УДК 621.01.512

С.С. Мамонов

ВРАЩАТЕЛЬНЫЕ РЕЖИМЫ СИСТЕМЫ ЧАСТОТНО – ФАЗОВОЙ АВТОПОДСТРОЙКИ ЧАСТОТЫ С ФИЛЬТРАМИ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Рассматривается система частотно-фазовой синхронизации с инвертированной характеристикой частотного кольца. Для случая фильтров первого порядка получены условия существования нескольких вращательных режимов. На примере системы с синусоидальной нелинейностью рассмотрено влияние инвертированной характеристики частотного кольца на вращательные режимы.

Ключевые слова: *вращательные режимы, предельные циклы, частотная автоподстройка.*

Введение. В работе рассматривается система частотно-фазовой автоподстройки частоты (ЧФАПЧ) с инвертированной нелинейной характеристикой частотного детектора. Динамика системы ЧФАПЧ описывается дифференциальным уравнением вида [1-3]

$$p\sigma(t)+\Omega_1 K_1(p)F_1(\sigma(t))+ \\ +\Omega_2 K_2(p)F_2(p\sigma(t))=\Omega_н, \qquad (1)$$

где $p = {}^{d}\!/_{dt}$ - оператор дифференцирования, $\sigma(t)$ – разность фаз эталонного и подстраиваемого генераторов, Ω_1 – полоса удержания кольца фазовой автоподстройки, Ω_2 – полоса удержания кольца частотной автоподстройки, $K_1(p)$ и $K_2(p)$ – коэффициенты передачи фильтров нижних частот в фазовой и частотных цепях управления, $F_1(\sigma)$ и $F_2(\sigma)$ – характеристики фазового и частотного детекторов, $F_1(\sigma)-\Delta$ – периодическая непрерывно дифференцируемая функция, $\Omega_н = const$ -начальная расстройка. Перейдем в уравнении (1) к новому времени $\tau=\Omega_1 t$. Переменную τ переобозначим через переменную t. В случае инвертированной нелинейной характеристики частотного детектора, когда $F_2(p\sigma)=-\dfrac{2\beta p\sigma}{1+(\beta p\sigma)^2}$, где β – расстройка по частоте, при которой напряжение на выходе частотного детектора максимально, и дробно-рациональных интегрирующих фильтров $K_1(p)= =\dfrac{A_0p^2+A_1p+A_2}{B_0p^2+B_1p+B_2}$, $K_2(p)=\dfrac{D_1p+D_2}{B_0p^2+B_1p+B_2}$ [2], заменой переменных $\dot\sigma = x_2+\rho\varphi(\sigma)$, $\dot x_2 = x_1 - -\Gamma\varphi(\sigma)-\delta_1 f(\dot\sigma)$, $\varphi(\sigma)=F_1(\sigma)-\gamma$, $\gamma=\dfrac{\Omega_н B_2}{\Omega_1 A_2}$, $f(\dot\sigma)=\dfrac{2\alpha\beta\dot\sigma}{1+\beta^2(\dot\sigma)^2}$, $\alpha=\Omega_2\Omega_1^{-1}$, $\rho=-\dfrac{A_0}{B_0}$, $\delta_1= =D_1B_0^{-1}$, $\Gamma=\dfrac{A_1}{B_0}+\dfrac{B_1}{B_0}\rho$ уравнение (1) приводится к системе дифференциальных уравнений

$$\dot x = Ax+b\varphi(\sigma)-d\,\frac{2\alpha\beta\left(c^Tx+\rho\varphi(\sigma)\right)}{1+\beta^2\left(c^Tx+\rho\varphi(\sigma)\right)^2}, \\ \dot\sigma = c^Tx+\rho\varphi(\sigma), \qquad (2)$$

где $x\in R^2$, $c=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}-a_1 & -a_2\\ 1 & 0\end{pmatrix}$, $a_1=\dfrac{B_1}{B_0}$, $a_2=\dfrac{B_2}{B_0}$, $b=\begin{pmatrix}\nu\\-\Gamma\end{pmatrix}$, $\rho=-\dfrac{A_0}{B_0}$, $\Gamma=\dfrac{A_1}{B_0}+\dfrac{B_1}{B_0}\rho$, $\nu=\Gamma\dfrac{B_1}{B_0}-\rho\dfrac{B_2}{B_0}-\dfrac{A_2}{B_0}$, $d=\begin{pmatrix}\delta_2\\-\delta_1\end{pmatrix}$, $\delta_1=\dfrac{D_1}{B_0}$, $\delta_2= =-\dfrac{D_2}{B_0}+\dfrac{B_1D_1}{B_0^2}$. Система (2) рассматривается в случае, когда $\varphi(\sigma)$ является непрерывно дифференцируемой и Δ – периодической функцией.

Рабочими режимами для системы ЧФАПЧ являются режимы синхронизации. Нахождение условий синхронного режима связано с исследованием асинхронных режимов, особенностью которых является нарастание разности фаз. Среди асинхронных режимов выделяют вращательный режим, соответствующий предельному циклу второго рода [6] системы (2). Вращательный режим представляет интерес, так как он предшествует режиму синхронизации.

Система вида (2) изучалась в работах [3-10], где качественно-численными методами получены условия устойчивости, соответствующие режимам синхронизации фазовой автоподстройки, условия существования и числа предельных циклов второго рода. Особенностью системы третьего порядка является то, что наряду с устойчивыми предельными циклами второго рода у системы (2) могут появиться седловые предельные циклы второго рода [7]. Трудности нахождения условий существования седловых циклов многомерных систем связаны с невозможностью применения теоремы Брауэра [11]. Наличие у системы (2) седловых предельных циклов второго рода позволяет выделить область притяжения состояний равновесия, определяющую для системы ЧФАПЧ условия режимов синхронизации.

