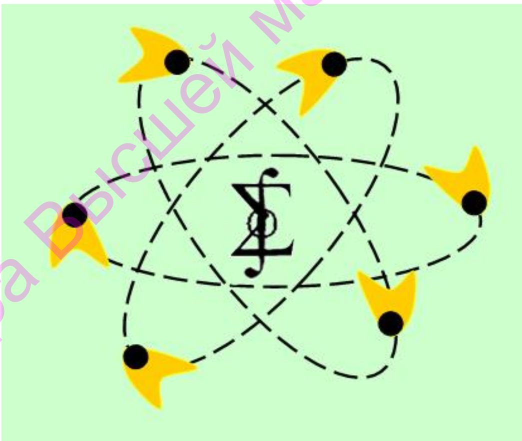
МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

РЯЗАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ РАДИОТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

К.В. БУХЕНСКИЙ,

Н.В. ЕЛКИНА, Н.Н. МАСЛОВА

РАСЧЕТНЫЕ ЗАДАНИЯ ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКЕ



Рязань 2015

Министерство образования и науки Российской Федерации

Рязанский государственный радиотехнический университет

К.В. БУХЕНСКИЙ,

Н.В. ЕЛКИНА, Н.Н. МАСЛОВА

РАСЧЕТНЫЕ ЗАДАНИЯ ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКЕ

Учебное пособие

Рязань 2015

УДК 517.38

Расчетные задания по теории вероятностей и математической статистике: учеб. пособие / К.В. Бухенский, Н.В. Елкина, Н.Н. Маслова; Рязан. гос. радиотехн. ун-т. – Рязань, 2015. – 176 с.

Содержит типовые расчеты по теории вероятностей и математической статистике в соответствии с Федеральным государственным образовательным стандартом высшего профессионального образования.

Предназначено для студентов направления 18.03.01 «Химическая технология», а также для студентов всех направлений и специальностей, изучающих теорию вероятностей и математическую статистику.

Табл. 14. Ил. 17. Библиогр.: 7 назв.

Событие, случайная величина, закон распределения, математическая статистика

Печатается по решению редакционно-издательского совета Рязанского государственного радиотехнического университета.

Рецензент: кафедра высшей математики Рязанского государственного радиотехнического университета (доц., канд. физ.-мат. наук А.Б. Дюбуа)

1. ТИПОВОЙ РАСЧЕТ «СЛУЧАЙНЫЕ СОБЫТИЯ»

1 ВАРИАНТ

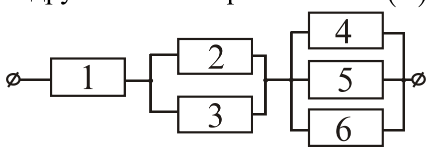
1.1. На сельскохозяйственные работы из трех бригад выделяют по одному человеку. Известно, что в первой бригаде 15 человек, во второй – 12, в третьей – 10 человек. Определить число возможных групп по 3 человека, если известно, что на сельскохозяйственные работы может быть отправлен каждый рабочий. (*Ответ:* 1800.)

1.2. Из пяти букв разрезной азбуки составлено слово «ПЕСНЯ». Ребенок, не умеющий читать, рассыпал буквы и затем собрал в произвольном порядке. Найти вероятность того, что у него снова получилось слово «песня». (*Ответ:* 0,0083.)

1.3. В области $D = \{(x, y) \mid x + y \le 2,\ x \ge 0,\ y \ge 0\}$ случайным образом выбирается точка (x, y). Определить вероятность выполнения соотношения (события) $A: y \le x^2$.

1.4. В телестудии 3 телевизионные камеры. Вероятность того, что в данный момент камера включена, равна соответственно 0,9, 0,8, 0,7. Найти вероятность того, что в данный момент включены: а) две камеры; б) не более одной камеры; в) три камеры. (*Ответ:* а) 0,398; б) 0,098; в) 0,504.)

1.5. Событие A – сигнал проходит со входа схемы на выход; событие A_j – сигнал проходит со входа j-го блока на выход, его вероятность равна p_j. Элементы выходят из строя независимо друг от друга. Найти вероятность $P(A)$.



1.6. 20 % приборов монтируются с применением микромодулей, остальные – с применением интегральных схем. Надежность прибора с применением микромодулей – 0,9, интегральных схем – 0,8. Найти: а) вероятность надежной работы наугад взятого прибора; б) вероятность того, что прибор – с микромодулем, если он был исправен. (*Ответ*: а) 0,82; б) 0,22.)

1.7. Всхожесть семян некоторого растения составляет 80 %. Найти вероятность того, что из 6 посеянных семян взойдут: а) три; б) не менее трех; в) четыре. (*Ответ:* а) 0,08192; б) 0,98324; в) 0,24588.)

1.8. Вероятность появления событий в каждом из независимых испытаний равна 0,25. Найти вероятность того, что событие наступит 50 раз в 243 испытаниях. (*Ответ:* 0,0167.)

2 ВАРИАНТ

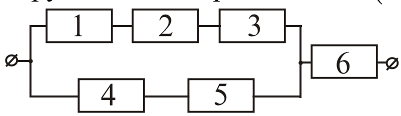
2.1. Пять пассажиров садятся в электропоезд, состоящий из 10 вагонов. Каждый пассажир с одинаковой вероятностью может сесть в любой из 10 вагонов. Определить число всех возможных вариантов размещения пассажиров в поезде. (*Ответ*: 100 000.)

2.2. Куб, все грани которого окрашены, распилен на тысячу кубиков одинакового размера. Полученные кубики тщательно перемешаны. Определить вероятность того, что наудачу извлеченный кубик будет иметь две окрашенные грани. (*Ответ:* 0,096.)

2.3. В области $D=\{(x,\ y)\,|\ x+y\le 1,\ x\ge 0,\ y\ge 0\}$ случайным образом выбирается точка (x, y). Определить вероятность выполнения соотношения (события) $A: xy\le 1$.

2.4. На железобетонном заводе изготавливают панели, 90 % из которых – высшего сорта. Какова вероятность того, что из трех наугад выбранных панелей высшего сорта будут: а) три панели; б) хотя бы одна панель; в) не более одной панели? (*Ответ:* а) 0,729; б) 0,999; в) 0,271.)

2.5. Событие A – сигнал проходит со входа схемы на выход; событие A_j – сигнал проходит со входа j-го блока на выход, его вероятность равна p_j. Элементы выходят из строя независимо друг от друга. Найти вероятность $P(A)$.



2.6. Детали попадают на обработку на один из трех станков с вероятностями, равными соответственно 0,2; 0,3; 0,5. Вероятность брака на первом станке равна 0,02, на втором – 0,03, на третьем – 0,01. Найти: а) вероятность того, что случайно взятая после обработки деталь – стандартная; б) вероятность обработки наугад взятой детали на втором станке, если она оказалась стандартной. (*Ответ*: а) 0,982; б) 0,2963.)

2.7. В семье четверо детей. Принимая равновероятным рождение мальчика и девочки, найти вероятность того, что мальчиков в семье: а) три; б) не менее трех; в) два. (*Ответ:* а) 0,25; б) 0,3125; в) 0,375.)

2.8. Вероятность появления события в каждом из независимых испытаний равна 0,8. Найти вероятность того, что в 144 испытаниях событие наступит 120 раз. (*Ответ:* 0,0504.)

3 ВАРИАНТ

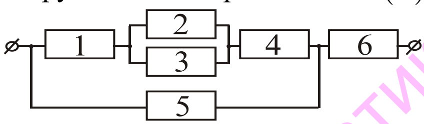
3.1. Студенты данного курса изучают 12 дисциплин. В расписание занятий каждый день включается по 3 предмета. Сколькими способами может быть составлено расписание занятий на каждый день? (*Ответ:* 1320.)

3.2. Из партии втулок, изготовленных за смену токарем, случайным образом отбирается для контроля 10 шт. Найти вероятность того, что среди отобранных втулок две – второго сорта, если во всей партии 25 втулок первого сорта и 5 – второго. (*Ответ:* 0,3601.)

3.3. В области $D = \{(x, y) \mid 0 \le x \le 2, 0 \le y \le 1\}$ случайным образом выбирается точка (x, y). Определить вероятность выполнения соотношения (события) $A: y \ge x$.

3.4. В блок входят три радиолампы. Вероятности выхода из строя в течение гарантийного срока для них равны соответственно 0,3; 0,2; 0,4. Какова вероятность того, что в течение гарантийного срока выйдут из строя: а) не менее двух радиоламп; б) ни одной радиолампы; в) хотя бы одна радиолампа? (*Ответ:* а) 0,212; б) 0,336; в) 0,664.)

3.5. Событие A – сигнал проходит со входа схемы на выход; событие A_j – сигнал проходит со входа j-го блока на выход, его вероятность равна p_j. Элементы выходят из строя независимо друг от друга. Найти вероятность $P(A)$.



3.6. Среди поступивших на сборку деталей 30 % - с завода № 1, остальные – с завода № 2. Вероятность брака для завода № 1 равна 0,02, для завода № 2 – 0,03. Найти: а) вероятность того, что наугад взятая деталь стандартная; б) вероятность изготовления наугад взятой детали на заводе № 1, если она оказалась стандартной. (*Ответ*: а) 0,973; б) 0,302.)

3.7. Среди заготовок, изготавливаемых рабочим, в среднем 4% не удовлетворяют требованиям стандарта. Найти вероятность того, что среди 6 заготовок, взятых для контроля, требованиям стандарта не удовлетворяют: а) не менее пяти; б) не более пяти; в) две. (*Ответ:* а) 0,9784; б) 0,2172; в) 0,0204.)

3.8. Вероятность появления события в каждом из независимых испытаний равна 0,2. Найти вероятность того, что событие наступит не менее 25 раз в 100 испытаниях. (*Ответ:* 0,0456.)

4 ВАРИАНТ

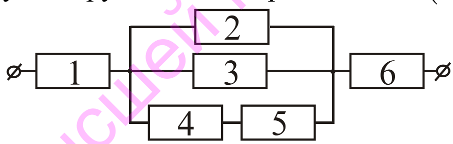
4.1. Восемь человек договорились ехать в одном поезде, состоящем из восьми вагонов. Сколькими способами можно распределить этих людей по вагонам, если в каждый вагон сядет по одному человеку? (*Ответ:* 40 320.)

4.2. В лифт шестиэтажного дома на первом этаже вошли 3 человека. Каждый из них с одинаковой вероятностью выйдет на любом из этажей, начиная со второго. Найти вероятность того, что все пассажиры выйдут на четвертом этаже. (*Ответ:* 0,008.)

4.3. В области $D=\{(x,y)\,|\,0\le x\le 1,\,0\le y\le 1\}$ случайным образом выбирается точка (x,y). Определить вероятность выполнения соотношения (события) $A: x\le y\le x+\frac{1}{2}$.

4.4. В первом ящике 20 деталей, 15 из них – стандартные, во втором ящике 30 деталей, 25 из них – стандартные. Из каждого ящика наугад берут по одной детали. Какова вероятность того, что: а) обе детали будут стандартными; б) хотя бы одна деталь стандартная; в) обе детали нестандартные? (*Ответ:* а) 0,625; б) 0,9583; в) 0,04266.)

4.5. Событие A – сигнал проходит со входа схемы на выход; событие A_j – сигнал проходит со входа j-го блока на выход, его вероятность равна p_j. Элементы выходят из строя независимо друг от друга. Найти вероятность $P(A)$.



4.6. Три автомата изготавливают однотипные детали, которые поступают на общий конвейер. Производительности первого, второго и третьего автоматов соотносятся как $2:3:5$. Вероятность того, что деталь с первого автомата – высшего качества, равна 0,8, для второго – 0,6, для третьего – 0,7. Найти вероятность того, что: а) наугад взятая с конвейера деталь окажется высшего качества; б) взятая наугад деталь высшего качества изготовлена первым автоматом. (*Ответ*: а) 0,69; б) 0,2319.)

4.7. Вероятность выигрыша по одной облигации трехпроцентного займа равна 0,25. Найти вероятность того, что из восьми купленных облигаций выигрышными окажутся: а) три; б) две; в) не менее двух. (*Ответ:* а) 0,2076; б) 0,3115; в) 0,6329.)

4.8. Вероятность появления события в каждом из 2100 независимых событий равна 0,7. Найти вероятность того, что событие наступит не мене 1470 раз и не более 1500 раз. (*Ответ:* 0,4236.)

5 ВАРИАНТ

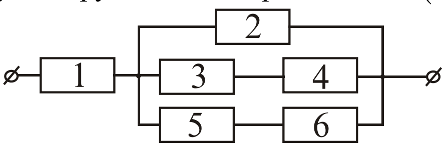
5.1. В шахматном турнире участвовало 14 шахматистов, каждый из них сыграл с каждым по одной партии. Сколько всего сыграно партий? (*Ответ:* 91.)

5.2. В группе спортсменов 7 лыжников и 3 конькобежца. Из нее случайным образом выделены три спортсмена. Найти вероятность того, что все выбранные спортсмены окажутся лыжниками. (*Ответ:* 0,29.)

5.3. В области $D = \{(x, y) \mid y \le x,\ x \le 2,\ y \ge 0\}$ случайным образом выбирается точка (x, y). Определить вероятность выполнения соотношения (события) $A: y \ge x - \frac{1}{2}$.

5.4. Вероятность поражения цели первым стрелком равна 0,9, вторым - 0,7. Оба стрелка сделали по одному выстрелу. Какова вероятность того, что цель поражена: а) хотя бы один раз; б) два раза; в) один раз? (*Ответ:* а) 0,97; б) 0,63; в) 0,34.)

5.5. Событие A – сигнал проходит со входа схемы на выход; событие A_j – сигнал проходит со входа j-го блока на выход, его вероятность равна p_j. Элементы выходят из строя независимо друг от друга. Найти вероятность $P(A)$.



5.6. Комплектовщик получает для сборки 30 % деталей с завода № 1, 20 % - с завода № 2, остальные – с завода №3. Вероятность того, что деталь с завода № 1 – высшего качества, равна 0,9, для деталей с завода № 2 – 0,8, для деталей с завода № 3 – 0,6. Найти вероятность того, что: а) случайно взятая деталь – высшего качества; б) случайно взятая деталь – высшего качества изготовлена на заводе № 2. (*Ответ*: а) 0,73; б) 0,2192.)

5.7. Вероятность успешной сдачи студентом каждого из пяти экзаменов равна 0,7. Найти вероятность успешной сдачи: а) трех экзаменов; б) двух экзаменов; в) не менее двух экзаменов. (*Ответ:* а) 0,3087; б) 0,1323; в) 0,9692.)

5.8. Вероятность производства бракованной детали равна 0,008. Найти вероятность того, что из взятых на проверку 1000 деталей 10 бракованных. (*Ответ:* 0,0993.)

6 ВАРИАНТ

6.1. На конференцию из трех групп студентов одной специальности выбирают по одному делегату. Известно, что в первой группе 25, во второй – 28 и в третьей – 20 человек. Определить число возможных делегаций, если известно, что каждый студент из любой группы с одинаковой вероятностью может войти в состав делегации. (*Ответ:* 14 000.)

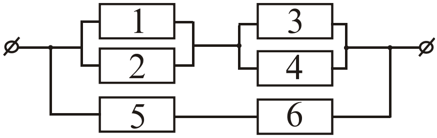
6.2. Из букв разрезной азбуки составлено слово «РЕМОНТ». Карточки с отдельными буквами тщательно перемешивают, затем наугад вытаскивают 4 карточки и раскладывают их в порядке извлечения. Какова вероятность получения при этом слова «МОРЕ»? (*Ответ:* 1/360.)

6.3. В области $D=\{(x,y)\,|\; y\le 2x,\; x\le 1,\; y\ge 0\}$ случайным образом выбирается точка (x,y). Определить вероятность выполнения соотношения (события) $A: x\ge y$.

6.4. При одном цикле обзора трех радиолокационных станций, следящих за космическим кораблем, вероятности его обнаружения соответственно равны: 0,7; 0,8; 0,9. Найти вероятность того, что при одном цикле обзора корабль: а) будет обнаружен тремя станциями; б) будет обнаружен не менее чем двумя станциями; в) не будет обнаружен. (*Ответ:* а) 0,504; б) 0,902; в) 0,006.)

6.5. Событие A – сигнал проходит со входа схемы на выход; событие A_j – сигнал проходит со входа j-го блока на выход, его вероятность равна p_j. Элементы выходят из строя

независимо друг от друга. Найти вероятность $P(A)$.



6.6. Заготовка может поступить для обработки на один из двух станков с вероятностями 0,4 и 0,6 соответственно. При обработке на первом станке вероятность брака составляет 2 %, на втором – 3 %. Найти вероятность того, что: а) наугад взятое после обработки изделие – стандартное; б) наугад взятое после обработки стандартное изделие обработано на первом станке. (*Ответ*: а) 0,974; б) 0,402.)

6.7. Вероятность работы каждого из семи моторов в данный момент равна 0,8. Найти вероятность того, что в данный момент включены: а) хотя бы один мотор; б) два мотора; в) три мотора. (*Ответ*: а) 0,99998; б) 0,0043; в) 0,1435.)

6.8. Вероятность появления события в каждом из независимых испытаний равна 0,2. Найти вероятность того, что событие наступит 20 раз в 100 испытаниях. (*Ответ:* 0,0997.)

7 ВАРИАНТ

7.1. Из девяти значащих цифр составляются трехзначные числа. Сколько различных чисел может быть составлено? (*Ответ*: 729.)

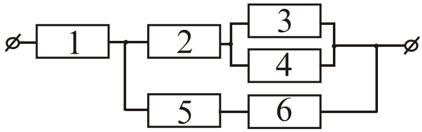
7.2. Из восьми книг две художественные. Найти вероятность того, что среди взятых наугад четырех книг хотя бы одна художественная. (*Ответ:* 0,785.)

7.3. В области $D=\{(x,y)\mid y\le 3x,\ x\le 2,\ y\ge 0\}$ случайным образом выбирается точка (x,y). Определить вероятность выполнения соотношения (события) $A: y\ge x^2$.

7.4. Вычислительная машина состоит из четырех блоков. Вероятность безотказной работы в течение времени T первого блока равна 0,4, второго – 0,5, третьего – 0,6, четвертого – 0,4. Найти вероятность того, что в течение времени T проработают: а) все четыре блока; б) три блока; в) менее трех блоков. (*Ответ:*

а) 0,048; б) 0,224; в) 0,728.)

7.5. Событие A – сигнал проходит со входа схемы на выход; событие A_j – сигнал проходит со входа j-го блока на выход, его вероятность равна p_j. Элементы выходят из строя независимо друг от друга. Найти вероятность $P(A)$.



7.6. На двух станках обрабатываются однотипные детали. Вероятность брака для станка № 1 составляет 0,03, для станка № 2 – 0,02. Обработанные детали складываются в одном месте, причем деталей, обработанных на станке № 1, вдвое больше, чем на станке № 2.Найти вероятность того, что: а) взятая, наугад деталь будет стандартной; б) наугад взятая стандартная деталь изготовлена на первом станке. (*Ответ*: а) 0,0266; б) 0,7518.)

7.7. В телеателье имеется 7 телевизоров. Для каждого телевизора вероятность того, что в данный момент он включен, равна 0,6. Найти вероятность того, что в данный момент включены: а) четыре телевизора; б) хотя бы один телевизор; в) не менее трех телевизоров. (*Ответ:* а) 0,2916; б) 0,9999; в) 0,9477.)

7.8. Вероятность «сбоя» при телефонном вызове равна 0,02. Найдите вероятность того, что при 100 вызовах будет не более одного сбоя. (*Ответ:*0,406006).

8 ВАРИАНТ

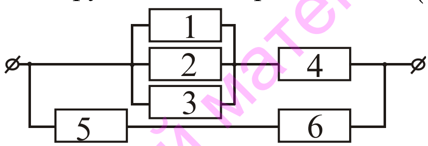
8.1. Сколько различных четырехзначных чисел можно записать с помощью девяти значащих цифр, из которых ни одна не повторяется? (*Ответ:* 3024.)

8.2. На полке 6 радиоламп, из которых две негодные. Случайным образом отбираются две радиолампы. Какова вероятность того, что они годны для использования? (*Ответ:* 0,4.)

8.3. В области $D=\{(x,y)\,|\,1\le x\le 2,\ 0\le y\le 2\}$ случайным образом выбирается точка (x, y). Определить вероятность выполнения соотношения (события) $A: y \geq \frac{x}{2}$.

8.4. Трое рабочих собирают подшипники. Вероятность того, что подшипник, собранный первым рабочим, высшего качества, равна 0,7, вторым – 0,8, третьим – 0,6. Для контроля взято по одному подшипнику из собранных каждым рабочим. Какова вероятность того, что высшего качества будут: а) все подшипники; б) два подшипника; в) хотя бы один подшипник? (*Ответ:* а) 0,336; б) 0,452; в) 0,976.)

8.5. Событие A – сигнал проходит со входа схемы на выход; событие A_j – сигнал проходит со входа j-го блока на выход, его вероятность равна p_j. Элементы выходят из строя независимо друг от друга. Найти вероятность $P(A)$.



8.6. В дисплейном классе имеются 10 персональных компьютеров первого типа и 15 второго типа. Вероятность того, что за время работы на компьютере первого типа не произойдет сбоя, равна 0,9, а на компьютере второго типа – 0,7. Найти вероятность того, что: а) на случайно выбранном компьютере за время работы не произойдет сбоя; б) компьютер, во время работы на котором не произошло сбоя, – первого типа. (*Ответ*: а) 0,78; б) 0,4615.)

8.7. При массовом производстве полупроводниковых диодов вероятность брака при формовке равна 0,1. Найти вероятность того, что из восьми диодов, проверяемых ОТК, бракованных будет: а) два; б) не менее двух; в) не более двух. (*Ответ:* а) 0,1488; б) 0,1871; в) 0,9617.)

8.8. Среднее число машин, прибывающих в автопарк за 1 мин, равно двум. Найти вероятность того, что за 1 минуту прибудет не менее одной машины. (*Ответ:*0,864665).

9 ВАРИАНТ

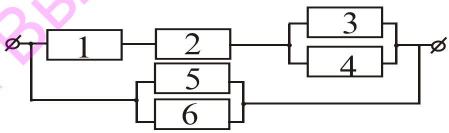
9.1. В пассажирском поезде 10 вагонов. Сколькими способами можно размещать вагоны, составляя этот поезд? (*Ответ:* 3 628 000.)

9.2. В запасе ремонтной мастерской 10 поршневых колец, три из них восстановленные. Определить вероятность того, что среди взятых наугад четырех колец два окажутся восстановленными? (*Ответ:* 0,3.)

9.3. В области $D=\{(x,y)\,|\,0\le x\le 2,\,0\le y\le 2\}$ случайным образом выбирается точка (x,y). Определить вероятность выполнения соотношения (события) $A: y\le \frac{x}{2}$.

9.4. На сборку поступают детали с трех станков с ЧПУ. Первый станок дает 20 %, второй – 30 %, третий – 50 % однотипных деталей, поступающих на сборку. Найти вероятность того, что из трех наугад взятых деталей: а) три с разных станков; б) три с третьего станка; в) две с третьего станка. (*Ответ:* а) 0,03; б) 0,125; в) 0,125.)

9.5. Событие A – сигнал проходит со входа схемы на выход; событие A_j – сигнал проходит со входа j-го блока на выход, его вероятность равна p_j. Найти вероятность $P(A)$.



9.6. В пяти ящиках с 30 шарами в каждом содержится по 5 красных шаров, в шести других ящиках с 20 шарами в каждом – по 4 красных шара. Найти вероятность того, что: а) из наугад взятого ящика наудачу взятый шар будет красным; б) наугад взятый красный шар содержится в одном из первых пяти ящиков. (*Ответ*: а) 0,1848; б) 0,4099.)

9.7. Вероятность поражения мишени для данного стрелка в среднем составляет 80 %. Стрелок произвел 6 выстрелов по мишени. Найти вероятность того, что мишень была поражена:

а) пять раз; б) не менее пяти раз; в) не более пяти раз. (*Ответ:*а) 0,3932; б) 0,6554; в) 0,7379.)

9.8. Вероятность нарушения стандарта при штамповке карболитовых колец равна 0,3. Найти вероятность того, что для 800 заготовок число бракованных колец заключено между 225 и 250. (*Ответ:* 0,6543.)

10 ВАРИАНТ

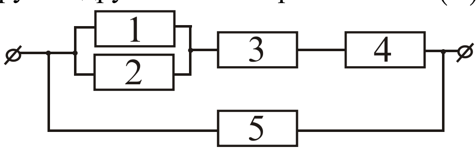
10.1. Из 10 кандидатов на одну и ту же должность должно быть выбрано 3. Определить все возможные варианты результатов выборов. (*Ответ:* 120.)

10.2. Десять студентов условились ехать определенным рейсом электропоезда с 10 вагонами, но не договорились о номере вагона. Какова вероятность того, что ни один из них не встретится с другим, если возможности в размещении студентов по вагонам равновероятны? (*Ответ:* 0,000363.)

10.3. В области $D = \{(x, y) \mid x + y \le 3, x \ge 0, y \ge 0\}$ случайным образом выбирается точка (x, y). Определить вероятность выполнения соотношения (события) $A: yx \le 2$.

10.4. Первый станок-автомат дает 1 % брака, второй – 1,5 %, а третий – 2 %. Случайным образом отобрали по одной детали с каждого станка. Какова вероятность того, что стандартными окажутся: а) три детали; б) две детали; в) хотя бы одна деталь? (*Ответ*: а) 0,9556; б) 0,0437; в) 0,999997.)

10.5. Событие A – сигнал проходит со входа схемы на выход; событие A_j – сигнал проходит со входа j-го блока на выход, его вероятность равна p_j. Элементы выходят из строя независимо друг от друга. Найти вероятность $P(A)$.



10.6. По линии связи передано два сигнала типов A и B с вероятностями соответственно 0,8 и 0,2. В среднем принимается 60 % сигналов типа A и 70 % типа B. Найти вероятность того, что: а) посланный сигнал будет принят; б) принятый сигнал – типа A. (*Ответ*: а) 0,62; б) 0,7742.)

10.7. Вероятность сдачи экзамена для каждого из шести студентов равна 0,8. Найти вероятность того, что экзамен сдадут: а) пять студентов; б) не менее пяти студентов; в) не более пяти студентов. (*Ответ:* а) 0,3932; б) 0,6553; в) 0,7379.)

10.8. Вероятность поражения мишени при одном выстреле равна 0,8. Найти вероятность того, что при 100 выстрелах мишень будет поражена не менее 75 раз. (*Ответ:* 0,8944.)

11 ВАРИАНТ

11.1. Бригадир должен отправить на работу звено из 5 человек. Сколько таких звеньев можно составить из 12 человек бригады? (*Ответ:* 792.)

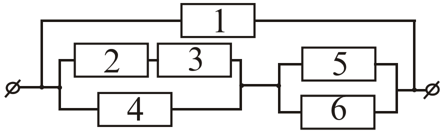
11.2. Билеты лотереи выпущены на общую сумму 10 000 у.е. Цена билета 0,5 у.е. Ценные выигрыши падают на 50 билетов. Определить вероятность ценного выигрыша на один билет. (*Ответ:* 0,0025.)

