} x_1 & x_2 \end{Vmatrix}$.

$$\begin{Vmatrix} 2x_1 + 2x_2 \\ 2x_1 + 5x_2 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \end{Vmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 = \lambda x_1, \\ 2x_1 + 5x_2 = \lambda x_2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (2-\lambda)x_1 + 2x_2 = 0, \\ 2x_1 + (5-\lambda)x_2 = 0. \end{cases} \qquad (11)$$

Имеем однородную СЛАУ с неизвестными x_1 и x_2.

Для существования нетривиальных решений необходимо и достаточно, чтобы определитель системы (11) был равен нулю: $\begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 2 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0$.

Уравнение относительно λ называется характеристическим уравнением:

$(2-\lambda)(5-\lambda) - 4 = 0$, $\lambda^2 - 7\lambda + 6 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 6$ – собственные значения матрицы A.

Найдём собственные векторы:

1) $\lambda_1 = 1$, система (11) примет вид:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 0, \\ 2x_1 + 4x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow x_1 + 2x_2 = 0.$$

Пусть $x_1 = 2$, тогда $x_2 = -1$. Собственному значению $\lambda_1 = 1$ соответствует собственный вектор $\bar{x}^T = \begin{Vmatrix} 2 & -1 \end{Vmatrix}$;

2) если $\lambda_2 = 6$, то система (11)

$$\begin{cases} -4x_1 + 2x_2 = 0, \\ 2x_1 - x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow 2x_1 - x_2 = 0,\ x_2 = 2x_1,$$

пусть $x_1 = 1$, тогда $x_2 = 2$; $\bar{x}^T = \|1 \quad 2\|$ – собственный вектор с собственным значением $\lambda = 6$.

2. Решение задания 17 первым способом

Привести к каноническому виду уравнение кривой второго порядка

$$4xy + 3y^2 + 16x + 12y - 36 = 0. \qquad (12)$$

Решение. Найдём $\sin\varphi$ и $\cos\varphi$ угла поворота φ из уравнения (8), где $A_{11} = 2$, $A_{20} = 0$, $A_{02} = 3$.

$$2tg^2\varphi - 3tg\varphi - 2 = 0 \Rightarrow tg\varphi = \frac{3 \pm 5}{4} = 2\,;\; -\frac{1}{2}.$$

Выберем $tg\varphi = 2 \Rightarrow \varphi = arctg\,2$. Найдём $\sin\varphi$ и $\cos\varphi$.

$$1 + tg^2\varphi = \frac{1}{\cos^2\varphi} \Rightarrow \cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + tg^2\varphi}} = \frac{1}{\sqrt{5}},$$

$$\sin\varphi = \sqrt{1 - \cos^2\varphi} = \frac{2}{\sqrt{5}} \Rightarrow$$

$$\sin\varphi = \frac{2}{\sqrt{5}}, \qquad \cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Формулы (**) преобразования системы Oxy в систему $Ox'y'$ имеют вид:

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{\sqrt{5}}x' - \dfrac{2}{\sqrt{5}}y', \\ y = \dfrac{2}{\sqrt{5}}x' + \dfrac{1}{\sqrt{5}}y'. \end{cases}$$

Подставляем x и y в уравнение (10):

$$4\left(\frac{x'}{\sqrt{5}} - \frac{2}{\sqrt{5}}y'\right)\left(\frac{2}{\sqrt{5}}x' + \frac{1}{\sqrt{5}}y'\right) + 3\left(\frac{2}{\sqrt{5}}x' + \frac{1}{\sqrt{5}}y'\right)^2 +$$

$$+16\left(\frac{x'}{\sqrt{5}} - \frac{2}{\sqrt{5}}y'\right) + 12\left(\frac{2}{\sqrt{5}}x' + \frac{1}{\sqrt{5}}y'\right) - 36 = 0.$$

$$4x'^2 - y'^2 + \frac{40}{\sqrt{5}}x' - \frac{20}{\sqrt{5}}y' - 36 = 0.$$

Выделяем полные квадраты:

$$4\left(x'^2 + \frac{10}{\sqrt{5}}x'\right) - \left(y'^2 + \frac{20}{\sqrt{5}}y'\right) - 36 = 0,$$

$$4\left(x' + \sqrt{5}\right)^2 - 20 - \left(y' + 2\sqrt{5}\right)^2 + 20 - 36 = 0.$$

Выполняем параллельный перенос в точку $O'\left(-\sqrt{5};-2\sqrt{5}\right)$ по формулам

$$\begin{cases} X = x' + \sqrt{5}, \\ Y = y' + 2\sqrt{5}. \end{cases}$$

Тогда $4X^2 - Y^2 = 36 \Rightarrow \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{36} = 1$ – каноническое уравнение гиперболы (рис.9).

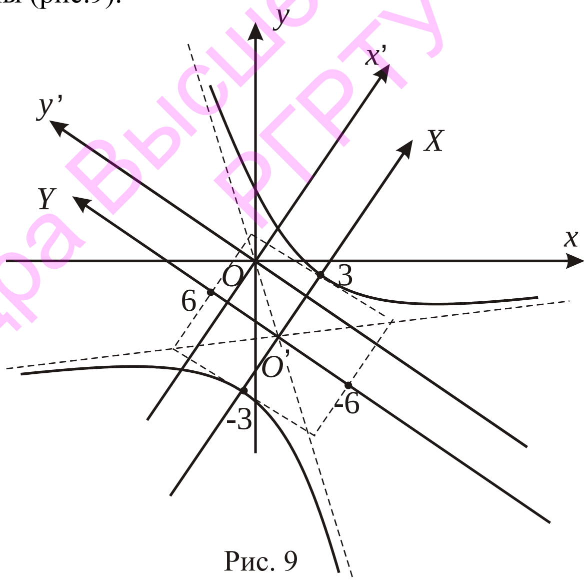


Рис. 9

3. Решение задания 17 вторым способом

В общем уравнении (7) первые три слагаемых

$$Q(x,y)=A_{20}x^2+2A_{11}xy+A_{02}y^2$$

называются группой старших слагаемых и являются квадратичной формой (см. [2], глава 5, §7).

Запишем квадратичную форму в матричном виде:

$$Q(x,y)=\begin{Vmatrix} x & y \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} A_{20} & A_{11} \\ A_{11} & A_{02} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} x \\ y \end{Vmatrix}, \text{ – проверьте!}$$

где матрица $\mathrm{A}=\begin{Vmatrix} A_{20} & A_{11} \\ A_{11} & A_{02} \end{Vmatrix}$ называется матрицей квадратичной формы. Матрица A является симметрической матрицей, у которой главная диагональ образована из коэффициентов при квадратах x^2 и y^2, а элементы побочной диагонали – половины коэффициента в произведении переменных x и y.