Основная часть

Определение. Если для системы (2) существует предельный цикл второго рода $\Phi(x,\sigma)= =colon(x(t),\sigma(t))$, для которого $c^T x(t)>0$ при любом $t\in(-\infty;+\infty)$, то $\Phi(x,\sigma)$ называется положительным предельным циклом второго рода, если $c^T x(t)<0$ при любом $t\in(-\infty;+\infty)$, то $\Phi(x,\sigma)$ называется отрицательным предельным циклом второго рода.

В статье на основе метода нелокального сведения [5, 6] получены условия существования положительных и отрицательных предельных циклов второго рода, предложена методика нахождения областей фазового пространства, содержащих седловые циклы. На примере системы ЧФАПЧ с фильтрами первого порядка рассмотрено влияние инвертированной характеристики частотного кольца на область параметров для вращательных режимов.

Теорема 1. Пусть для системы (2) выполнены условия:

1) матрица A – гурвицева;

2) $c^T b=-\Gamma<0$, $c^T A=l^T$, $c^T d=-\delta_1<0$, $l^T b=\nu$, $l^T d=\delta_2$, $l^T A=-a_1 l^T-a_2 c^T$, $rang\|c,l\|=2$;

3) $\gamma_1=\nu\Gamma^{-1}a_1-\nu^2\Gamma^{-2}-a_2\ge 0$, $\gamma_2=\nu\delta_1\Gamma^{-1}- -\delta_2\ge 0$, $\gamma_1^2+\gamma_2^2>0$;

4) система уравнений

$$\dot{y}=-\lambda_1 y-\varphi(\sigma)+\frac{2s\lambda r(y-k\varphi(\sigma))}{1+(\lambda r)^2(y-k\varphi(\sigma))^2},$$
$$\dot{\sigma}=y-k\varphi(\sigma) \qquad (3)$$

при $\lambda_1>\nu\Gamma^{-3/2}$, $\lambda=\nu\Gamma^{-3/2}$, $k=-\rho\Gamma^{-1/2}$, $s=\alpha\delta_1\times \times\Gamma^{-1}$, $r=\Gamma^2\beta\nu^{-1}$ имеет предельный цикл второго рода $F^+(\sigma)>0$, $F^+(\sigma)-k\varphi(\sigma)>0$ для любого $\sigma\in(-\infty;+\infty)$;

тогда система (2) имеет положительный предельный цикл второго рода.

Доказательство. Рассмотрим функции $V_1^+(z)=c^T x-\sqrt{\Gamma}F^+(\sigma)$, где $F^+(\sigma)$ - предельный цикл второго рода системы уравнений (3), $V_2(z)=l^T x+\nu\Gamma^{-1}c^T x$.

Пусть $z=colon(x,\sigma)$, $\Omega_1=\{z:V_1^+(z)\ge 0\}$, $\Omega_2=\{z:V_2(z)\ge 0\}, \Omega=\Omega_1\cap\Omega_2$, тогда граница множества Ω имеет вид $\partial\Omega=\partial\Omega_1\cup\partial\Omega_2$, где

$$\partial\Omega_1=\{z:\ V_1^+(z)=0, V_2(z)\ge 0\},$$
$$\partial\Omega_2=\{z:V_1^+(z)\ge 0,\ V_2(z)=0\}.$$

Если $z\in\partial\Omega_1$, то выполняются соотношения:

$$c^T x=\sqrt{\Gamma}F^+(\sigma), \qquad (4)$$
$$l^T x+\nu\Gamma^{-1}c^T x\ge 0. \qquad (5)$$

Используя условия 2), 4) теоремы 1, соотношения (4), (5), найдем производную функции $V_1^+(z)$ в силу системы (2) на множестве $\partial\Omega_1$

$$\dot{V}_1^+(z)=l^T x-\Gamma\varphi(\sigma)+\frac{2\alpha\beta\delta_1(c^T x+\rho\varphi(\sigma))}{1+\beta^2(c^T x+\rho\varphi(\sigma))^2}-\sqrt{\Gamma}\times$$
$$\times\frac{dF^+(\sigma)}{d\sigma}(c^T x+\rho\varphi(\sigma))\ge\Gamma F^+(\sigma)\left(\lambda_1-\frac{\nu}{\Gamma\sqrt{\Gamma}}\right)+2\times$$
$$\times\frac{\beta\sqrt{\Gamma}(F^+(\sigma)-k\varphi(\sigma))}{1+\beta^2\Gamma(F^+(\sigma)-k\varphi(\sigma))^2}(\alpha\delta_1-s\Gamma)>0. \qquad (6)$$

Рассмотрим границу $\partial\Omega_2=\{z:\ l^T x+\nu\Gamma^{-1}c^T x=0, V_1^+(z)\ge 0\}$. Если $z\in\partial\Omega_2$, то выполняются соотношения:

$$c^T x\ge\sqrt{\Gamma}F^+(\sigma), \qquad (7)$$
$$l^T x=-\nu\Gamma^{-1}c^T x. \qquad (8)$$

Используя условия 2), 3), 4) теоремы, соотношения (7), (8), найдем производную функции $V_2(z)$ в силу системы (2) на множестве $\partial\Omega_2$

$$\dot{V}_2(z)=\left(\frac{\nu}{\Gamma}a_1-\frac{\nu^2}{\Gamma^2}-a_2\right)c^T x+2\alpha\beta\left(\frac{\nu\delta_1}{\Gamma}-\delta_2\right)\times$$
$$\times\frac{(c^T x+\rho\varphi(\sigma))}{1+\beta^2(c^T x+\rho\varphi(\sigma))^2}>0. \qquad (9)$$

Из неравенств (6), (9) следует, что множество Ω положительно инвариантно. Пусть $\Omega_R=\{z: :W(z)=x^T Hx-R^2\le 0\}, H=H^T>0$-решение матричного уравнения Ляпунова $(A+\mu I)^T H + H(A+\mu I) = -I$, $\mu > 0$. В силу условия 1) теоремы 1 такое решение существует. Производная функции $W(z)$ в силу системы (2) на множестве $\partial\Omega_R = \{z : W(z) = 0\}$ удовлетворяет неравенству:

$$\dot{W}(z) \le -2\mu R^2 + 2\left|x^T Hd\right|\left|\frac{2\alpha\beta\left(c^T x + \rho\varphi(\sigma)\right)}{1+\beta^2\left(c^T x + \rho\varphi(\sigma)\right)^2}\right| + 2\left|x^T Hb\varphi(\sigma)\right| \le -2\mu R^2 + 2\left|x^T Hd\right|\alpha + 2\left|x^T Hb\varphi(\sigma)\right|. \quad (10)$$

Используя соотношение (10), получаем, что при достаточно большом значении R множества Ω_R, $\Omega \cap \Omega_R$ являются положительно инвариантными, во множестве $\Omega \cap \Omega_R$ содержится положительный предельный цикл второго рода [6].

