

УДК 519.6

В.Е. Борзых

К ОПРЕДЕЛЕНИЮ ПОГРЕШНОСТИ ЧИСЛЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ ВЫХОДНЫХ СИГНАЛОВ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Предложен способ определения максимальной погрешности численного дифференцирования выходных сигналов линейных динамических систем. Сущность способа заключается в построении и анализе структурной схемы инверсно - сопряженной системы измерения погрешности. Приведены примеры расчета погрешностей, которые показывают преимущества предложенного способа по сравнению с классическими способами оценки погрешностей.

Ключевые слова: погрешность, дифференцирование, сигнал, система.

Введение. Задача численного дифференцирования состоит в приближенном вычислении производных функции $y(t)$ по заданным в конечном числе точек значениям этой функции [1].

Пусть на интервале $[a, b]$ задана последовательность узлов $\{t_i = a + iT_0, i = 0, 1, \dots, N, T_0N = b - a\}$ и для нее определены значения $y_i = y(t_i)$. В качестве приближенного значения $y^{(1)}(t_i)$ можно взять, например, одно из следующих разностных отношений:

$$y_i^{(1)} = y^{(1)}(t_i) \approx (y_i - y_{i-1}) / T_0, \quad (1)$$

$$y_i^{(1)} = y^{(1)}(t_i) \approx (y_{i+1} - y_{i-1}) / 2T_0. \quad (2)$$

Возникающая в результате такой замены методическая погрешность характеризуется соответственно следующими соотношениями:

$$\left| y_i^{(1)} - (y_i - y_{i-1}) / T_0 \right| \leq T_0 / 2 \max_{[t_{i-1}, t_i]} |y^{(2)}(t)|, \quad (3)$$

$$\left| y_i^{(1)} - (y_{i+1} - y_{i-1}) / 2T_0 \right| \leq T_0^2 / 6 \max_{[t_{i-1}, t_{i+1}]} |y^{(3)}(t)|. \quad (4)$$

Эти соотношения получены для функции $y(t)$, которая должна быть достаточное число раз непрерывно дифференцируемой.

Однако при обработке выходных сигналов динамических объектов требование непрерывной дифференцируемости функции не всегда выполняется. Например, предположим, что операции дифференцирования подвергается выходной сигнал апериодического звена первого порядка, который является реакцией звена на входное воздействие релейного вида. При этом оказывается, что в моменты времени, соответствующие переключению полярности входного сигнала, на выходе звена сигнал первой произ-

водной будет содержать точки разрыва непрерывности. В эти моменты времени значения второй производной и всех производных высшего порядка обращаются в бесконечность. По этой причине использовать соотношения вида (3) и (4) для оценки погрешности дифференцирования выходного сигнала апериодического звена нельзя.

Аналогичное затруднение в определении погрешностей дифференцирования может возникнуть и при обработке выходных сигналов динамических объектов более высокого порядка.

Целью статьи является разработка способа расчета методической составляющей погрешности для известных способов численного дифференцирования сигналов. Величина погрешности должна быть функционально увязана с шагом дискретизации сигнала и параметрами динамического объекта.

Постановка задачи. Сигнал $y(t)$ является реакцией линейной динамической системы (ДС), которая имеет передаточную функцию

$$W(p) = \frac{a_m p^m + a_{m-1} p^{m-1} + \dots + a_1 p + a_0}{b_n p^n + b_{n-1} p^{n-1} + \dots + b_1 p + b_0},$$

где $n - m = r$, $r = 1, 2, 3, \dots$, на входное воздействие $x(t)$, ограниченное по модулю:

$$|x(t)| \leq M. \quad (5)$$

Требуется найти наибольшее возможное значение методической погрешности численного дифференцирования (заданного вида) мгновенных дискретных отсчетов сигнала $y(t)$, поступающих с периодом T_0 .

Способ решения задачи. Способ основан на применении метода инверсно-сопряженных систем [2] к анализу погрешностей численного дифференцирования сигналов. Метод неодно-

кратно и успешно использовался автором при решении других задач, связанных с анализом погрешностей интерполяции и численного интегрирования сигналов [3, 4].

Сущность способа заключается в построении и анализе структурных схем измерения погрешности численного дифференцирования (рисунок 1).