11.3. В области $D=\{(x,\,y)\,|\;x+y\le 1,\,x\ge 0,\,y\ge 0\}$ случайным образом выбирается точка (x,y). Определить вероятность выполнения соотношения (события) $A:\,y\ge x+\frac{1}{2}$.

11.4. В цехе имеется три резервных электродвигателя. Для каждого из них вероятность того, что в данный момент он включен, соответственно равна: 0,2; 0,3; 0,1. Найти вероятность того, что включены: а) два электродвигателя; б) хотя бы один электродвигатель; в) три электродвигателя. (*Ответ:* а) 0,092; б) 0,496; в) 0,006.)

11.5. Событие A – сигнал проходит со входа схемы на выход; событие A_j – сигнал проходит со входа j-го блока на выход, его вероятность равна p_j. Элементы выходят из строя

независимо друг от друга. Найти вероятность $P(A)$.



11.6. Для сигнализации о том, что режим работы автоматической линии отклоняется от нормального, используются индикаторы двух типов. Вероятности того, что индикатор принадлежит к одному из двух типов, равны соответственно 0,4 и 0,6. При нарушении работы линии вероятность срабатывания индикатора первого типа равна 0,9, второго – 0,7. а) Найти вероятность того, что наугад выбранный индикатор сработает при нарушении нормальной работы линии. б) Индикатор сработал. К какому типу он вероятнее всего принадлежит? (*Ответ*: а) 0,78; б) ко второму.)

11.7. Вероятность поражения в каждой шахматной партии игрока равна 0,5. Найти вероятность того, что он выиграл в шести партиях: а) хотя бы один раз; б) два раза; в) не менее двух раз. (*Ответ:* а) 0,9844; б) 0,2344; в) 0,8906.)

11.8. Вероятность появления события в каждом независимом испытании равна 0,7. Найти вероятность того, что в 100 испытаниях событие наступит не более 70 раз. (*Ответ:* 0,5.)

12 ВАРИАНТ

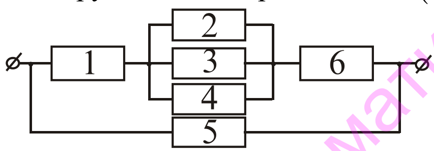
12.1. Сколько прямых линий можно провести через 8 точек, если известно, что любые три из них не лежат на одной прямой? (*Ответ:* 28.)

12.2. В группе из 8 спортсменов шесть мастеров спорта. Найти вероятность того, что из двух случайным образом отобранных спортсменов хотя бы один – мастер спорта. (*Ответ:* 0,9643.)

12.3. В области $D=\{(x,y)\,|\,0\le x\le 2,\ 0\le y\le 1\}$ случайным образом выбирается точка (x,y). Определить вероятность выполнения соотношения (события) $A: y\ge \dfrac{x}{2}$.

12.4. На участке кросса для мотоциклиста-гонщика имеется три зачетных участка. Вероятность успешного прохождения первого участка равна 0,4, второго – 0,5, третьего — 0,6. Найти вероятность успешного преодоления: а) трех участков; б) не менее двух участков; в) двух участков. (*Ответ:* а) 0,12; б) 0,5; в) 0,38.)

12.5. Событие A – сигнал проходит со входа схемы на выход; событие A_j – сигнал проходит со входа j-го блока на выход, его вероятность равна p_j. Элементы выходят из строя независимо друг от друга. Найти вероятность $P(A)$.



12.6. Резистор, поставленный в телевизор, может принадлежать к одной из двух партий с вероятностями 0,6 и 0,4. Вероятности того, что резистор проработает гарантийное число часов, для этих партий равны соответственно 0,8 и 0,7. а) Найти вероятность того, что взятый наугад резистор проработает гарантийное число часов. б) Резистор проработал гарантийное число часов. К какой партии он вероятнее всего принадлежит? (*Ответ:* а) 0,76; б) к первой.)

12.7. Всхожесть семян лимона составляет 80 %. Найти вероятность того, что из 9 посеянных семян взойдут: а) семь; б) не более семи; в) более семи. (*Ответ:* а) 0,302; б) 0,5638; в) 0,4362.)

12.8. Найти вероятность одновременного останова 30 машин из 100 работающих, если вероятность останова для каждой машины равна 0,2. (*Ответ:* 0,0044.)

13 ВАРИАНТ

13.1. Сколькими способами можно составить патруль из трех солдат и одного офицера, если имеется 80 солдат и 3 офицера? (*Ответ:* 246 480.)

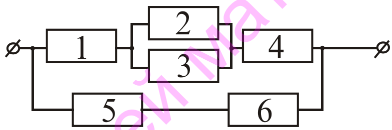
13.2. Из партии деталей, среди которых 100 стандартных и 5 бракованных, для контроля наугад взято 10 шт.

При контроле выяснилось, что все они стандартные. Определить вероятность того, что следующая деталь будет стандартной. (*Ответ:* 0,944.)

13.3. В области $D=\{(x,y)|\,0\le x\le 1,\, 0\le y\le 2\}$ случайным образом выбирается точка (x,y). Определить вероятность выполнения соотношения (события) $A: yx\le 1$.

13.4. Вероятность того, что студент сдаст первый экзамен, равна 0,9, второй – 0,7, третий – 0,6. Вычислить вероятность того, что студент сдаст: а) два экзамена; б) не менее двух экзаменов; в) не более двух экзаменов. (*Ответ:* а) 0,456; б) 0,834; в) 0,622.)

13.5. Событие A – сигнал проходит со входа схемы на выход; событие A_j – сигнал проходит со входа j-го блока на выход, его вероятность равна p_j. Элементы выходят из строя независимо друг от друга. Найти вероятность $P(A)$.



13.6. При отклонении от штатного режима работы поточной линии срабатывают сигнализатор типа $T-1$ с вероятностью 0,9 и сигнализатор типа $T-2$ с вероятностью 0,8. Вероятности того, что линия снабжена сигнализаторами типов $T-1$ и $T-2$, равны соответственно 0,7 и 0,3. а) Найти вероятность того, что при отклонении от штатного режима работы сигнализатор сработает. б) Сигнализатор сработал. К какому типу он вероятнее всего принадлежит? (*Ответ:* а) 0,87; б) $T-1$.)

13.7. При штамповке изделий бывает в среднем 20 % брака. Для контроля отобрано 8 изделий. Найти: а) вероятность того, что два изделия окажутся бракованными; б) наивероятнейшее число бракованных изделий; в) вероятность наивероятнейшего числа бракованных изделий. (*Ответ:* а) 0,2936; б) 1; в) 0,3355.)

13.8. Аппаратура состоит из 1000 элементов. Вероятность отказа одного элемента за время T равна 0,001 и не зависит от работы других элементов. Найти вероятность отказа не менее двух элементов. (*Ответ:* 0,264.)

14 ВАРИАНТ

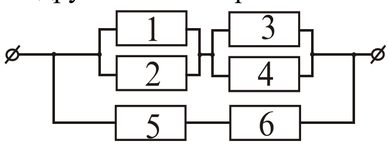
14.1. Сколькими способами можно распределить 6 различных книг между тремя учениками так, чтобы каждый получил 2 книги? (*Ответ:*90.)

14.2. Определить вероятность того, что серия наудачу выбранной облигации не содержит одинаковых цифр, если номер серии может быть любым пятизначным числом, начиная с 0,0001. (*Ответ:* 0,302.)

14.3. В области $D=\{(x,y)|\,0\le x\le 1,\,0\le y\le 1\}$ случайным образом выбирается точка (x,y). Определить вероятность выполнения соотношения (события) $A: yx\le 1/2$.

14.4. Самолет противника обнаруживается тремя радиолокаторами с вероятностями 0,8; 0,7; 0,5. Какова вероятность обнаружения самолета: а) одним радиолокатором; б) двумя радиолокаторами; в) хотя бы одним радиолокатором? (*Ответ:* а) 0,22; б) 0,47; в) 0,75.)

14.5. Событие A – сигнал проходит со входа схемы на выход; событие A_j – сигнал проходит со входа j-го блока на выход, его вероятность равна p_j. Элементы выходят из строя независимо друг от друга. Найти вероятность $P(A)$.



14.6. Для участия в студенческих спортивных соревнованиях выделено 10 человек из первой группы и 8 из второй. Вероятность того, что студент первой группы попадет в сборную института, равна 0,8, а для студента второй группы – 0,7. а) Найти вероятность того, что случайно выбранный студент попал в сборную института. б) Студент попал в сборную института. В какой группе он вероятнее всего учится? (*Ответ*:

а) 0,7555; б) в первой.)

14.7. Среди изделий, подвергавшихся термической обработке, в среднем 80 % высшего сорта. Найти вероятность того, что среди пяти изделий: а) хотя бы четыре высшего сорта; б) четыре высшего сорта; в) не более четырех высшего сорта. (*Ответ:* а) 0,7373; б) 0,4096; в) 0,6723.)

14.8. Найти вероятность поражения мишени 75 раз при 100 выстрелах, если вероятность поражения при одном выстреле равна 0,8. (*Ответ:* 0,0456.)

15 ВАРИАНТ

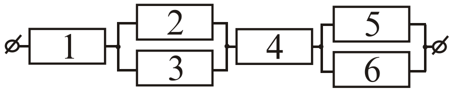
15.1. Сколькими различными способами можно избрать из 15 человек делегацию в составе трех человек? (*Ответ:* 455.)

15.2. Буквенный замок содержит на общей оси 5 дисков, каждый из которых разделен на 6 секторов с различными нанесенными на них буквами. Замок открывается только в том случае, если каждый диск занимает одно определенное положение относительно корпуса замка. Определить вероятность открытия замка, если установлена произвольная комбинация букв. (*Ответ:* 0,00013.)

15.3. В области $D=\{(x,y)\mid y\le 2x,\ x\le 1,\ y\ge 0\}$ случайным образом выбирается точка (x,y). Определить вероятность выполнения соотношения (события) $A: y\le \frac{x}{2}$.

15.4. Два бомбардировщика преодолевают зону ПВО. Вероятность того, что будет сбит первый бомбардировщик, равна 0,7, второй – 0,8. Найти вероятность: а) уничтожения одного бомбардировщика; б) поражения двух бомбардировщиков; в) промахов. (*Ответ:* а) 0,38; б) 0,56; в) 0,06.)

15.5. Событие A – сигнал проходит со входа схемы на выход; событие A_j – сигнал проходит со входа j-го блока на выход, его вероятность равна p_j. Элементы выходят из строя независимо друг от друга. Найти вероятность $P(A)$.



15.6. На сборку поступают детали с трех конвейеров. Первый дает 25 %, второй – 30 % и третий – 45 % деталей, поступающих на сборку. С первого конвейера в среднем поступает 2 % брака, со второго – 3 %, с третьего – 1 %. Найти вероятность того, что: а) на сборку поступила бракованная деталь; б) поступившая на сборку бракованная деталь – со второго конвейера. (*Ответ:* а) 0,0185; б) 0,4865.)

15.7. Оптовая база обслуживает 6 магазинов. Вероятность получения заявки базой на данный день для каждого из магазинов равна 0,6. Найти вероятность того, что в это день будет: а) пять заявок; б) не менее пяти заявок; в) не более пяти заявок. (*Ответ:* а) 0,1866; б) 0,2333; в) 0,9534.)

15.8. Станок состоит из 2000 независимо работающих узлов. Вероятность отказа одного узла в течение года равна 0,0005. Найти вероятность отказа в течение года двух узлов. (*Ответ:* 0,1838.)

16 ВАРИАНТ

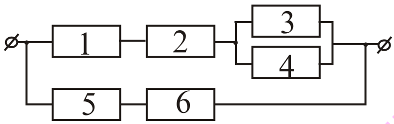
16.1. Сколькими различными способами собрание, состоящее из 40 человек, может выбрать председателя собрания, его заместителя и секретаря? (*Ответ:* 59 280.)

16.2. Партия из 100 деталей проверяется контролером, который наугад отбирает 10 деталей и определяет их качество. Если среди выбранных контролером деталей нет ни одной бракованной, то вся партия принимается. В противном случае ее посылают на дополнительную проверку. Какова вероятность того, что партия деталей, содержащая 5 бракованных, будет принята контролером? (*Ответ:* 0,5838.)

16.3. В области $D = \{(x, y) \mid y \le 3x,\ x \le 2,\ y \ge 0\}$ случайным образом выбирается точка (x, y). Определить вероятность выполнения соотношения (события) $A: yx \le 1$.

16.4. Стрелок произвел четыре выстрела по удаляющейся от него цели, причем вероятность попадания в цель в начале стрельбы равна 0,7, а после каждого выстрела уменьшается на 0,1. Вычислить вероятность того, что цель будет поражена: а) четыре раза; б) три раза; в) не менее трех раз. (*Ответ:* а) 0,084; б) 0,302; в) 0,386.)

16.5. Событие A – сигнал проходит со входа схемы на выход; событие A_j – сигнал проходит со входа j-го блока на выход, его вероятность равна p_j. Элементы выходят из строя независимо друг от друга. Найти вероятность $P(A)$.



16.6. В двух коробках имеются однотипные конденсаторы. В первой 20 конденсаторов, из них 2 неисправных, во второй – 10, из них 3 неисправных. а) Найти вероятность того, что наугад взятый конденсатор из случайно выбранной коробки годен к использованию. б) Наугад взятый конденсатор оказался годным. Из какой коробки он вероятнее всего взят? *(Ответ:* а) 0,8333; б) из первой.)

16.7. После зубофрезеровки шестерен у рабочего в среднем получается 20 % нестандартных шестерен. Найти вероятность того, что среди взятых шести шестерен нестандартных будет: а) три; б) не более трех; в) хотя бы одна. (*Ответ:* а) 0,0819; б) 0,7209; в) 0,7379.)

16.8. Промышленная телевизионная установка содержит 2000 транзисторов. Вероятность выхода из строя каждого из транзисторов равна 0,0005. Найти вероятность выхода из строя хотя бы одного транзистора. (*Ответ*: 0,632.)

17 ВАРИАНТ

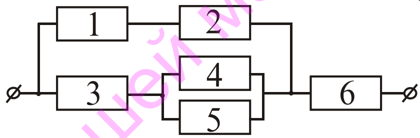
17.1. Сколькими способами можно выбрать два карандаша и три ручки из пяти различных карандашей и пяти различных ручек? (*Ответ:* 100.)

17.2. На десяти одинаковых карточках написаны различные числа от 0 до 9. Определить вероятность того, что случайно составленное с помощью данных карточек двузначное число делится на 18. (*Ответ:* 0,056.)

17.3. В области $D = \left\{ (x, y) \middle| 1 \le x \le 2, 0 \le y \le 2 \right\}$ случайным образом выбирается точка (x, y). Определить вероятность выполнения заданного соотношения (события) $A: x \le y \le x + \frac{1}{2}$.

17.4. Первый рабочий изготавливает 40 % изделий второго сорта, а второй – 30 %. У каждого рабочего взято наугад по два изделия. Какова вероятность того, что: а) все четыре изделия – второго сорта; б) хотя бы три изделия второго сорта; в) менее трех изделий второго сорта. (*Ответ*: а) 0,0144; б) 0,1248; в) 0,8752).

17.5. Событие A – сигнал проходит со входа схемы на выход; событие A_j – сигнал проходит со входа j-го блока на выход, его вероятность равна p_j. Элементы выходят из строя независимо друг от друга. Найти вероятность $P(A)$.



17.6. В телевизионном ателье имеются 2 кинескопа первого типа и 8 второго типа. Вероятность выдержать гарантийный срок для кинескопов первого типа равна 0,9, а для второго типа – 0,6. Найти вероятность того, что: а) взятый наугад кинескоп выдержит гарантийный срок; б) взятый наугад кинескоп, выдержавший гарантийный срок, первого типа. (*Ответ*: а) 0,66; б) 0,2727.)

17.7. При передаче сообщения вероятность искажения одного знака равна 0,1. Найти вероятность того, что сообщение из 10 знаков: а) не будет искажено; б) содержит три искажения; в) содержит не более трех искажений. (*Ответ:* а) 0,3487; б) 0,0574; в) 0,9872.)

17.8. Вероятность отклонений от принятого стандарта при штамповке клемм равна 0,02. Найти вероятность наличия в партии из 200 клемм от 70 до 80 клемм, не соответствующих стандарту. (*Ответ:* 0.)

18 ВАРИАНТ

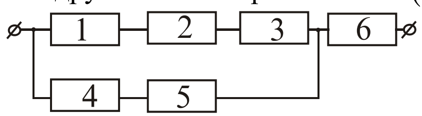
18.1. Сколько различных пятизначных чисел можно записать с помощью цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 (без повторений)? (*Ответ:* 15 120.)

18.2. На полке случайным образом расставляются 10 книг. Определить вероятность того, что при этом три определенные книги окажутся стоящими рядом. (*Ответ:*0,067.)

18.3. В области $D=\{(x,y)\,|\,0\le x\le 2,\,0\le y\le 2\}$ случайным образом выбирается точка (x,y). Определить вероятность выполнения соотношения (события) $A: x\ge y$.

18.4. При некоторых определенных условиях вероятность сбить самолет противника из первого зенитного орудия равна 0,4, из второго – 0,5. Сделано по одному выстрелу. Найти вероятность того, что: а) самолет уничтожен двумя снарядами; б) самолет поражен хотя бы одним снарядом; в) ни один снаряд не попал в цель. (*Ответ*: а)0,2; б) 0,7; в) 0,3.)

18.5. Событие A – сигнал проходит со входа схемы на выход; событие A_j – сигнал проходит со входа j-го блока на выход, его вероятность равна p_j. Элементы выходят из строя независимо друг от друга. Найти вероятность $P(A)$.



18.6. У сборщика 16 деталей, изготовленных на заводе № 1, и 10 деталей, изготовленных на заводе № 2. Вероятности того, что детали выдержат гарантийный срок, равны соответственно для деталей с завода № 1 – 0,8; с завода № 2 – 0,9. а) Найти вероятность того, что взятая наугад деталь проработает гарантийный срок. б) Взятая наугад деталь проработала гарантийный срок. На каком из заводов она вероятнее всего изготовлена? (*Ответ:* а) 0,8384; б) на первом.)

18.7. Продукция, поступающая из цеха в ОТК, не удовлетворяет условиям стандарта в среднем в 8 % случаев. Найти вероятность того, что из наугад взятых семи изделий не удовлетворяют условиям стандарта: а) шесть изделий; б) не менее шести изделий; в) менее шести изделий. (*Ответ:* а) 0,000002; б) 0,000002; в) 0,999998.)

18.8. Вероятность появления в каждом из 2000 независимых испытаний равна 0,7. Найти вероятность того, что событие наступит не менее 1500 раз. (*Ответ*: 0,00003.)

19 ВАРИАНТ

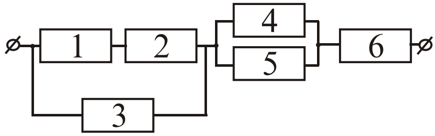
19.1. Сколькими способами можно смоделировать флаг, состоящий из трех горизонтальных полос различных цветов, если имеется материал пяти различных цветов? (*Ответ:* 60.)

19.2. Из коробки, содержащей карточки с буквами «О», «Н», «К», «Ь», наугад вынимают одну карточку за другой и располагают в порядке извлечения. Какова вероятность того, что в результате получится слово «КОНЬ»? (*Ответ:* 0,0417.)

19.3. В области $D=\{(x,y)\,|\,x+y\le 2,\ x\ge 0,\ y\ge 0\}$ случайным образом выбирается точка (x,y). Определить вероятность выполнения соотношения (события) $A: y\ge x$.

19.4. Вероятность выигрыша по лотерейному билету первого выпускника равна 0,2, второго – 0,3. Имеется по два билета каждого выпуска. Найти вероятность того, что выиграют: а) три билета; б) не менее трех билетов; в) менее трех билетов.(*Ответ*: а) 0,0456; б) 0,0492; в) 0,9508.)

19.5. Событие A – сигнал проходит со входа схемы на выход; событие A_j – сигнал проходит со входа j-го блока на выход, его вероятность равна p_j. Элементы выходят из строя независимо друг от друга. Найти вероятность $P(A)$.



19.6. Телеграфное сообщение состоит из сигналов «точка» и «тире», они встречаются в передаваемых сообщениях в отношении $5:3$. Статические свойства помех таковы, что искажаются в среднем 2/5 сообщений «точка» и 1/3 сообщений «тире». Найти вероятность того, что: а) передаваемый сигнал принят; б) принятый сигнал – «тире». (*Ответ:* а) 0,5; б) 0,5.)

19.7. Вероятность поражения цели при одном выстреле равна 0,4. Произведено 8 выстрелов. Найти вероятность поражения цели: а) три раза; б) наивероятнейшее число раз; в) хотя бы один раз. (*Ответ:* а) 0,2787; б) 0,2787; в) 0,9832.)

19.8. Вероятность появления события в каждом из 21 независимого испытания равна 0,7. Найти вероятность того, что событие наступит не менее 11 раз. (*Ответ*: 0,93435.)

20 ВАРИАНТ

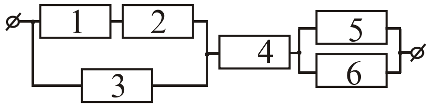
20.1. Сколькими способами можно расставить белые фигуры (2 коня, 2 слона, 2 ладьи, 1 ферзь, 1 король) на первой линии шахматной доски? (*Ответ*: 5040.)

20.2. Из пруда, в котором плавают 40 щук, выловили 5 щук, пометили их и пустили обратно в пруд. Во второй раз выловили 9 щук. Какова вероятность, что среди них окажутся только две помеченные щуки? (*Ответ:* 0,246.)

20.3. В области $D=\{(x,y)\,|\; x+y\le 1,\, x\ge 0,\, y\ge 0\}$ случайным образом выбирается точка (x,y). Определить вероятность выполнения соотношения (события) $A: x\ge y$.

20.4. Три команды спортивного общества A состязаются соответственно с тремя командами общества B. Вероятности выигрышей первой, второй и третьей команд из сообщества A у соответствующих команд из общества B равны 0,7; 0,6; 0,4. Команды провели по одной встрече. Какова вероятность того, что команды общества A выиграют: а) две встречи; б) хотя бы две встречи; б) три встречи; (*Ответ*: а) 0,436; б) 0,604; в) 0,168.)

20.5. Событие A – сигнал проходит со входа схемы на выход; событие A_j – сигнал проходит со входа j-го блока на выход, его вероятность равна p_j. Элементы выходят из строя независимо друг от друга. Найти вероятность $P(A)$.



20.6. Для поисков спускаемого аппарата космического корабля выделено 4 вертолета первого типа и 6 вертолетов второго типа. Каждый вертолет первого типа обнаруживает находящийся в районе поиска аппарат с вероятностью 0,6, второго типа – с вероятностью 0,7. а) Найти вероятность того, что наугад выбранный вертолет обнаружит аппарат. б) К какому типу вероятнее всего принадлежит вертолет, обнаруживший спускаемый аппарат? (*Ответ:* а) 0,66; б) ко второму.)

20.7. Вероятность того, что изделие пройдет контроль, равна 0,8. Найти вероятность того, что из шести изделий контроль пройдут: а) пять изделий; б) не менее пяти изделий; в) не более пяти изделий. (*Ответ:* а) 0,3932; б) 0,6553; в) 0,7379.)

20.8. Прядильщица обслуживает 1000 веретен. Вероятность обрыва нити на одном веретене в течение 1 мин равна 0,004. Найти вероятность того, что в течение 1 мин обрыв произойдёт на шести веретенах. (*Ответ*: 0,1041.)

21 ВАРИАНТ

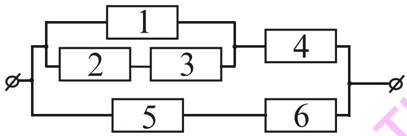
21.1. При встрече 12 человек обменялись рукопожатиями. Сколько рукопожатий было сделано при этом? (*Ответ:* 66.)

21.2. На шахматную доску из 64 клеток ставят наудачу две ладьи белого и черного цвета. С какой вероятностью они не будут «бить» друг друга? (*Ответ:* 0,78.)

21.3. В области $D=\{(x,y)\,|\,0\le x\le 2,\, 0\le y\le 1\}$ случайным образом выбирается точка (x,y). Определить вероятность выполнения соотношения (события) $A: y\ge x^2$.

21.4. Вероятность поражения цели первым стрелком при одном выстреле равна 0,7, вторым – 0,5. Найти вероятность того, что цель будет поражена: а) двумя стрелками; б) хотя бы одним стрелком; в) только одним стрелком. (*Ответ*: а) 0,35; б) 0,85; в) 0,5.)

21.5. Событие A – сигнал проходит со входа схемы на выход; событие A_j – сигнал проходит со входа j-го блока на выход, его вероятность равна p_j. Элементы выходят из строя независимо друг от друга. Найти вероятность $P(A)$.



21.6. Прибор состоит из двух узлов одного типа и трех узлов второго типа. Надежность работы в течение времени T для узла первого типа равна 0,8, а для узла второго типа – 0,7. а) Найти вероятность того, что наугад выбранный узел проработает в течение времени T. б) Узел проработал гарантийное время T. К какому типу он вероятнее всего относится? (*Ответ:* а) 0,74; б) ко второму.)

21.7. Среди деталей, изготавливаемых рабочими, в среднем 2 % нестандартных. Найти вероятность того, что среди взятых на испытание пяти деталей: а) три нестандартных; б) будет наивероятнейшее число нестандартных деталей (из пяти); в) ни одной нестандартной детали. (*Ответ:* а) 0,00008; б) 0,9039; в) 0,9039.)

21.8. Вероятность «сбоя» при телефонном вызове равна 0,002. Найдите вероятность того, что при 1000 вызовах будет не более одного сбоя. (*Ответ:*0,406006).

22 ВАРИАНТ

22.1. Сколькими способами можно выставить на игру футбольную команду, состоящую из трех нападающих, трех полузащитников, четырех защитников и вратаря, если всего в команде 6 нападающих, 3 полузащитника, 6 защитников и

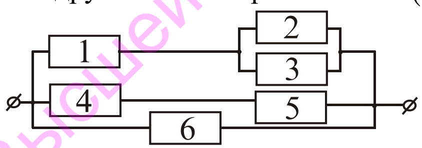
1 вратарь? (*Ответ:* 300.)

22.2. Из пяти карточек с буквами «А», «Б», «В», «Г», «Д» наугад одну за другой выбирают две и располагают их в порядке извлечения. Какова вероятность того, что получится слово «ДА»? (*Ответ:* 0,0167.)

22.3. В области $D=\{(x,y)\,|\,0\le x\le 1,\, 0\le y\le 1\}$ случайным образом выбирается точка (x,y). Определить вероятность выполнения соотношения (события) $A: y\ge x$.