<u>Теорема 2.</u> Пусть для системы (2) выполнены условия 1), 2), 3), 4) теоремы 1 и система уравнений (3) при $\lambda_1 > \nu\Gamma^{-3/2}$, $\lambda = \nu\Gamma^{-3/2}$, $r = \beta \times \Gamma^2 \nu^{-1}$, $s = \alpha\delta_1\Gamma^{-1}$, $k = -\rho\Gamma^{-1/2}$ имеет предельный цикл второго рода $F^-(\sigma) < 0$, $F^-(\sigma) - k\varphi(\sigma) < 0$ для любого $\sigma \in (-\infty; +\infty)$, тогда система (2) имеет отрицательный предельный цикл второго рода.

<u>Доказательство.</u> Рассмотрим функции $V_1^-(z) = c^T x - \sqrt{\Gamma} F^-(\sigma)$, где $F^-(\sigma)$ – предельный цикл второго рода системы уравнений (3), $V_2(z) = l^T x + \nu\Gamma^{-1} c^T x$. Пусть $\Omega_3 = \{z : V_1^-(z) \le 0\}$, $\Omega_4 = \{z : V_2(z) \le 0\}$, $\Omega_5 = \Omega_3 \cap \Omega_4$, тогда граница множества Ω_5 имеет вид $\partial\Omega_5 = \partial\Omega_3 \cup \partial\Omega_4$, где $\partial\Omega_3 = \{z : V_1^-(z) = 0, V_2(z) \le 0\}$, $\partial\Omega_4 = \{z : V_1^-(z) \le 0, V_2(z) = 0\}$. Если $z \in \partial\Omega_3$, то выполняются соотношения:

$$c^T x = \sqrt{\Gamma} F^-(\sigma) < 0, \quad (11)$$

$$l^T x \le -\nu\Gamma^{-1} c^T x. \quad (12)$$

Используя условия 2), 4) теоремы 1 и соотношения (11), (12), найдем производную функции $V_1^-(z)$ в силу системы (2) на множестве $\partial\Omega_3$

$$\dot{V}_1^-(z) = l^T x + \lambda_1 \Gamma F^-(\sigma) + \frac{2\beta\sqrt{\Gamma}\left(F^-(\sigma) - k\varphi(\sigma)\right)}{1+\beta^2\Gamma\left(F^-(\sigma) - k\varphi(\sigma)\right)^2} \times (\alpha\delta_1 - s\Gamma) \le \lambda_1 \Gamma F^-(\sigma) - \nu\Gamma^{-1} c^T x = \Gamma F^-(\sigma) \times \left(\lambda_1 - \nu\Gamma^{-3/2}\right) < 0. \quad (13)$$

Рассмотрим границу $\partial\Omega_4 = \{z : l^T x + \nu\Gamma^{-1} c^T x = 0, V_1^-(z) \le 0\}$. Если $z \in \partial\Omega_4$, то выполняются соотношения:

$$c^T x \le \sqrt{\Gamma} F^-(\sigma) < 0, \quad (14)$$

$$l^T x = -\nu\Gamma^{-1} c^T x. \quad (15)$$

Используя условия 2), 3) теоремы 1, условие теоремы 2 и соотношения (14), (15), найдем производную функции $V_2(z)$ в силу системы (2) на множестве $\partial\Omega_4$

$$\dot{V}_2(z) = \left(\frac{\nu}{\Gamma} a_1 - \frac{\nu^2}{\Gamma^2} - a_2\right) c^T x + \frac{2\alpha\beta\left(c^T x + \rho\varphi(\sigma)\right)}{1+\beta^2\left(c^T x + \rho\varphi(\sigma)\right)^2} \times \left(\nu\delta_1\Gamma^{-1} - \delta_2\right) < 0. \quad (16)$$

Из неравенств (13), (16) следует, что множество Ω_5 – положительно инвариантно. Пусть $\Omega_R = \{z : W(z) = x^T Hx - R^2 \le 0\}, H = H^T > 0$ решение матричного уравнения Ляпунова. В силу соотношения (10) получим, что при достаточно большом значении R множества Ω_R, $\Omega_5 \cap \Omega_R$ являются положительно инвариантными, во множестве $\Omega_5 \cap \Omega_R$ содержится отрицательный предельный цикл второго рода.