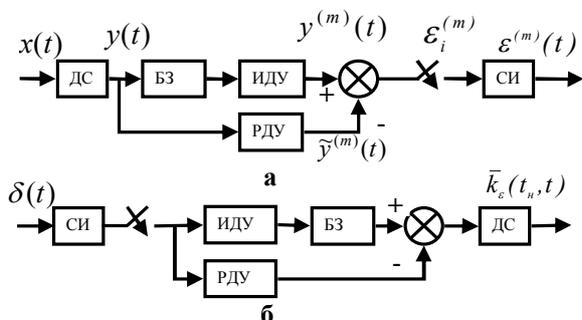


Рисунок 1 – Структурные схемы измерения погрешности численного дифференцирования: а – прямая система; б – инверсно-сопряженная система

В структурной схеме прямой системы измерения погрешности выходной сигнал $y(t)$ динамической системы ДС подвергается следующей обработке.

В идеальном дифференцирующем устройстве (ИДУ) вычисляется производная $y^{(m)}(t)$ в соответствии с классической методикой определения производной порядка m от функции $y(t)$, заданной в аналитической форме. Реальное дифференцирующее устройство (РДУ) определяет приближенное значение m -й производной $\tilde{y}^{(m)}(t)$, используя одну из формул численного дифференцирования. Сигнал погрешности дифференцирования $\varepsilon^{(m)}(t)$ образуется в результате нахождения разности между выходными сигналами идеального и реального дифференцирующих устройств. Дискретные значения сигнала ошибки запоминаются в ступенчатом интерполляторе (СИ).

Блок задержки (БЗ) введен в схему для того, чтобы обеспечить при необходимости возможность управления моментом выборки точного значения производной.

Реальное дифференцирующее устройство может быть реализовано на сумматоре, на входы которого подаются с определенными весовыми коэффициентами значения отсчетов дифференцируемого сигнала.

Итак, в структурной схеме прямой системы измерения погрешности дифференцирования нам известны передаточная функция динамического объекта $W(p)$ (или его импульсная переходная

функция), вид аналитического выражения для РДУ и шаг дискретизации T_0 . Требуется найти такой наилучший вид входного сигнала $\hat{x}(t)$, удовлетворяющий условию (5), при котором в момент наблюдения t_n погрешность дифференцирования $\varepsilon^{(m)}(t_n, t)$ достигает своего максимального значения.

Эта задача решается с применением метода инверсно-сопряженных систем. Методика определения максимальной погрешности сводится к следующему.

1. Строится структурная схема инверсно-сопряженной системы измерения погрешности дифференцирования (рисунок 1, б).

2. Определяется импульсная переходная функция $\bar{k}_\varepsilon(t_n, t)$ этой системы.

3. Для заданной величины t_n находится максимальное значение погрешности

$$\varepsilon_{\max_x}^{(m)}(t_n) = M \int_0^{t_n} |\bar{k}_\varepsilon(t_n, t)| dt .$$

4. Определяется абсолютный максимум погрешности

$$\varepsilon_{\max_x \max_t}^{(m)} = \lim_{t_n \rightarrow \infty} \hat{\varepsilon}^{(m)}(t_n) = M \int_0^\infty |\bar{k}_\varepsilon(t_n, t)| dt . \quad (6)$$

Примеры расчета погрешности. Рассмотрим два примера расчета погрешности определения первой производной выходного сигнала динамической системы, которая имеет передаточную функцию $W(p) = 1/(Tp + 1)$. Известно, импульсная переходная функция этой системы

$$K_{ДС}(t) = L^{-1}[W(p)] = (1/T)(e^{-t/T}) . \quad (7)$$

Пример 1. Пусть приближенное значение первой производной вычисляется в РДУ в соответствии с выражением (1). Структурная схема инверсной системы измерения погрешности, которая используется в примерах, показана на рисунке 2.

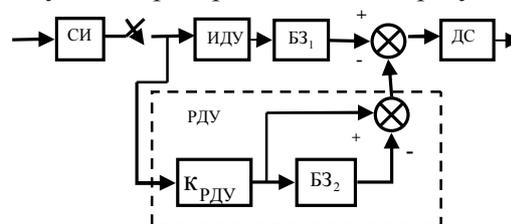


Рисунок 2 – Детализированная структурная схема инверсно-сопряженной системы измерения погрешности численного дифференцирования

В этой схеме весовой коэффициент реального дифференцирующего устройства $K_{РДУ} = 1/T_0$. Точное и приближенное значения

первой производной определяются и сравниваются между собой в один момент времени $t_n = iT_0$, поэтому величина времени задержки сигнала в блоке БЗ₁ должна быть равна нулю. Блок БЗ₂ задерживает сигнал на величину шага дискретизации T_0 .