Найдём собственные значения и собственные векторы матрицы квадратичной формы задания 17:

$$Q(x,y)=4xy+3y^2.$$

Для матрицы $\mathrm{A}=\begin{Vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{Vmatrix}$ найдём собственные значения, решив характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 0-\lambda & 2 \\ 2 & 3-\lambda \end{vmatrix}=0 \Rightarrow \lambda^2-3x-4=0,\ \lambda_1=4,\ \lambda_2=-1.$$

Каждое собственное значение имеет собственные векторы, которые можно найти из системы линейных алгебраических уравнений (в матричной форме):

$$\mathrm{A}x=\lambda x \Rightarrow (A-\lambda\mathrm{E})x=0,$$

где
$$\mathrm{E}=\begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}.$$

В координатной форме

$$\begin{Vmatrix}-\lambda & 2\\ 2 & 3-\lambda\end{Vmatrix}\cdot\begin{Vmatrix}x\\ y\end{Vmatrix}=0\Leftrightarrow\begin{cases}-\lambda x+2y=0,\\ 2x+(3-\lambda)y=0\end{cases}$$ система уравнений относительно x и y.

Для собственного значения $\lambda_1=4$ получаем однородную систему уравнений

$\begin{cases}-4x+2y=0,\\ 2x-y=0\end{cases}\Rightarrow y=2x$, где x – любое действительное число, кроме $x=0$, т.е. все собственные векторы, соответствующие $\lambda_1=4$, параллельны прямой $y=2x$. Найдём один из них.

Пусть, например, $x=1$, тогда $y=2$. Собственный вектор $\overline{x}^{(1)}=\begin{Vmatrix}1 & 2\end{Vmatrix}^T$ нормируем. Длина $\left|\overline{x}^{(1)}\right|=\sqrt{5}$, нормированный вектор $\overline{e}_1'=\begin{Vmatrix}\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}}\end{Vmatrix}^T$.

Для второго собственного значения $\lambda_2=-1$ из однородной системы

$$\begin{matrix}x+2y=0,\\ 2x+4y=0\end{matrix}\Rightarrow x+2y=0\Rightarrow y=-\frac{x}{2}.$$

Пусть, например, $x=-2$, тогда $y=1$. Собственный вектор $\overline{x}^{(2)}=\begin{Vmatrix}-2 & 1\end{Vmatrix}^T$ нормируем:

$$\left|\overline{x}^{(2)}\right|=\sqrt{4+1}=\sqrt{5}\Rightarrow\overline{e}_2'=\begin{Vmatrix}-\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}}\end{Vmatrix}^T.$$

Матрица перехода $\mathrm{P}=\begin{Vmatrix}\frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}}\\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}}\end{Vmatrix}$ для базиса $\langle\overline{e}_1',\overline{e}_2'\rangle$ систему Oxy переводит в новую систему $Ox'y'$ по формулам:

$$\begin{Vmatrix} x \\ y \end{Vmatrix} = \mathrm{P} \cdot \begin{Vmatrix} x' \\ y' \end{Vmatrix}, \text{ т.е. } \begin{Vmatrix} x \\ y \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} x' \\ y' \end{Vmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{5}} x' - \frac{2}{\sqrt{5}} y', \\ y = \frac{2}{\sqrt{5}} x' + \frac{1}{\sqrt{5}} y' \end{cases} -$$

получены формулы (**) для задания 17: $\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{5}}$, $\sin\varphi = \frac{2}{\sqrt{5}}$.

Поворот ДПСК Oxy совершается вокруг точки O на угол φ против часовой стрелки.

Дальнейшее решение повторяет решение задания первым способом.

Ответ: $\frac{X^2}{9} - \frac{Y^2}{36} = 1$.

ТИПОВОЙ РАСЧЁТ

Задание 1. Даны векторы

$\bar{a} = (a_x, a_y, a_z)$, $\bar{b} = b_x\bar{i} + b_y\bar{j} + b_z\bar{k}$, $\bar{c} = (c_x, c_y, c_z)$. Найти:

1) скалярное произведение $(2\bar{a} + 3\bar{b}, \bar{c} - 2\bar{b})$;

2) длину векторного произведения векторов $2\bar{a} + 3\bar{b}$ и $\bar{c} - 2\bar{b}$;

3) смешанное произведение векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$.

1.1. $\bar{a} = (-2; 1; 4)$, $\bar{b} = (3; 0; 2)$, $\bar{c} = (-1; 4; -2)$.

1.2. $\bar{a} = (0; 2; 4)$, $\bar{b} = (3; -2; 1)$, $\bar{c} = (1; -1; 1)$.

1.3. $\bar{a} = (5; -2; 7)$, $\bar{b} = (2; 1; -1)$, $\bar{c} = (4; 5; -3)$.

1.4. $\bar{a} = (-1; -2; -3)$, $\bar{b} = (2; 4; 6)$, $\bar{c} = (-4; 5; 3)$.

1.5. $\bar{a} = (1; 2; 3)$, $\bar{b} = (0; 4; -1)$, $\bar{c} = (6; 4; -2)$.

1.6. $\bar{a} = (6; -3; 0)$ $\bar{b} = (2; -3; 5)$, $\bar{c} = (0; 2; -2)$.

1.7. $\bar{a} = (3; 5; 7)$, $\bar{b} = (-3; -5; -7)$, $\bar{c} = (2; 2; 2)$.

1.8. $\bar{a}=(-2;-4;-6)$, $\bar{b}=(8;7;-6)$, $\bar{c}=(1;1;1)$.

1.9. $\bar{a}=(4;1;0)$, $\bar{b}=(3;0;-3)$ $\bar{c}=(4;-3;-1)$.

1.10. $\bar{a}=(1;-2;3)$, $\bar{b}=(-3;3;-3)$, $\bar{c}=(2;1;-5)$.

1.11. $\bar{a}=(7;-7;7)$, $\bar{b}=(2;0;-6)$, $\bar{c}=(-2;1;5)$.

1.12. $\bar{a}=(-8;-6;4)$, $\bar{b}=(8;6;-4)$, $\bar{c}=(-1;2;-3)$.

1.13. $\bar{a}=(0;3;-5)$, $\bar{b}=(2;5;-7)$, $\bar{c}=(3;2;-1)$.

1.14. $\bar{a}=(3;3;3)$, $\bar{b}=(-3;-3;-3)$, $\bar{c}=(3;-3;3)$.

1.15. $\bar{a}=(2;1;0)$, $\bar{b}=(-1;-2;-3)$, $\bar{c}=(0;0;5)$.

1.16. $\bar{a}=(8;-8;8)$, $\bar{b}=(-2;2;-2)$, $\bar{c}=(1;1;1)$.

1.17. $\bar{a}=(2;3;-7)$, $\bar{b}=(7;-7;7)$, $\bar{c}=(2;-2;-1)$.

1.18. $\bar{a}=(9;-9;0)$, $\bar{b}=(0;9;9)$, $\bar{c}=(-9;0;9)$.

1.19. $\bar{a}=(-4;-3;-2)$, $\bar{b}=(4;3;2)$, $\bar{c}=(-4;3;-2)$.

1.20. $\bar{a}=(6;5;-4)$, $\bar{b}=(-6;-5;-4)$, $\bar{c}=(-6;5;4)$.

1.21. $\bar{a}=(-1;-1;-1)$, $\bar{b}=(3;-2;1)$, $\bar{c}=(1;-2;3)$.

1.22. $\bar{a}=(5;5;5)$, $\bar{b}=(-5;5;-5)$, $\bar{c}=(5;-5;5)$.