22.4. В коробках находятся детали: в первой – 20, из них 13 стандартных; во второй – 30, из них 26 стандартных. Из каждой коробки берут наугад по одной детали. Найти вероятность того, что: а) обе детали окажутся нестандартными; б) одна деталь нестандартная; в) обе детали стандартные. (*Ответ*: а) 0,4667; б) 0,39; в) 0,5633.)

22.5. Событие A – сигнал проходит со входа схемы на выход; событие A_j – сигнал проходит со входа j-го блока на выход, его вероятность равна p_j. Элементы выходят из строя независимо друг от друга. Найти вероятность $P(A)$.



22.6. Пассажир может обратиться за получением билета в одну из трех касс вокзала A или в одну из пяти касс вокзала B. Вероятность того, что к моменту прихода пассажира в кассах вокзала A имеются в продаже билеты, равна 0,6, в кассах вокзала B – 0,5. а) Найти вероятность того, что в наугад выбранной кассе имеется в продаже билет. б) Пассажир купил билет. В кассе какого вокзала он вероятнее всего куплен? (*Ответ:* а) 0,5375; б) в кассе вокзала B.)

22.7. Вероятность перевыполнения годового плана для каждого из восьми рабочих равна 0,8. Найти вероятность того, что перевыполнят годовой план: а) хотя бы один рабочий; б) двое рабочих; в) трое рабочих. (*Ответ:* а) 0,999997; б) 0,001146; в) 0,00917.)

22.8. Вероятность того, что изделие – высшего сорта, равна 0,5. Найти вероятность того, что из 1000 изделий 500 – высшего сорта. (*Ответ:* 0,0252.)

23 ВАРИАНТ

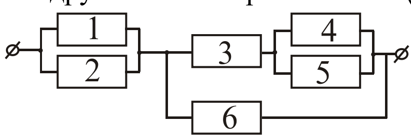
23.1. Профсоюзное бюро факультета, состоящее из 9 человек, на своем заседании должно избрать председателя, его заместителя и казначея. Сколько различных случаев при этом может быть? (*Ответ:* 504.)

23.2. В урне 3 белых и 7 черных шаров. Какова вероятность того, что извлеченные наугад два шара окажутся черными? (*Ответ:* 0,467.)

23.3. В области $D=\{(x,y)|\,0\le y\le x,\ x\le 2\}$ случайным образом выбирается точка (x,y). Определить вероятность выполнения соотношения (события) $A: y\ge x^2$.

23.4. Три станка работают независимо друг от друга. Вероятность того, что первый станок в течение смены выйдет из строя, равна 0,1, второй – 0,2, третий – 0,3. Найти вероятность того, что в течение смены выйдут из строя: а) не менее двух станков; б) два станка; в) три станка. (*Ответ*: а) 0,098; б) 0,092; в) 0,006.)

23.5. Событие A – сигнал проходит со входа схемы на выход; событие A_j – сигнал проходит со входа j-го блока на выход, его вероятность равна p_j. Элементы выходят из строя независимо друг от друга. Найти вероятность $P(A)$.



23.6. В вычислительной лаборатории 40 % микрокалькуляторов и 60 % дисплеев. Во время расчета 90 % микрокалькуляторов и 80 % дисплеев работают безотказно. а) Найти вероятность того, что наугад взятая вычислительная машина проработает безотказно во время расчета. б) Выбранная машина проработала безотказно во время расчета. К какому типу вероятнее всего она принадлежит? (*Ответ:* а) 0,84; б) к дисплеям.)

23.7. Вероятность поражения цели при одном выстреле равна 0,8. Произведено 7 выстрелов. Найти вероятность того, что имело место: а) четыре поражения цели; б) шесть поражений; в) не более шести поражений. (*Ответ:* а) 0,1147; б) 0,367; в) 0,7903.)

23.8. Вероятность появления события в каждом из независимых испытаний равна 0,8. Найти вероятность того, что в 100 испытаниях событие наступит не менее 70 и не более 80 раз. (*Ответ*: 0,4938.)

24 ВАРИАНТ

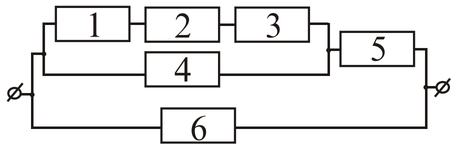
24.1. Сколько перестановок можно сделать из букв слова «ракета», чтобы все они начинались с буквы «Р»? (*Ответ:* 60.)

24.2. Мальчик забыл две последние цифры номера телефона одноклассника и набрал их наугад, помня только, что эти цифры нечетны и различны. Найти вероятность того, что номер набран правильно. (*Ответ:* 0,05.)

24.3. В области $D=\left\{(x,y)\,\middle|\,0\le y\le 2x,\ x\le 1\right\}$ случайным образом выбирается точка (x,y). Определить вероятность выполнения соотношения (события) $A: y\ge x^2$.

24.4. В ящике 50 % деталей, изготовленных на заводе № 1, 20 % – на заводе № 2 и 30 % – на заводе № 3. Наугад взято три детали. Найти вероятность того, что: а) все три детали – с завода № 1; б) две детали – с завода № 1; в) все три детали – с разных заводов. (*Ответ*: а) 0,125; б) 0,125; в) 0,03.)

24.5. Событие A – сигнал проходит со входа схемы на выход; событие A_j – сигнал проходит со входа j-го блока на выход, его вероятность равна p_j. Элементы выходят из строя независимо друг от друга. Найти вероятность $P(A)$.



24.6. В состав блока входят 6 радиоламп первого типа и 10 второго. Гарантийный срок обычно выдерживают 80 % радиоламп первого типа и 90 % второго типа. Найти вероятность того, что: а) наугад взятая радиолампа выдержит гарантийный срок; б) радиолампа, выдержавшая гарантийный срок, первого типа. (*Ответ:* а) 0,8625; б) 0,3478.)

24.7. Вероятность поражения цели каждым из семи выстрелов равна 0,8. Найти вероятность поражения цели: а) двумя выстрелами; б) хотя бы одним выстрелом; в) не менее чем тремя выстрелами. (*Ответ:* а) 0,0043; б) 0,99998; в) 0,9953.)

24.8. Вероятность того, что изделие – высшего качества, равна 0,5. Найти вероятность того, что из 400 изделий число изделий высшего качества составит от 194 до 208. (*Ответ*: 0,5138.)

25 ВАРИАНТ

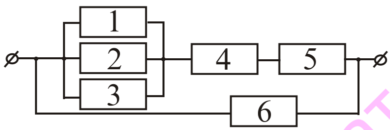
25.1. Автоколонна, состоящая из 30 автомобилей, должна выделить на уборочные работы в колхозы 12 грузовиков. Сколькими способами можно это сделать? (*Ответ:* 86 493 225.)

25.2. Два человека условились встретиться в определенном месте между двумя и тремя часами дня. Пришедший первым ждет другого в течение 10 мин, после чего уходит. Чему равна вероятность встречи этих людей, если приход каждого из них в течение указанного часа может произойти в любое время? (*Ответ:* 0,3056.)

25.3. В области $D=\left\{(x,y)\,\middle|\,0\le y\le 3x,\ x\le 2\right\}$ случайным образом выбирается точка (x,y). Определить вероятность выполнения соотношения (события) $A: y\ge x$.

25.4. Для аварийной сигнализации установлены два независимо работающих сигнализатора. Вероятность того, что при аварии сработает первый сигнализатор, равна 0,9, второй – 0,7. Найти вероятность того, что при аварии: а) сработают оба сигнализатора; б) не сработает ни один сигнализатор; в) сработает хотя бы один сигнализатор. (*Ответ*: а) 0,63; б) 0,03; в) 0,97.)

25.5. Событие A – сигнал проходит со входа схемы на выход; событие A_j – сигнал проходит со входа j-го блока на выход, его вероятность равна p_j. Элементы выходят из строя независимо друг от друга. Найти вероятность $P(A)$.



25.6. На сборку поступают детали с трех автоматов, причем с первого 30 %, со второго 40 % и с третьего 30 % всех деталей. Вероятность брака для первого автомата равна 0,02, для второго – 0,03, для третьего – 0,04. а) Найти вероятность того, что взятая наугад деталь – бракованная. б) Взятая наугад деталь оказалась бракованной. С какого автомата она вероятнее всего поступила? (*Ответ:* а) 0,03; б) со второго или третьего.)

25.7. Вероятность потопить судно одной торпедой равна 0,2. Выпущено 5 торпед. Найти вероятность того, что имеет место: а) три попадания в судно; б) не менее трех попаданий; в) четыре попадания. (*Ответ:* а) 0,0512; б) 0,05792; в) 0,0064.)

25.8. Среднее число вызовов, поступающих на коммутатор за 1 мин, равно 3. Найти вероятность того, что за 1 мин поступит не менее трёх вызовов. (*Ответ:*0.57681).

26 В А Р И А Н Т

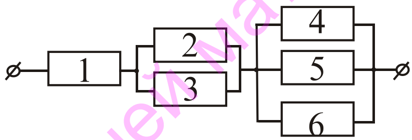
26.1.На шахматном турнире было сыграно 45 партий, причем каждый из шахматистов сыграл с остальными по одной партии. Сколько шахматистов участвовало в турнире? (*Ответ:* 10.)

26.2. После бури на участке между 40-м и 70-м километрами телефонной линии произошел обрыв провода. Какова вероятность того, что он произошел между 50-м и 55-м километрами линии? (*Ответ:* 0,167.)

26.3. В области $D=\{(x,y)\,|\,0\le y\le 2, 1\le x\le 2\}$ случайным образом выбирается точка (x,y). Определить вероятность выполнения соотношения (события) $A: y\ge x+\frac{1}{2}$.

26.4. На двух станках обрабатываются однотипные детали. Появление бракованной детали для станка №1 составляет 3 %, для станка №2 – 4 %. С каждого станка взяли по одной детали. Найти вероятность того, что: а) обе детали стандартные; б) одна деталь стандартная; в) обе детали нестандартные. (*Ответ*: а) 0,9312; б) 0,0676; в) 0,0012.)

26.5. Событие A – сигнал проходит со входа схемы на выход; событие A_j – сигнал проходит со входа j-го блока на выход, его вероятность равна p_j. Элементы выходят из строя независимо друг от друга. Найти вероятность $P(A)$.



26.6. Имеется 6 коробок диодов типа A и 8 коробок диодов типа B. Вероятность безотказной работы диода типа A равна 0,8, типа B – 0,7. а) Найти вероятность того, что взятый наугад диод проработает гарантийное число часов. б) Взятый наугад диод проработал гарантийное число часов. К какому типу он вероятнее всего относится? (*Ответ:* а) 0,7429; б) к типу B.)

26.7. Вероятность попадания в цели при одном выстреле из винтовок равна 0,3. Произведено 6 выстрелов. Найти вероятность того, что произошло: а) три попадания в цели; б) пять попаданий; в) не менее пяти попаданий. (*Ответ:* а) 0,2592; б) 0,33696; в) 0,010935.)

26.8. Найти вероятность того, что при 400 испытаниях событие появится не менее 104 раз, если вероятность его наступления в каждом независимом испытании равна 0,2. (*Ответ*: 0,00135.)

27 ВАРИАНТ

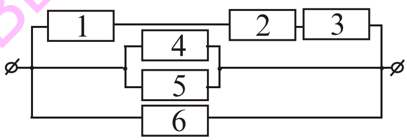
27.1. На станции имеется 6 запасных путей. Сколькими способами можно расставить на них 4 поезда? (*Ответ:* 360.)

27.2. В мастерскую для ремонта поступило 20 телевизоров. Известно, что 7 из них нуждаются в настройке. Мастер берет любые 5 телевизоров. Какова вероятность того, что 2 из них нуждаются в настройке? (*Ответ:* 0,3874.)

27.3. В области $D=\{(x,y)\,|\,0\le y\le 2,\, 0\le x\le 2\}$ случайным образом выбирается точка (x,y). Определить вероятность выполнения соотношения (события) $A: y\ge x^2$.

27.4. Три автомата изготавливают детали. Вероятность того, что деталь, изготовленная первым автоматом, – высшего качества, равна 0,9, для второго – 0,7, для третьего – 0,6. Наугад берут по одной детали с каждого автомата. Найти вероятность того, что из взятых деталей: а) все высшего качества; б) две высшего качества; в) хотя бы одна высшего качества. (*Ответ*: а) 0,378; б) 0,456; в) 0,988.)

27.5. Событие A – сигнал проходит со входа схемы на выход; событие A_j – сигнал проходит со входа j-го блока на выход, его вероятность равна p_j. Элементы выходят из строя независимо друг от друга. Найти вероятность $P(A)$.



27.6. Для участия в студенческих спортивных соревнованиях выделено из первой группы 5 студентов, из второй и третьей - соответственно 6 и 10 студентов. Вероятности выполнения нормы мастера спорта равны соответственно для студентов первой группы – 0,3, второй – 0,4, третьей – 0,2. Найти вероятность того, что: а) наугад взятый студент выполнит норму мастера спорта; б) студент, выполнивший норму мастера спорта, учится во второй группе. (*Ответ:* а) 0,28; б) 0,4.)

27.7. Вероятность поражения мишени при одном выстреле равна 0,6. Произведено 5 выстрелов. Найти вероятность того, что будет иметь место: а) четыре поражения цели; б) не менее четырех поражений; в) три поражения. (*Ответ:* а) 0,2592; б) 0,33696; в) 0,3456.)

27.8. Среднее число самолётов, прибывающих в аэропорт за 1 мин, равно 2. Найти вероятность того, что за 1 мин прибудет 5 самолётов.

28 ВАРИАНТ

28.1. Из группы студентов инженерно-строительного факультета в 16 человек формируются две строительные бригады по 10 и 6 человек. Сколькими способами можно создать эти бригады? (*Ответ:* 8008.)

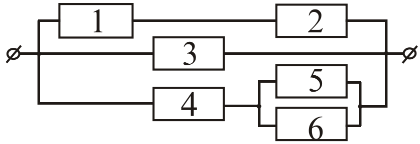
28.2. В шахматном турнире участвуют 20 человек, которых по жребию распределяют в две группы по 10 человек. Найти вероятность того, что два сильнейших шахматиста будут играть в разных группах. (*Ответ*: 0,5263.)

28.3. В области $D=\{(x,y)\,|\,x+y\le 2,\ x\ge 0,\ y\ge 0\}$ случайным образом выбирается точка (x,y). Определить вероятность выполнения заданного соотношения (события) $A: x\le y\le x+\frac{1}{2}$.

28.4. Вычислительный центр, который должен производить непрерывную обработку поступающей информации, располагает двумя вычислительными устройствами. Известно, что вероятность отказа за некоторое время T у каждого из них равна 0,2. Найти вероятность безотказной работы за время T: а) каждого устройства; б) хотя бы одного устройства; в) одного устройства. (*Ответ*: а) 0,64; б) 0,96; в) 0,32.)

28.5. Событие A – сигнал проходит со входа схемы на выход; событие A_j – сигнал проходит со входа j-го блока на выход, его вероятность равна p_j. Элементы выходят из строя

независимо друг от друга. Найти вероятность $P(A)$.



28.6. На участке, изготавливающем болты, первый станок производит 25 %, второй – 35 %, третий – 40 % всех изделий. В продукции каждого из станков брак составляет соответственно 5 %, 4 %, 2 %. Найти вероятность того, что: а) взятый наугад болт - с дефектом; б) случайно взятый болт с дефектом изготовлен на третьем станке. (*Ответ:* а) 0,0345; б) 0,2319.)

28.7. Вероятность попадания в цели равна 0,3. Одновременно сбрасывается 6 бомб. Найти вероятность того, что в цель попадают: а) четыре бомбы; б) не менее четырех бомб; в) не более четырех бомб. (*Ответ:* а) 0,059535; б) 0,07047; в) 0,9891.)

28.8. Всхожесть семян данного растения равна 0,9. Найти вероятность того, что из 900 посаженных семян число проросших будет заключено между 790 и 830. (*Ответ*: 0,9736.)

29 ВАРИАНТ

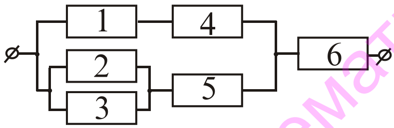
29.1. На диске телефонного аппарата имеется 10 цифр. Каждый телефон АТС имеет номер, записываемый с помощью пяти цифр, причем первая цифра у них одна и та же. Найти наибольшее возможное число таких абонентов этой станции, у которых 4 последние цифры номера телефона различны. (*Ответ:* 5040.)

29.2. В партии, состоящей из 20 радиоприемников, 5 неисправных. Наугад берут 3 радиоприемника. Какова вероятность того, что в число выбранных войдут 1 неисправный и 2 исправных радиоприемника? (*Ответ:* 0,4605.)

29.3. В области $D=\{(x,y)\,|\,x+y\le 1,\ x\ge 0,\ y\ge 0\}$ случайным образом выбирается точка (x,y). Определить вероятность выполнения соотношения (события) $A: y\ge x^2$.

29.4. Инженер выполняет расчет, пользуясь тремя справочниками. Вероятности того, что интересующие его данные находятся в первом, втором, третьем справочниках, равны соответственно 0,6; 0,7; 0,8. Найти вероятность того, что интересующие инженера данные содержатся: а) только в одном справочнике; б) только в двух справочниках; в) во всех трех справочниках. (*Ответ*: а) 0,188; б) 0,452; в) 0,336.)

29.5. Событие A – сигнал проходит со входа схемы на выход; событие A_j – сигнал проходит со входа j-го блока на выход, его вероятность равна p_j. Элементы выходят из строя независимо друг от друга. Найти вероятность $P(A)$.



29.6. На сборку поступают детали с четырех автоматов. Первый обрабатывает 40 %, второй – 30 %, третий – 20 % и четвертый – 10 % всех деталей, поступающих на сборку. Первый автомат дает 0,1 % брака, второй – 0,2 %, третий – 0,25 %, четвертый - 0,5 %. Найти вероятность того, что: а) на сборку поступит стандартная деталь; б) поступившая на сборку стандартная деталь изготовлена первым автоматом. (*Ответ:* а) 0,9935; б) 0,4022.)

29.7. Среди деталей, изготавливаемых рабочим, в среднем 4 % бракованных. Найти вероятность того, что среди взятых на контроль пяти деталей: а) две бракованных; б) хотя бы одна бракованная; в) не более одной бракованной. (*Ответ:* а) 0,014156; б) 0,1846; в) 0,9852.)

29.8. Средняя плотность болезнетворных бактерий в 1 м^3 воздуха равна 100. Берётся на пробу 2 дм^3 воздуха. Найти вероятность того, что в нём не будет обнаружена хотя бы одна бактерия. (*Ответ*: 0,1813.)

30 ВАРИАНТ

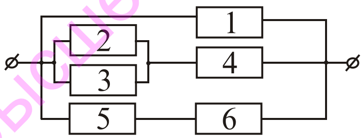
30.1. Из чисел 1, 2, 3, ..., 100 составлены все возможные парные произведения. Сколько полученных чисел будут кратны трем? (*Ответ:* 2739.)

30.2. В магазине из 100 пар зимних сапог одного фасона 10 – коричневого цвета, а остальные – черного. Произвольно отбирают 8 пар сапог. Какова вероятность того, что все выбранные сапоги – черного цвета? (*Ответ:* 0,3305.)

30.3. В области $D=\{(x,y)\,|\,0\le y\le 1,\, 0\le x\le 2\}$ случайным образом выбирается точка (x,y). Определить вероятность выполнения соотношения (события) $A: y\le x^2$.

30.4. Вероятность безотказной работы за время T блока, входящего в прибор, равна 0,85. Для повышения надежности устанавливается такой же резервный блок. Определить вероятность безотказной работы прибора за время T с учетом резервного блока. (*Ответ*: 0,9775).

30.5. Событие A – сигнал проходит со входа схемы на выход; событие A_j – сигнал проходит со входа j-го блока на выход, его вероятность равна p_j. Элементы выходят из строя независимо друг от друга. Найти вероятность $P(A)$.



30.6. Производится стрельба по мишеням трех типов, из которых 5 мишеней типа A, 3 мишени типа B и 3 мишени типа C. Вероятность попадания в мишень типа A равна 0,4, в мишень типа B – 0,1, в мишень типа C – 0,15. Найти вероятность того, что: а) мишень будет поражена при одном выстреле, если неизвестно, по мишени какого типа он был сделан; б) при одном выстреле (если неизвестно, по мишени какого типа он сделан) будет поражена мишень типа A. (*Ответ*: а) 0,25; б) 0,7273.)

30.7. Вероятность выиграть по одной облигации государственного займа равна 1/3. Найти вероятность того, что, имея 6 облигаций этого займа, можно выиграть: а) по двум облигациям; б) по трем облигациям; в) не менее чем по двум облигациям. (*Ответ:* а) 0,3292; б) 0,2195; в) 0,6485.)

30.8. Вероятность рождения мальчика равна 0,515. Найти вероятность того, что из 1000 рождающихся детей мальчиков будет не менее 500, но не более 550. (*Ответ*: 0,8157.)

Решение нулевого варианта

0.1. В бригаде 25 человек. Сколькими способами можно избрать троих рабочих в три комиссии (по одному в каждую)?

Решение. Одна комбинация отличается от другой либо хотя бы одним человеком, либо порядком избрания в комиссии. Поэтому число способов избрания троих рабочих равно числу размещений из 25 человек по 3, т.е. $A_{25}^3 = 25\cdot 24\cdot 23 = 13800$.

Ответ: 13800 способами.

0.2. В шахматном турнире участвуют 10 гроссмейстеров, 6 международных мастеров и 4 мастера. Шахматисты для первого тура и номер столика для каждой пары участников определяется путем жеребьевки. Найти вероятность того, что за первым столиком встретятся шахматисты одной и той же категории.

Решение. Пусть событие $A=\{$за первым столиком встретятся шахматисты одной и той же категории$\}$. Число всех возможных случаев определения двух соперников из $10+6+4=20$ участников равно числу сочетаний из 20 элементов по 2, т.е.

$$n = C_{20}^2 = \frac{20!}{2!(20-2)!} = \frac{19\cdot 20}{1\cdot 2} = 190\,.$$

В задаче говорится о шахматистах одной и той же категории, т.е. в одной паре могут быть или два гроссмейстера, или два международных мастера, или два мастера. Число групп по 2 человека, которые могут быть составлены из 10 гроссмейстеров, равно C_{10}^2. Число пар, которые могут быть составлены из 6 международных мастеров, равно C_6^2. Из 4 мастеров может быть составлено C_4^2 пар. Поэтому по правилу сложения в комбинаторике сумма $m = C_{10}^2 + C_6^2 + C_4^2$ равна числу благоприятствующих случаев для встречи за первым столиком шахматистов одной и той же категории, поэтому

$$m = \frac{10!}{2!\cdot 8!} + \frac{6!}{2!\cdot 4!} + \frac{4!}{2!\cdot 2!} = \frac{9\cdot 10}{2} + \frac{5\cdot 6}{2} + \frac{3\cdot 4}{2} = 66.$$

Следовательно, искомая вероятность:

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{66}{190} = \frac{33}{95}.$$

Ответ: $\frac{33}{95}$.

0.3. В области $D = \{(x, y) \mid 0 \le y \le 1, 0 \le x \le 2\}$ случайным образом выбирается точка (x, y). Определить вероятность выполнения заданного соотношения (события) $A: y \le x^2$.

Решение.

Все элементарные исходы в данной задаче, т.е. множество точек плоскости с координатами (x, y) из области D, изображаются прямоугольником (рис. 1.1).

Неравенство $y \le x^2$ определяет благоприятствующую событию A область, которую можно обозначить также A. Это часть области D, лежащая ниже параболы $y = x^2$ (рис. 1.1).

По формуле геометрической вероятности имеем:

$$P(A) = \frac{S(A)}{S(D)},$$

где $S(A)$ и $S(D)$ – площади областей A и D.

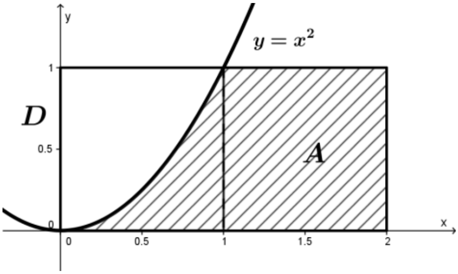


Рис. 1.1

Площадь прямоугольника D равна произведению длин его сторон, т.е. $S(D) = 2 \cdot 1 = 2$.

Область A состоит из двух частей – области под параболой $\{(x, y) \mid 0 \le x \le 1, 0 \le y \le x^2\}$ и квадрата $\{(x, y) \mid 1 \le x \le 2, 0 \le y \le 1\}$. Площадь первой из них можно найти с помощью определенного интеграла, а площадь второй – квадрат длины стороны:

$$S(A) = \int_0^1 x^2 dx + 1^2 = \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1 + 1 = \frac{1}{3} + 1 = \frac{4}{3}.$$

Площадь области A можно найти, не разбивая ее на части, если отметить, что она ограничена снизу и сверху двумя горизонтальными прямыми $y_1 = 0$ и $y_2 = 1$, а слева и справа – двумя функциями $x_1(y) = \sqrt{y}$ и $x_2(y) = 2$. Тогда площадь будет равна:

$$S(A) = \int_0^1 \left(2 - \sqrt{y}\right) dy = \left.\left(2y - \frac{2}{3} y^{\frac{3}{2}}\right)\right|_0^1 = 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}.$$

Поэтому может быть найдена искомая вероятность:

$$P(A) = \frac{S(A)}{S(D)} = \frac{4/3}{2} = \frac{2}{3}.$$

Ответ: $\frac{2}{3}$.

0.4. В ремонтную мастерскую поступило 15 тракторов. Известно, что 6 из них нуждаются в замене двигателя, а остальные в замене отдельных узлов. Случайным образом отбираются 2 трактора. Найти вероятность того, что замена двигателя необходима: а) в двух тракторах; б) в одном тракторе; в) хотя бы в одном тракторе.

Решение. а) Обозначим через A_i, $i=\overline{1,2}$, событие, состоящее в том, что выбранный трактор требует замены двигателя. Согласно условиям задачи, вероятность того, что первым будет отобран трактор, требующий замены двигателя, равна $P(A_1)=\frac{6}{15}=\frac{2}{5}$. Теперь общее количество тракторов и тех из них, которые нуждаются в замене двигателя, уменьшилось на единицу. Поэтому вероятность того, что второй выбранный трактор также потребует замены двигателя, равна $P(A_2/A_1)=\frac{5}{14}$.