Подав на вход этой структурной схемы дельта-функцию и проанализировав реакцию системы на ее воздействие, получим выражение импульсной переходной функции

$$\overline{K}_\varepsilon(t_n, t) = \begin{cases} (1/T)\delta(t) & \text{для } t=0; \\ -(1/T^2 + 1/T_0T)e^{-t/T} & \text{для } 0 < t \leq T_0; \\ (1/T_0T)e^{-(t-T_0)/T} - (1/T_0T + 1/T^2)e^{-t/T} & \text{для } t > T_0. \end{cases}$$

График функции $\overline{K}_\varepsilon(t_n, t)$ показан на рисунке 3, а. В точке $t=0$ функция содержит дельта-функцию, которая появилась в результате дифференцирования разрывной импульсной переходной функции (7) динамической системы. Исследования показывают, что в точке $t=T_0$ функция изменяет знак на противоположный независимо от величины отношения T_0/T . Таким образом, наилучший входной сигнал $\hat{x}(t)$ динамической системы должен иметь вид релейного сигнала с двумя переключениями.

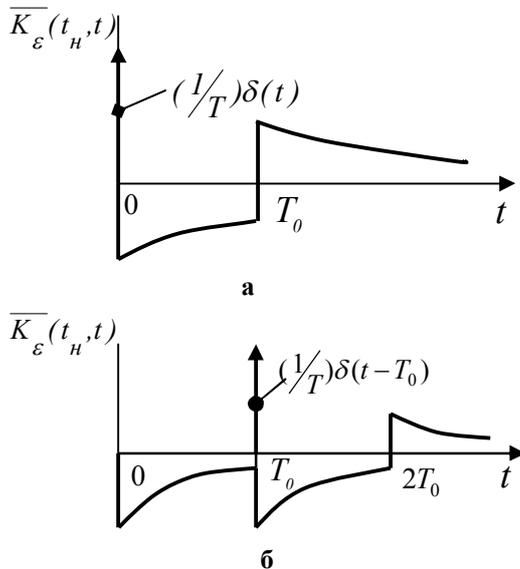


Рисунок 3 – Графики импульсных переходных функций инверсно-сопряженных систем измерения погрешности численного дифференцирования:

$$a - y_i^{(1)} \approx (y_i - y_{i-1})/T_0;$$

$$б - y_i^{(1)} \approx (y_{i+1} - y_{i-1})/2T_0$$

Наихудшие траектории изменения входного и выходного сигналов динамической системы показаны на рисунке 4, а. На начальном интервале времени наблюдения амплитуда выходного сигнала увеличивается. К моменту $t = (i-1)T_0$, ($i \rightarrow \infty$) она достигает величины M . В этой точке формируется отсчет y_{i-1} , затем в момент времени $t = (i-1)T_0 + \Delta t$, ($\Delta t \rightarrow 0$) происходит изменение полярности входного сигнала. В точке iT_0 формируется следующий отсчет y_i , а затем в момент времени $t = iT_0 + \Delta t$, ($\Delta t \rightarrow 0$) знак входного сигнала вновь изменяется.

Реальное дифференцирующее устройство определяет значение первой производной на интервале $[(i-1)T_0, iT_0]$, а идеальное – в точке $iT_0 + \Delta t$, ($\Delta t \rightarrow 0$).

Подставив выражение $\overline{K}_\varepsilon(t_n, t)$ в (6) и выполнив интегрирование, получим

$$\varepsilon_{\max}^{(1)} = 2/T_0 (1 - e^{-T_0/T}) + 2/T (1 - e^{-T_0/T}).$$

Обозначив $\alpha = T_0/T$, представим эту зависимость в виде

$$\varepsilon_{\max}^{(1)} = 2/T_0 (1 - e^{-\alpha})(1 + \alpha). \quad (8)$$

Пример 2. Предположим, что приближенное значение первой производной вычисляется в соответствии с выражением (2). В этом случае весовой коэффициент реального дифференцирующего устройства

$K_{РДУ} = 1/2T_0$. В схеме измерения погрешности точное значение первой производной определяется в точке $(i-1)T_0$, а приближенное – в момент $t_n = iT_0$. Поэтому величина времени задержки сигнала в блоке БЗ₁ должна быть равна шагу дискретизации. Блок задержки БЗ₂ должен задерживать сигнал на величину $2T_0$.