1.23. $\bar{a}=(7;4;-1)$, $\bar{b}=(-1;4;7)$, $\bar{c}=(4;1;7)$.

1.24 $\bar{a}=(0;0;-4)$, $\bar{b}=(4;0;4)$, $\bar{c}=(-5;-3;1)$.

1.25. $\bar{a}=(3;7;-9)$, $\bar{b}=(4;0;4)$, $\bar{c}=(-5;-3;1)$.

1.26. $\bar{a}=(-6;-4;-2)$, $\bar{b}=(6;-4;-2)$, $\bar{c}=(4;4;4)$.

1.27. $\bar{a}=(3;-5;-7)$, $\bar{b}=(5;-5;9)$, $\bar{c}=(5;-5;10)$.

1.28. $\bar{a}=(-9;-7;-5)$, $\bar{b}=(-4;-2;0)$, $\bar{c}=(-4;-6;-8)$.

1.29. $\bar{a}=(2;3;-5)$, $\bar{b}=(4;3;-3)$, $\bar{c}=(3;8;-8)$.

1.30. $\bar{a}=(1;4;-6)$, $\bar{b}=(2;-2;-7)$, $\bar{c}=(-7;4;1)$.

Задание 2. Даны координаты вершин пирамиды $M_1M_2M_3M_4$: $M_1(x_1,y_1,z_1)$, $M_2(x_2,y_2,z_2)$, $M_3(x_3,y_3,z_3)$, $M_4(x_4,y_4,z_4)$. Найти:

1) косинус угла между рёбрами M_1M_2 и M_1M_3;

2) площадь грани $M_1M_2M_3$;

3) объём пирамиды;

4) длину высоты пирамиды, опущенной из вершины M_4 на основание $M_1M_2M_3$.

2.1. $M_1(1;2;3)$, $M_2(-2;0;3)$, $M_3(4;2;1)$, $M_4(-3;1;1)$.

2.2. $M_1(-1;2;-3)$, $M_2(3;0;2)$, $M_3(-2;-1;1)$, $M_4(5;2;-2)$.

2.3. $M_1(2;2;2)$, $M_2(-2;2;2)$, $M_3(4;-1;3)$, $M_4(2;0;-1)$.

2.4. $M_1(0;-2;3)$, $M_2(3;6;-2)$, $M_3(-7;6;6)$, $M_4(1;-21;0)$.

2.5. $M_1(5;5;6)$, $M_2(4;5;4)$, $M_3(4;3;3)$, $M_4(2;2;2)$.

2.6. $M_1(0;1;5)$, $M_2(-1;-2;1)$, $M_3(2;-1;-3)$, $M_4(-1;2;1)$.

2.7. $M_1(2;-1;3)$, $M_2(3;0;1)$, $M_3(2;1;-1)$, $M_4(0;8;0)$.

2.8. $M_1(-2;-3;-1)$, $M_2(4;1;-2)$, $M_3(6;3;7)$, $M_4(-5;-4;8)$.

2.9. $M_1(-2;1;2)$, $M_2(4;0;0)$, $M_3(3;2;7)$, $M_4(1;3;2)$.

2.10. $M_1(-1;5;3)$, $M_2(-4;6;2)$, $M_3(0;2;3)$, $M_4(2;1;-1)$.

2.11. $M_1(2;7;4)$, $M_2(2;5;-1)$, $M_3(4;1;-1)$, $M_4(8;2;0)$.

2.12. $M_1(2;0;-2)$, $M_2(-1;4;-2)$, $M_3(2;3;4)$, $M_4(-2;1;5)$.

2.13. $M_1(2;-3;4)$, $M_2(3;1;4)$, $M_3(5;3;1)$, $M_4(-2;-1;0)$.

2.14. $M_1(3;3;3)$, $M_2(-2;3;4)$, $M_3(4;5;6)$, $M_4(-2;1;-2)$.

2.15. $M_1(0;3;0)$, $M_2(4;4;4)$, $M_3(-1;2;2)$, $M_4(2;5;1)$.

2.16. $M_1(2;4;6)$, $M_2(1;-3;6)$, $M_3(2;5;-1)$, $M_4(-1;-3;-1)$.

2.17. $M_1(6;3;1)$, $M_2(3;3;3)$, $M_3(-2;-1;2)$, $M_4(5;3;-2)$.

2.18. $M_1(-5;-4;-3)$, $M_2(1;0;1)$, $M_3(-1;4;1)$, $M_4(2;3;-4)$;

2.19. $M_1(-4;2;-1)$, $M_2(-4;3;1)$, $M_3(-5;2;-2)$, $M_4(0;2;-3)$.

2.20. $M_1(-2;-2;-2)$, $M_2(-1;2;3)$, $M_3(7;-1;-4)$, $M_4(8;6;4)$.

2.21. $M_1(-4;-4;-4)$, $M_2(1;2;-1)$, $M_3(3;2;1)$, $M_4(3;1;2)$.

2.22. $M_1(2;-3;-1)$, $M_2(2;1;0)$, $M_3(-1;-2;-3)$, $M_4(0;0;1)$.

2.23. $M_1(0;0;2)$, $M_2(0;3;1)$, $M_3(2;1;0)$, $M_4(1;1;1)$.

2.24. $M_1(2;-6;4)$, $M_2(9;-6;2)$, $M_3(2;1;0)$, $M_4(1;1;1)$.

2.25. $M_1(-1;2;-3)$, $M_2(-2;2;-2)$, $M_3(1;1;1)$, $M_4(7;6;-5)$.

2.26. $M_1(3;4;5)$, $M_2(2;3;4)$, $M_3(3;2;2)$, $M_3(-1;1;6)$.

2.27. $M_1(8;8;8)$, $M_2(6;6;6)$, $M_3(7;6;7)$, $M_3(5;7;8)$.

2.28. $M_1(8;7;5)$, $M_2(5;7;3)$, $M_3(-1;-2;1)$, $M_4(0;2;5)$.

2.29. $M_1(-3;2;2)$, $M_2(-3;4;4)$, $M_3(3;5;1)$, $M_4(6;5;4)$.

2.30. $M_1(1;3;4)$, $M_2(-1;-2;4)$, $M_3(5;-2;1)$, $M_4(3;3;-3)$.

Задание 3

3.1. Найти $\left(3\bar{a}-\bar{b},\bar{a}+\bar{b}\right)$,если $|a|=3$, $|b|=1$, $\bar{a}\perp\bar{b}$.

3.2. Найти направляющие косинусы вектора $\bar{a}=(-2;1;2)$.

3.3. Найти орт вектора $\bar{a}=(-1;2;-2)$.

2.4. При каких m и n векторы $\bar{a}=(-2;m;4)$ и $\bar{b}=(-4;1;n)$ коллинеарны?

3.5. Найти смешанное произведение векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$, если $|a|=2$, $|b|=3$, $|c|=1$, угол между векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$ равен $\dfrac{\pi}{6}$, вектор $\bar{c}$ противоположен вектору $\left[\bar{a},\bar{b}\right]$.

3.6. Вычислить площадь параллелограмма, если угол между векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$ равен 60° и $|a|=4$, $|b|=3$.