<u>Теорема 3.</u> Пусть для системы (2) выполнены условия теоремы 1 и справедливы утверждения:

1) система уравнений (3) при $\lambda_1 = 0$, $\lambda = \nu\Gamma^{-3/2}$, $r = \Gamma^2\beta\nu^{-1}$, $s = \alpha\delta_1\Gamma^{-1}$, $k = -\rho\Gamma^{-1/2}$ имеет предельный цикл второго рода $F_0^+(\sigma) > 0$, $F^+(\sigma) > F_0^+(\sigma)$ для любого $\sigma \in (-\infty; +\infty)$, $m_0 = \min\limits_{\sigma \in [\sigma_0; \sigma_0 + \Delta]} F_0^+(\sigma)$;

2) система уравнений (3) при $\lambda_1 > \nu\Gamma^{-3/2}$, $\lambda = \nu\Gamma^{-3/2}$, $r = \Gamma^2\beta\nu^{-1}$, $s = \alpha\delta_1\Gamma^{-1}$, $k = -\rho\Gamma^{-1/2}$ имеет решение $(y(t), \sigma(t))$, определяющее функцию $\Phi^+(\sigma)$, для которой выполняются неравенства: $0 < \Phi^+(\sigma) < F_0^+(\sigma)$, $\Phi^+(\sigma) - k\varphi(\sigma) \ge m_2 > 0$ при $\sigma \in [\sigma_0; \sigma_0 + \Delta]$, $\min\limits_{\sigma} \varphi(\sigma) = -m < 0$;

3) система уравнений (3) при $\lambda_1 = 0$, $\lambda = \nu\Gamma^{-3/2}$, $r = \Gamma^2\beta\nu^{-1}$, $s = \alpha\delta_1\Gamma^{-1}$, $k = -\rho\Gamma^{-1/2}$ имеет решение $(y(t), \sigma(t))$, определяющее функцию $\Phi_0^+(\sigma)$, для которой выполняется неравенство: $F^+(\sigma) < \Phi_0^+(\sigma)$ при $\sigma \in [\sigma_0; \sigma_0 + \Delta]$, $\overline{M}_0 = \max\limits_{\sigma \in [\sigma_0; \sigma_0 + \Delta]} \Phi_0^+(\sigma)$;

4) $\gamma_1 \sqrt{\Gamma}\,\overline{M}_0 + \dfrac{2\alpha\beta\sqrt{\Gamma}\left(\overline{M}_0 + km\right)}{1+\beta^2\Gamma m_2^2}\gamma_2 < \dfrac{\nu m_0}{\sqrt{\Gamma}}\gamma_3$, $\gamma_3 = a_1 - \nu\Gamma^{-1} > 0$;

тогда система (2) имеет два положительных предельных цикла второго рода.

Доказательство. В силу теоремы 1 множество $\Omega \bigcap \Omega_R$ содержит положительный предельный цикл второго рода. Рассмотрим функции $V_1^+(z) = c^T x - \sqrt{\Gamma} F^+(\sigma)$, $V_2(z) = l^T x + \nu\Gamma^{-1} c^T x$, $W_1^+(z) = c^T x - \sqrt{\Gamma} F_0^+(\sigma)$. Пусть $Q = \{z : V_1^+(z) \le 0, W_1^+(z) \ge 0, 0 \le V_2(z) \le \bar{r}\}$, где $\bar{r}$ удовлетворяет неравенству:

$$\gamma_3^{-1}\left(\gamma_1\sqrt{\Gamma}\overline{M}_0 + \frac{2\alpha\beta\sqrt{\Gamma}\left(\overline{M}_0 + km\right)}{1+\beta^2\Gamma m_2^2}\gamma_2\right) < \bar{r} < < \nu m_0 \Gamma^{-1/2}, \tag{17}$$

в силу условия 4) теоремы 2 такое $\bar{r}$ существует, тогда граница множества Q имеет вид $\partial Q = \partial Q_1 \bigcup \partial Q_2 \bigcup \partial Q_3 \bigcup \partial Q_4$, где $\partial Q_1 = \{z : V_1^+(z) = 0, 0 \le V_2(z) \le \bar{r}\}$, $\partial Q_2 = \{z : W_1^+(z) = 0, 0 \le V_2(z) \le \bar{r}\}$, $\partial Q_3 = \{z : V_2(z) = 0, V_1^+(z) \le 0, W_1^+(z) \ge 0\}$, $\partial Q_4 = \{z : V_2(z) = \bar{r}, V_1^+(z) \le 0, W_1^+(z) \ge 0\}$.

Рассмотрим границу ∂Q_1. Если $z \in \partial Q_1$, то выполняются соотношения (4), (5). В силу условий 2), 4) теоремы 1, соотношений (4), (5), (6) производная функции $V_1^+(z)$ в силу системы (2) на множестве ∂Q_1 удовлетворяет неравенству: $\dot{V}_1^+(z) > 0$.

Рассмотрим границу ∂Q_2. Если $z \in \partial Q_2$, то выполняются соотношения

$$c^T x = \sqrt{\Gamma} F_0^+(\sigma), \tag{18}$$

$$l^T x \le \bar{r} - \nu\Gamma^{-1} c^T x. \tag{19}$$

Используя условие 2) теоремы 1, условие 1) теоремы 3 и соотношения (18), (19), (17), найдем производную функции $W_1^+(z)$ в силу системы (2) на множестве ∂Q_2

$$\dot{W}_1^+(z) = l^T x - \Gamma\varphi(\sigma) + \frac{2\alpha\beta\delta_1\left(c^T x + \rho\varphi(\sigma)\right)}{1+\beta^2\left(c^T x + \rho\varphi(\sigma)\right)^2} - \sqrt{\Gamma} \times \frac{dF_0^+(\sigma)}{d\sigma}\left(c^T x + \rho\varphi(\sigma)\right) \le \bar{r} - \frac{\nu}{\sqrt{\Gamma}} F_0^+(\sigma) + 2\beta\sqrt{\Gamma} \times \frac{\left(F_0^+(\sigma) - k\varphi(\sigma)\right)}{1+\beta^2\Gamma\left(F_0^+(\sigma) - k\varphi(\sigma)\right)^2}\left(\alpha\delta_1 - s\Gamma\right) = \bar{r} - -\nu\Gamma^{-1/2} F_0^+(\sigma) \le \bar{r} - m_0\nu\Gamma^{-1/2} < 0. \tag{20}$$

Рассмотрим границу ∂Q_3. Если $z \in \partial Q_3$, то выполняются соотношения:

$$c^T x \ge \sqrt{\Gamma} F_0^+(\sigma), \tag{21}$$

$$l^T x = -\nu\Gamma^{-1} c^T x. \tag{22}$$

В силу условий 2), 3), 4) теоремы 1, условия 1) теоремы 3 и соотношений (21), (22), (9) производная функции $V_2(z)$ в силу системы (2) на множестве ∂Q_3 удовлетворяет неравенству: $\dot{V}_2(z) > 0$.