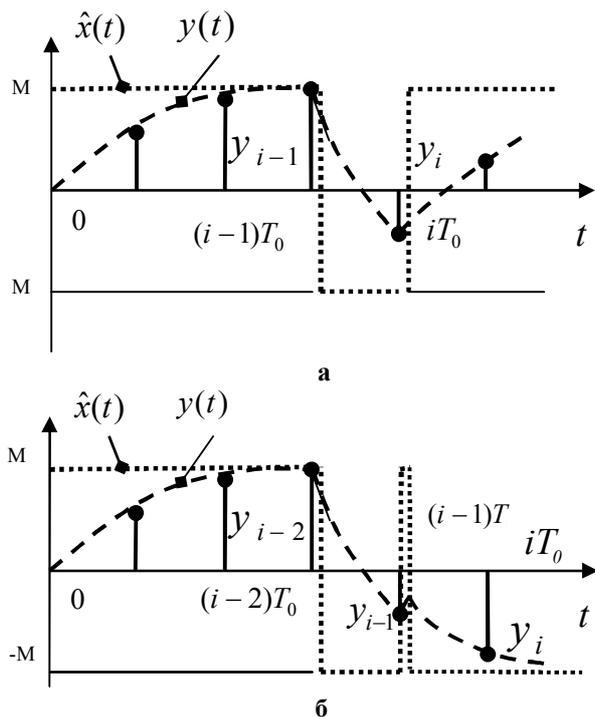


Рисунок 4 – Графики наихудших входных и выходных сигналов динамической системы:

$$\begin{aligned}
 \text{а} - y_i^{(1)} &\approx (y_i - y_{i-1}) / T_0 ; \\
 \text{б} - y_i^{(1)} &\approx (y_{i+1} - y_{i-1}) / 2T_0
 \end{aligned}$$

Выражение импульсной переходной функции инверсно-сопряженной системы имеет вид

$$\overline{K}_\varepsilon(t_H, t) = \begin{cases} -(\frac{1}{2T_0T})e^{-t/T} & \text{для } 0 \leq t < T_0; \\ (\frac{1}{T})\delta(t - T_0) & \text{для } t = T_0; \\ (-\frac{1}{2T_0T})e^{-t/T} - \frac{1}{T^2} e^{-(t-T_0)/T} & \text{для } T_0 < t \leq 2T_0 ; \\ (-\frac{1}{2T_0T})e^{-t/T} - \frac{1}{T^2} e^{-(t-T_0)/T} + & \\ + (\frac{1}{2T_0T})e^{-(t-2T_0)/T} & \text{для } t > 2T_0. \end{cases}$$

График этой функции показан на рисунке 3, б. В данном случае дельта-функция определена в точке $t = T_0$. Наихудший входной сигнал $\hat{x}(t)$ динамической системы имеет вид релейного сигнала с тремя переключениями (рисунок 4, б): два переключения в окрестности точки $t = (i - 1)T_0$ и одно в точке $t = (i - 2)T_0$.

Подставив выражение $\overline{K}_\varepsilon(t_H, t)$ в (6) и выполнив интегрирование, получим

$$\varepsilon_{\max}^{(1)} = \frac{1}{T_0} [(1 - e^{-2\alpha}) + 2\alpha(1 - e^{-\alpha})]. \quad (9)$$

Расчеты погрешностей (при малых значениях α), выполненные по формулам (8) и (9), дают практически одинаковые результаты (таблица 1). Такой вывод не согласуется с классическим представлением о погрешностях: формула (2) имеет более высокий порядок точности по сравнению с (1). Близость результатов объясняется тем, что во втором примере приближенное значение производной определяется по двум отсчетам, которые смещены по времени на больший отрезок (т. е. на величину $2T_0$). Это приводит к созданию более благоприятных условий для накопления погрешности.