3.7. Вычислить объём пирамиды, построенной на векторах $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$, если $|a|=1$, $|b|=2$, $|c|=3$, угол между векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$ равен $\dfrac{\pi}{6}$ и вектор $\bar{c}$ перпендикулярен векторам $\bar{a}$ и $\bar{b}$.

3.8. Вычислить $\left|\left[3\overline{a}-\overline{b},\,2\overline{a}+3\overline{b}\right]\right|$, если $|a|=2$, $|b|=2$, угол между векторами $\overline{a}$ и $\overline{b}$ равен $\dfrac{5\pi}{6}$.

3.9. Найти $\left(2\overline{a}-3\overline{b}\right)^2$, если $|a|=4$, $|b|=2$, $\left(\overline{a}\,\widehat{,}\,\overline{b}\right)=\dfrac{2\pi}{3}$.

3.10. Вычислить $\left|\left[2\overline{a}-\overline{b},\,2\overline{a}+\overline{b}\right]\right|$, если $\overline{a}\perp\overline{b}$.

3.11. Найти $\left|3\overline{a}+2\overline{b}\right|$, если $\overline{a}\perp\overline{b}$.

3.12. Найти $\left|\left[3\overline{a}+2\overline{b},\,2\overline{a}+\overline{b}\right]\right|$, если $|a|=1$, $|b|=2$, $\left(\overline{a}\,\widehat{,}\,\overline{b}\right)=\dfrac{\pi}{6}$.

3.13. Вычислить $\left(3\overline{a}+2\overline{b},\,2\overline{a}-\overline{b}\right)$, если $|a|=1$, $|b|=2$, $\left(\overline{a}\,\widehat{,}\,\overline{b}\right)=\dfrac{\pi}{3}$.

3.14. Вычислить $\left[3\overline{a}-2\overline{b},\,2\overline{a}+2\overline{b}\right]$.

3.15. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\overline{a}=2\overline{m}-3\overline{n}$, $\overline{b}=3\overline{m}+2\overline{n}$, если $|\overline{m}|=3$, $|\overline{n}|=2$, $\left(\overline{m}\,\widehat{,}\,\overline{n}\right)=120^\circ$.

3.16. Какому условию должны удовлетворять векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$, чтобы векторы $\overline{a}+\overline{b}$ и $\overline{a}-\overline{b}$ были перпендикулярны?

3.17. Какому условию должны удовлетворять векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$, чтобы векторы $\overline{a}+\overline{b}$ и $\overline{a}-\overline{b}$ были коллинеарны?

3.18. Пусть векторы $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$ удовлетворяют условию $\overline{a}+\overline{b}+\overline{c}=\overline{0}$. Если $|\overline{a}|=3$, $|\overline{b}|=2$, $|\overline{c}|=2$, то $\left(\overline{a},\overline{b}\right)+\left(\overline{a},\overline{c}\right)+\left(\overline{b},\overline{c}\right)=?$

3.19. Найти длину вектора $\overline{d}=\overline{a}+\overline{b}+\overline{c}$, если векторы взаимно перпендикулярны и $|\overline{a}|=3$, $|\overline{b}|=3$, $|\overline{c}|=3$.

3.20. Доказать теорему Пифагора, если векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ образуют катеты.

3.21. Доказать теорему косинусов, если два вектора $\bar{a}$ и $\bar{b}$, выходящие из одной точки, образуют стороны треугольника.

3.22. При каком значении m векторы $\bar{a}+m\bar{b}$ и $\bar{a}-m\bar{b}$ будут перпендикулярны?

3.23. Доказать тождество: $\left[\bar{a},\bar{b}\right]^2+\left(\bar{a},\bar{b}\right)^2=\left|\bar{a}\right|^2\cdot\left|\bar{b}\right|^2$.

3.24. Доказать, что четыре точки $M_1(1;3;4)$, $M_2(-1;-2;-4)$, $M_3(5;-2;1)$, $M_4(3;3;3)$ лежат в одной плоскости.

3.25. Найти вектор $\bar{x}=(x_1;x_2;x_3)$, если он перпендикулярен к вектору $\bar{a}=(1;2;3)$ и удовлетворяет условиям: $\bar{x}\cdot\left(2\bar{i}-\bar{j}+2\bar{k}\right)=3$, $\bar{x}\cdot\left(\bar{i}+\bar{j}-2\bar{k}\right)=2$.

3.26. Разложить вектор $\bar{d}=(-2;6;0)$ по векторам $\bar{a}=(-3;4;0)$, $\bar{b}=(1;2;-1)$, $\bar{c}=(0;0;1)$.

3.27. При каком α векторы $\bar{a}=(1;-1;2)$, $\bar{b}=(3;1;4)$, $\bar{c}=(2;2;\alpha)$ будут компланарны?

3.28. Найти длину векторного произведения векторов $3\bar{a}-4\bar{b}$ и $3\bar{a}+4\bar{b}$, если $\left|\bar{a}\right|=2$, $\left|\bar{b}\right|=3$, $\left(\widehat{\bar{a},\bar{b}}\right)=\dfrac{5\pi}{6}$.

3.29. Доказать, что смешанное произведение трёх векторов $\bar{a}+\bar{b}$, $\bar{b}+\bar{c}$, $\bar{a}+\bar{c}$ равно $2\bar{a}\bar{b}\bar{c}$.

3.30. Объём тетраэдра равен 10, известны три его вершины: $M_1(-2;1;2)$, $M_2(3;3;3)$, $M_3(1;2;4)$. Найти координаты четвёртой вершины, если известно, что она лежит на оси Oz.

Задание 4

4.1. Написать уравнение эллипса, фокусы которого лежат на оси Ox симметрично относительно начала координат, если его полуоси равны 5 и 4.

4.2. Вычислить расстояние от левого фокуса эллипса $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ до соответствующей директрисы.

4.3. Определить, является ли уравнение

$$16x^2+25y^2+64x-50y-311=0$$

уравнением эллипса и если да, то найти его центр, полуоси, эксцентриситет и уравнения директрис.

4.4. Найти точки пересечения прямой $x-y-1=0$ и эллипса $x^2+4y^2=40$.

4.5. Вычислить расстояние от правого фокуса гиперболы $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ до соответствующей директрисы.

4.6. Определить, является ли уравнение

$$16x^2-25y^2-64x+50y-361=0$$

уравнением гиперболы и если да, то найти её центр, полуоси – действительную и мнимую, эксцентриситет и уравнения директрис.

4.7. Написать уравнение гиперболы, фокусы которой лежат в вершинах эллипса $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{25}=1$, а директрисы проходят через фокусы эллипса.

4.8. Написать уравнение эллипса, вершины которого находятся в фокусах гиперболы $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$, а директрисы проходят в двух единицах от фокусов гиперболы.

4.9. При каких значениях параметра α прямая $y=\frac{5}{2}x+\alpha$ пересекает гиперболу $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$?

4.10. При каких значениях параметра β прямая $y=3\beta x$ пересекает эллипс $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$?

4.11. При каких значениях параметра α прямая $y=3x+\alpha$ пересекает эллипс $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$?

4.12. Написать уравнение параболы, если её фокус $F(5;0)$, а уравнение директрисы $x-5=0$.