Тогда вероятность события, состоящего в том, что первый и второй отобранные тракторы потребуют замены двигателя, вычисляется по теореме умножения вероятностей:

$$P(A)=P(A_1\cdot A_2)=P(A_1)\cdot P(A_2/A_1)=\frac{2}{5}\cdot\frac{5}{14}=\frac{1}{7}.$$

б) Обозначим через B событие, состоящее в том, что только один из двух выбранных тракторов требует замены двигателя. Это событие заключается в том, что первый трактор нуждается в замене двигателя $\left(p_1=\frac{6}{15}=\frac{2}{5}\right)$, а второй – лишь в замене узлов $\left(p_2=\frac{15-6}{15-1}=\frac{9}{14}\right)$, либо первый трактор требует замены отдельных узлов

$\left(p_3 = \dfrac{15-6}{15} = \dfrac{3}{5}\right)$, а второй – замены двигателя $\left(p_4 = \dfrac{6}{15-1} = \dfrac{3}{7}\right)$:

$$P(B) = p_1 \cdot p_2 + p_3 \cdot p_4 = \frac{2}{5} \cdot \frac{9}{14} + \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{7} = \frac{18}{35}.$$

в) Если C – замена двигателя необходима хотя бы в одном тракторе, то $\overline{C}$ – ни один трактор не потребует замены двигателя. Вероятность того, что первый трактор не потребует замены двигателя, равна $\dfrac{15-6}{15} = \dfrac{3}{5}$. Вероятность того, что второй трактор также не потребует замены двигателя, равна $\dfrac{9-1}{15-1} = \dfrac{4}{7}$. Тогда, $P(\overline{C}) = \dfrac{3}{5} \cdot \dfrac{4}{7} = \dfrac{12}{35}$. Поэтому по свойству противоположных событий получим:

$$P(C) = 1 - P(\overline{C}) = 1 - \frac{12}{35} = \frac{23}{35}.$$

Ответ: а) $\dfrac{1}{7}$; б) $\dfrac{18}{35}$; в) $\dfrac{23}{35}$.

0.5. Событие A – сигнал проходит со входа схемы, изображенной на рис. 1.2, на выход; событие A_j – сигнал проходит со входа j-го элемента на выход, его вероятность равна p_j. Элементы выходят из строя независимо друг от друга. Найти вероятность $P(A)$.

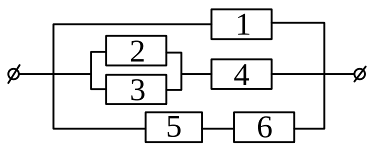


Рис. 1.2

Решение.

Разобьем заданную схему на блоки, внутри которых элементы соединены между собой последовательно или параллельно. Получим схему, изображенную на рис. 1.3.

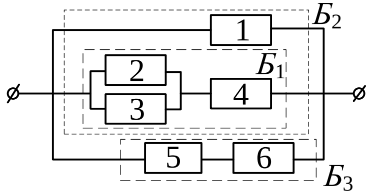


Рис. 1.3

Пусть B_i – событие, заключающееся в том, что блок $Б_i$ исправен, где $i=\overline{1,3}$, т.е. сигнал проходит с его входа на выход.

Так как в блоке $Б_1$ второй и третий элементы соединены параллельно, то сигнал, попадая на вход этого блока, пройдет либо через второй, либо через третий элементы, и далее через четвертый элемент пройдет к выходу. Учитывая, что все события A_j совместны и независимы, получим:

$$P(B_1)=P((A_2+A_3)\cdot A_4)=P(A_2+A_3)\cdot P(A_4)=$$
$$=(P(A_2)+P(A_3)-P(A_2\cdot A_3))\cdot P(A_4)=(p_2+p_3-p_2p_3)p_4 .$$

В блоке $Б_2$ первый элемент и блок $Б_1$ соединены параллельно, поэтому аналогично получим:

$$P(B_2)=P(A_1+B_1)=P(A_1)+P(B_1)-P(A_1\cdot B_1)=$$
$$=p_1+P(B_1)-p_1\cdot P(B_1)=p_1+P(B_1)\cdot(1-p_1)=$$
$$=p_1+p_4(p_2+p_3-p_2p_3)(1-p_1).$$

В блоке $Б_3$ пятый и шестой элементы соединены последовательно, поэтому сигнал, попадая на вход этого блока, пройдет через каждый элемент:

$$P(B_3)=P(A_5\cdot A_6)=p_5\cdot p_6 .$$

Блоки $Б_2$ и $Б_3$ соединены параллельно, поэтому вероятность исправности всей схемы равна:

$$P(A) = P(B_2 + B_3) = P(B_2) + P(B_3) - P(B_2 \cdot B_3) =$$
$$= p_1 + p_4(p_2 + p_3 - p_2 p_3)(1 - p_1) + p_5 p_6 -$$
$$-(p_1 + p_4(p_2 + p_3 - p_2 p_3)(1 - p_1)) \cdot p_5 p_6 .$$

0.6. При обследовании группы, в которой мужчин и женщин одинаковое количество, было установлено, что среди мужчин 5 % дальтоников, а среди женщин – 0,25 %. Найти вероятность того, что наугад выбранное лицо: а) страдает дальтонизмом; б) является мужчиной, если известно, что оно страдает дальтонизмом.

Решение. а) Пусть событие A состоит в том, что наугад выбранное лицо страдает дальтонизмом. При этом возможны следующие гипотезы: H_1 – выбранное лицо является мужчиной; H_2 – выбранное лицо является женщиной. Эти гипотезы образуют полную группу событий, при этом, так как мужчин и женщин одинаковое количество, то $P(H_1) = P(H_2) = 0{,}5$.

Событие A/H_1 заключается в том, что дальтоником является мужчина, а A/H_2 – дальтоником является женщина. Поэтому $P(A/H_1) = 5\% = 0{,}05$ и $P(A/H_2) = 0{,}25\% = 0{,}0025$.

По формуле полной вероятности вычисляем вероятность того, что наугад выбранное лицо страдает дальтонизмом:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{2} P(H_i) \cdot P(A/H_i) = 0{,}5 \cdot 0{,}05 + 0{,}5 \cdot 0{,}0025 = 0{,}02625 .$$

б) По условию задачи известно, что выбранное лицо страдает дальтонизмом, т.е. событие A уже произошло. Поэтому условная вероятность гипотезы H_1 при осуществлении события A вычисляется по формуле Байеса:

$$P(H_1/A) = \frac{P(H_1)\cdot P(A/H_1)}{P(A)} = \frac{0{,}5\cdot 0{,}05}{0{,}02625} \approx 0{,}95 .$$

Ответ: а) $0{,}02625$; б) $0{,}95$.

0.7. Наблюдениями установлено, что в некоторой местности в сентябре бывает 12 дождливых дней. Найти вероятность того, что из случайно зафиксированных в этом месяце 8 дней дождливыми окажутся: а) три дня; б) не менее трех дней; в) не более трех дней.

Решение. Наблюдения в условиях данной задачи являются независимыми. Вероятность выпадения дождя в любой день сентября равна $p = \frac{12}{30} = 0{,}4$, а вероятность того, что в любой день сентября дождя не будет, равна $q = 1 - p = 1 - 0{,}4 = 0{,}6$.

Вероятность $P_n(m)$ того, что в n наблюдениях событие наступит m раз, определяется формулой биномиального распределения (формулой Бернулли):

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m} .$$

а) По условию задачи $n = 8,\ m = 3,\ p = 0{,}4,\ q = 0{,}6$, поэтому $P_8(3) = C_8^3 \cdot 0{,}4^4 \cdot 0{,}6^5 = 0{,}278692$.

б) Поскольку $n = 8,\ m = 3,\ p = 0{,}4,\ q = 0{,}6$, то

$$P_8(3 \le m \le 8) = P_8(3) + P_8(4) + P_8(5) + P_8(6) + P_8(7) + P_8(8) =$$
$$= 1 - P_8(0) - P_8(1) - P_8(2) = 1 - 0{,}6^8 - 8\cdot 0{,}4\cdot 0{,}6^7 - 28\cdot 0{,}4^2\cdot 0{,}6^6 =$$
$$= 0{,}624893 .$$

в) Так как $n = 8,\ m = 3,\ p = 0{,}4,\ q = 0{,}6$, то

$$P_8(0 \le m \le 3) = P_8(0) + P_8(1) + P_8(2) + P_8(3) =$$
$$= 0{,}016796 + 0{,}149292 + 0{,}209019 + 0{,}278692 = 0{,}653309 .$$

Ответ: а) $0{,}278692$; б) $0{,}624893$; в) $0{,}653309$.

0.8. На факультете 730 студентов. Вероятность дня рождения каждого студента в данный день равна $1/365$.

Вычислить вероятность того, что найдутся три студента, у которых дни рождения совпадают.

Решение. В данном случае $n = 730$, $m = 3$, $p = 1/365$, $q = 1 - 1/365 = 364/365$. Так как n велико, но при этом

$$npq = 730 \cdot \frac{1}{365} \cdot \frac{364}{365} \approx 2 < 10,$$

то воспользуемся теоремой Пуассона $P_n(m) \approx \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}$, где $\lambda = np$, а значения функции $P_n(m)$ можно найти по таблице приложения 3. В данном случае при $\lambda = \frac{730}{365} = 2$ получим:

$$P_{730}(3) \approx 0{,}180447 \approx 0{,}18.$$

Ответ: $0{,}18$.

2. ТИПОВОЙ РАСЧЕТ «СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ»

1 ВАРИАНТ

1.1. Случайная величина имеет распределение, представленное таблицей:

X	0,1	0,23	0,3	0,4	0,5
p_i	0,3	a	0,2	0,15	0,25

Найти: a, $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$ случайной величины X.

Построить многоугольник распределения, найти функцию распределения $F(x)$ и построить ее график.

1.2. Автомобиль должен проехать по улице, на которой установлено четыре независимо работающих светофора. Каждый светофор подает красный или зеленый сигналы; СВ X – число остановок автомобиля на этой улице.

Найти закон распределения указанной дискретной СВ X и ее функцию распределения $F(x)$, построить график этой функции. Вычислить математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$.
(*Ответ:* $M(X)=2$, $D(X)=1$.)

1.3. Дана функция распределения $F(x)$ НСВ X. Найти коэффициент A, плотность распределения вероятностей $p(x)$, математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$ и вероятность попадания СВ X на отрезок $[a;b]$. Построить графики функций $F(x)$ и $p(x)$, если $a=0, b=1$ и

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x<0, \\ Ax^3, & 0\le x\le 2, \\ 1, & x>2. \end{cases}$$

(*Ответ*: $A=\frac{1}{8}$, $M(X)=1{,}5$; $D(X)=0{,}15$, $P(0\le X\le 1)=\frac{1}{8}$.)

1.4. Пусть X – непрерывная случайная величина с плотностью распределения $p(x)$, заданная следующим образом:

$$p(x)=\begin{cases} A\cos x, & x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right], \\ 0, & x\notin\left(0;\frac{\pi}{2}\right]. \end{cases}$$

Найти A, $F(x)$, $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$. Построить графики $p(x)$ и $F(x)$.

1.5. Валик, изготовленный автоматом, считается стандартным, если отклонение его диаметра от проектного размера не превышает 2 мм. Случайные отклонения диаметров валиков, подчиняются нормальному закону со средним квадратичным отклонением 1,6 мм и математическим ожиданием, равным 0. Сколько стандартных валиков (в %) изготавливает автомат?
(*Ответ*: 78,9 %.)

1.6. а) Пусть X – нормально распределенная величина с параметрами $m=3$, $\sigma=0{,}8$. Найти $P\{2<X<4\}$.

б) Пусть X – нормально распределенная величина с параметрами $m=0{,}5$, $\sigma=0{,}5$. Найти $P\{|X-0{,}5|<0{,}2\}$.

1.7. Дана таблица распределения вероятностей двумерной случайной величины $(X;Y)$:

$X\setminus Y$	-1	0	1	2
0	0,05	0,1	0,1	0,05
3	0,05	0,05	0,1	0,1
6	0,1	0,05	0,1	0,15

Найти частные законы распределения случайных величин X, Y, $M(X)$, $M(Y)$, $M(X\cdot Y)$, $D(X)$, $D(Y)$, $\operatorname{cov}(X,Y)$, r_{XY}, составить ковариационную матрицу $\mathbf{\Sigma}$, найти обобщенную дисперсию $|\mathbf{\Sigma}|$.

1.8. Плотность распределения непрерывной двумерной случайной величины (X,Y) имеет вид:

$$p(x,y)=\begin{cases}Axy(2x+8y), & (x,y)\in D,\\ 0, & (x,y)\notin D,\end{cases}$$

где область D – треугольник, образованный осями координат Ox и Oy, а также прямой, отсекающей от них отрезки $x_0=6$ и $y_0=2$ соответственно. Требуется найти: а) константу A; б) одномерные плотности распределения $p(x)$ и $p(y)$; в) числовые характеристики каждой СВ X и Y; г) ковариацию $\operatorname{cov}(X,Y)$ и коэффициент корреляции r_{XY}; д) составить ковариационную матрицу $\mathbf{\Sigma}$ и найти обобщенную дисперсию $|\mathbf{\Sigma}|$.

2 ВАРИАНТ

2.1. Случайная величина имеет распределение, представленное таблицей:

X	0,2	0,4	0,7	0,8	1
p_i	0,1	a	0,25	0,2	0,3

Найти: a, $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$ случайной величины X.

Построить многоугольник распределения, найти функцию распределения $F(x)$ и построить ее график.

2.2. Производятся три выстрела по мишени. Вероятность поражения мишени первым выстрелом равна 0,4, вторым – 0,5, третьим – 0,6; СВ X – число поражений мишени.

Найти закон распределения указанной дискретной СВ X и ее функцию распределения $F(x)$, построить график этой функции. Вычислить математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$.

(*Ответ:* $M(X)=1{,}5$, $D(X)=0{,}73$.)

2.3. Дана функция распределения $F(x)$ НСВ X. Найти коэффициент A, плотность распределения вероятностей $p(x)$, математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$ и вероятность попадания СВ X на отрезок $[a;b]$. Построить графики функций $F(x)$ и $p(x)$, если $a=1, b=2$ и

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x<0, \\ A(2x^2+5x), & 0\le x\le 3, \\ 1, & x>3. \end{cases}$$

(*Ответ*: $A=\dfrac{1}{33}$, $M(X)=1{,}77$, $D(X)=0{,}676$, $P(1\le X\le 2)=\dfrac{1}{3}$.)

2.4. Пусть X – непрерывная случайная величина с плотностью распределения $p(x)$, заданная следующим образом:

$$p(x)=\begin{cases} A\cos 2x, & x\in\left(0;\dfrac{\pi}{4}\right], \\ 0, & x\notin\left(0;\dfrac{\pi}{4}\right]. \end{cases}$$

Найти A, функцию распределения $F(x)$ и числовые характеристики $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$. Построить графики $p(x)$ и $F(x)$.

2.5. При определении расстояния радиолокатором случайные ошибки распределяются по нормальному закону. Какова вероятность того, что ошибка при определении расстояния не превысит 20 м, если известно, что систематических ошибок радиолокатор не допускает, а дисперсия ошибок равна 1370 м^2? (*Ответ*: 0,4108.)

2.6. а) Пусть X – нормально распределенная величина с параметрами $m=2$, $\sigma=0{,}4$. Найти $P\{1<X<2\}$.

б) Пусть X – нормально распределенная величина с параметрами $m=1$, $\sigma=0{,}3$. Найти $P\{|X-1|<0{,}1\}$.

2.7. Дана таблица распределения вероятностей двумерной случайной величины $(X;Y)$:

$X \setminus Y$	1	2	3	5
0	0,1	0,1	0,1	0,1
2	0,15	0,1	0,05	0,05
4	0,05	0,05	0,1	0,05

Найти частные законы распределения случайных величин X, Y, $M(X)$, $M(Y)$, $M(X \cdot Y)$, $D(X)$, $D(Y)$, $\operatorname{cov}(X,Y)$, r_{XY}, составить ковариационную матрицу $\mathbf{\Sigma}$, найти обобщенную дисперсию $|\mathbf{\Sigma}|$.

2.8. Плотность распределения непрерывной двумерной случайной величины (X,Y) имеет вид:

$$p(x,y) = \begin{cases} Axy(x+2y), & (x,y) \in D, \\ 0, & (x,y) \notin D, \end{cases}$$

где область D – треугольник, образованный осями координат Ox и Oy, а также прямой, отсекающей от них отрезки $x_0 = -1$ и $y_0 = 4$ соответственно. Требуется найти: а) константу A; б) одномерные плотности распределения $p(x)$ и $p(y)$; в) числовые характеристики каждой СВ X и Y; г) ковариацию $\operatorname{cov}(X,Y)$ и коэффициент корреляции r_{XY}; д) составить ковариационную матрицу $\mathbf{\Sigma}$ и найти обобщенную дисперсию $|\mathbf{\Sigma}|$.

3 ВАРИАНТ

3.1. Случайная величина имеет распределение, представленное таблицей:

X	-1	0	1	2	3
p_i	0,1	0,15	0,25	0,2	a

Найти: a, $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$ случайной величины X.

Построить многоугольник распределения, найти функцию распределения $F(x)$ и построить ее график.

3.2. Вероятность безотказной работы в течение гарантийного срока для телевизоров первого типа равна 0,9, второго типа – 0,7, третьего типа – 0,8. СВ X – число телевизоров, проработавших гарантийный срок, среди трех телевизоров разных типов.

Найти закон распределения указанной дискретной НСВ X и ее функцию распределения $F(x)$, построить график этой функции. Вычислить математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$.
(*Ответ*: $M(X)=2{,}4$, $D(X)=0{,}46$.)

3.3. Дана функция распределения $F(x)$ СВ X. Найти коэффициент A, плотность распределения вероятностей $p(x)$, математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$ и вероятность попадания СВ X на отрезок $[a;b]$. Построить графики функций $F(x)$ и $p(x)$, если $a=0, b=1$ и

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x<0, \\ Ax^2, & 0\le x\le 3, \\ 1, & x>3. \end{cases}$$

(*Ответ*: $A=\frac{1}{9}$, $M(X)=2$, $D(X)=0{,}5$, $P(0\le X\le 1)=\frac{1}{9}$.)

3.4. Пусть X – непрерывная случайная величина с плотностью распределения $p(x)$, заданная следующим образом:

$$p(x)=\begin{cases} A\sin 3x, & x\in\left(\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{3}\right], \\ 0, & x\notin\left(\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{3}\right]. \end{cases}$$

Найти A, функцию распределения $F(x)$ и числовые характеристики $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$. Построить графики $p(x)$ и $F(x)$.

3.5. Все значения равномерно распределенной СВ X лежат на отрезке $[2;8]$. Найти вероятность попадания СВ X в промежуток $(3;5)$.
(*Ответ*: 0,3333.)

3.6. а) Пусть X – нормально распределенная величина с параметрами $m=0{,}8$, $\sigma=0{,}2$. Найти $P\{0{,}3<X<0{,}8\}$.

б) Пусть X – нормально распределенная величина с параметрами $m=1{,}5$, $\sigma=0{,}5$. Найти $P\{|X-1{,}5|<0{,}2\}$.

3.7. Дана таблица распределения вероятностей двумерной случайной величины $(X;Y)$:

$X \setminus Y$	-1	0	2	4
0	0,05	0,15	0,1	0,05
2	0,1	0,1	0,05	0,05
3	0,05	0,05	0,15	0,1

Найти частные законы распределения случайных величин X,Y, $M(X)$, $M(Y)$, $M(X\cdot Y)$, $D(X)$, $D(Y)$, $\operatorname{cov}(X,Y)$, r_{XY}, составить ковариационную матрицу $\mathbf{\Sigma}$, найти обобщенную дисперсию $|\mathbf{\Sigma}|$.

3.8. Плотность распределения непрерывной двумерной случайной величины (X,Y) имеет вид:

$$p(x,y)=\begin{cases} Axy(4x+y), & (x,y)\in D,\\ 0, & (x,y)\notin D, \end{cases}$$

где область D – треугольник, образованный осями координат Ox и Oy, а также прямой, отсекающей от них отрезки $x_0=1$ и $y_0=-1$ соответственно. Требуется найти: а) константу A; б) одномерные плотности распределения $p(x)$ и $p(y)$; в) числовые характеристики каждой СВ X и Y; г) ковариацию $\operatorname{cov}(X,Y)$ и коэффициент корреляции r_{XY}; д) составить ковариационную матрицу $\mathbf{\Sigma}$ и найти обобщенную дисперсию $|\mathbf{\Sigma}|$.

4 ВАРИАНТ

4.1. Случайная величина имеет распределение, представленное таблицей:

X	1	2	3	4	5
p_i	0,1	0,15	0,25	a	0,3

Найти: a, $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$ случайной величины X.

Построить многоугольник распределения, найти функцию распределения $F(x)$ и построить ее график.

4.2. Вероятность поражения цели при одном выстреле равна 0,6; СВ X — число поражений цели при четырех выстрелах.

Найти закон распределения указанной дискретной СВ X и ее функцию распределения $F(x)$, построить график этой функции. Вычислить математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$.

(*Ответ:* $M(X)=2{,}4$, $D(X)=0{,}96$.)

4.3. Дана функция распределения $F(x)$ НСВ X. Найти коэффициент A, плотность распределения вероятностей $p(x)$, математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$ и вероятность попадания СВ X на отрезок $[a;b]$. Построить графики функций $F(x)$ и $p(x)$, если $a=0, b=1$ и

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x<0, \\ A(x^2+2x), & 0\le x\le 4, \\ 1, & x>4. \end{cases}$$

(*Ответ*: $A=\dfrac{1}{24}$, $M(X)=2{,}44$, $D(X)=1{,}136$, $P(0\le X\le 1)=\dfrac{1}{8}$.)

4.4. Пусть X – непрерывная случайная величина с плотностью распределения $p(x)$, заданная следующим образом:

$$p(x)=\begin{cases} A(x-0{,}5), & x\in(1;2], \\ 0, & x\notin(1;2]. \end{cases}$$

Найти A, функцию распределения $F(x)$ и числовые характеристики $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$. Построить графики $p(x)$ и $F(x)$.

4.5. СВ X подчинена закону Пуассона с математическим ожиданием, равным 3. Найти вероятность того, что СВ X примет значение меньше, чем ее математическое ожидание.
(*Ответ*: 0,423.)

4.6. а) Пусть X – нормально распределенная величина с параметрами $m = 1$, $\sigma = 2$. Найти $P\{1 < X < 2\}$.

б) Пусть X – нормально распределенная величина с параметрами $m = 1$, $\sigma = 2$. Найти $P\{|X - 1| < 2\}$.

4.7. Дана таблица распределения вероятностей двумерной случайной величины $(X;Y)$:

$X \setminus Y$	0	1	2	3
0	0,1	0,15	0,1	0,05
2	0,05	0,1	0,1	0,05
6	0,05	0,05	0,1	0,1

Найти частные законы распределения случайных величин X, Y, $M(X)$, $M(Y)$, $M(X \cdot Y)$, $D(X)$, $D(Y)$, $\mathrm{cov}(X,Y)$, r_{XY}, составить ковариационную матрицу $\mathbf{\Sigma}$, найти обобщенную дисперсию $|\mathbf{\Sigma}|$.

4.8. Плотность распределения непрерывной двумерной случайной величины (X,Y) имеет вид:

$$p(x,y) = \begin{cases} Axy(-2x + 2y), & (x,y) \in D, \\ 0, & (x,y) \notin D, \end{cases}$$

где область D – треугольник, образованный осями координат Ox и Oy, а также прямой, отсекающей от них отрезки $x_0 = -3$ и $y_0 = 1$ соответственно. Требуется найти: а) константу A; б) одномерные плотности распределения $p(x)$ и $p(y)$; в) числовые характеристики каждой СВ X и Y; г) ковариацию

$\operatorname{cov}(X,Y)$ и коэффициент корреляции r_{XY}; д) составить ковариационную матрицу $\mathbf{\Sigma}$ и найти обобщенную дисперсию $|\mathbf{\Sigma}|$.

5 ВАРИАНТ

5.1. Случайная величина имеет распределение, представленное таблицей:

X	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
p_i	0,2	0,1	0,25	a	0,15

Найти: a, $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$ случайной величины X.

Построить многоугольник распределения, найти функцию распределения $F(x)$ и построить ее график.

5.2. Вероятность выпуска прибора, удовлетворяющего требованиям качества, равна 0,9. В контрольной партии 3 прибора. СВ X – число приборов, удовлетворяющих требованиям качества.

Найти закон распределения указанной дискретной СВ X и ее функцию распределения $F(x)$, построить график этой функции. Вычислить математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$.

(*Ответ:* $M(X)=2{,}7$, $D(X)=0{,}27$.)

5.3. Дана функция распределения $F(x)$ СВ X. Найти коэффициент A, плотность распределения вероятностей $p(x)$, математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$ и вероятность попадания СВ X на отрезок $[a;b]$. Построить графики функций $F(x)$ и $p(x)$, если $a=0, b=1$ и

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x<0, \\ A(x^3+x), & 0\le x\le 2, \\ 1, & x>2. \end{cases}$$

(*Ответ*: $A=0{,}1$, $M(X)=1{,}4$, $D(X)=0{,}23$, $P(0\le X\le 1)=0{,}2$.)

5.4. Пусть X – непрерывная случайная величина с плотностью распределения $p(x)$, заданная следующим образом:

$$p(x) = \begin{cases} Ax^2, & |x| \le 1, \\ 0, & |x| > 1. \end{cases}$$

Найти A, функцию распределения $F(x)$ и числовые характеристики $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$. Построить графики $p(x)$ и $F(x)$.

5.5. Цена деления шкалы измерительного прибора равна 0,2. Показания прибора округляются до ближайшего целого деления. Считая, что ошибки измерения распределены равномерно, найти вероятность того, что при отсчете будет сделана ошибка, меньшая 0,04.
(*Ответ*: 0,4.)

5.6. а) Пусть X – нормально распределенная величина с параметрами $m = 1$, $\sigma = 0{,}4$. Найти $P\{|X - 1{,}5| < 0{,}2\}$.

б) Пусть X – нормально распределенная величина с параметрами $m = 1$, $\sigma = 3$. Найти $P\{|X - 1| < 2\}$.

5.7. Дана таблица распределения вероятностей двумерной случайной величины $(X;Y)$:

$X \backslash Y$	1	2	4	6
-1	0,1	0,1	0,15	0,05
0	0,05	0,1	0,1	0,05
1	0,15	0,1	0,05	0

Найти частные законы распределения случайных величин X, Y, $M(X)$, $M(Y)$, $M(X \cdot Y)$, $D(X)$, $D(Y)$, $\operatorname{cov}(X,Y)$, r_{XY}, составить ковариационную матрицу $\mathbf{\Sigma}$, найти обобщенную дисперсию $|\mathbf{\Sigma}|$.

5.8. Плотность распределения непрерывной двумерной случайной величины (X,Y) имеет вид:

$$p(x,y) = \begin{cases} Axy(3x - y), & (x,y) \in D, \\ 0, & (x,y) \notin D, \end{cases}$$

где область D – треугольник, образованный осями координат Ox и Oy, а также прямой, отсекающей от них отрезки $x_0 = 2$ и $y_0 = -2$ соответственно. Требуется найти: а) константу A; б) одномерные плотности распределения $p(x)$ и $p(y)$; в) числовые характеристики каждой СВ X и Y; г) ковариацию $\text{cov}(X,Y)$ и коэффициент корреляции r_{XY}; д) составить ковариационную матрицу $\mathbf{\Sigma}$ и найти обобщенную дисперсию $|\mathbf{\Sigma}|$.