Рассмотрим границу ∂Q_4. Если $z \in \partial Q_4$, то выполняются соотношения:

$$\sqrt{\Gamma} F_0^+(\sigma) \le c^T x \le \sqrt{\Gamma} F^+(\sigma), \tag{23}$$

$$l^T x = \bar{r} - \nu\Gamma^{-1} c^T x. \tag{24}$$

Используя условия 2), 3) теоремы 1, соотношения (23), (24), (17), найдем производную функции $V_2(z)$ в силу системы (3) на множестве ∂Q_4

$$\dot{V}_2(z) = \left(\frac{\nu}{\Gamma}a_1 - \frac{\nu^2}{\Gamma^2} - a_2\right)c^T x + \left(\frac{\nu}{\Gamma} - a_1\right)\bar{r} + 2\alpha\beta \times \frac{\left(c^T x + \rho\varphi(\sigma)\right)}{1+\beta^2\left(c^T x + \rho\varphi(\sigma)\right)^2}\left(\frac{\nu\delta_1}{\Gamma} - \delta_2\right) \le \gamma_1\sqrt{\Gamma}\overline{M}_0 - \gamma_3\bar{r} + + \frac{2\alpha\beta\sqrt{\Gamma}\left(\overline{M}_0 + km\right)}{1+\beta^2\Gamma m_2^2}\gamma_2 < 0. \tag{25}$$

Рассмотрим функцию $M^-(z) = c^T x - \Phi_0^+(\sigma) \times \sqrt{\Gamma}$, где $\Phi_0^+(\sigma)$ удовлетворяет условию 3) теоремы 3. Пусть $L = \{z : M^-(z) \le 0, 0 \le V_2(z) \le \bar{r}, V_1^+(z) \ge 0, \sigma_0 \le \sigma \le \sigma_0 + \Delta\}$, тогда в силу соотношений (6), (9), (20), (17), (25) множество L является положительно инвариантным по переменным x_1, x_2.

Используя функцию $M^+(z) = c^T x - \sqrt{\Gamma}\Phi^+(\sigma)$, где $\Phi^+(\sigma)$ удовлетворяет условию 2) теоремы 3, определим множество $D = \{z : M^+(z) \ge 0, W_1^+(z) \le \le 0, 0 \le V_2(z) \le \bar{r}, \sigma_0 \le \sigma \le \sigma_0 + \Delta\}$. В силу соотношений (6), (9), (20), (17), (25) множество D является положительно инвариантным по переменным x_1, x_2.

Из условия теоремы 1, $rang\|c, l\| = 2 = n$, следует, что для матрицы $B = \|c, l + \nu\Gamma^{-1}c\|$ существует обратная матрица B^{-1}. В системе (2) сделаем замену переменных $x = \left(B^T\right)^{-1}(\tilde{x} + q)$, $q = colon(q_1, q_2)$, $q_2 = \bar{r}/2$, $q_1 = 1/2\sqrt{\Gamma}\left(F^+(\sigma_0) + F_0^+(\sigma_0)\right)$, $\tilde{x} = B^T x - q$, получим: $c^T x = \tilde{x}_1 + q_1$, $\left(l + \nu\Gamma^{-1}c\right)^T x = \tilde{x}_2 + q_2$. После сделанной замены переменные $\tilde{x}$ переобозначим через переменные x.

Рассмотрим множества $G = Q \bigcap P_0$, $P_0 = \{z : \sigma = \sigma_0\}$, $\overline{G} = (Q \bigcup L \bigcup D) \bigcap P_\Delta$, $P_\Delta = \{z : \sigma = \sigma_0 + \Delta\}$, в силу неравенства $\Phi^+(\sigma) + \rho\Gamma^{-1/2}\varphi(\sigma) > 0$ для $\sigma \in [\sigma_0; \sigma_0 + \Delta]$ получим, что любая траектория $(x(t),\sigma(t))$, начинающаяся при $t=0$ на множестве G, попадает через конечное время t_x на множество $\overline{G}$. Введем отображение G в $\overline{G}$ соотношением: $T(x,\sigma_0)=(x(t_x),\sigma_0+\Delta)$. Пусть S – отображение сдвига фазового пространства [6], определенное равенством: $S(x,\sigma)=(x,\sigma-\Delta)$. Отображение ST – непрерывное, $ST(G)\subset P_0$. Если $(x,\sigma_0)\in G$, то $ST(x,\sigma_0)=(\overline{x},\sigma_0)$. Для множества $\overline{Q}=\{x:(x,\sigma_0)\in G\}$ определим отображение $U: x\in\overline{Q}\to U(x)=\overline{x}$. Отображение U определяет векторное поле $S_0(x)=x-Ux$ на границе $\partial\overline{Q}$ ограниченной области $\overline{Q}$. Для векторного поля S_0 рассмотрим линейное векторное поле $S_2(x)=x-S_1(x)$, $S_1(x)=\overline{\overline{x}}$, $\overline{\overline{x}}_1={}^{3x_1}\!\!/_2$, $\overline{\overline{x}}_2=1/4x_2$. Пусть $S_3(x)=\frac{S_0(x)}{\|S_0(x)\|}+\frac{S_2(x)}{\|S_2(x)\|}$, тогда в силу свойств множеств Q, L, D, получим, что для любого $x\in\partial\overline{Q}$ справедливо неравенство: $S_3(x)\neq 0$, следовательно, вращения векторных полей S_0 и S_2 на $\partial\overline{Q}$ одинаковы [11]. Вращение $\gamma(S_2,\partial\overline{Q})$ линейного векторного поля S_2 на $\partial\overline{Q}$ определяется соотношением: $\gamma(S_2,\partial\overline{Q})=-1\neq 0$ [11]. В силу теоремы 5.15 [11] оператор U на $\overline{Q}$ имеет по крайней мере одну неподвижную точку $x^*\in\overline{Q}$, $Ux^*=x^*$. Точка (x^*,σ_0) является неподвижной для оператора ST, $ST(x^*,\sigma_0)=(x^*,\sigma_0)$. Из определения отображений T и S для решения с начальным условием (x^*,σ_0) вытекают равенства: $x(t_{x^*})=x^*$, $\sigma(t_{x^*})=\Delta+\sigma_0$. Система (2) имеет седловой предельный цикл второго рода [7], содержащийся во множестве Q.