4.13. При каких значениях параметра m прямая $y=2x+m$:

1) пересекает параболу $y^2=4x$;
2) касается этой параболы;
3) не пересекает её.

4.14. Написать уравнение параболы, если известны её директриса $x-2=0$ и фокус $F(4;4)$, построить параболу.

4.15. Даны уравнения двух сторон прямоугольника: $3x-2y+12=0$ и $2x+3y-5=0$. Точка пересечения его диагоналей $M(0;-2)$. Найти площадь прямоугольника.

4.16. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $M(1;2)$ и отсекающей от координатного угла первой четверти прямоугольный треугольник с площадью 6 кв. см.

4.17. Написать уравнение окружности, проходящей через точки пересечения параболы $y^2=x+9$ с осями координат.

4.18. Найти точки пересечения асимптот гиперболы $x^2-y^2=1$ с окружностью $x^2+y^2-18=0$.

4.19. Найти расстояние между прямыми $3x-4y+12=0$ и $-3x+4y+3=0$.

4.20. Написать уравнение прямой, проходящей через правый фокус гиперболы $4x^2-5y^2=20$ перпендикулярно к асимптоте с положительным угловым коэффициентом.

4.21. Написать уравнение линии, каждая точка которой равноудалена от точки $M(1;3)$ и от оси абсцисс. Построить линию.

4.22. Написать уравнение линии, каждая точка которой равноудалена от точки $A(-2;4)$ и от оси ординат. Построить линию.

4.23. Написать уравнение прямой, проходящей через левый фокус эллипса $9x^2+25y^2=225$ и перпендикулярной к прямой $3x-y+3=0$.

4.24. Написать каноническое уравнение эллипса с фокусами на оси Ox, если даны его точка $A(4;0)$ и директриса $x=8$.

4.25. Написать каноническое уравнение гиперболы с фокусами на оси Ox, если даны уравнения асимптот $y=\pm\frac{4}{3}x$ и расстояние между фокусами равно 10.

4.26. Написать уравнение окружности, описанной около треугольника, стороны которого заданы уравнениями $3x-5y+17=0$, $5x+2y-13=0$, $2x+7y+1=0$.

4.27. Найти длину перпендикуляра, опущенного из точки эллипса $9x^2+25y^2=225$ на фокус.

4.28. Какую линию определяет уравнение $4x^2-25y^2-8x-50y+79=0$? Построить линию.

4.29. Определить, какую линию определяет уравнение $2x^2+4y^2-2y+5=0$ и построить её.

4.30. На параболе $y^2=-8x$ найти точку, расстояние от которой до директрисы равно 6.

Задание 5

5.1. Написать уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(3;-2;-1)$ и $M_2(4;-1;-3)$ и перпендикулярной к плоскости $2x-y+3z-2=0$.

5.2. Написать уравнение плоскости, перпендикулярной к плоскостям $3x+2y-3z+2=0$, $-2x-y+2z-4=0$ и проходящей через точку $M(1;2;3)$.

5.3. Написать канонические уравнения прямой, проходящей через точку $M_1(-2;1-1)$ и параллельной прямой

$$\begin{cases} 2x-3y+2z+2=0, \\ x-y+3z-4=0. \end{cases}$$

5.4. Найти расстояние между прямыми

$$\frac{x}{2}=\frac{y-3}{3}=\frac{z+1}{-1} \quad \text{и} \quad \frac{x-1}{-2}=\frac{y+1}{-3}=\frac{z}{1}.$$

5.5. Найти расстояние от точки $M(1;-1;3)$ до прямой

$$\begin{cases} x-3+z-1=0, \\ 2x+y-3z+3=0. \end{cases}$$

5.6. Найти точку пересечения прямой $\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y+1}{-2}=\dfrac{z-3}{2}$ и плоскости $2x+3y-4z-3=0$.

5.7. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку $M(2;2;2)$ и перпендикулярной к прямой $\begin{cases} 2x+y-2z-8=0, \\ 3x-2y+z+3=0. \end{cases}$

5.8. Найти точку N, симметричную точке $M(1;2;0)$ относительно прямой $\dfrac{x-3}{3}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-1}{-2}$.

5.9. Найти расстояние от точки $M(-2;3;1)$ до прямой $\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y+2}{-1}=\dfrac{z-4}{2}$.

5.10. Вычислить расстояние между прямыми

$$\begin{cases} 3x-2y+z-3=0, \\ x+2y+2z+4=0 \end{cases} \text{и} \quad \frac{x+1}{2}=\frac{y+1}{5}=\frac{z}{-8}.$$

5.11. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку $M(-1;-1;-1)$ параллельно прямым $\frac{x+2}{-2}=\frac{y-3}{3}=\frac{z+1}{2}$ и $\frac{x}{3}=\frac{y+2}{2}=\frac{z-1}{3}$.

5.12. Написать уравнение плоскости, проходящей через прямую $\begin{cases} 2x+y+2z-4=0, \\ 3x-y-3z+3=0 \end{cases}$ и точку $M(2;1;-1)$.

5.13. Найти координаты точки M, симметричной точке $P(-1;2;3)$ относительно плоскости, проходящей через три точки: $M_1(3;-1;2)$, $M_2(4;-1;-1)$, $M_3(2;0;2)$.

5.14. Написать уравнение плоскости, проходящей через две параллельные прямые: $\frac{x-3}{-2}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-1}{1}$ и $\frac{x+2}{2}=\frac{y}{-2}=\frac{z-2}{-1}$.

5.15. Написать уравнение плоскости, проходящей через прямую $\frac{x-5}{3}=\frac{y-1}{2}=\frac{z+2}{-2}$ перпендикулярно к плоскости $3x+4y-2z-3=0$.

5.16. Найти расстояние между прямыми $\frac{x-4}{2}=\frac{y+3}{-2}=\frac{z-2}{3}$ и $\frac{x+2}{3}=\frac{y+2}{-2}=\frac{z-4}{1}$.

5.17. Лежит ли прямая $\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-2}{3}$ в плоскости $2x-y-z-1=0$?

5.18. Написать уравнение прямой, лежащей в плоскости xOy, проходящей через начало координат и перпендикулярной к прямой $\frac{x-2}{3}=\frac{y-1}{2}=\frac{z+3}{4}$.

5.19. Написать уравнение плоскости, отсекающей на координатных осях Ox и Oy соответственно отрезки 4 и 5 и проходящей через точку $M_1(4;-5;4)$.

5.20. Найти угол между плоскостями $3x-z+5=0$ и $x+5y-4=0$.

5.21. Найти канонические уравнения прямой, проходящей через точку $M_1(1;2;3)$ параллельно прямой $\begin{cases} 2x-y+3z=0, \\ x+2y-4z+2=0. \end{cases}$

5.22. Найти точку пересечения прямой $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z+1}{1}$ и плоскости $3x-2y-z-1=0$.

5.23. Найти расстояние между прямой $\dfrac{x-2}{-1}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-3}{3}$ и плоскостью $x+2y-z-2=0$.

5.24. Определить взаимное расположение двух прямых $\dfrac{x+3}{2}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-3}{3}$ и $\dfrac{x}{3}=\dfrac{y+1}{4}=\dfrac{z+3}{1}$.

5.25. Найти расстояние между прямыми в предыдущем примере.