6 ВАРИАНТ

6.1. Случайная величина имеет распределение, представленное таблицей:

X	-0,5	-0,4	-0,3	-0,2	-0,1
p_i	0,2	0,25	0,15	a	0,3

Найти: a, $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$ случайной величины X.

Построить многоугольник распределения, найти функцию распределения $F(x)$ и построить ее график.

6.2. Вероятность перевыполнения плана для СУ-1 равна 0,9, для СУ-2 – 0,8, для СУ-3 – 0,7; СВ X — число СУ, перевыполнивших план.

Найти закон распределения указанной дискретной СВ X и ее функцию распределения $F(x)$, построить график этой функции. Вычислить математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$.

(*Ответ*: $M(X) = 2{,}4$, $D(X) = 0{,}46$.)

6.3. Дана функция распределения $F(x)$ НСВ X. Найти коэффициент A, плотность распределения вероятностей $p(x)$, математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$ и вероятность попадания СВ X на отрезок $[a;b]$. Построить графики функций $F(x)$ и $p(x)$, если $a = 0, b = 3$ и

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x<0, \\ A(x^2+x), & 0\le x\le 4, \\ 1, & x>4. \end{cases}$$

(*Ответ*: $A=\frac{1}{20}$, $M(X)=2{,}53$, $D(X)=1{,}05$, $P(0\le X\le 3)=0{,}6$.)

6.4. Пусть X – непрерывная случайная величина с плотностью распределения $p(x)$, заданная следующим образом:

$$p(x)=\begin{cases} A\cos x, & x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right], \\ 0, & x\notin\left(0;\frac{\pi}{2}\right]. \end{cases}$$

Найти A, $F(x)$, $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$. Построить графики $p(x)$ и $F(x)$.

6.5. Поток заявок, поступающих на телефонную станцию, представляет собой простейший пуассоновский поток. Математическое ожидание числа вызовов за 1 ч равно 30. Найти вероятность того, что за 1 мин поступит не менее двух вызовов.
(*Ответ*: 0,0902.)

6.6. а) X – нормально распределенная величина с параметрами $m=2{,}5$, $\sigma=0{,}4$. Найти $P\{0{,}3<X<0{,}8\}$.

б) X –нормально распределенная величина с параметрами $m=1{,}5$, $\sigma=2$. Найти $P\{|X-1{,}5|<1\}$.

6.7. Дана таблица распределения вероятностей двумерной случайной величины $(X;Y)$:

$X\setminus Y$	-1	1	3	5
0	0,1	0,12	0,1	0,08
4	0,15	0,1	0,05	0,1
8	0,05	0,08	0,05	0,02

Найти частные законы распределения случайных величин X, Y, $M(X)$, $M(Y)$, $M(X\cdot Y)$, $D(X)$, $D(Y)$, $\operatorname{cov}(X,Y)$,

r_{XY}, составить ковариационную матрицу $\mathbf{\Sigma}$, найти обобщенную дисперсию $|\mathbf{\Sigma}|$.

6.8. Плотность распределения непрерывной двумерной случайной величины (X,Y) имеет вид:

$$p(x,y)=\begin{cases} Axy(-x+6y), & (x,y)\in D, \\ 0, & (x,y)\notin D, \end{cases}$$

где область D – треугольник, образованный осями координат Ox и Oy, а также прямой, отсекающей от них отрезки $x_0=1$ и $y_0=3$ соответственно. Требуется найти: а) константу A; б) одномерные плотности распределения $p(x)$ и $p(y)$; в) числовые характеристики каждой СВ X и Y; г) ковариацию $\operatorname{cov}(X,Y)$ и коэффициент корреляции r_{XY}; д) составить ковариационную матрицу $\mathbf{\Sigma}$ и найти обобщенную дисперсию $|\mathbf{\Sigma}|$.

7 ВАРИАНТ

7.1. Случайная величина имеет распределение, представленное таблицей:

X	-0,5	-0,4	-0,3	-0,2	-0,1
p_i	0,2	a	0,15	0,1	0,3

Найти: a, $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$ случайной величины X.

Построить многоугольник распределения, найти функцию распределения $F(x)$ и построить ее график.

7.2. Вероятность попадания в цель при одном выстреле равна 0,8; СВ X – число попаданий в цель при трех выстрелах.

Найти закон распределения указанной дискретной СВ X и ее функцию распределения $F(x)$, построить график этой функции. Вычислить математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$.

(*Ответ:* $M(X)=2{,}4$, $D(X)=0{,}48$.)

7.3. Дана функция распределения $F(x)$ НСВ X. Найти коэффициент A, плотность распределения вероятностей $p(x)$, математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$ и вероятность попадания СВ X на отрезок $[a;b]$. Построить графики функций $F(x)$ и $p(x)$, если $a=\dfrac{3\pi}{4}$, $b=\dfrac{5\pi}{6}$ и

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x<\frac{3\pi}{4}, \\ A\cos 2x, & \frac{3\pi}{4}\le x\le \pi, \\ 1, & x>\pi. \end{cases}$$

(*Ответ*: $A=1$, $M(X)=3{,}64$, $D(X)=1{,}54$, $P(\frac{3\pi}{4}\le X\le \frac{5\pi}{6})=0{,}5$.)

7.4. Пусть X – непрерывная случайная величина с плотностью распределения $p(x)$, заданная следующим образом:

$$p(x)=\begin{cases} Ax^2, & x\in(0;1], \\ 0, & x\notin(0;1]. \end{cases}$$

Найти A, $F(x)$, $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$. Построить графики $p(x)$ и $F(x)$.

7.5. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение СВ X, распределенной равномерно в интервале $(6;10)$.

(*Ответ*: $M(X)=8$, $D(X)=1{,}33$, $\sigma(X)=1{,}154$.))

7.6. а) X – нормально распределенная величина с параметрами $m=3$, $\sigma=0{,}8$. Найти $P\{2<X<4\}$.

б) X – нормально распределенная величина с параметрами $m=0{,}5$, $\sigma=1$. Найти $P\{|X-0{,}5|<0{,}2\}$.

7.7. Дана таблица распределения вероятностей двумерной случайной величины $(X;Y)$:

$X\setminus Y$	1	2	3	4
0	0,16	0,12	0,14	0,08
1	0,08	0,1	0,09	0,08
3	0,06	0,04	0,03	0,02

Найти частные законы распределения случайных величин X, Y, $M(X)$, $M(Y)$, $M(X \cdot Y)$, $D(X)$, $D(Y)$, $\operatorname{cov}(X,Y)$, r_{XY}, составить ковариационную матрицу $\mathbf{\Sigma}$, найти обобщенную дисперсию $|\mathbf{\Sigma}|$.

7.8. Плотность распределения непрерывной двумерной случайной величины (X,Y) имеет вид:

$$p(x,y)=\begin{cases} Axy(4x+y), & (x,y)\in D, \\ 0, & (x,y)\notin D, \end{cases}$$

где область D – треугольник, образованный осями координат Ox и Oy, а также прямой, отсекающей от них отрезки $x_0=-5$ и $y_0=3$ соответственно. Требуется найти: а) константу A; б) одномерные плотности распределения $p(x)$ и $p(y)$; в) числовые характеристики каждой СВ X и Y; г) ковариацию $\operatorname{cov}(X,Y)$ и коэффициент корреляции r_{XY}; д) составить ковариационную матрицу $\mathbf{\Sigma}$ и найти обобщенную дисперсию $|\mathbf{\Sigma}|$.

8 ВАРИАНТ

8.1. Случайная величина имеет распределение, представленное таблицей:

X	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
p_i	a	0,2	0,25	0,15	0,1

Найти: a, $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$ случайной величины X.

Построить многоугольник распределения, найти функцию распределения $F(x)$ и построить ее график.

8.2. Вероятность поступления вызова на АТС в течение 1 мин равна 0,4. СВ X – число вызовов, поступивших на АТС за 4 мин.

Найти закон распределения указанной дискретной СВ X и ее функцию распределения $F(x)$, построить график этой функ-

ции. Вычислить математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$.
(*Ответ:* $M(X)=1{,}6$, $D(X)=0{,}96$.)

8.3. Дана функция распределения $F(x)$ НСВ X. Найти коэффициент A, плотность распределения вероятностей $p(x)$, математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$ и вероятность попадания СВ X на отрезок $[a;b]$. Построить графики функций $F(x)$ и $p(x)$, если $a=0,\ b=\frac{\pi}{3}$ и

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x<0, \\ A(1-\cos x), & 0\le x\le \frac{\pi}{2}, \\ 1, & x>\frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

(*Ответ*: $A=1,\ M(X)=1,\ D(X)=0{,}14,\ P(0\le X\le \frac{\pi}{3})=0{,}5$.)

8.4. Пусть X – непрерывная случайная величина с плотностью распределения $p(x)$, заданная следующим образом:

$$p(x)=\begin{cases} Ax^5, & x\in(0;1], \\ 0, & x\notin(0;1]. \end{cases}$$

Найти A, $F(x)$, $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$. Построить графики $p(x)$ и $F(x)$.

8.5. Считается, что изделие – высшего качества, если отклонение его размеров от номинальных не превосходит по абсолютной величине 3,6 мм. Случайные отклонения размера изделия от номинального подчиняются нормальному закону со средним квадратическим отклонением, равным 3 мм. Систематические отклонения отсутствуют. Определить среднее число изделий высшего качества среди 100 изготовленных.
(*Ответ*: 77.)

8.6. а) X – нормально распределенная величина с параметрами $m=2$, $\sigma=0{,}4$. Найти $P\{1<X<4\}$.

б) X – нормально распределенная величина с параметрами $m = 1$, $\sigma = 0{,}5$. Найти $P\{|X - 1| < 0{,}1\}$.

8.7. Дана таблица распределения вероятностей двумерной случайной величины $(X;Y)$:

$X \setminus Y$	-2	0	1	2
-2	0,05	0,1	0,1	0,05
0	0,05	0,05	0,1	0,1
4	0,1	0,05	0,1	0,15

Найти частные законы распределения случайных величин X, Y, $M(X)$, $M(Y)$, $M(X \cdot Y)$, $D(X)$, $D(Y)$, $\operatorname{cov}(X,Y)$, r_{XY}, составить ковариационную матрицу $\mathbf{\Sigma}$, найти обобщенную дисперсию $|\mathbf{\Sigma}|$.

8.8. Плотность распределения непрерывной двумерной случайной величины (X,Y) имеет вид:

$$p(x,y) = \begin{cases} Axy(5x + y), & (x,y) \in D, \\ 0, & (x,y) \notin D, \end{cases}$$

где область D – треугольник, образованный осями координат Ox и Oy, а также прямой, отсекающей от них отрезки $x_0 = 2$ и $y_0 = -3$ соответственно. Требуется найти: а) константу A; б) одномерные плотности распределения $p(x)$ и $p(y)$; в) числовые характеристики каждой СВ X и Y; г) ковариацию $\operatorname{cov}(X,Y)$ и коэффициент корреляции r_{XY}; д) составить ковариационную матрицу $\mathbf{\Sigma}$ и найти обобщенную дисперсию $|\mathbf{\Sigma}|$.

9 ВАРИАНТ

9.1. Случайная величина имеет распределение, представленное таблицей:

X	1	2	3	4	5
p_i	0,2	a	0,25	0,1	0,3

Найти: a, $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$ случайной величины X.

Построить многоугольник распределения, найти функцию распределения $F(x)$ и построить ее график.

9.2. Вероятность сдачи данного экзамена для каждого из четырех студентов равна 0,8. СВ X – число студентов, сдавших экзамен.

Найти закон распределения указанной дискретной СВ X и ее функцию распределения $F(x)$, построить график этой функции. Вычислить математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$.
(*Ответ:* $M(X)=3{,}2$, $D(X)=0{,}64$.)

9.3. Дана функция распределения $F(x)$ НСВ X. Найти коэффициент A, плотность распределения вероятностей $p(x)$, математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$ и вероятность попадания СВ X на отрезок $[a;b]$. Построить графики функций $F(x)$ и $p(x)$, если $a=0$, $b=2$ и

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x<0, \\ A(x^3+8x), & 0\le x\le 4, \\ 1, & x>4. \end{cases}$$

(*Ответ*: $A=\dfrac{1}{96}$, $M(X)=2{,}66$, $D(X)=1{,}07$, $P(0\le X\le 2)=0{,}25$.)

9.4. Пусть X – непрерывная случайная величина с плотностью распределения $p(x)$, заданная следующим образом:

$$p(x)=\begin{cases} Ax^3, & x\in(0;\,2], \\ 0, & x\notin(0;\,2]. \end{cases}$$

Найти A, $F(x)$, $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$. Построить графики $p(x)$ и $F(x)$.

9.5. Детали, выпускаемые цехом, имеют диаметры, распределенные по нормальному закону с математическим ожиданием, равным 5 см, и дисперсией, равной 0,81 см^2. Найти вероятность того, что диаметр наугад взятой детали от 4 до 7 см.

(*Ответ*:0,8533.)

9.6. а) X – нормально распределенная величина с параметрами $m = 0{,}8$, $\sigma = 0{,}2$. Найти $P\{0{,}3 < X < 0{,}6\}$.

б) X – нормально распределенная величина с параметрами $m = 1{,}5$, $\sigma = 0{,}5$. Найти $P\{|X - 1{,}5| < 1\}$.

9.7. Дана таблица распределения вероятностей двумерной случайной величины $(X;Y)$:

$X \backslash Y$	0	2	4	6
-2	0,1	0,15	0,15	0,05
0	0,1	0,05	0,04	0,06
4	0,04	0,02	0,12	0,12

Найти частные законы распределения случайных величин X, Y, $M(X)$, $M(Y)$, $M(X \cdot Y)$, $D(X)$, $D(Y)$, $\operatorname{cov}(X,Y)$, r_{XY}, составить ковариационную матрицу $\mathbf{\Sigma}$, найти обобщенную дисперсию $|\mathbf{\Sigma}|$.

9.8. Плотность распределения непрерывной двумерной случайной величины (X,Y) имеет вид:

$$p(x,y) = \begin{cases} Axy(-x+4y), & (x,y) \in D, \\ 0, & (x,y) \notin D, \end{cases}$$

где область D – треугольник, образованный осями координат Ox и Oy, а также прямой, отсекающей от них отрезки $x_0 = -1$ и $y_0 = 6$ соответственно. Требуется найти: а) константу A; б) одномерные плотности распределения $p(x)$ и $p(y)$; в) числовые характеристики каждой СВ X и Y; г) ковариацию $\operatorname{cov}(X,Y)$ и коэффициент корреляции r_{XY}; д) составить ковариационную матрицу $\mathbf{\Sigma}$ и найти обобщенную дисперсию $|\mathbf{\Sigma}|$.

10 ВАРИАНТ

10.1. Случайная величина имеет распределение, представленное таблицей:

X	-1	0	1	2	3
p_i	0,1	0,15	0,2	0,25	a

Найти: a, $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$ случайной величины X.

Построить многоугольник распределения, найти функцию распределения $F(x)$ и построить ее график.

10.2. Вероятность успешной сдачи первого экзамена для данного студента равна 0,9, второго экзамена – 0,8, третьего – 0,7; СВ X – число сданных экзаменов.

Найти закон распределения указанной дискретной СВ X и ее функцию распределения $F(x)$, построить график этой функции. Вычислить математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$.

(*Ответ:* $M(X)=2{,}4$, $D(X)=0{,}46$.)

10.3. Дана функция распределения $F(x)$ НСВ X. Найти коэффициент A, плотность распределения вероятностей $p(x)$, математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$ и вероятность попадания СВ X на отрезок $[a;b]$. Построить графики функций $F(x)$ и $p(x)$, если $a=1$, $b=2$ и

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x<-1, \\ A(x+1)^2, & -1\le x\le 2, \\ 1, & x>2. \end{cases}$$

(*Ответ:* $A=\dfrac{1}{9}$, $M(X)=1$, $D(X)=0{,}5$, $P(1\le X\le 2)=0{,}556$.)

10.4. Пусть X – непрерывная случайная величина с плотностью распределения $p(x)$, заданная следующим образом:

$$p(x)=\begin{cases} A\cos x, & x\in\left(-\dfrac{\pi}{2};\ \dfrac{\pi}{2}\right], \\ 0, & x\notin\left(-\dfrac{\pi}{2};\ \dfrac{\pi}{2}\right]. \end{cases}$$

Найти A, $F(x)$, $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$. Построить графики $p(x)$ и $F(x)$.

10.5. СВ X подчинена нормальному закону с математическим ожиданием, равным 0. Вероятность попадания этой СВ в интервал $(-1;1)$ равна $0{,}5$. Найти среднее квадратическое отклонение и записать нормальный закон.
(*Ответ*: 1,47.)

10.6. а) X – нормально распределенная величина с параметрами $m=1$, $\sigma=2$. Найти $P\{1<X<2\}$.

б) X – нормально распределенная величина с параметрами $m=2$, $\sigma=2$. Найти $P\{|X-2|<2\}$.

10.7. Дана таблица распределения вероятностей двумерной случайной величины $(X;Y)$:

$X \setminus Y$	-1	0	2	6
0	0,1	0,15	0,14	0,06
1	0,15	0,1	0,06	0,05
3	0,05	0,05	0,05	0,04

Найти частные законы распределения случайных величин X,Y, $M(X)$, $M(Y)$, $M(X\cdot Y)$, $D(X)$, $D(Y)$, $\operatorname{cov}(X,Y)$, r_{XY}, составить ковариационную матрицу $\mathbf{\Sigma}$, найти обобщенную дисперсию $|\mathbf{\Sigma}|$.

10.8. Плотность распределения непрерывной двумерной случайной величины (X,Y) имеет вид:

$$p(x,y)=\begin{cases} Axy(x-2y), & (x,y)\in D, \\ 0, & (x,y)\notin D, \end{cases}$$

где область D – треугольник, образованный осями координат Ox и Oy, а также прямой, отсекающей от них отрезки $x_0=1$ и $y_0=-2$ соответственно. Требуется найти: а) константу A; б) одномерные плотности распределения $p(x)$ и $p(y)$; в) числовые характеристики каждой СВ X и Y; г) ковариацию

$\operatorname{cov}(X,Y)$ и коэффициент корреляции r_{XY}; д) составить ковариационную матрицу $\mathbf{\Sigma}$ и найти обобщенную дисперсию $|\mathbf{\Sigma}|$.

11 ВАРИАНТ

11.1. Случайная величина имеет распределение, представленное таблицей:

X	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
p_i	a	0,2	0,25	0,15	0,1

Найти: a, $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$ случайной величины X.

Построить многоугольник распределения, найти функцию распределения $F(x)$ и построить ее график.

11.2. При установившемся технологическом процессе предприятие выпускает 2/3 своих изделий первым сортом и 1/3 вторым сортом; СВ X — число изделий первого сорта из взятых наугад четырех.

Найти закон распределения указанной дискретной СВ X и ее функцию распределения $F(x)$, построить график этой функции. Вычислить математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$.

(*Ответ:* $M(X)=8/3$, $D(X)=8/9$.)

11.3. Дана функция распределения $F(x)$ НСВ X. Найти коэффициент A, плотность распределения вероятностей $p(x)$, математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$ и вероятность попадания СВ X на отрезок $[a;b]$. Построить графики функций $F(x)$ и $p(x)$, если $a=\dfrac{\pi}{2}$, $b=\dfrac{3\pi}{4}$ и

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x<\frac{\pi}{2}, \\ A(1-\sin x), & \frac{\pi}{2}\le x\le\pi, \\ 1, & x>\pi. \end{cases}$$

(*Ответ*: $A = 1$, $M(X) = 2{,}57$, $D(X) = 0{,}14$, $P(\frac{\pi}{2} \le X \le \frac{3\pi}{4}) = 0{,}29$.)

11.4. Пусть X – непрерывная случайная величина с плотностью распределения $p(x)$, заданная следующим образом:

$$p(x) = \begin{cases} A\cos x, & x \in \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right], \\ 0, & x \notin \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right]. \end{cases}$$

Найти A, $F(x)$, $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$. Построить графики $p(x)$ и $F(x)$.

11.5. Автобусы некоторого маршрута идут строго по расписанию. Интервал движения – 5 мин. Найти вероятность того, что пассажир, подошедший к остановке, будет ожидать очередной автобус менее 3 мин.
(*Ответ*: 0,6.)

11.6. а) X – нормально распределенная величина с параметрами $m = 1$, $\sigma = 0{,}4$. Найти $P\{|X - 1{,}5| < 0{,}2\}$.

б) X – нормально распределенная величина с параметрами $m = 1$, $\sigma = 3$. Найти $P\{|X - 1| < 2\}$.

11.7. Дана таблица распределения вероятностей двумерной случайной величины $(X;Y)$:

$X \setminus Y$	1	2	3	4
0	0,05	0,1	0,1	0,05
1	0,05	0,05	0,1	0,1
2	0,1	0,05	0,1	0,15

Найти частные законы распределения случайных величин X, Y, $M(X)$, $M(Y)$, $M(X \cdot Y)$, $D(X)$, $D(Y)$, $\mathrm{cov}(X,Y)$, r_{XY}, составить ковариационную матрицу $\mathbf{\Sigma}$, найти обобщенную дисперсию $|\mathbf{\Sigma}|$.

11.8. Плотность распределения непрерывной двумерной случайной величины (X,Y) имеет вид:

$$p(x,y)=\begin{cases} Axy(2x+y), & (x,y)\in D, \\ 0, & (x,y)\notin D, \end{cases}$$

где область D – треугольник, образованный осями координат Ox и Oy, а также прямой, отсекающей от них отрезки $x_0=1$ и $y_0=3$ соответственно. Требуется найти: а) константу A; б) одномерные плотности распределения $p(x)$ и $p(y)$; в) числовые характеристики каждой СВ X и Y; г) ковариацию $\operatorname{cov}(X,Y)$ и коэффициент корреляции r_{XY}; д) составить ковариационную матрицу $\mathbf{\Sigma}$ и найти обобщенную дисперсию $|\mathbf{\Sigma}|$.

12 ВАРИАНТ

12.1. Случайная величина имеет распределение, представленное таблицей:

X	0,2	0,4	0,7	0,8	1
p_i	0,1	0,15	a	0,2	0,3

Найти: a, $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$ случайной величины X.

Построить многоугольник распределения, найти функцию распределения $F(x)$ и построить ее график.

12.2. Из партии в 20 изделий, среди которых имеется четыре нестандартных, для проверки качества выбраны случайным образом 3 изделия; СВ X – число нестандартных изделий среди проверяемых.

Найти закон распределения указанной дискретной СВ X и ее функцию распределения $F(x)$, построить график этой функции. Вычислить математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$.

(*Ответ:* $M(X)=0{,}6$, $D(X)=0{,}48$.)

12.3. Дана функция распределения $F(x)$ НСВ X. Найти коэффициент A, плотность распределения вероятностей $p(x)$, математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$ и вероятность попадания СВ X на отрезок $[a;b]$. Построить графики функций $F(x)$ и $p(x)$, если $a=1$, $b=2$ и

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x<-1, \\ A(x^3+1), & -1\le x\le 2, \\ 1, & x>2. \end{cases}$$

(*Ответ*: $A=\dfrac{1}{9}$, $M(X)=1{,}25$, $D(X)=0{,}64$, $P(1\le X\le 2)=0{,}78$.)

12.4. Пусть X – непрерывная случайная величина с плотностью распределения $p(x)$, заданная следующим образом:

$$p(x)=\begin{cases} A\cos 2x, & x\in\left(0;\dfrac{\pi}{4}\right], \\ 0, & x\notin\left(0;\dfrac{\pi}{4}\right]. \end{cases}$$

Найти A, $F(x)$, $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$. Построить графики $p(x)$ и $F(x)$.

12.5. Ребро куба x измерено приближенно: $1\le x\le 2$. Рассматривая ребро куба как СВ X, распределенную равномерно в интервале $(1;2)$, найти математическое ожидание и дисперсию объема куба.
(*Ответ*: $M(X)=3{,}75$, $D(X)=4{,}08$.)

12.6. а) X – нормально распределенная величина с параметрами $m=2{,}5$, $\sigma=0{,}4$. Найти $P\{0{,}3<X<1\}$.

б) X – нормально распределенная величина с параметрами $m=1{,}5$, $\sigma=2$. Найти $P\{|X-1{,}5|<1\}$.

12.7. Дана таблица распределения вероятностей двумерной случайной величины $(X;Y)$:

$X \setminus Y$	1	2	3	5
0	0,1	0,1	0,1	0,1
1	0,15	0,1	0,05	0,05
2	0,05	0,05	0,1	0,05

Найти частные законы распределения случайных величин X, Y, $M(X)$, $M(Y)$, $M(X \cdot Y)$, $D(X)$, $D(Y)$, $\mathrm{cov}(X,Y)$, r_{XY}, составить ковариационную матрицу $\mathbf{\Sigma}$, найти обобщенную дисперсию $|\mathbf{\Sigma}|$.

12.8. Плотность распределения непрерывной двумерной случайной величины (X,Y) имеет вид:

$$p(x,y) = \begin{cases} Axy(3x+y), & (x,y) \in D, \\ 0, & (x,y) \notin D, \end{cases}$$

где область D – треугольник, образованный осями координат Ox и Oy, а также прямой, отсекающей от них отрезки $x_0 = -4$ и $y_0 = 1$ соответственно. Требуется найти: а) константу A; б) одномерные плотности распределения $p(x)$ и $p(y)$; в) числовые характеристики каждой СВ X и Y; г) ковариацию $\mathrm{cov}(X,Y)$ и коэффициент корреляции r_{XY}; д) составить ковариационную матрицу $\mathbf{\Sigma}$ и найти обобщенную дисперсию $|\mathbf{\Sigma}|$.

13 ВАРИАНТ

13.1. Случайная величина имеет распределение, представленное таблицей:

X	1	2	3	4	5
p_i	0,25	0,15	0,3	a	0,1

Найти: a, $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$ случайной величины X.

Построить многоугольник распределения, найти функцию распределения $F(x)$ и построить ее график.

13.2. Вероятность приема каждого из четырех радиосигналов равна 0,6; СВ X – число принятых радиосигналов.

Найти закон распределения указанной дискретной СВ X и ее функцию распределения $F(x)$, построить график этой функ-

ции. Вычислить математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$.
(*Ответ*: $M(X)=2{,}4$, $D(X)=0{,}96$.)

13.3. Дана функция распределения $F(x)$ НСВ X. Найти коэффициент A, плотность распределения вероятностей $p(x)$, математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$ и вероятность попадания СВ X на отрезок $[a;b]$. Построить графики функций $F(x)$ и $p(x)$, если $a=0$, $b=2$ и

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x<0, \\ A(3x^2+2x), & 0\le x\le 3, \\ 1, & x>3. \end{cases}$$

(*Ответ*: $A=\dfrac{1}{33}$, $M(X)=1{,}9$, $D(X)=0{,}58$, $P(0\le X\le 2)=0{,}49$.)