Аналогично теореме 3 доказывается следующее утверждение.

Теорема 4. Пусть для системы (2) выполнены условия теоремы 2 и справедливы утверждения:

1) система уравнений (3) при $\lambda_1=0$, $\lambda=\nu\Gamma^{-3/2}$, $r=\Gamma^2\beta\nu^{-1}$, $s=\alpha\delta_1\Gamma^{-1}$, $k=-\rho\Gamma^{-1/2}$ имеет предельный цикл второго рода $F_0^-(\sigma)<0$, $F^-(\sigma)<F_0^-(\sigma)$ для любого $\sigma\in(-\infty;+\infty)$, $-M_0=\max\limits_{\sigma\in[\sigma_0;\sigma_0+\Delta]}F_0^-(\sigma)$;

2) система уравнений (3) при $\lambda_1>\nu\Gamma^{-3/2}$, $\lambda=\nu\Gamma^{-3/2}$, $r=\Gamma^2\beta\nu^{-1}$, $s=\alpha\delta_1\Gamma^{-1}$, $k=-\rho\Gamma^{-1/2}$ имеет решение $(y(t),\sigma(t))$, определяющее функцию $\Phi^-(\sigma)$, для которой выполняются неравенства: $0>\Phi^-(\sigma)>F_0^-(\sigma)$, $\Phi^-(\sigma)-k\varphi(\sigma)\le\le -m_2<0$ при $\sigma\in[\sigma_0;\sigma_0+\Delta]$, $\max\limits_{\sigma}\varphi(\sigma)==M>0$;

3) система уравнений (3) при $\lambda_1=0$, $\lambda=\nu\Gamma^{-3/2}$, $r=\Gamma^2\beta\nu^{-1}$, $s=\alpha\delta_1\Gamma^{-1}$, $k=-\rho\Gamma^{-1/2}$ имеет решение $(y(t),\sigma(t))$, определяющее функцию $\Phi_0^-(\sigma)$, для которой выполняется неравенство: $F^-(\sigma)>\Phi_0^-(\sigma)$ при $\sigma\in[\sigma_0;\sigma_0+\Delta]$, $\min\limits_{\sigma\in[\sigma_0;\sigma_0+\Delta]}\Phi_0^-(\sigma)=-\overline{m}_0$;

4) $\gamma_1\sqrt{\Gamma}\overline{m}_0+\frac{2\alpha\beta\sqrt{\Gamma}(\overline{m}_0+kM)}{1+\beta^2\Gamma m_2^2}\gamma_2<\frac{\nu M_0}{\sqrt{\Gamma}}\gamma_3$, $\gamma_3=a_1-\nu\Gamma^{-1}>0$;

тогда система (2) имеет два отрицательных предельных цикла второго рода.

Пример. Рассмотрим уравнение (1) в случае $K_1(p)=\frac{e_1p+e_2}{p+a}$, $K_2(p)=\frac{1}{gp+a}$, $F_1(\sigma)=\sin\sigma$, $F_2(\dot\sigma)=-\frac{2b_0a\beta_0\dot\sigma}{1+(a\beta_0)(\dot\sigma)^2}$. При $e_1=0$, $e_2=1$, $F_2(\dot\sigma)=\frac{2b_0a\beta_0\dot\sigma}{1+(a\beta_0)(\dot\sigma)^2}$ уравнение (1) рассмотрено в работе [5], в которой показано, что добавление частотного кольца с не инвертированной характеристикой частотного детектора приводит к расширению полосы захвата. В случае отсутствия частотного кольца $K_2(p)=0$ и $K_1(p)=\frac{1}{p+a}$, уравнение (1) сводится к хорошо изученной системе второго порядка (3), для которой $\lambda_1=a$, $s=0$, $k=0$, $\varphi(\sigma)=\sin\sigma-\gamma$ [3]. Если $K_1(p)==\frac{e_1p+e_2}{p+a}$, $K_2(p)=\frac{1}{gp+a}$, $F_1(\sigma)=\sin\sigma$, $F_2(\dot\sigma)==-\frac{2b_0a\beta_0\dot\sigma}{1+(a\beta_0)(\dot\sigma)^2}$, то уравнение (1) приводится к системе (2), для которой $A=\begin{pmatrix}-a_1 & -a_2\\ 1 & 0\end{pmatrix}$, $\alpha==b_0$, $a_1=\frac{a(g+1)}{g}$, $a_2=\frac{a^2}{g}$, $c=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$, $\rho=-e_1$,

$\nu = \Gamma a$, $b = \begin{pmatrix} \nu \\ -\Gamma \end{pmatrix}$, $\Gamma = e_2 + \rho a$, $d = \begin{pmatrix} \delta_2 \\ -\delta_1 \end{pmatrix}$, $\delta_1 = g^{-1}$, $\delta_2 = ag^{-2}$. Проверим для системы (2) условия теоремы 1. В рассматриваемом случае матрица A – гурвицева и выполняются соотношения: $c^T b = -\Gamma < 0$, $c^T A = l^T = (1, 0)$, $c^T d = -\delta_1 = -g^1 < 0$, $l^T b = \nu = \Gamma a$, $l^T d = \delta_2 = ag^{-2}$, $l^T A = -a_1 l^T - a_2 c^T$, $rang\|c, l\| = 2$, $\gamma_1 = \nu\Gamma^{-1} a_1 - \nu^2 \Gamma^{-2} - a_2 = 0$, $\gamma_2 = ag^{-1}(1 - g^{-1})$. Если $g > 1$, то выполняются условия 1), 2), 3) теоремы 1. Пусть система (3) при $\lambda_1 > a\Gamma^{-1/2}$, $\lambda = a\Gamma^{-1/2}$, $k = -\rho\Gamma^{-1/2}$, $s = b_0 g^{-1}\Gamma^{-1}, r = \Gamma\beta_0$ имеет предельный цикл второго рода $F^+(\sigma) > 0$, $F^+(\sigma) - k\varphi(\sigma) > 0$ для любого $\sigma \in (-\infty; +\infty)$, тогда в силу теоремы 1 система (2) имеет положительный предельный цикл второго рода.