5.26. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку $M_1(-1;2;1)$ и отсекающей на осях координат отличные от нуля равные отрезки.

5.27. Написать уравнение плоскости, проходящей через прямую

$$\begin{cases} x=3t+1, \\ y=-t+5, \\ z=t+1 \end{cases}$$

и точку $M(1;2;3)$.

5.28. Написать уравнение плоскости, проходящей через прямую $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{3}=\dfrac{z-2}{1}$ параллельно прямой $\dfrac{x+3}{4}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z}{-3}$.

5.29. Найти угол между прямой $\begin{cases} x+y-2z+1=0, \\ 2x-y+3z-3=0 \end{cases}$ и плоскостью $2x-3y+7z+5=0$.

5.30. Написать уравнение плоскости, проходящей через прямую

$$\begin{cases} x=3t+1, \\ y=-t+5, \\ z=t+1 \end{cases}$$

и точку $M(1;2;3)$.

Задание 6. Исследовать векторы $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ на линейную зависимость (*см. задание 1*).

Задание 7. В ортонормированном базисе $\langle \bar{i},\bar{j},\bar{k}\rangle$ даны векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ и $\bar{d}$. Разложить вектор $\bar{d}$ по новому базису $\langle \bar{a},\bar{b},\bar{c}\rangle$. Сначала проверьте, образуют ли базис векторы $\bar{a},\bar{b}$ и $\bar{c}$.

7.1. $\bar{a}=-3i$, $\bar{b}=\bar{i}+2\bar{j}-\bar{k}$, $\bar{c}=\bar{k}$, $d=2\bar{i}-\bar{j}+4\bar{k}$.

7.2. $\bar{a}=\bar{i}+2\bar{j}+3\bar{k}$, $\bar{b}=2\bar{i}+\bar{j}+4\bar{k}$, $\bar{c}=3\bar{i}+\bar{j}+5\bar{k}$, $\bar{d}=\bar{i}+2\bar{j}$.

7.3. $\bar{a}=-2\bar{i}+\bar{j}$, $\bar{b}=3\bar{i}+\bar{j}+2\bar{k}$, $\bar{c}=2\bar{i}-\bar{j}+4\bar{k}$, $\bar{d}=\bar{i}-2\bar{j}+2\bar{k}$.

7.4. $\bar{a}=-2i+\bar{j}+3\bar{k}$, $\bar{b}=2\bar{i}+2\bar{j}+2\bar{k}$, $\bar{c}=3\bar{i}+\bar{j}-2\bar{k}$,

$\bar{d} = 3\bar{i} - \bar{j} + 2\bar{k}$.

7.5. $\bar{a} = -2\bar{i} + 4\bar{j} + \bar{k}$, $\bar{b} = 3\bar{i} + \bar{j} - \bar{k}$, $\bar{c} = 2\bar{i} + 2\bar{j} + 5\bar{k}$, $\bar{d} = 2\bar{i} + 3\bar{j} - \bar{k}$.

7.6. $\bar{a} = -2\bar{j} + 3\bar{k}$, $\bar{b} = \bar{i} - 2\bar{j} + \bar{k}$, $\bar{c} = 2\bar{i} + 3\bar{j} - 2\bar{k}$, $\bar{d} = \bar{i} + \bar{j} + \bar{k}$.

7.7. $\bar{a} = (-2;3;1)$, $\bar{b} = (1;2;-1)$, $\bar{c} = (5;3;2)$, $\bar{d} = (3;0;-1)$.

7.8. $\bar{a} = (2;0;1)$, $\bar{b} = (3;2;-2)$, $\bar{c} = (3;2;1)$, $\bar{d} = (3;0;-1)$.

7.9. $\bar{a} = (2;2;0)$, $\bar{b} = (0;-1;-1)$, $\bar{c} = (3;2;-3)$, $\bar{d} = (0;2;-2)$.

7.10. $\bar{a} = (3;1;2)$, $\bar{b} = (5;2;4)$, $\bar{c} = (1;2;3)$, $\bar{d} = (-1;-1;1)$.

7.11. $\bar{a} = (2;2;2)$, $\bar{b} = (1;0;1)$, $\bar{c} = (3;2;4)$, $\bar{d} = (0;3;0)$.

7.12. $\bar{a} = (5;4;-1)$, $\bar{b} = (3;2;-1)$, $\bar{c} = (1;-4;-3)$, $\bar{d} = (0;3;0)$.

7.13. $\bar{a} = (2;2;2)$, $\bar{b} = (1;0;1)$, $\bar{c} = (3;2;4)$, $\bar{d} = (4;4;4)$.

7.14. $\bar{a} = (-4;-1;-1)$, $\bar{b} = (2;3;-2)$, $\bar{c} = (3;3;3)$, $\bar{d} = (2;-3;4)$.

7.15. $\bar{a} = (7;3;-1)$, $\bar{b} = (2;-4;0)$, $\bar{c} = (3;5;-1)$, $\bar{d} = (-5;-3;1)$.

7.16. $\bar{a} = (-3;-2;-1)$, $\bar{b} = (2;3;4)$, $\bar{c} = (1;2;1)$, $\bar{d} = (0;2;-2)$.

7.17. $\bar{a} = (-6;4;2)$, $\bar{b} = (4;3;-2)$, $\bar{c} = (-5;3;2)$, $\bar{d} = (2;3;4)$.

7.18. $\bar{a} = (7;4;3)$, $\bar{b} = (2;3;-1)$, $\bar{c} = (4;5;3)$, $\bar{d} = (5;5;5)$.

7.19. $\bar{a} = (-4;-3;2)$, $\bar{b} = (2;4;5)$, $\bar{c} = (-2;1;-5)$, $\bar{d} = (-5;4;-3)$.

7.20. $\bar{a} = (8;-5;-6)$, $\bar{b} = (4;3;2)$, $\bar{c} = (-4;2;5)$, $\bar{d} = (-2;0;2)$.

7.21. $\bar{a} = (-1;4;-3)$, $\bar{b} = (2;-3;10)$, $\bar{c} = (1;2;6)$, $\bar{d} = (-1;2;-2)$.

7.22. $\bar{a} = (-3;-4;-5)$, $\bar{b} = (1;3;2)$, $\bar{c} = (3;4;5)$, $\bar{d} = (-3;0;0)$.

7.23. $\bar{a}=(5;2;-1)$, $\bar{b}=(4;3;-2)$, $\bar{c}=(-5;-6;3)$, $\bar{d}=(2;4;6)$.

7.24. $\bar{a}=(4;3;2)$, $\bar{b}=(-4;-9;3)$, $\bar{c}=(2;5;-1)$, $\bar{d}=(0;-1;0)$.

7.25. $\bar{a}=(9;7;5)$, $\bar{b}=(3;4;1)$, $\bar{c}=(-6;-5;-2)$, $\bar{d}=(3;-1;2)$.

7.26. $\bar{a}=(2;0;3)$, $\bar{b}=(-2;0;-4)$, $\bar{c}=(3;2;-5)$,
$\bar{d}=(-4;2;-3)$.

7.27. $\bar{a}=(-3;-3;-3)$, $\bar{b}=(1;2;-3)$, $\bar{c}=(-3;-5;6)$,
$\bar{d}=(1;3;0)$.