13.4. Пусть X – непрерывная случайная величина с плотностью распределения $p(x)$, заданная следующим образом:

$$p(x)=\begin{cases} A\sin 3x, & x\in\left(\dfrac{\pi}{6};\ \dfrac{\pi}{3}\right], \\ 0, & x\notin\left(\dfrac{\pi}{6};\ \dfrac{\pi}{3}\right]. \end{cases}$$

Найти A, $F(x)$, $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$. Построить графики $p(x)$ и $F(x)$.

13.5. Случайная величина подчинена закону Пуассона с математическим ожиданием $a=3$. Найти вероятность того, что данная СВ примет положительное значение.
(*Ответ*: 0,95.)

13.6. а) X – нормально распределенная величина с параметрами $m=3$, $\sigma=0{,}5$. Найти $P\{2<X<4\}$.

б) X – нормально распределенная величина с параметрами $m=0{,}5$, $\sigma=1$. Найти $P\{|X-0{,}5|<2\}$.

13.7. Дана таблица распределения вероятностей двумерной случайной величины $(X;Y)$:

$X \setminus Y$	-1	0	2	3
1	0,05	0,15	0,1	0,05
2	0,1	0,1	0,05	0,05
3	0,05	0,05	0,15	0,1

Найти частные законы распределения случайных величин X, Y, $M(X)$, $M(Y)$, $M(X \cdot Y)$, $D(X)$, $D(Y)$, $\operatorname{cov}(X,Y)$, r_{XY}, составить ковариационную матрицу $\mathbf{\Sigma}$, найти обобщенную дисперсию $|\mathbf{\Sigma}|$.

13.8. Плотность распределения непрерывной двумерной случайной величины (X,Y) имеет вид:

$$p(x,y)=\begin{cases} Axy(3x+4y), & (x,y)\in D, \\ 0, & (x,y)\notin D, \end{cases}$$

где область D – треугольник, образованный осями координат Ox и Oy, а также прямой, отсекающей от них отрезки $x_0 = 1$ и $y_0 = 2$ соответственно. Требуется найти: а) константу A; б) одномерные плотности распределения $p(x)$ и $p(y)$; в) числовые характеристики каждой СВ X и Y; г) ковариацию $\operatorname{cov}(X,Y)$ и коэффициент корреляции r_{XY}; д) составить ковариационную матрицу $\mathbf{\Sigma}$ и найти обобщенную дисперсию $|\mathbf{\Sigma}|$.

14 ВАРИАНТ

14.1. Случайная величина имеет распределение, представленное таблицей:

X	1	2	3	4	5
p_i	a	0,15	0,25	0,1	0,3

Найти: a, $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$ случайной величины X.

Построить многоугольник распределения, найти функцию распределения $F(x)$ и построить ее график.

14.2. В партии из 15 телефонных аппаратов 5 неисправных; СВ X – число неисправных аппаратов среди трех случайным образом отобранных.

Найти закон распределения указанной дискретной СВ X и ее функцию распределения $F(x)$, построить график этой функции. Вычислить математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$.
(*Ответ:* $M(X)=1$, $D(X)=2/3$.)

14.3. Дана функция распределения $F(x)$ НСВ X. Найти коэффициент A, плотность распределения вероятностей $p(x)$, математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$ и вероятность попадания СВ X на отрезок $[a;b]$. Построить графики функций $F(x)$ и $p(x)$, если $a=\frac{3\pi}{2}$, $b=\frac{7\pi}{4}$ и

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x<\frac{3\pi}{2}, \\ A\cos x, & \frac{3\pi}{2}\le x\le 2\pi, \\ 1, & x>2\pi. \end{cases}$$

(*Ответ*: $A=1$, $M(X)=5{,}28$, $D(X)=0{,}14$, $P(\frac{3\pi}{2}\le X\le\frac{7\pi}{4})=0{,}7$.)

14.4. Пусть X – непрерывная случайная величина с плотностью распределения $p(x)$, заданная следующим образом:

$$p(x)=\begin{cases} A(x-0{,}5), & x\in(1;\,2], \\ 0, & x\notin(1;\,2]. \end{cases}$$

Найти A, $F(x)$, $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$. Построить графики $p(x)$ и $F(x)$.

14.5. При работе ЭВМ время от времени возникают сбои. Поток сбоев можно считать простейшим (подчиняется закону Пуассона). Среднее число сбоев за сутки равно 2. Найти вероятность того, что в течение суток произойдет хотя бы один сбой.
(*Ответ*: 0,865.)

14.6. а) X – нормально распределенная величина с параметрами $m=3$, $\sigma=0{,}2$. Найти $P\{2<X<4\}$.

б) X – нормально распределенная величина с параметрами $m=0{,}5$, $\sigma=1$. Найти $P\{|X-0{,}5|<1\}$.

14.7. Дана таблица распределения вероятностей двумерной случайной величины $(X;Y)$:

$X \setminus Y$	0	1	2	3
1	0,1	0,15	0,1	0,05
2	0,05	0,1	0,1	0,05
3	0,05	0,05	0,1	0,1

Найти частные законы распределения случайных величин X,Y, $M(X)$, $M(Y)$, $M(X\cdot Y)$, $D(X)$, $D(Y)$, $\mathrm{cov}(X,Y)$, r_{XY}, составить ковариационную матрицу $\boldsymbol{\Sigma}$, найти обобщенную дисперсию $|\boldsymbol{\Sigma}|$.

14.8. Плотность распределения непрерывной двумерной случайной величины (X,Y) имеет вид:

$$p(x,y)=\begin{cases} Axy(-x+6y), & (x,y)\in D, \\ 0, & (x,y)\notin D, \end{cases}$$

где область D – треугольник, образованный осями координат Ox и Oy, а также прямой, отсекающей от них отрезки $x_0=-2$ и $y_0=3$ соответственно. Требуется найти: а) константу A; б) одномерные плотности распределения $p(x)$ и $p(y)$; в) числовые характеристики каждой СВ X и Y; г) ковариацию $\mathrm{cov}(X,Y)$ и коэффициент корреляции r_{XY}; д) составить ковариационную матрицу $\boldsymbol{\Sigma}$ и найти обобщенную дисперсию $|\boldsymbol{\Sigma}|$.

15 ВАРИАНТ

15.1. Случайная величина имеет распределение, представленное таблицей:

X	-1	0	1	2	3
p_i	a	0,2	0,2	0,3	0,2

Найти: a, $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$ случайной величины X.

Построить многоугольник распределения, найти функцию распределения $F(x)$ и построить ее график.

15.2. Двое рабочих, выпускающих однотипную продукцию, допускают производство изделий второго сорта с вероятностями, соответственно равными 0,4 и 0,3. У каждого рабочего взято по 2 изделия. СВ X – число изделий второго сорта среди них.

Найти закон распределения указанной дискретной СВ X и ее функцию распределения $F(x)$, построить график этой функции. Вычислить математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$.
(*Ответ:* $M(X)=1{,}4,\ D(X)=0{,}9$.)

15.3. Дана функция распределения $F(x)$ НСВ X. Найти коэффициент A, плотность распределения вероятностей $p(x)$, математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$ и вероятность попадания СВ X на отрезок $[a;b]$. Построить графики функций $F(x)$ и $p(x)$, если $a=0,\ b=2$ и

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x<0, \\ A(x^2+2x), & 0\le x\le 3, \\ 1, & x>3. \end{cases}$$

(*Ответ*: $A=\dfrac{1}{15}$, $M(X)=1{,}8$, $D(X)=0{,}66$, $P(0\le X\le 2)=0{,}53$.)

15.4. Пусть X – непрерывная случайная величина с плотностью распределения $p(x)$, заданная следующим образом:

$$p(x)=\begin{cases} Ax^2, & x\in(-1;1], \\ 0, & x\notin(-1;1]. \end{cases}$$

Найти A, $F(x)$, $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$. Построить графики $p(x)$ и $F(x)$.

15.5. Из пункта C ведется стрельба из орудия вдоль прямой СК. Предлагается, что дальность полета распределена нормально с математическим ожиданием 1000 м и средним квадратиче-

ским отклонением 5 м. Определить (в %), сколько снарядов упадет с перелетом от 5 до 70 м.
(*Ответ*: 66 %.)

15.6. а) X – нормально распределенная величина с параметрами $m=0{,}8$, $\sigma=0{,}2$. Найти $P\{0{,}2<X<1\}$.

б) X – нормально распределенная величина с параметрами $m=1{,}5$, $\sigma=0{,}5$. Найти $P\{|X-1{,}5|<1\}$.

15.7. Дана таблица распределения вероятностей двумерной случайной величины $(X;Y)$:

$X \setminus Y$	1	2	3	4
-1	0,1	0,1	0,15	0,05
0	0,05	0,1	0,1	0,05
1	0,15	0,1	0,05	0

Найти частные законы распределения случайных величин X, Y, $M(X)$, $M(Y)$, $M(X\cdot Y)$, $D(X)$, $D(Y)$, $\operatorname{cov}(X,Y)$, r_{XY}, составить ковариационную матрицу $\mathbf{\Sigma}$, найти обобщенную дисперсию $|\mathbf{\Sigma}|$.

15.8. Плотность распределения непрерывной двумерной случайной величины (X,Y) имеет вид:

$$p(x,y)=\begin{cases} Axy(x-2y), & (x,y)\in D, \\ 0, & (x,y)\notin D, \end{cases}$$

где область D – треугольник, образованный осями координат Ox и Oy, а также прямой, отсекающей от них отрезки $x_0=2$ и $y_0=-1$ соответственно. Требуется найти: а) константу A; б) одномерные плотности распределения $p(x)$ и $p(y)$; в) числовые характеристики каждой СВ X и Y; г) ковариацию $\operatorname{cov}(X,Y)$ и коэффициент корреляции r_{XY}; д) составить ковариационную матрицу $\mathbf{\Sigma}$ и найти обобщенную дисперсию $|\mathbf{\Sigma}|$.

16 ВАРИАНТ

16.1. Случайная величина имеет распределение, представленное таблицей:

X	-2	-1	0	1	2
p_i	0,1	0,2	0,3	a	0,2

Найти: a, $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$ случайной величины X.

Построить многоугольник распределения, найти функцию распределения $F(x)$ и построить ее график.

16.2. 90 % панелей, изготавливаемых на железобетонном заводе, – высшего сорта. СВ X – число панелей высшего сорта из четырех, взятых наугад.

Найти закон распределения указанной дискретной СВ X и ее функцию распределения $F(x)$, построить график этой функции. Вычислить математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$.

(*Ответ:* $M(X)=3{,}6$, $D(X)=0{,}36$.)

16.3. Дана функция распределения $F(x)$ НСВ X. Найти коэффициент A, плотность распределения вероятностей $p(x)$, математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$ и вероятность попадания СВ X на отрезок $[a;b]$. Построить графики функций $F(x)$ и $p(x)$, если $a=0$, $b=3$ и

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x<-1, \\ A(x+1), & -1\le x\le 4, \\ 1, & x>4. \end{cases}$$

(*Ответ*: $A=\dfrac{1}{5}$, $M(X)=1{,}5$, $D(X)=2{,}08$, $P(0\le X\le 3)=0{,}6$.)

16.4. Пусть X – непрерывная случайная величина с плотностью распределения $p(x)$, заданная следующим образом:

$$p(x)=\begin{cases} A\cos x, & x\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right], \\ 0, & x\notin\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right]. \end{cases}$$

Найти A, $F(x)$, $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$. Построить графики $p(x)$ и $F(x)$.

16.5. СВ X распределена нормально с математическим ожиданием 40 и дисперсией 100. Вычислить вероятность попадания СВ X в интервал $(30; 80)$.
(*Ответ*: 0,8413.)

16.6. а) X – нормально распределенная величина с параметрами $m=1$, $\sigma=2$. Найти $P\{1<X<2\}$.

б) X – нормально распределенная величина с параметрами $m=2$, $\sigma=2$. Найти $P\{|X-2|<3\}$.

16.7. Дана таблица распределения вероятностей двумерной случайной величины $(X;Y)$:

$X \setminus Y$	-1	0	3	4
0	0,1	0,12	0,1	0,08
4	0,15	0,1	0,05	0,1
8	0,05	0,08	0,05	0,02

Найти частные законы распределения случайных величин X,Y, $M(X)$, $M(Y)$, $M(X\cdot Y)$, $D(X)$, $D(Y)$, $\operatorname{cov}(X,Y)$, r_{XY}, составить ковариационную матрицу $\mathbf{\Sigma}$, найти обобщенную дисперсию $|\mathbf{\Sigma}|$.

16.8. Плотность распределения непрерывной двумерной случайной величины (X,Y) имеет вид:

$$p(x,y)=\begin{cases} Axy(x+3y), & (x,y)\in D, \\ 0, & (x,y)\notin D, \end{cases}$$

где область D – треугольник, образованный осями координат Ox и Oy, а также прямой, отсекающей от них отрезки $x_0=2$ и

$y_0 = 1$ соответственно. Требуется найти: а) константу A; б) одномерные плотности распределения $p(x)$ и $p(y)$; в) числовые характеристики каждой СВ X и Y; г) ковариацию $\text{cov}(X,Y)$ и коэффициент корреляции r_{XY}; д) составить ковариационную матрицу $\mathbf{\Sigma}$ и найти обобщенную дисперсию $|\mathbf{\Sigma}|$.

17 В А Р И А Н Т

17.1. Случайная величина имеет распределение, представленное таблицей:

X	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
p_i	0,1	0,15	0,25	a	0,3

Найти: a, $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$ случайной величины X.

Построить многоугольник распределения, найти функцию распределения $F(x)$ и построить ее график.

17.2. Вероятность отказа прибора за время испытания на надежность равна 0,2. СВ X – число приборов, отказавших в работе, среди пяти испытываемых.

Найти закон распределения указанной дискретной СВ X и ее функцию распределения $F(x)$, построить график этой функции. Вычислить математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$.

(*Ответ:* $M(X)=1$, $D(X)=0{,}8$.)

17.3. Дана функция распределения $F(x)$ НСВ X. Найти коэффициент A, плотность распределения вероятностей $p(x)$, математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$ и вероятность попадания СВ X на отрезок $[a;b]$. Построить графики функций $F(x)$ и $p(x)$, если $a=0$, $b=\dfrac{\pi}{6}$ и

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x<0, \\ A\sin x, & 0\le x\le \pi/2, \\ 1, & x>\pi/2. \end{cases}$$

(*Ответ*: $A=1$, $M(X)=0{,}57$, $D(X)=0{,}14$, $P(0\le X\le \frac{\pi}{6})=0{,}5$.)

17.4. Пусть X – непрерывная случайная величина с плотностью распределения $p(x)$, заданная следующим образом:

$$p(x)=\begin{cases} Ax^3, & x\in(0;1], \\ 0, & x\notin(0;1]. \end{cases}$$

Найти A, $F(x)$, $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$. Построить графики $p(x)$ и $F(x)$.

17.5. Трамваи данного маршрута идут с интервалом 5 мин. Пассажир подходит к трамвайной остановке в некоторый момент времени. Какова вероятность появления пассажира не ранее, чем через 1 мин после ухода предыдущего трамвая, но не позднее, чем за 2 мин до отхода следующего трамвая?
(*Ответ*: 0,4.)

17.6. а) X – нормально распределенная величина с параметрами $m=1$, $\sigma=0{,}4$. Найти $P\{|X-1{,}5|<0{,}5\}$.

б) X – нормально распределенная величина с параметрами $m=1$, $\sigma=3$. Найти $P\{|X-1|<2\}$.

17.7. Дана таблица распределения вероятностей двумерной случайной величины $(X;Y)$:

$X\setminus Y$	-1	2	3	4
0	0,16	0,12	0,14	0,08
1	0,08	0,1	0,09	0,08
2	0,06	0,04	0,03	0,02

Найти частные законы распределения случайных величин X,Y, $M(X)$, $M(Y)$, $M(X\cdot Y)$, $D(X)$, $D(Y)$, $\mathrm{cov}(X,Y)$, r_{XY}, составить ковариационную матрицу $\mathbf{\Sigma}$, найти обобщенную дисперсию $|\mathbf{\Sigma}|$.

17.8. Плотность распределения непрерывной двумерной случайной величины (X,Y) имеет вид:

$$p(x,y)=\begin{cases} Axy(4x+3y), & (x,y)\in D, \\ 0, & (x,y)\notin D, \end{cases}$$

где область D – треугольник, образованный осями координат Ox и Oy, а также прямой, отсекающей от них отрезки $x_0=-2$ и $y_0=1$ соответственно. Требуется найти: а) константу A; б) одномерные плотности распределения $p(x)$ и $p(y)$; в) числовые характеристики каждой СВ X и Y; г) ковариацию $\operatorname{cov}(X,Y)$ и коэффициент корреляции r_{XY}; д) составить ковариационную матрицу $\mathbf{\Sigma}$ и найти обобщенную дисперсию $|\mathbf{\Sigma}|$.

18 ВАРИАНТ

18.1. Случайная величина имеет распределение, представленное таблицей:

X	-1	0	1	2	3
p_i	0,1	0,15	0,2	a	0,3

Найти: a, $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$ случайной величины X.

Построить многоугольник распределения, найти функцию распределения $F(x)$ и построить ее график.

18.2. В первой коробке 10 сальников, из них 2 бракованных, во второй – 16 сальников, из них 4 бракованных, в третьей – 12, из них 3 бракованных. СВ X – число бракованных сальников при условии, что из каждой коробки взято наугад по одному сальнику.

Найти закон распределения указанной дискретной СВ X и ее функцию распределения $F(x)$, построить график этой функции. Вычислить математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$.

(*Ответ:* $M(X)=0{,}7$, $D(X)=0{,}535$.)

18.3. Дана функция распределения $F(x)$ НСВ X. Найти коэффициент A, плотность распределения вероятностей $p(x)$, математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$ и вероятность попадания СВ X на отрезок $[a;b]$. Построить графики функций $F(x)$ и $p(x)$, если $a=0, b=1$ и

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x<0, \\ A(x^3+3x), & 0\le x\le 2, \\ 1, & x>2. \end{cases}$$

(*Ответ*: $A=\dfrac{1}{14}$, $M(X)=1{,}29$, $D(X)=0{,}29$, $P(0\le X\le 1)=0{,}29$.)

18.4. Пусть X – непрерывная случайная величина с плотностью распределения $p(x)$, заданная следующим образом:

$$p(x)=\begin{cases} Ax^5, & x\in(0;1], \\ 0, & x\notin(0;1]. \end{cases}$$

Найти A, $F(x)$, $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$. Построить графики $p(x)$ и $F(x)$.

18.5. Минутная стрелка часов перемещается скачком в конце каждой минуты. Найти вероятность того, что в данное мгновение часы покажут время, которое отличается от истинного не более чем на 20 с. (*Ответ*: 0,6667.)

18.6. а) X – нормально распределенная величина с параметрами $m=2$, $\sigma=0{,}4$. Найти $P\{0{,}3<X<1\}$.

б) X – нормально распределенная величина с параметрами $m=1{,}5$, $\sigma=2$. Найти $P\{|X-1{,}5|<1\}$.

18.7. Дана таблица распределения вероятностей двумерной случайной величины $(X;Y)$:

$X\setminus Y$	-2	-1	1	2
-2	0,05	0,1	0,1	0,05
0	0,05	0,05	0,1	0,1
2	0,1	0,05	0,1	0,15

Найти частные законы распределения случайных величин X, Y, $M(X)$, $M(Y)$, $M(X \cdot Y)$, $D(X)$, $D(Y)$, $\operatorname{cov}(X,Y)$, r_{XY}, составить ковариационную матрицу $\mathbf{\Sigma}$, найти обобщенную дисперсию $|\mathbf{\Sigma}|$.

18.8. Плотность распределения непрерывной двумерной случайной величины (X,Y) имеет вид:

$$p(x,y)=\begin{cases} Axy(x+3y), & (x,y)\in D, \\ 0, & (x,y)\notin D, \end{cases}$$

где область D – треугольник, образованный осями координат Ox и Oy, а также прямой, отсекающей от них отрезки $x_0 = 2$ и $y_0 = -2$ соответственно. Требуется найти: а) константу A; б) одномерные плотности распределения $p(x)$ и $p(y)$; в) числовые характеристики каждой СВ X и Y; г) ковариацию $\operatorname{cov}(X,Y)$ и коэффициент корреляции r_{XY}; д) составить ковариационную матрицу $\mathbf{\Sigma}$ и найти обобщенную дисперсию $|\mathbf{\Sigma}|$.

19 ВАРИАНТ

19.1. Случайная величина имеет распределение, представленное таблицей:

X	1	2	3	4	5
p_i	0,1	0,15	0,25	a	0,3

Найти: a, $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$ случайной величины X.

Построить многоугольник распределения, найти функцию распределения $F(x)$ и построить ее график.

19.2. Рабочий обслуживает четыре станка. Вероятность выхода из строя в течение смены для первого станка равна 0,6, для второго – 0,5, для третьего – 0,4, для четвертого – 0,5. СВ X – число станков, вышедших из строя за смену.

Найти закон распределения указанной дискретной СВ X и ее функцию распределения $F(x)$, построить график этой функ-

ции. Вычислить математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$.
(*Ответ:* $M(X)=2$, $D(X)=0{,}98$.)

19.3. Дана функция распределения $F(x)$ НСВ X. Найти коэффициент A, плотность распределения вероятностей $p(x)$, математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$ и вероятность попадания СВ X на отрезок $[a;b]$. Построить графики функций $F(x)$ и $p(x)$, если $a=1{,}5$, $b=2$ и

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x<1, \\ A(x^2-x), & 1\le x\le 2, \\ 1, & x>2. \end{cases}$$

(*Ответ*: $A=\frac{1}{2}$, $M(X)=\frac{19}{12}$, $D(X)=\frac{11}{144}$, $P(1{,}5\le X\le 2)=\frac{5}{8}$.)

19.4. Пусть X – непрерывная случайная величина с плотностью распределения $p(x)$, заданная следующим образом:

$$p(x)=\begin{cases} Ax^3, & x\in(0;\,2], \\ 0, & x\notin(0;\,2]. \end{cases}$$

Найти A, $F(x)$, $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$. Построить графики $p(x)$ и $F(x)$.

19.5. При заданном положении точки разрыва снаряда цель оказывается накрытой пуассоновским полем осколков с плотностью $\lambda=2{,}5$ осколков/м^2. Площадь проекции цели на плоскость, на которой наблюдается осколочное поле, равна 0,8 м^2. Каждый осколок, попавший в цель, поражает ее с полной достоверностью. Найти вероятность того, что цель будет поражена.
(*Ответ*:0,865.)

19.6. а) X – нормально распределенная величина с параметрами $m=3$, $\sigma=0{,}5$. Найти $P\{2<X<4\}$.

б) X – нормально распределенная величина с параметрами $m=0{,}5$, $\sigma=2$. Найти $P\{|X-0{,}5|<2\}$.

19.7. Дана таблица распределения вероятностей двумерной случайной величины $(X;Y)$:

$X \setminus Y$	-1	2	3	4
-2	0,1	0,15	0,15	0,05
0	0,1	0,05	0,04	0,06
4	0,04	0,02	0,12	0,12

Найти частные законы распределения случайных величин X,Y, $M(X)$, $M(Y)$, $M(X\cdot Y)$, $D(X)$, $D(Y)$, $\operatorname{cov}(X,Y)$, r_{XY}, составить ковариационную матрицу $\mathbf{\Sigma}$, найти обобщенную дисперсию $|\mathbf{\Sigma}|$.

19.8. Плотность распределения непрерывной двумерной случайной величины (X,Y) имеет вид:

$$p(x,y)=\begin{cases} Axy(-2x+y), & (x,y)\in D, \\ 0, & (x,y)\notin D, \end{cases}$$

где область D – треугольник, образованный осями координат Ox и Oy, а также прямой, отсекающей от них отрезки $x_0=-1$ и $y_0=4$ соответственно. Требуется найти: а) константу A; б) одномерные плотности распределения $p(x)$ и $p(y)$; в) числовые характеристики каждой СВ X и Y; г) ковариацию $\operatorname{cov}(X,Y)$ и коэффициент корреляции r_{XY}; д) составить ковариационную матрицу $\mathbf{\Sigma}$ и найти обобщенную дисперсию $|\mathbf{\Sigma}|$.

20 ВАРИАНТ

20.1. Случайная величина имеет распределение, представленное таблицей:

X	0,2	0,3	0,5	0,6	0,7
p_i	0,1	0,2	0,3	a	0,25

Найти: a, $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$ случайной величины X.

Построить многоугольник распределения, найти функцию распределения $F(x)$ и построить ее график.

20.2. Вероятность выигрыша по одному билету лотереи равна 1/6. СВ X – число выигрышных билетов из четырех.

Найти закон распределения указанной дискретной СВ X и ее функцию распределения $F(x)$, построить график этой функции. Вычислить математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$.
(*Ответ:* $M(X)=2/3,\ D(X)=5/9$.)

20.3. Дана функция распределения $F(x)$ НСВ X. Найти коэффициент A, плотность распределения вероятностей $p(x)$, математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$ и вероятность попадания СВ X на отрезок $[a;b]$. Построить графики функций $F(x)$ и $p(x)$, если $a=0, b=1$ и

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x<0, \\ A(x^2+x), & 0\le x\le 2, \\ 1, & x>2. \end{cases}$$

(*Ответ*: $A=\dfrac{1}{6}$, $M(X)=1{,}22$, $D(X)=0{,}28$, $P(0\le X\le 1)=0{,}33$.)

20.4. Пусть X – непрерывная случайная величина с плотностью распределения $p(x)$, заданная следующим образом:

$$p(x)=\begin{cases} A\cos x, & x\in\left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right], \\ 0, & x\notin\left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]. \end{cases}$$

Найти A, $F(x)$, $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$. Построить графики $p(x)$ и $F(x)$.

20.5. Число атак истребителей, которым может подвергнуться бомбардировщик над территорией противника, есть случайная величина, распределенная по закону Пуассона с математическим ожиданием $a=3$. Каждая атака с вероятностью 0,4 заканчивается поражением бомбардировщика. Определить вероятность поражения бомбардировщика в результате трех атак. (*Ответ*: 0,784.)

20.6. а) X – нормально распределенная величина с параметрами $m = 3$, $\sigma = 0{,}2$. Найти $P\{2 < X < 3\}$.

б) X – нормально распределенная величина с параметрами $m = 0{,}5$, $\sigma = 1$. Найти $P\{|X - 0{,}5| < 1\}$.

20.7. Дана таблица распределения вероятностей двумерной случайной величины $(X;Y)$:

$X \setminus Y$	-1	0	1	3
-1	0,1	0,15	0,14	0,06
1	0,15	0,1	0,06	0,05
3	0,05	0,05	0,05	0,04

Найти частные законы распределения случайных величин X, Y, $M(X)$, $M(Y)$, $M(X \cdot Y)$, $D(X)$, $D(Y)$, $\operatorname{cov}(X,Y)$, r_{XY}, составить ковариационную матрицу $\mathbf{\Sigma}$, найти обобщенную дисперсию $|\mathbf{\Sigma}|$.