Для системы (2) при $\Gamma = 1$, $\rho = 0$, $b_0 = 2$, $\beta_0 = 0.3$ получим, что если система (3) при $\lambda_1 > a$, $\lambda r = 0.3a$, $k = 0$, $s = 2g^{-1}$, $g > 1$ имеет положительный предельный цикл второго рода, то система (2) имеет положительный предельный цикл второго рода. На рисунке 1 в области параметров (γ, a^{-2}) изображена линия 1[3], ниже которой расположены значения параметров глобальной устойчивости в случае отсутствия частотного кольца. Линии 2, 3, 4 получены численными методами для системы (3) соответственно при значениях $g = 2.5$, $g = 1.8$, $g = 1.3$.

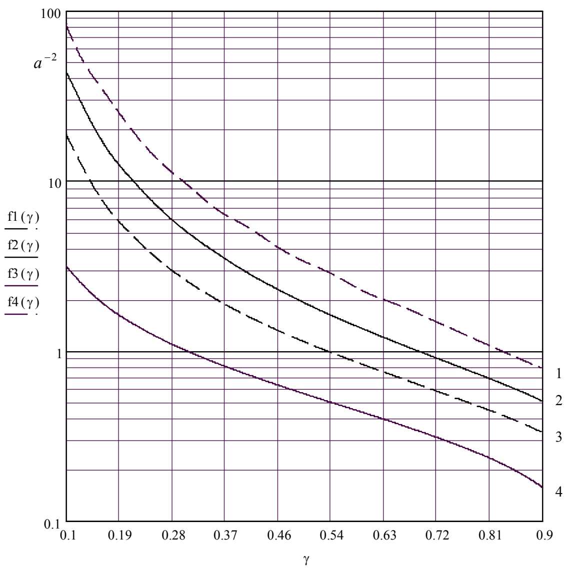

Рисунок 1

Выше линий 2, 3, 4 находятся значения параметров (γ, a^{-2}), при которых система (3) имеет положительный предельный цикл второго рода. Таким образом, добавление частотного кольца с инвертированной характеристикой частотного детектора привело к сужению полосы захвата.

Для определения нескольких предельных циклов второго рода рассмотрим систему (2) при $a = 0.001$, $g = 1.01$, $\Gamma = 0.1$, $b_0 = 3.8$, $\beta_0 = 2$, $\gamma = 0.1$, $\rho = -2 \cdot (10)^{-1/2}$. Система (3) при $\lambda_1 = 1.002a > a$, $\lambda r = 2\sqrt{0.1}a$, $s = 3.8(1.01 \cdot 0.1)^{-1}$, $k = 2$ имеет положительный и отрицательный предельные циклы второго рода. На рисунке 2 верхняя линия определяется циклом $F^+(\sigma)$ системы (3), нижняя линия соответствует функции $\Phi^+(\sigma)$, удовлетворяющей условию 2) теоремы 3.

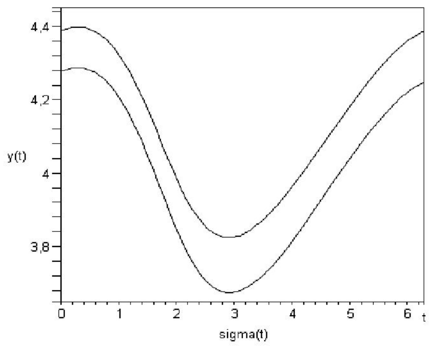

Рисунок 2

На рисунке 3 нижняя линия определяется циклом $F_0^+(\sigma)$ системы (3) при $\lambda_1 = 0$, верхняя линия соответствует функции $\Phi_0^+(\sigma)$, удовлетворяющей условию 3) теоремы 3.

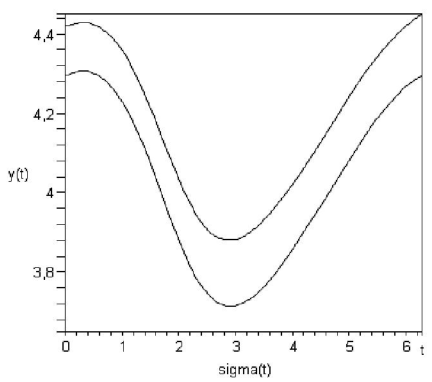

Рисунок 3

Численно определяются значения: $\overline{M}_0 = 4.43$, $\overline{M}_0 = \max\limits_{\sigma \in [0; 2\pi]} \Phi_0^+(\sigma)$, $m_0 = \min\limits_{\sigma \in [0; 2\pi]} F_0^+(\sigma) = 3.7$. В рассматриваемом случае выполняются соотношения: $\gamma_3 = ag^{-1} = 0.001\cdot(1.01)^{-1}$, $m_2 > 0$, $m = \min\limits_{\sigma\in[0;2\pi]} \varphi(\sigma) = -1-\gamma = -1.1$, $\gamma_2 = ag^{-1}\left(1-g^{-1}\right)$, $\gamma_1 = 0$, $\alpha = b_0$, $\beta = a\beta_0$. Для системы (2) выполнено условие 4) теоремы 3, в силу теоремы 3 система (2) имеет положительный седловой предельный цикл второго рода, содержащийся во множестве $Q = \left\{z: x_2 \le \sqrt{\Gamma}F^+(\sigma), x_2 \ge \sqrt{\Gamma}F_0^+(\sigma), 0 \le x_1 + ax_2 \le \bar{r}\right\}$, где $\bar{r}$ удовлетворяет неравенству (17).