7.28. $\bar{a}=(-6;-4;-3)$, $\bar{b}=(6;1;2)$, $\bar{c}=(4;0;1)$,
$\bar{d}=(-4;-3;2)$.

7.29. $\bar{a}=(1;2;-1)$, $\bar{b}=(-3;4;5)$, $\bar{c}=(0;1;-2)$,
$\bar{d}=(-2;1;0)$.

7.30. $\bar{a}=(0;2;1)$, $\bar{b}=(0;1;4)$, $\bar{c}=(-2;1;2)$,
$\bar{d}=(2;2;2)$.

Задание 8. Найти собственные значения и собственные векторы матрицы $A=\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{Vmatrix}$.

8.1. $A=\begin{Vmatrix} 5 & -1 \\ 12 & -2 \end{Vmatrix}$.

8.2. $A=\begin{Vmatrix} 7 & 4 \\ -5 & -2 \end{Vmatrix}$.

8.3. $A=\begin{Vmatrix} 6 & 3 \\ 8 & -5 \end{Vmatrix}$.

8.4. $A=\begin{Vmatrix} -8 & 10 \\ -3 & 3 \end{Vmatrix}$.

8.5. $A=\begin{Vmatrix} -3 & 7 \\ -6 & 10 \end{Vmatrix}$.

8.6. $A=\begin{Vmatrix} 5 & -4 \\ 2 & -4 \end{Vmatrix}$.

8.7. $A=\begin{Vmatrix} -6 & -9 \\ 2 & -1 \end{Vmatrix}$.

8.8. $A=\begin{Vmatrix} -5 & 4 \\ -2 & 4 \end{Vmatrix}$.

8.9. $A=\begin{Vmatrix} -6 & 6 \\ 6 & 7 \end{Vmatrix}$.

8.10. $A=\begin{Vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{Vmatrix}$.

8.11. $A = \begin{Vmatrix} -7 & -3 \\ 8 & 4 \end{Vmatrix}.$

8.12. $A = \begin{Vmatrix} -4 & -3 \\ 8 & 7 \end{Vmatrix}.$

8.13. $A = \begin{Vmatrix} -10 & 6 \\ -9 & 5 \end{Vmatrix}.$

8.14. $A = \begin{Vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{Vmatrix}.$

8.15. $A = \begin{Vmatrix} 2 & -7 \\ 3 & -8 \end{Vmatrix}.$

8.16. $A = \begin{Vmatrix} -6 & -1 \\ 7 & 2 \end{Vmatrix}.$

8.17. $A = \begin{Vmatrix} -6 & 11 \\ -5 & 10 \end{Vmatrix}.$

8.18. $A = \begin{Vmatrix} 5 & -3 \\ 1 & 1 \end{Vmatrix}.$

8.19. $A = \begin{Vmatrix} 3 & -5 \\ 7 & -9 \end{Vmatrix}.$

8.20. $A = \begin{Vmatrix} -4 & -4 \\ 4 & 6 \end{Vmatrix}.$

8.21. $A = \begin{Vmatrix} -3 & 5 \\ 1 & 1 \end{Vmatrix}.$

8.22. $A = \begin{Vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 5 \end{Vmatrix}.$

8.23. $A = \begin{Vmatrix} -4 & -2 \\ 4 & 5 \end{Vmatrix}.$

8.24. $A = \begin{Vmatrix} -7 & 5 \\ -6 & 6 \end{Vmatrix}.$

8.25. $A = \begin{Vmatrix} -8 & 4 \\ -5 & 1 \end{Vmatrix}.$

8.26. $A = \begin{Vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{Vmatrix}.$

8.27. $A = \begin{Vmatrix} -3 & 2 \\ 1 & -4 \end{Vmatrix}.$

8.28. $A = \begin{Vmatrix} -5 & 10 \\ -3 & 8 \end{Vmatrix}.$

8.29. $A = \begin{Vmatrix} -4 & 2 \\ 3 & 1 \end{Vmatrix}.$

8.30. $A = \begin{Vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{Vmatrix}.$

Задание 9. Привести к каноническому виду общее уравнение линии второго порядка двумя способами:

1) с помощью поворота осей координат на некоторый угол φ и параллельного переноса;
2) с помощью собственных значений и собственных векторов матрицы.

9.1. $29x_1^2 + 24x_1x_2 + 36x_2^2 + 42x_1 - 96x_2 - 51 = 0.$

9.2. $12x_1^2 + 8x_1x_2 + 18x_2^2 - 30x_1 + 20x_2 - 4 = 0.$

9.3. $5x_1^2 - 2\sqrt{3}x_1x_2 + 3x_2^2 + 20x_1 - 18x_2 + 4 = 0$.

9.4. $6x_1^2 + 6x_1x_2 + 6x_2^2 - 18x_1 + 10x_2 - 7 = 0$.

9.5. $29x_1^2 - 24x_1x_2 + 36x_2^2 - 14x_1 + 4x_2 - 5 = 0$.

9.6. $12x_1^2 - 8x_1x_2 + 18x_2^2 - 20x_1 + 10x_2 - 3 = 0$.

9.7. $6x_1^2 - 6x_1x_2 + 6x_2^2 - 10x_1 + 6x_2 - 9 = 0$.

9.8. $7x_1^2 + 6x_1x_2 - x_2^2 + 28x_1 + 12x_2 + 28 = 0$.

9.9. $2x_1^2 - 12x_1x_2 + 7x_2^2 - 32x_1 + 4x_2 - 10 = 0$.

9.10. $-5x_1^2 + 12x_1x_2 + 11x_2^2 - 16x_1 - 6x_2 - 6 = 0$.

9.11. $6x_1^2 + 12x_1x_2 - 10x_2^2 + 6x_2 - 9 = 0$.

9.12. $16x_1^2 - 16x_1x_2 + 4x_2^2 - 30x_1 + 6x_2 - 3 = 0$.

9.13. $25x_1^2 + 20x_1x_2 + 4x_2^2 + 8x_1 - 12x_2 + 4 = 0$.

9.14. $25x_1^2 + 30x_1x_2 + 9x_2^2 - 25x_1 - 15x_2 + 4 = 0$.

9.15. $4x_1^2 + 20x_1x_2 + 25x_2^2 - 8x_1 - 20x_2 + 13 = 0$.

9.16. $28x_1^2 - 12x_1x_2 + 12x_2^2 - 24x_1 + 16x_2 - 5 = 0$.

9.17. $14x_1^2 + 24x_1x_2 - 4x_2^2 + 10x_1 + 6x_2 - 7 = 0$.

9.18. $-2x_1^2 - 12x_1x_2 + 7x_2^2 - 6x_1 + 4x_2 - 4 = 0$.

9.19. $6x_1^2 - 12x_1x_2 - 10x_2^2 + 4x_1 - 2x_2 + 5 = 0$.

9.20. $9x_1^2 + 4x_1x_2 + 6x_2^2 - 4x_1 + 26x_2 - 8 = 0$.

9.21. $x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 - 3x_1 + 4x_2 - 4 = 0$.

9.22. $-5x_1^2 - 6x_1x_2 + 3x_2^2 - 4x_1 + 8x_2 - 7 = 0$.