20.8. Плотность распределения непрерывной двумерной случайной величины (X,Y) имеет вид:

$$p(x,y) = \begin{cases} Axy(4x - y), & (x,y) \in D, \\ 0, & (x,y) \notin D, \end{cases}$$

где область D – треугольник, образованный осями координат Ox и Oy, а также прямой, отсекающей от них отрезки $x_0 = 3$ и $y_0 = -1$ соответственно. Требуется найти: а) константу A; б) одномерные плотности распределения $p(x)$ и $p(y)$; в) числовые характеристики каждой СВ X и Y; г) ковариацию $\operatorname{cov}(X,Y)$ и коэффициент корреляции r_{XY}; д) составить ковариационную матрицу $\mathbf{\Sigma}$ и найти обобщенную дисперсию $|\mathbf{\Sigma}|$.

21 В А Р И А Н Т

21.1. Случайная величина имеет распределение, представленное таблицей:

X	1	2	3	4	5
p_i	0,1	0,15	0,25	a	0,3

Найти: a, $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$ случайной величины X.

Построить многоугольник распределения, найти функцию распределения $F(x)$ и построить ее график.

21.2. В первой студенческой группе из 24 человек 4 отличника, во второй из 22 человек 3 отличника, в третьей из 24 – 6 отличников и в четвертой из 20 – 2 отличника. СВ X – число отличников, приглашенных на конференцию, при условии, что из каждой группы выделили случайным образом по одному человеку.

Найти закон распределения указанной дискретной СВ X и ее функцию распределения $F(x)$, построить график этой функции. Вычислить математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$.

(*Ответ:* $M(X)=0{,}65$, $D(X)=0{,}53$.)

21.3. Дана функция распределения $F(x)$ НСВ X. Найти коэффициент A, плотность распределения вероятностей $p(x)$, математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$ и вероятность попадания СВ X на отрезок $[a;b]$. Построить графики функций $F(x)$ и $p(x)$, если $a=0, b=1$ и

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x<0, \\ A(x^2+3x), & 0\le x\le 2, \\ 1, & x>2. \end{cases}$$

(*Ответ*: $A=\dfrac{1}{10}$, $M(X)=1{,}13$, $D(X)=0{,}32$, $P(0\le X\le 1)=0{,}4$.)

21.4. Пусть X – непрерывная случайная величина с плотностью распределения $p(x)$, заданная следующим образом:

$$p(x)=\begin{cases} A\cos x, & x\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right], \\ 0, & x\notin\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right]. \end{cases}$$

Найти A, $F(x)$, $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$. Построить графики $p(x)$ и $F(x)$.

21.5. Производят взвешивание вещества без систематических ошибок. Случайная ошибка взвешивания распределена нормально с математическим ожиданием 20 кг и средним квадратическим отклонением 2 кг. Найти вероятность того, что следующее взвешивание отличается от математического ожидания не более чем на 100 г.
(*Ответ*: 0,0398.)

21.6. а) X – нормально распределенная величина с параметрами $m=0{,}5$, $\sigma=0{,}2$. Найти $P\{0{,}2<X<1\}$.

б) X – нормально распределенная величина с параметрами $m=1{,}5$, $\sigma=0{,}5$. Найти $P\{|X-1{,}5|<1\}$.

21.7. Дана таблица распределения вероятностей двумерной случайной величины $(X;Y)$:

$X\setminus Y$	-1	0	1	4
-1	0,05	0,1	0,1	0,05
3	0,05	0,05	0,1	0,1
5	0,1	0,05	0,1	0,15

Найти частные законы распределения случайных величин X,Y, $M(X)$, $M(Y)$, $M(X\cdot Y)$, $D(X)$, $D(Y)$, $\operatorname{cov}(X,Y)$, r_{XY}, составить ковариационную матрицу $\mathbf{\Sigma}$, найти обобщенную дисперсию $|\mathbf{\Sigma}|$.

21.8. Плотность распределения непрерывной двумерной случайной величины (X,Y) имеет вид:

$$p(x,y)=\begin{cases}Axy(2x+2y), & (x,y)\in D,\\ 0, & (x,y)\notin D,\end{cases}$$

где область D – треугольник, образованный осями координат Ox и Oy, а также прямой, отсекающей от них отрезки $x_0=2$ и $y_0=3$ соответственно. Требуется найти: а) константу A; б) одномерные плотности распределения $p(x)$ и $p(y)$; в) числовые характеристики каждой СВ X и Y; г) ковариацию $\operatorname{cov}(X,Y)$ и коэффициент корреляции r_{XY}; д) составить ковариационную матрицу $\mathbf{\Sigma}$ и найти обобщенную дисперсию $|\mathbf{\Sigma}|$.

22 В А Р И А Н Т

22.1. Случайная величина имеет распределение, представленное таблицей:

X	1	2	3	4	5
p_i	a	0,15	0,25	0,1	0,3

Найти: a, $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$ случайной величины X.

Построить многоугольник распределения, найти функцию распределения $F(x)$ и построить ее график.

22.2. Вероятность выхода из строя каждого из трех блоков прибора в течение гарантийного срока равна 0,3. СВ X – число блоков, вышедших из строя в течение гарантийного срока.

Найти закон распределения указанной дискретной СВ X и ее функцию распределения $F(x)$, построить график этой функции. Вычислить математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$.

(*Ответ:* $M(X)=0{,}9$, $D(X)=0{,}63$.)

22.3. Дана функция распределения $F(x)$ НСВ X. Найти коэффициент A, плотность распределения вероятностей $p(x)$, математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$ и вероятность попадания СВ X на отрезок $[a;b]$. Построить графики функций $F(x)$ и $p(x)$, если $a=1{,}2$, $b=1{,}5$ и

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x<1, \\ A(x^2-x), & 1\le x\le 2, \\ 1, & x>2. \end{cases}$$

(*Ответ*: $A=\frac{1}{2}$, $M(X)=1{,}58$, $D(X)=0{,}08$, $P(1{,}2\le X\le 1{,}5)=0{,}26$.)

22.4. Пусть X – непрерывная случайная величина с плотностью распределения $p(x)$, заданная следующим образом:

$$p(x)=\begin{cases} Ax^5, & x\in(0;1], \\ 0, & x\notin(0;1]. \end{cases}$$

Найти A, $F(x)$, $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$. Построить графики $p(x)$ и $F(x)$.

22.5. Диаметр подшипников, изготовленных на заводе, представляет собой случайную величину, распределенную нормально с математическим ожиданием 1,5 см и средним квадратическим отклонением 0,04 см. Найти вероятность того, что размер наугад взятого подшипника колеблется от 1 до 2 см.
(*Ответ*: ≈ 1.)

22.6. а) X – нормально распределенная величина с параметрами $m=3$, $\sigma=0{,}8$. Найти $P\{2<X<4\}$.

б) X – нормально распределенная величина с параметрами $m=0{,}5$, $\sigma=0{,}4$. Найти $P\{|X-0{,}5|<0{,}2\}$.

22.7. Дана таблица распределения вероятностей двумерной случайной величины $(X;Y)$:

$X \setminus Y$	1	2	3	4
0	0,1	0,1	0,1	0,1
1	0,15	0,1	0,05	0,05
2	0,05	0,05	0,1	0,05

Найти частные законы распределения случайных величин X, Y, $M(X)$, $M(Y)$, $M(X\cdot Y)$, $D(X)$, $D(Y)$, $\operatorname{cov}(X,Y)$,

r_{XY}, составить ковариационную матрицу $\mathbf{\Sigma}$, найти обобщенную дисперсию $|\mathbf{\Sigma}|$.

22.8. Плотность распределения непрерывной двумерной случайной величины (X,Y) имеет вид:

$$p(x,y)=\begin{cases} Axy(2x+y), & (x,y)\in D, \\ 0, & (x,y)\notin D, \end{cases}$$

где область D – треугольник, образованный осями координат Ox и Oy, а также прямой, отсекающей от них отрезки $x_0=4$ и $y_0=1$ соответственно. Требуется найти: а) константу A; б) одномерные плотности распределения $p(x)$ и $p(y)$; в) числовые характеристики каждой СВ X и Y; г) ковариацию $\text{cov}(X,Y)$ и коэффициент корреляции r_{XY}; д) составить ковариационную матрицу $\mathbf{\Sigma}$ и найти обобщенную дисперсию $|\mathbf{\Sigma}|$.

23 ВАРИАНТ

23.1. Случайная величина имеет распределение, представленное таблицей:

X	-1	0	1	2	3
p_i	0,1	a	0,2	0,25	0,3

Найти: a, $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$ случайной величины X.

Построить многоугольник распределения, найти функцию распределения $F(x)$ и построить ее график.

23.2. Вероятность того, что деталь с первого автомата удовлетворяет стандарту, равна 0,9, для второго автомата – 0,8, для третьего – 0,7. СВ X – число деталей, удовлетворяющих стандарту, при условии, что с каждого автомата взято наугад по одной детали.

Найти закон распределения указанной дискретной СВ X и ее функцию распределения $F(x)$, построить график этой функ-

ции. Вычислить математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$.
(*Ответ:* $M(X)=2{,}4$, $D(X)=0{,}46$.)

23.3. Дана функция распределения $F(x)$ НСВ X. Найти коэффициент A, плотность распределения вероятностей $p(x)$, математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$ и вероятность попадания СВ X на отрезок $[a;b]$. Построить графики функций $F(x)$ и $p(x)$, если $a=1$, $b=3$ и

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x<2, \\ Ax-1, & 2\le x\le 4, \\ 1, & x>4. \end{cases}$$

(*Ответ*: $A=\frac{1}{2}$, $M(X)=3$, $D(X)=0{,}33$, $P(1\le X\le 3)=0{,}5$).

23.4. Пусть X – непрерывная случайная величина с плотностью распределения $p(x)$, заданная следующим образом:

$$p(x)=\begin{cases} A\cos 2x, & x\in\left(0;\frac{\pi}{4}\right], \\ 0, & x\notin\left(0;\frac{\pi}{4}\right]. \end{cases}$$

Найти A, $F(x)$, $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$. Построить графики $p(x)$ и $F(x)$.

23.5. Цена деления шкалы амперметра равна 0,1 А. Показания округляют до ближайшего целого деления. Найти вероятность того, что при отсчете будет сделана ошибка, превышающая 0,04 А.
(*Ответ:* 0,6.)

23.6. а) X – нормально распределенная величина с параметрами $m=2$, $\sigma=0{,}4$. Найти $P\{2<X<3\}$.

б) X – нормально распределенная величина с параметрами $m=1$, $\sigma=0{,}3$. Найти $P\{|X-1|<0{,}1\}$.

23.7. Дана таблица распределения вероятностей двумерной случайной величины $(X;Y)$:

$X \setminus Y$	-1	1	2	4
0	0,05	0,15	0,1	0,05
1	0,1	0,1	0,05	0,05
2	0,05	0,05	0,15	0,1

Найти частные законы распределения случайных величин X, Y, $M(X)$, $M(Y)$, $M(X \cdot Y)$, $D(X)$, $D(Y)$, $\operatorname{cov}(X,Y)$, r_{XY}, составить ковариационную матрицу $\mathbf{\Sigma}$, найти обобщенную дисперсию $|\mathbf{\Sigma}|$.

23.8. Плотность распределения непрерывной двумерной случайной величины (X,Y) имеет вид:

$$p(x,y) = \begin{cases} Axy(3x+y), & (x,y) \in D, \\ 0, & (x,y) \notin D, \end{cases}$$

где область D – треугольник, образованный осями координат Ox и Oy, а также прямой, отсекающей от них отрезки $x_0 = -3$ и $y_0 = 2$ соответственно. Требуется найти: а) константу A; б) одномерные плотности распределения $p(x)$ и $p(y)$; в) числовые характеристики каждой СВ X и Y; г) ковариацию $\operatorname{cov}(X,Y)$ и коэффициент корреляции r_{XY}; д) составить ковариационную матрицу $\mathbf{\Sigma}$ и найти обобщенную дисперсию $|\mathbf{\Sigma}|$.

24 ВАРИАНТ

24.1. Случайная величина имеет распределение, представленное таблицей:

X	0,2	0,4	0,7	0,8	1,0
p_i	0,1	0,15	a	0,2	0,3

Найти: a, $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$ случайной величины X.

Построить многоугольник распределения, найти функцию распределения $F(x)$ и построить ее график.

24.2. Вероятности поражения цели каждым из трех стрелков равны соответственно 0,7; 0,8; 0,6. СВ X – число поражений цели при условии, что каждый из стрелков сделал по одному выстрелу.

Найти закон распределения указанной дискретной СВ X и ее функцию распределения $F(x)$, построить график этой функции. Вычислить математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$.
(*Ответ:* $M(X)=2{,}1,\ D(X)=0{,}46$.)

24.3. Дана функция распределения $F(x)$ НСВ X. Найти коэффициент A, плотность распределения вероятностей $p(x)$, математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$ и вероятность попадания СВ X на отрезок $[a;b]$. Построить графики функций $F(x)$ и $p(x)$, если $a=2,\ b=5$ и

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ Ax, & 0\le x\le 6,\\ 1, & x>6.\end{cases}$$

(*Ответ*: $A=\dfrac{1}{6},\ M(X)=3,\ D(X)=3, P(2\le X\le 5)=0{,}5$.)

24.4. Пусть X – непрерывная случайная величина с плотностью распределения $p(x)$, заданная следующим образом:

$$p(x)=\begin{cases}A\sin 3x, & x\in\left(\dfrac{\pi}{6};\dfrac{\pi}{3}\right],\\ 0, & x\notin\left(\dfrac{\pi}{6};\dfrac{\pi}{3}\right].\end{cases}$$

Найти A, $F(x)$, $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$. Построить графики $p(x)$ и $F(x)$.

24.5. Найти дисперсию и среднее квадратическое отклонение СВ X, распределенной равномерно в интервале $(2;10)$.
(*Ответ*: $D(X)=5{,}33,\ \sigma(X)=2{,}31$.)

24.6. а) X – нормально распределенная величина с параметрами $m = 2{,}5$, $\sigma = 0{,}4$. Найти $P\{0{,}8 < X < 1{,}3\}$.

б) X – нормально распределенная величина с параметрами $m = 1{,}5$, $\sigma = 2$. Найти $P\{|X - 1{,}5| < 1\}$.

24.7. Дана таблица распределения вероятностей двумерной случайной величины $(X;Y)$:

$X \setminus Y$	0	1	2	3
-1	0,1	0,15	0,1	0,05
1	0,05	0,1	0,1	0,05
3	0,05	0,05	0,1	0,1

Найти частные законы распределения случайных величин X, Y, $M(X)$, $M(Y)$, $M(X \cdot Y)$, $D(X)$, $D(Y)$, $\operatorname{cov}(X,Y)$, r_{XY}, составить ковариационную матрицу $\mathbf{\Sigma}$, найти обобщенную дисперсию $|\mathbf{\Sigma}|$.

24.8. Плотность распределения непрерывной двумерной случайной величины (X,Y) имеет вид:

$$p(x,y) = \begin{cases} Axy(x+4y), & (x,y) \in D, \\ 0, & (x,y) \notin D, \end{cases}$$

где область D – треугольник, образованный осями координат Ox и Oy, а также прямой, отсекающей от них отрезки $x_0 = 3$ и $y_0 = -3$ соответственно. Требуется найти: а) константу A; б) одномерные плотности распределения $p(x)$ и $p(y)$; в) числовые характеристики каждой СВ X и Y; г) ковариацию $\operatorname{cov}(X,Y)$ и коэффициент корреляции r_{XY}; д) составить ковариационную матрицу $\mathbf{\Sigma}$ и найти обобщенную дисперсию $|\mathbf{\Sigma}|$.

25 ВАРИАНТ

25.1. Случайная величина имеет распределение, представленное таблицей:

X	1	2	3	4	5
p_i	0,3	0,2	0,15	a	0,1

Найти: a, $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$ случайной величины X.

Построить многоугольник распределения, найти функцию распределения $F(x)$ и построить ее график.

25.2. Вероятности выхода из строя в течение гарантийного срока каждого из трех узлов прибора равны соответственно 0,2; 0,3; 0,1. СВ X – число узлов, вышедших из строя в течение гарантийного срока.

Найти закон распределения указанной дискретной СВ X и ее функцию распределения $F(x)$, построить график этой функции. Вычислить математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$.

(*Ответ:* $M(X)=0{,}6$, $D(X)=0{,}46$.)

25.3. Дана функция распределения $F(x)$ НСВ X. Найти коэффициент A, плотность распределения вероятностей $p(x)$, математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$ и вероятность попадания СВ X на отрезок $[a;b]$. Построить графики функций $F(x)$ и $p(x)$, если $a=-0{,}5$, $b=0{,}5$ и

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x<-1, \\ Ax+0{,}5, & -1\le x\le 1, \\ 1, & x>1. \end{cases}$$

(*Ответ:* $A=\dfrac{1}{2}$, $M(X)=0$, $D(X)=0{,}33$, $P(-0{,}5\le X\le 0{,}5)=0{,}5$.)

25.4. Пусть X – непрерывная случайная величина с плотностью распределения $p(x)$, заданная следующим образом:

$$p(x)=\begin{cases} A(x-0{,}5), & x\in(1;\,2], \\ 0, & x\notin(1;\,2]. \end{cases}$$

Найти A, $F(x)$, $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$. Построить графики $p(x)$ и $F(x)$.

25.5. Радиостанция ведет передачу информации в течение 10 мкс. Работа ее происходит при наличии хаотической импульсной помехи, среднее число импульсов которой в секунду составляет 10^4. Для срыва передачи достаточно попадания одного импульса помехи в период работы станции. Считая, что число импульсов помехи, попадающих в данный интервал времени, распределено по закону Пуассона, найти вероятность срыва передачи информации.
(*Ответ*: 0,09516.)

25.6. а) X – нормально распределенная величина с параметрами $m = 3$, $\sigma = 0{,}5$. Найти $P\{2 < X < 4\}$.

б) X – нормально распределенная величина с параметрами $m = 0{,}5$, $\sigma = 2$. Найти $P\{|X - 0{,}5| < 3\}$.

25.7. Дана таблица распределения вероятностей двумерной случайной величины $(X;Y)$:

$X \backslash Y$	1	2	3	4
-1	0,1	0,1	0,15	0,05
0	0,05	0,1	0,1	0,05
1	0,15	0,1	0,05	0

Найти частные законы распределения случайных величин X, Y, $M(X)$, $M(Y)$, $M(X \cdot Y)$, $D(X)$, $D(Y)$, $\operatorname{cov}(X,Y)$, r_{XY}, составить ковариационную матрицу $\mathbf{\Sigma}$, найти обобщенную дисперсию $|\mathbf{\Sigma}|$.

25.8. Плотность распределения непрерывной двумерной случайной величины (X,Y) имеет вид:

$$p(x,y) = \begin{cases} Axy(-3x + 2y), & (x,y) \in D, \\ 0, & (x,y) \notin D, \end{cases}$$

где область D – треугольник, образованный осями координат Ox и Oy, а также прямой, отсекающей от них отрезки $x_0 = -2$ и $y_0 = 5$ соответственно. Требуется найти: а) константу A;

б) одномерные плотности распределения $p(x)$ и $p(y)$; в) числовые характеристики каждой СВ X и Y; г) ковариацию $\operatorname{cov}(X,Y)$ и коэффициент корреляции r_{XY}; д) составить ковариационную матрицу $\mathbf{\Sigma}$ и найти обобщенную дисперсию $|\mathbf{\Sigma}|$.

26 ВАРИАНТ

26.1. Случайная величина имеет распределение, представленное таблицей:

X	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
p_i	0,1	0,15	0,25	a	0,3

Найти: a, $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$ случайной величины X.

Построить многоугольник распределения, найти функцию распределения $F(x)$ и построить ее график.

26.2. Вероятность попадания мячом в корзину при каждом броске для данного баскетболиста равна 0,4. СВ X – число попадания при четырех бросках.

Найти закон распределения указанной дискретной СВ X и ее функцию распределения $F(x)$, построить график этой функции. Вычислить математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$.

(*Ответ:* $M(X)=1{,}6$, $D(X)=0{,}96$.)

26.3. Дана функция распределения $F(x)$ НСВ X. Найти коэффициент A, плотность распределения вероятностей $p(x)$, математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$ и вероятность попадания СВ X на отрезок $[a;b]$. Построить графики функций $F(x)$ и $p(x)$, если $a=2{,}5$, $b=2{,}8$ и

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x<2, \\ (x-2)^2, & 2\le x\le 3, \\ 1, & x>3. \end{cases}$$

(*Ответ*: $A=1$, $M(X)=2{,}67$, $D(X)=0{,}06$, $P(2{,}5\le X\le 2{,}8)=0{,}39$.)

26.4. Пусть X – непрерывная случайная величина с плотностью распределения $p(x)$, заданная следующим образом:

$$p(x)=\begin{cases}Ax^2, & x\in(-1;1],\\ 0, & x\notin(-1;1].\end{cases}$$

Найти A, $F(x)$, $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$. Построить графики $p(x)$ и $F(x)$.

26.5. Найти математическое ожидание и дисперсию: а) числа очков, выпавших при одном бросании игральной кости; б) суммы очков, выпавших при бросании двух игральных костей. (*Ответ*: а) $M(X)=3{,}5$, $D(X)=2{,}92$; б) $M(X)=7$, $D(X)=5{,}83$.)

26.6. а) X – нормально распределенная величина с параметрами $m=3$, $\sigma=0{,}2$. Найти $P\{2<X<3\}$.

б) X – нормально распределенная величина с параметрами $m=0{,}5$, $\sigma=1$. Найти $P\{|X-0{,}5|<1{,}5\}$.

26.7. Дана таблица распределения вероятностей двумерной случайной величины $(X;Y)$:

$X\backslash Y$	-1	0	3	5
0	0,1	0,12	0,1	0,08
2	0,15	0,1	0,05	0,1
4	0,05	0,08	0,05	0,02

Найти частные законы распределения случайных величин X, Y, $M(X)$, $M(Y)$, $M(X\cdot Y)$, $D(X)$, $D(Y)$, $\operatorname{cov}(X,Y)$, r_{XY}, составить ковариационную матрицу $\mathbf{\Sigma}$, найти обобщенную дисперсию $|\mathbf{\Sigma}|$.

26.8. Плотность распределения непрерывной двумерной случайной величины (X,Y) имеет вид:

$$p(x,y)=\begin{cases}Axy(x-4y), & (x,y)\in D,\\ 0, & (x,y)\notin D,\end{cases}$$

где область D – треугольник, образованный осями координат Ox и Oy, а также прямой, отсекающей от них отрезки $x_0 = 3$ и $y_0 = -2$ соответственно. Требуется найти: а) константу A; б) одномерные плотности распределения $p(x)$ и $p(y)$; в) числовые характеристики каждой СВ X и Y; г) ковариацию $\text{cov}(X,Y)$ и коэффициент корреляции r_{XY}; д) составить ковариационную матрицу $\boldsymbol{\Sigma}$ и найти обобщенную дисперсию $|\boldsymbol{\Sigma}|$.

27 ВАРИАНТ

27.1. Случайная величина имеет распределение, представленное таблицей:

X	1	2	3	4	5
p_i	a	0,15	0,25	0,2	0,3

Найти: a, $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$ случайной величины X.

Построить многоугольник распределения, найти функцию распределения $F(x)$ и построить ее график.

27.2. В партии из 25 изделий 6 бракованных. Для контроля их качества случайным образом отбирают четыре изделия. СВ X – число бракованных изделий среди отобранных.

Найти закон распределения указанной дискретной СВ X и ее функцию распределения $F(x)$, построить график этой функции. Вычислить математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$.

(*Ответ*: $M(X) = 0{,}96$, $D(X) = 0{,}73$.)

27.3. Дана функция распределения $F(x)$ НСВ X. Найти коэффициент A, плотность распределения вероятностей $p(x)$, математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$ и вероятность попадания СВ X на отрезок $[a;b]$. Построить графики функций $F(x)$ и $p(x)$, если $a = 1{,}5$, $b = 1{,}9$ и

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x<1, \\ A(x^2-x), & 1\le x\le 2, \\ 1, & x>2. \end{cases}$$

(*Ответ*: $A=0{,}5$, $M(X)=1{,}59$, $D(X)=0{,}08$, $P(1{,}5\le X\le 1{,}9)=0{,}48$.)

27.4. Пусть X – непрерывная случайная величина с плотностью распределения $p(x)$, заданная следующим образом:

$$p(x)=\begin{cases} A\sin 2x, & x\in\left(0;\dfrac{\pi}{4}\right], \\ 0, & x\notin\left(0;\dfrac{\pi}{4}\right]. \end{cases}$$

Найти A, $F(x)$, $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$. Построить графики $p(x)$ и $F(x)$.

27.5. Считается, что отклонение длины изготавливаемых деталей от стандартных является случайной величиной, распределенной по нормальному закону. Зная, что длина стандартной детали 40 см, а среднее квадратическое отклонение 0,4 см, определить, какую точность длины изделия можно гарантировать с вероятностью 0,8.

(*Ответ*:0,512 см.)

27.6. а) X – нормально распределенная величина с параметрами $m=0$, $\sigma=0{,}2$. Найти $P\{0{,}2<X<1\}$.

б) X – нормально распределенная величина с параметрами $m=1{,}5$, $\sigma=0{,}5$. Найти $P\{|X-1{,}5|<1\}$.

27.7. Дана таблица распределения вероятностей двумерной случайной величины $(X;Y)$:

$X\setminus Y$	1	2	3	6
0	0,16	0,12	0,14	0,08
2	0,08	0,1	0,09	0,08
5	0,06	0,04	0,03	0,02

Найти частные законы распределения случайных величин X,Y, $M(X)$, $M(Y)$, $M(X\cdot Y)$, $D(X)$, $D(Y)$, $\operatorname{cov}(X,Y)$,

r_{XY}, составить ковариационную матрицу $\mathbf{\Sigma}$, найти обобщенную дисперсию $|\mathbf{\Sigma}|$.

27.8. Плотность распределения непрерывной двумерной случайной величины (X,Y) имеет вид:

$$p(x,y)=\begin{cases} Axy(x+y), & (x,y)\in D, \\ 0, & (x,y)\notin D, \end{cases}$$

где область D – треугольник, образованный осями координат Ox и Oy, а также прямой, отсекающей от них отрезки $x_0=3$ и $y_0=2$ соответственно. Требуется найти: а) константу A; б) одномерные плотности распределения $p(x)$ и $p(y)$; в) числовые характеристики каждой СВ X и Y; г) ковариацию $\operatorname{cov}(X,Y)$ и коэффициент корреляции r_{XY}; д) составить ковариационную матрицу $\mathbf{\Sigma}$ и найти обобщенную дисперсию $|\mathbf{\Sigma}|$.

28 ВАРИАНТ

28.1. Случайная величина имеет распределение, представленное таблицей:

X	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
p_i	0,2	0,25	0,15	a	0,3

Найти: a, $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$ случайной величины X.

Построить многоугольник распределения, найти функцию распределения $F(x)$ и построить ее график.

28.2. Выход из строя коробки передач происходит по трем основным причинам: поломка зубьев шестерен, недопустимо большие контактные напряжения и излишняя жесткость конструкции. Каждая из причин приводит к поломке коробки передач с одной и той же вероятностью, равной 0,1. СВ X – число причин, приведших к поломке в одном испытании.