На рисунке 4 нижняя линия определяется циклом $F^-(\sigma)$ системы (3), верхняя линия соответствует функции $\Phi^-(\sigma)$, удовлетворяющей условию 2) теоремы 4.

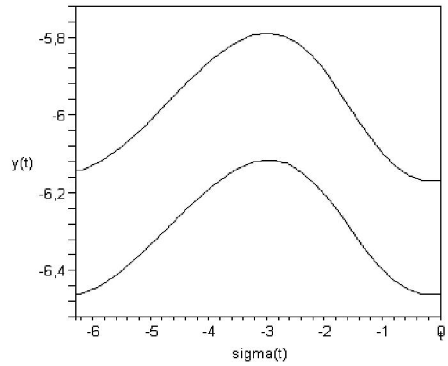

Рисунок 4

На рисунке 5 верхняя линия определяется циклом $F_0^-(\sigma)$ системы (3) при $\lambda_1 = 0$, нижняя линия соответствует функции $\Phi_0^-(\sigma)$, удовлетворяющей условию 3) теоремы 4.

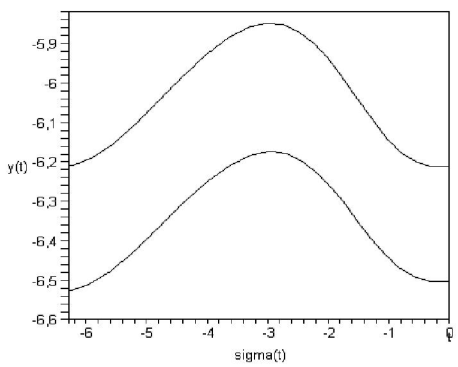

Рисунок 5

Численно определяются значения: $\overline{m}_0 = 6.53$, $-\overline{m}_0 = \min\limits_{\sigma\in[-2\pi;0]} \Phi_0^-(\sigma)$, $\max\limits_{\sigma\in[-2\pi;0]} F_0^-(\sigma) = -5.84 = -M_0$. В рассматриваемом случае выполняются соотношения: $\gamma_3 = ag^{-1}$, $m_2 < 0$, $M = \max\limits_{\sigma\in[0;2\pi]} \varphi(\sigma) = 1-\gamma = 0.9$, $\gamma_2 = ag^{-1}\left(1-g^{-1}\right)$, $\gamma_1 = 0$, $\alpha = b_0$, $\beta = a\beta_0$. Для системы (2) выполнено условие 4) теоремы 4, в силу теоремы 4 система (2) имеет отрицательный седловой предельный цикл второго рода, содержащийся во множестве $Q = \left\{z: x_2 \le \sqrt{\Gamma}F_0^-(\sigma), x_2 \ge F^-(\sigma)\times \times\sqrt{\Gamma}, -\bar{r} \le x_1 + ax_2 \le 0\right\}$, где $\bar{r}$ находится из условия 4) теоремы 4.

Заключение. Таким образом, показано, что исследование многомерных систем ЧФАПЧ основано на результатах, полученных для систем дифференциальных уравнений второго порядка. Получены условия существования нескольких вращательных режимов в случае инвертированной нелинейной характеристики частотного детектора и фильтров первого порядка. Показано, что добавление частотного кольца с инвертированной характеристикой частотного детектора может привести к сужению полосы захвата для системы автоподстройки частоты. Для нахождения дополнительных режимов синхронизации могут быть использованы области фазового пространства, ограниченные двумя седловыми предельными циклами второго рода.

Библиографический список

1. *Жилин Н.С.* Принципы фазовой синхронизации в измерительной технике. – Томск: Радио и связь, 1989. –384 с.

2. *Капранов М.В., Кулешов В.Н., Уткин Г.М.* Теория колебаний в радиотехнике. – М.: Наука, 1984. – 320 с.

3. Системы фазовой синхронизации /Под ред. В.В. Шахгильдяна, Л. Н. Белюстиной. – М.: Радио и связь, 1982. –288 с.

4. *Шалфеев В.Д.* К исследованию нелинейной системы частотно-фазовой автоподстройки частоты с одинаковыми интегрирующими фильтрами в фазовой и частотных цепях //Изв. вузов. Радиофизика. 1969. – Т.12, –№7. – С. 1037–1051.

5. *Леонов Г.А., Томаев А.М., Чшиева Т.Л.* Устойчивость системы частотно-фазовой синхронизации// Радиотехника и электроника. 1992. – Т.37, – №4. – С. 671–679.

6. *Леонов Г.А., Буркин И.М., Шепелявый А.И.* Частотные методы в теории колебаний. – СПб.: Изд-во СПбГУ, 1992. – 368 с.

7. *Белых В.Н., Некоркин В.И.* О качественном исследовании многомерной фазовой системы // Сибирский математический журнал. 1977. – Т.18, – №4. – С. 723–735.

8. *Матросов В.В.* Динамические свойства генератора с частотно-фазовым управлением // Изв. вузов. Радиофизика. 2004. – Т.47, – №4. –С. 334–342.

9. *Пономаренко В.П., Заулин И.А.* Динамика автогенератора, управляемого петлей частотной автоподстройки с инвертированной характеристикой дис-

криминатора // Радиотехника и электроника. 1997. – Т.42, №7. – С. 828–835.

10. *Пономаренко В.П.* Динамика автогенератора с частотно-фазовым управлением при инверсии характеристики частотного дискриминатора // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2003. – Т.11, – №6. – С. 75–91.

11. *Красносельский М.А.* Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1966. –332 с.