9.23. $25x_1^2 + 30x_1x_2 + 9x_2^2 + 20x_1 + 12x_2 + 4 = 0$.

9.24. $2x_1^2 - 8x_1x_2 + 8x_2^2 - 4x_1 + 2x_2 - 8 = 0$.

9.25. $4x_1^2 + 4x_1x_2 + x_2^2 - 10x_1 - 5x_2 - 6 = 0$.

9.26. $-12x_1^2 + 8x_1x_2 - 12x_2^2 - 9x_1 + 4x_2 - 10 = 0$.

9.27. $3x_1^2 - 2x_1x_2 + 3x_2^2 + 8x_1 + 16x_2 - 8 = 0$.

9.28. $6x_1^2 + 6x_1x_2 - 2x_2^2 + 2x_1 - 4x_2 + 7 = 0$.

9.29. $-2x_1^2-6x_1x_2+6x_2^2-6x_1-2x_2+3=0$.

9.30. $7x_1^2+6x_1x_2+7x_2^2-8x_1-4x_2-6=0$.

Задание 10. Провести процесс ортогонализации Грама – Шмидта для векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$, построить ортонормированный базис, сделать проверку.

10.1. $\bar{a}=(0;0;1)$, $\bar{b}=(1;2;-1)$, $\bar{c}=(-3;0;0)$.

10.2. $\bar{a}=(0;3;0)$, $\bar{b}=(-1;0;2)$, $\bar{c}=(1;1;1)$.

10.3. $\bar{a}=(2;-1;2)$, $\bar{b}=(2;1;0)$, $\bar{c}=(3;1;2)$.

10.4. $\bar{a}=(1;0;-1)$, $\bar{b}=(2;0;1)$, $\bar{c}=(1;-2;2)$.

10.5. $\bar{a}=-\bar{i}+\bar{k}$, $\bar{b}=2\bar{i}+2\bar{j}-\bar{k}$, $\bar{c}=\bar{i}+\bar{j}+2\bar{k}$.

10.6. $\bar{a}=(0;2;0)$, $\bar{b}=(-1;1;0)$, $\bar{c}=(3;1;2)$.

10.7. $\bar{a}=(-1;-1;0)$, $\bar{b}=(2;0;1)$, $\bar{c}=(-3;1;2)$.

10.8. $\bar{a}=(-4;0;2)$, $\bar{b}=-\bar{j}+2\bar{k}$, $\bar{c}=2\bar{i}-2\bar{j}+2\bar{k}$.

10.9. $\bar{a}=(0;-1;1)$, $\bar{b}=(1;-1;0)$, $\bar{c}=(2;1;0)$.

10.10. $\bar{a}=(1;-2;2)$, $\bar{b}=(1;-1;0)$, $\bar{c}=(2;1;0)$.

10.11. $\bar{a}=2\bar{i}-2\bar{j}$, $\bar{b}=3i-\bar{k}$, $\bar{c}=3\bar{j}+\bar{k}$.

10.12. $\bar{a}=(0;-2;2)$, $\bar{b}=(2;-1;0)$, $\bar{c}=(3;3;3)$.

10.13. $\bar{a}=2\bar{i}+2\bar{j}+2\bar{k}$, $\bar{b}=3\bar{j}-3\bar{k}$, $\bar{c}=-\bar{i}+\bar{j}+2\bar{k}$.

10.14. $\bar{a}=(0;0;-4)$, $\bar{b}=(2;0;-1)$, $\bar{c}=(3;5;-1)$.

10.15. $\bar{a}=(1;-1;0)$, $\bar{b}=(0;2;-1)$, $\bar{c}=(4;4;4)$.

10.16. $\bar{a}=(4;-2;0)$, $\bar{b}=(1;2;1)$, $\bar{c}=(4;-2;2)$.

10.17. $\bar{a}=(3;-3;3)$, $\bar{b}=(2;2;-3)$, $\bar{c}=(1;-1;2)$.

10.18. $\bar{a}=(2;4;-2)$, $\bar{b}=(-2;1;2)$, $\bar{c}=(4;-2;0)$.

10.19. $\bar{a}=(1;-1;1)$, $\bar{b}=(2;0;0)$, $\bar{c}=(-1;2;1)$.

10.20. $\bar{a}=(0;1;-1)$, $\bar{b}=(3;1;0)$, $\bar{c}=(2;2;2)$.

10.21. $\bar{a}=(0;1;0)$, $\bar{b}=(1;1;1)$, $\bar{c}=(-1;0;2)$.

10.22. $\bar{a}=(0;1;1)$, $\bar{b}=(2;0;-1)$, $\bar{c}=(-1;0;2)$.

10.23. $\bar{a}=(1;-1;0)$, $\bar{b}=(0;0;-3)$, $\bar{c}=(2;1;1)$.

10.24. $\bar{a}=(2;1;0)$, $\bar{b}=(0;1;-2)$, $\bar{c}=(1;1;-1)$.

10.25. $\bar{a}=(-1;-1;-1)$, $\bar{b}=(0;2;2)$, $\bar{c}=(1;2;1)$.

10.26. $\bar{a}=(-2;0;0)$, $\bar{b}=(1;1;-1)$, $\bar{c}=(0;-1;2)$.

10.27. $\bar{a}=(1;-1;2)$, $\bar{b}=(2;0;-1)$, $\bar{c}=(-1;2;1)$.

10.28. $\bar{a}=(2;-2;2)$, $\bar{b}=(1;2;0)$, $\bar{c}=(2;1;2)$.

10.29. $\bar{a}=(3;-3;0)$, $\bar{b}=(0;3;1)$, $\bar{c}=(-1;4;-1)$.

10.30. $\bar{a}=(0;2;2)$, $\bar{b}=(3;1;0)$, $\bar{c}=(2;0;4)$.

Библиографический список

1. *Беклемишев Л.А., Петрович А.Ю., Чубаров И.А.* Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре. – М.: Физматлит, 2003.

2. *Данго П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я.* Высшая математика в упражнениях и задачах, т. 1, М.: Высшая школа, 1986.

3. *Ефимов Н.В.,* Краткий курс аналитической геометрии – М.: Физматлит, 2002.

4. *Ильин В.А., Позняк Э.Г.* Аналитическая геометрия. – М.: Фзматлит, 2012.

5. *Клетеник Д.В.* Сборник задач по аналитической геометрии. – М.: Наука, 1986.

6. *Новиков А.И.* Начала линейной алгебры и аналитическая геометрия. – М.: Физматлит, 2015.

7. *Цубербиллер О.Н.* Задачи и упражнения по аналитической геометрии. – М.: Наука, 1970.

Векторная алгебра
и аналитическая геометрия

Типовой расчёт

Составители: К а р а с ё в Иван Петрович

Редактор
Корректор

Подписано в печать .15. Формат бумаги 60×84 1/16.
Бумага газетная. Печать трафаретная. Усл. печ. л. 3,0.
Уч.-изд. л. 3,0. Тираж 25 экз. Заказ
Рязанский государственный радиотехнический университет.
390005, Рязань, ул. Гагарина, 59/1.
Редакционно-издательский центр РГРТУ.