Таблица 1

Расчетная формула	$T_0 * \varepsilon_{\max}^{(1)}(\alpha)$					
	0	0.02	0.04	0.06	0.08	0.1
(8)	0	0.040	0.082	0.123	0.166	0.209
(9)	0	0.040	0.080	0.120	0.160	0.200

Замечание. В рассмотренных примерах определены наихудшие входные сигналы для динамического объекта (7), которые приводят к эффекту накопления сигнала в структурной схеме измерения погрешности. Такой же эффект накопления погрешности можно получить, если на вход объекта вместо сигнала $\hat{x}(t)$ подать инверсный сигнал $\overline{\hat{x}(t)}$.

Теоретические результаты, полученные в статье, подтверждены экспериментальными исследованиями погрешностей численного дифференцирования с использованием системы MATLAB.

Методика исследования сводится к выполнению ряда шагов алгоритма.

1. Генерирование значений временного ряда. В таблице 2 показаны отсчеты выходного сигнала апериодического звена первого порядка ($T=10$). Шаг дискретизации в этой последовательности $\Delta t = 0.01$. Такой шаг выбран для имитации работы идеального дифференцирующего устройства. В реальном дифференцирующем устройстве используется шаг дискретизации $T_0 = 1$, поэтому $\alpha = 0.1$.

Таблица 2

i	0	1	2	...	99	100
t_i	0	0.01	0.02	...	0.99	1
$y(t_i)$	0	-0.0009	-0.0019	...	-0.0873	-0.0862

2. Определение приближенного значения производной. Используя отсчеты с номерами 0 и 100, получаем

$$\tilde{y}_{100}^{(1)} = (y_{100} - y_0) / 1 = (-0.0862 - 0) / (0.01 * 100) = -0.0862.$$

3. Определение точного значения производной. Используя отсчеты с номерами 99 и 100, получаем

$$y_{100}^{(1)} = (y_{100} - y_{99}) / 1 = (-0.0862 + 0.0873) / 0.01 = 0.11.$$

4. Вычисление погрешности. Используя результаты, полученные на шагах 2 и 3, находим

$$\varepsilon_{100}^{(1)} = y_{100}^{(1)} - \tilde{y}_{100}^{(1)} = 0.196.$$

5. Сравнение экспериментальных и теоретических результатов. В таблице 1 для параметра $\alpha = 0.1$ находим $\varepsilon_{\max}^{(1)}(0.1) = 0.209$. Результат, полученный на четвертом шаге, не превышает эту величину. Это не противоречит теоретическому выводу.

Расчеты по шагам (2-5) повторяются для всего имеющегося массива исходных данных ($i = 101, 102, \dots$).

Заключение. Предложенная методика позволяет найти оценки максимальной погрешности численного дифференцирования выходных сигналов различных динамических систем. Величина погрешности связывается не с производными дифференцируемого сигнала, а с параметрами динамической системы. Это позволяет получить оценки погрешностей даже в тех случаях,

когда классическая методика не дает конечного результата.

В предложенной методике используется относительно «слабое» ограничение (5), которое допускает возможность появления разрывов непрерывности во входном сигнале динамического объекта. Иногда это может быть недопустимо. Для усиления ограничения на характер изменчивости входного сигнала можно, например, на входе ДС включить соответствующий фильтр.

Эффективность практического применения методики повышается, если для вычисления значения функционала (6) используется ЭВМ. Теоретические результаты, полученные в статье, подтверждены экспериментальными исследованиями погрешностей численного дифференцирования.

Библиографический список

1. Демидович Б.П., Марон И.А. Основы вычислительной математики: Учеб. пособие. 6-е изд., стер. – СПб.: Издательство «Лань», 2007. – 672 с.
2. Солодов А.В. Линейные системы автоматического управления с переменными параметрами. Физматгиз, 1962. – 320 с.
3. Борзых В.Е. Анализ погрешностей интерполяции сигналов локальным сплайном Эрмита // Изв. вузов СССР – «Приборостроение». 1989. № 8. – С. 3 – 5.
4. Борзых В.Е., Милов Л.Т. Анализ погрешностей численного интегрирования выходных сигналов линейных динамических систем // Автометрия. 1972. № 3. – С. 24 – 28.