Найти закон распределения указанной дискретной НСВ X и ее функцию распределения $F(x)$, построить график этой

функции. Вычислить математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$.
(*Ответ:* $M(X)=0{,}3,\ D(X)=0{,}27$.)

28.3. Дана функция распределения $F(x)$ СВ X. Найти коэффициент A, плотность распределения вероятностей $p(x)$, математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$ и вероятность попадания СВ X на отрезок $[a;b]$. Построить графики функций $F(x)$ и $p(x)$, если $a=\dfrac{\pi}{2}$, $b=\dfrac{5\pi}{6}$ и

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x<\frac{\pi}{2}, \\ -A\cos x, & \frac{\pi}{2}\le x\le \pi, \\ 1, & x>\pi. \end{cases}$$

(*Ответ*: $A=1,\ M(X)=2{,}14,\ D(X)=0{,}14,\ P(\frac{\pi}{2}\le X\le\frac{5\pi}{6})=0{,}87$.)

28.4. Пусть X – непрерывная случайная величина с плотностью распределения $p(x)$, заданная следующим образом:

$$p(x)=\begin{cases} A\sin 3x, & x\in\left(\dfrac{\pi}{6};\dfrac{\pi}{3}\right], \\ 0, & x\notin\left(\dfrac{\pi}{6};\dfrac{\pi}{3}\right]. \end{cases}$$

Найти A, $F(x)$, $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$. Построить графики $p(x)$ и $F(x)$.

28.5. Рост мужчины является случайной величиной, распределенной по нормальному закону с математическим ожиданием, равным 170 см, и дисперсией, равной 49 см^2. Найти вероятность того, что трое наугад выбранных мужчин будут иметь рост от 170 до 175 см.
(*Ответ*: 0,2611.)

28.6. а) X – нормально распределенная величина с параметрами $m=2$, $\sigma=0{,}8$. Найти $P\{2<X<4\}$.

б) X – нормально распределенная величина с параметрами $m=0{,}5$, $\sigma=0{,}4$. Найти $P\{|X-0{,}5|<0{,}2\}$.

28.7. Дана таблица распределения вероятностей двумерной случайной величины $(X;Y)$:

$X \setminus Y$	-2	0	1	3
-2	0,05	0,1	0,1	0,05
1	0,05	0,05	0,1	0,1
2	0,1	0,05	0,1	0,15

Найти частные законы распределения случайных величин X,Y, $M(X)$, $M(Y)$, $M(X\cdot Y)$, $D(X)$, $D(Y)$, $\operatorname{cov}(X,Y)$, r_{XY}, составить ковариационную матрицу $\mathbf{\Sigma}$, найти обобщенную дисперсию $|\mathbf{\Sigma}|$.

28.8. Плотность распределения непрерывной двумерной случайной величины (X,Y) имеет вид:

$$p(x,y)=\begin{cases} Axy(3x+y), & (x,y)\in D,\\ 0, & (x,y)\notin D,\end{cases}$$

где область D – треугольник, образованный осями координат Ox и Oy, а также прямой, отсекающей от них отрезки $x_0=3$ и $y_0=1$ соответственно. Требуется найти: а) константу A; б) одномерные плотности распределения $p(x)$ и $p(y)$; в) числовые характеристики каждой СВ X и Y; г) ковариацию $\operatorname{cov}(X,Y)$ и коэффициент корреляции r_{XY}; д) составить ковариационную матрицу $\mathbf{\Sigma}$ и найти обобщенную дисперсию $|\mathbf{\Sigma}|$.

29 В А Р И А Н Т

29.1. Случайная величина имеет распределение, представленное таблицей:

X	1	2	3	4	5
p_i	0,3	0,2	0,15	0,25	a

Найти: a, $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$ случайной величины X.

Построить многоугольник распределения, найти функцию распределения $F(x)$ и построить ее график.

29.2. Из 39 приборов, испытываемых на надежность, 5 высшей категории. Наугад взяли 4 прибора. СВ X – число приборов высшей категории среди отобранных.

Найти закон распределения указанной дискретной СВ X и ее функцию распределения $F(x)$, построить график этой функции. Вычислить математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$.
(*Ответ:* $M(X)=2/3$, $D(X)=5/9$.)

29.3. Дана функция распределения $F(x)$ НСВ X. Найти коэффициент A, плотность распределения вероятностей $p(x)$, математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$ и вероятность попадания СВ X на отрезок $[a;b]$. Построить графики функций $F(x)$ и $p(x)$, если $a=2, b=4$ и

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x<1, \\ A(x-1), & 1\le x\le 5, \\ 1, & x>5. \end{cases}$$

(*Ответ*: $A=\dfrac{1}{4}$, $M(X)=3$, $D(X)=1{,}33$, $P(2\le X\le 4)=0{,}5$.)

29.4. Пусть X – непрерывная случайная величина с плотностью распределения $p(x)$, заданная следующим образом:

$$p(x)=\begin{cases} Ax^5, & x\in(0;1], \\ 0, & x\notin(0;1]. \end{cases}$$

Найти A, $F(x)$, $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$. Построить графики $p(x)$ и $F(x)$.

29.5. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратичное отклонение СВ X, распределенной равномерно в интервале $(8;14)$.

(*Ответ*: $M(X)=11$, $D(X)=3$, $\sigma(X)=\sqrt{3}$.)

29.6. а) X – нормально распределенная величина с параметрами $m=2$, $\sigma=0{,}4$. Найти $P\{0<X<3\}$.

б) X – нормально распределенная величина с параметрами $m=1$, $\sigma=0{,}3$. Найти $P\{|X-1|<0{,}1\}$.

29.7. Дана таблица распределения вероятностей двумерной случайной величины $(X;Y)$:

$X \setminus Y$	0	1	2	3
-2	0,1	0,15	0,15	0,05
1	0,1	0,05	0,04	0,06
4	0,04	0,02	0,12	0,12

Найти частные законы распределения случайных величин X, Y, $M(X)$, $M(Y)$, $M(X \cdot Y)$, $D(X)$, $D(Y)$, $\mathrm{cov}(X,Y)$, r_{XY}, составить ковариационную матрицу $\mathbf{\Sigma}$, найти обобщенную дисперсию $|\mathbf{\Sigma}|$.

29.8. Плотность распределения непрерывной двумерной случайной величины (X,Y) имеет вид:

$$p(x,y)=\begin{cases} Axy(x+y), & (x,y)\in D, \\ 0, & (x,y)\notin D, \end{cases}$$

где область D – треугольник, образованный осями координат Ox и Oy, а также прямой, отсекающей от них отрезки $x_0=4$ и $y_0=1$ соответственно. Требуется найти: а) константу A; б) одномерные плотности распределения $p(x)$ и $p(y)$; в) числовые характеристики каждой СВ X и Y; г) ковариацию $\mathrm{cov}(X,Y)$ и коэффициент корреляции r_{XY}; д) составить ковариационную матрицу $\mathbf{\Sigma}$ и найти обобщенную дисперсию $|\mathbf{\Sigma}|$.

30 ВАРИАНТ

30.1. Случайная величина имеет распределение, представленное таблицей:

X	-0,5	-0,4	-0,3	-0,2	-0,1
p_i	0,2	a	0,15	0,1	0,3

Найти: a, $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$ случайной величины X.

Построить многоугольник распределения, найти функцию распределения $F(x)$ и построить ее график.

30.2. Проводятся три независимых измерения исследуемого образца. Вероятность допустить ошибку в каждом измерении равна 0,01. СВ X – число ошибок, допущенных в измерениях.

Найти закон распределения указанной дискретной СВ X и ее функцию распределения $F(x)$, построить график этой функции. Вычислить математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$.

(*Ответ:* $M(X)=0{,}03$, $D(X)=0{,}27$.)

30.3. Дана функция распределения $F(x)$ НСВ X. Найти коэффициент A, плотность распределения вероятностей $p(x)$, математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$ и вероятность попадания СВ X на отрезок $[a;b]$. Построить графики функций $F(x)$ и $p(x)$, если $a=\dfrac{\pi}{3}$, $b=\dfrac{\pi}{2}$ и

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x<0, \\ A(1-\cos x), & 0\le x\le\pi, \\ 1, & x>\pi. \end{cases}$$

(*Ответ*: $A=\dfrac{1}{2}$, $M(X)=1{,}57$, $D(X)=0{,}465$,

$P(\pi/3\le X\le\pi/2)=0{,}25$.)

30.4. Пусть X – непрерывная случайная величина с плотностью распределения $p(x)$, заданная следующим образом:

$$p(x)=\begin{cases}Ax^3, & x\in(0;\,2],\\ 0, & x\notin(0;\,2].\end{cases}$$

Найти A, $F(x)$, $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$. Построить графики $p(x)$ и $F(x)$.

30.5. Среди семян риса 0,4 % семеня сорняков. Число сорняков в рисе распределено по закону Пуассона. Найти вероятность того, что при случайном отборе 5000 семян будет обнаружено 5 семян сорняков. (*Ответ:* 0,000055).

30.6. а) X – нормально распределенная величина с параметрами $m=2$, $\sigma=0{,}4$. Найти $P\{2<X<3\}$.

б) X – нормально распределенная величина с параметрами $m=1$, $\sigma=0{,}3$. Найти $P\{|X-1|<0{,}5\}$.

30.7. Дана таблица распределения вероятностей двумерной случайной величины $(X;Y)$:

$X\setminus Y$	-1	0	1	3
0	0,1	0,15	0,14	0,06
1	0,15	0,1	0,06	0,05
2	0,05	0,05	0,05	0,04

Найти частные законы распределения случайных величин X, Y, $M(X)$, $M(Y)$, $M(X\cdot Y)$, $D(X)$, $D(Y)$, $\mathrm{cov}(X,Y)$, r_{XY}, составить ковариационную матрицу $\mathbf{\Sigma}$, найти обобщенную дисперсию $|\mathbf{\Sigma}|$.

30.8. Плотность распределения непрерывной двумерной случайной величины (X,Y) имеет вид:

$$p(x,y)=\begin{cases}Axy(x+2y), & (x,y)\in D,\\ 0, & (x,y)\notin D,\end{cases}$$

где область D – треугольник, образованный осями координат Ox и Oy, а также прямой, отсекающей от них отрезки $x_0=1$ и $y_0=4$ соответственно. Требуется найти: а) константу A; б) одномерные плотности распределения $p(x)$ и $p(y)$; в) числовые характеристики каждой СВ X и Y; г) ковариацию $\operatorname{cov}(X,Y)$ и коэффициент корреляции r_{XY}; д) составить ковариационную матрицу $\mathbf{\Sigma}$ и найти обобщенную дисперсию $|\mathbf{\Sigma}|$.

Решение нулевого варианта

0.1. Случайная величина X имеет распределение, представленное табл. 2.1:

Таблица 2.1

X	-2	-1	0	1	2
p_i	0,1	0,2	0,3	a	0,2

Найти: a, $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$ для ДСВ X.

Построить многоугольник распределения, найти функцию распределения $F(x)$ и построить ее график.

Решение. Для нахождения неизвестного параметра a будем использовать условие нормировки $\sum\limits_{i=1}^{n} p_i = 1$, где n – количество значений ДСВ X. В данном случае имеем:

$$\sum_{i=1}^{5} p_i = 0{,}1 + 0{,}2 + 0{,}3 + a + 0{,}2 = 1 \Rightarrow \quad 0{,}8 + a = 1 \Rightarrow \quad a = 0{,}2 .$$

Получим следующий закон распределения ДСВ X (табл. 2.2):

Таблица 2.2

X	-2	-1	0	1	2
p_i	0,1	0,2	0,3	0,2	0,2

Найдем требуемые числовые характеристики ДСВ X.

Математическое ожидание:

$$M(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i = -2 \cdot 0{,}1 - 1 \cdot 0{,}2 + 0 \cdot 0{,}3 + 1 \cdot 0{,}2 + 2 \cdot 0{,}2 = 0{,}2 .$$

Дисперсия:

$$D(X)=M(X^2)-M^2(X)=\sum_{i=1}^{n}x_i^2p_i-M^2(X)=$$

$$=(-2)^2\cdot 0{,}1+(-1)^2\cdot 0{,}2+0^2\cdot 0{,}3+1^2\cdot 0{,}2+2^2\cdot 0{,}2-(0{,}2)^2=1{,}56\,.$$

Среднее квадратическое отклонение:

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\sqrt{1{,}56}\approx 1{,}25\,.$$

Построим многоугольник распределения ДСВ X, соединяя точки с координатами $(x_i;\, p_i)$, где $i=\overline{1,n}$, отрезками прямых (рис. 2.1).

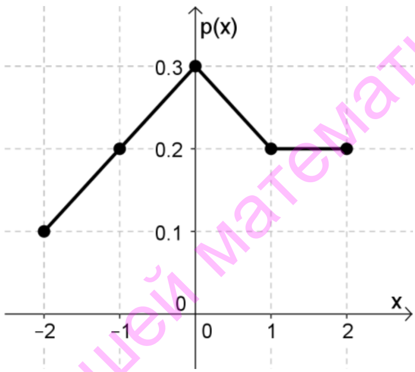


Рис. 2.1

Найдем функцию распределения $F(x)$ заданной ДСВ X, исходя из определения $F(x)=P(X<x)$.

1. Пусть $x\le -2$. Тогда $F(x)=P(X<x)=0$, так как событие $X<x$ в данном случае является невозможным (рис. 2.2,а).

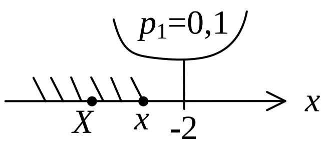


Рис. 2.2,а

2. Пусть $-2<x\le -1$. Тогда получим:

$$F(x)=P(X<x)=P(X=-2)=0{,}1 \text{ (рис. 2.2,б).}$$

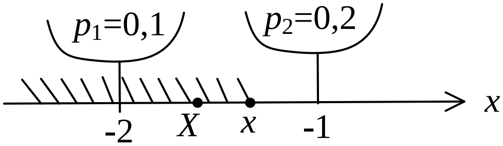


Рис. 2.2,б

3. Пусть $-1 < x \le 0$. В этом случае имеем (рис. 2.2,в):

$$F(x) = P(X < x) = P(X = -2) + P(X = -1) = 0{,}1 + 0{,}2 = 0{,}3.$$

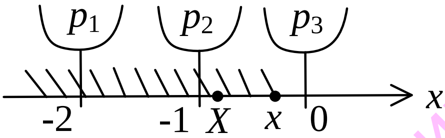


Рис. 2.2,в

4. Пусть $0 < x \le 1$. Аналогично находим:

$$F(x) = P(X < x) = P(X = -2) + P(X = -1) + P(X = 0) =$$
$$= 0{,}1 + 0{,}2 + 0{,}3 = 0{,}6.$$

5. Пусть $1 < x \le 2$. Тогда получим:

$$F(x) = P(X < x) = P(X = -2) + P(X = -1) + P(X = 0) + P(X = 1) =$$
$$= 0{,}1 + 0{,}2 + 0{,}3 + 0{,}2 = 0{,}8.$$

6. При $x > 2$ имеем $F(x) = 1$, так как в этом случае

$$F(x) = P(X < x) = 1$$

как достоверное событие.

Окончательно получим функцию распределения:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le -2; \\ 0{,}2, & -2 < x \le -1; \\ 0{,}4, & -1 < x \le 0; \\ 0{,}6, & 0 < x \le 1; \\ 0{,}8, & 1 < x \le 2; \\ 1, & 2 < x. \end{cases}$$

Функция распределения $F(x)$ дискретной случайной величины будет ступенчатой, кусочно-постоянной функцией, ее график приведен на рис. 2.3.

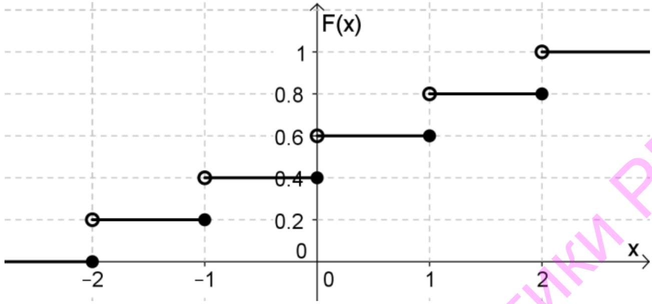


Рис. 2.3

Ответ: $a = 0{,}2$, $M(X) = 0{,}2$, $D(X) = 1{,}56$, $\sigma(X) \approx 1{,}25$.

0.2. При измерении окружности груди у 25 спортсменов установлено, что у троих этот объем равен 88 см, у четверых – 92 см, у пятерых – 96 см, у шестерых – 98 см и у семи – 100 см. СВ X – окружность груди спортсмена. Найти закон распределения указанной дискретной СВ X и ее функцию распределения $F(x)$, построить график этой функции. Вычислить $M(X)$, $D(X)$ и $\sigma(X)$.

Решение. Вероятность обнаружения среди 25 спортсменов троих с окружностью груди 88 см равна $p_1 = \dfrac{3}{25} = 0{,}12$. Аналогично вероятность обнаружения среди 25 спортсменов четверых с окружностью груди 92 см равна $p_2 = \dfrac{4}{25} = 0{,}16$; пятерых с окружностью груди 96 см равна $p_3 = \dfrac{5}{25} = 0{,}2$; шестерых с окружностью груди 98 см равна $p_4 = \dfrac{6}{25} = 0{,}24$; семерых с окружностью груди 100 см равна $p_5 = \frac{7}{25} = 0{,}28$. Получим закон распределения в виде табл. 2.3.

Таблица 2.3

X	88	92	96	98	100
p_i	0,12	0,16	0,2	0,24	0,28

Найденные вероятности удовлетворяют условию нормировки $\sum_{i=1}^{n} p_i = 0{,}12 + 0{,}16 + 0{,}2 + 0{,}24 + 0{,}28 = 1$.

Найдем функцию распределения $F(x)$.

1. Пусть $x \le 88$, тогда: $F(x) = P(X < x) = 0$.

2. Пусть $88 < x \le 92$, тогда:
$$F(x) = P(X < x) = P(X = 88) = 0{,}12.$$

3. Пусть $92 < x \le 96$, тогда:
$$F(x) = P(X < x) = P(X = 88) + P(X = 92) = 0{,}12 + 0{,}16 = 0{,}28.$$

4. Пусть $96 < x \le 98$, тогда:
$$F(x) = P(X < x) = 0{,}12 + 0{,}16 + 0{,}2 = 0{,}48.$$

5. Пусть $98 < x \le 100$, тогда:
$$F(x) = P(X < x) = 0{,}12 + 0{,}16 + 0{,}2 + 0{,}24 = 0{,}72.$$

6. При $x > 100$ имеем $F(x) = 1$.

Окончательно получим функцию распределения:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 88; \\ 0{,}12, & 88 < x \le 92; \\ 0{,}28, & 92 < x \le 96; \\ 0{,}48, & 96 < x \le 98; \\ 0{,}72, & 98 < x \le 100; \\ 1, & 100 < x. \end{cases}$$

График функции $F(x)$ приведен на рис. 2.4.

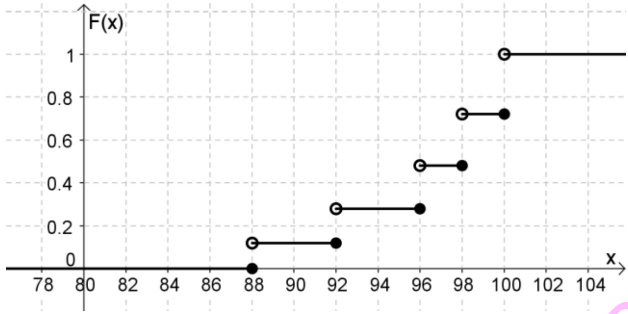


Рис. 2.4

Найдем числовые характеристики заданной ДСВ X:

$$M(X)=\sum_{i=1}^{n} x_i p_i = 88\cdot 0{,}12+92\cdot 0{,}16+96\cdot 0{,}2+$$

$$+98\cdot 0{,}24+100\cdot 0{,}28=96;$$

$$D(X)=M\left(X^2\right)-M^2(X)=\sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i = 88^2\cdot 0{,}12+92^2\cdot 0{,}16+$$

$$+96^2\cdot 0{,}2+98^2\cdot 0{,}24+100^2\cdot 0{,}28=9231{,}68;$$

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\sqrt{9231{,}68}=3{,}96.$$

Ответ: $M(X)=96$, $D(X)=9231{,}68$, $\sigma(X)=3{,}96$.

0.3. Дана функция распределения $F(x)$ НСВ X. Найти коэффициент A, плотность распределения вероятностей $p(x)$, математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$ и вероятность попадания СВ X на отрезок $[0{,}5;1{,}5]$. Построить графики функций $F(x)$ и $p(x)$, если

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x<0, \\ Ax^2, & 0\le x\le 2, \\ 1, & x>2. \end{cases}$$

Решение. Применим свойство непрерывности функции распределения $F(x)$ для НСВ X. В точке $x=2$ функция $F(x)$ должна быть непрерывной, поэтому:

$$\lim_{x\to 2-0} F(x) = \lim_{x\to 2+0} F(x) \Rightarrow \quad \lim_{x\to 2-0} Ax^2 = \lim_{x\to 2+0} 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ A\cdot 2^2 = 1 \ \Rightarrow\ A = \frac{1}{4}.$$

Следовательно,

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \dfrac{x^2}{4}, & 0 \le x \le 2, \\ 1, & x > 2. \end{cases}$$

График функции распределения изображен на рис. 2.5.

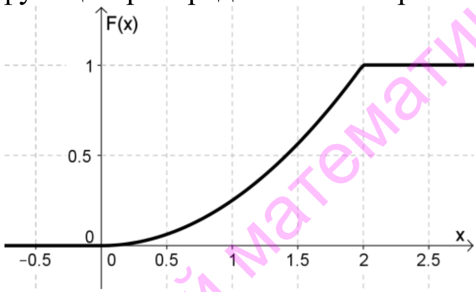


Рис. 2.5

По определению плотности распределения $p(x)$ НСВ X получим:

$$p(x) = F'(x) = \begin{cases} (0)' = 0, & x < 0, \\ \left(\dfrac{x^2}{4}\right)' = \dfrac{x}{2}, & 0 \le x \le 2, \\ (1)' = 0, & x > 2. \end{cases}$$

Первую и третью строки можно объединить:

$$p(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{2}, & x \in [0;\ 2], \\ 0, & x \notin [0;\ 2]. \end{cases}$$

График плотности распределения изображен на рис. 2.6.

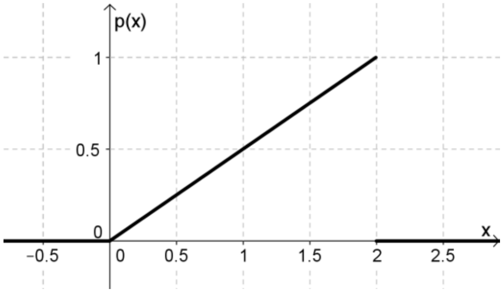


Рис. 2.6

Найдем числовые характеристики НСВ X. Математическое ожидание:

$$M(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x\cdot p(x)dx=\int_{-\infty}^{0} x\cdot 0\,dx+\int_{0}^{2} x\cdot\frac{x}{2}dx+\int_{2}^{+\infty} x\cdot 0\,dx=$$

$$=0+\frac{1}{2}\int_{0}^{2} x^2\,dx+0=\frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3}\bigg|_0^2=\frac{4}{3}.$$

Дисперсия:

$$D(X)=M(X^2)-M^2(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 p(x)dx-M^2(X)=$$

$$=\int_{-\infty}^{0} x^2\cdot 0\,dx+\int_{0}^{2} x^2\cdot\frac{x}{2}dx+\int_{2}^{+\infty} x^2\cdot 0\,dx-\left(\frac{4}{3}\right)^2=$$

$$=0+\frac{1}{2}\int_{0}^{2} x^3dx+0-\frac{16}{9}=\frac{1}{2}\cdot\frac{x^4}{4}\bigg|_0^2-\frac{16}{9}=2-\frac{16}{9}=\frac{2}{9}.$$

Вероятность попадания СВ X на отрезок $[0{,}5;1{,}5]$:

$$P(0{,}5\le X\le 1{,}5)=F(1{,}5)-F(0{,}5)=\frac{(1{,}5)^4}{4}-\frac{(0{,}5)^4}{4}=0{,}5.$$

Ответ: $M(X)=\frac{4}{3}$, $D(X)=\frac{2}{9}$, $P(0{,}5\le X\le 1{,}5)=0{,}5$.

0.4. Пусть X – непрерывная случайная величина с плотностью распределения $p(x)$, заданная следующим образом:

$$p(x)=\begin{cases} Ax^2, & x\in(0;1], \\ 0, & x\notin(0;1]. \end{cases}$$

Найти A, $F(x)$, $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$. Построить графики функций $p(x)$ и $F(x)$.

Решение. Для нахождения неизвестного коэффициента A воспользуемся условием нормировки для плотности распределения $p(x)$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx=1 \Rightarrow \quad \int_{-\infty}^{0} 0\,dx+\int_{0}^{1} Ax^2 dx+\int_{1}^{+\infty} 0\,dx=1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad 0+A\cdot\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1+0=1 \Rightarrow \quad A=3.$$

Следовательно,

$$p(x)=\begin{cases} 3x^2, & x\in(0;1], \\ 0, & x\notin(0;1]. \end{cases}$$

График плотности распределения изображен на рис. 2.7.

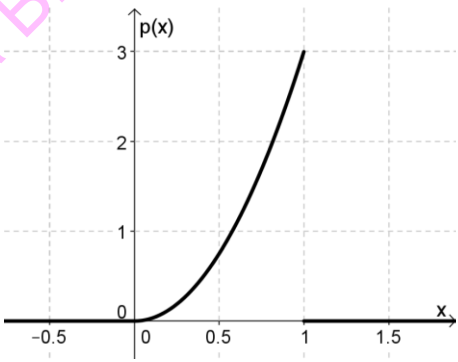


Рис. 2.7

Функция распределения $F(x)$ НСВ X связана с плотностью распределения $p(x)$ формулой $F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} p(t)dt$.
Рассмотрим три возможных расположения переменной x.

1. Пусть $x \le 0$. Тогда имеем:

$$F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} p(t)dt=\int\limits_{-\infty}^{x} 0\,dt=0.$$

2. Пусть $0<x\le 1$. Тогда получим:

$$F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} p(t)dt=\int\limits_{-\infty}^{0} 0\,dt+\int\limits_{0}^{x} 3t^2dt=0+t^3\Big|_0^x=x^3.$$

3. Пусть $x>1$. В этом случае имеем:

$$F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} p(t)dt=\int\limits_{-\infty}^{0} 0\,dt+\int\limits_{0}^{1} 3t^2dt+\int\limits_{1}^{x} 0\,dt=0+t^3\Big|_0^1+0=1.$$

Окончательно получим:

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ x^3, & 0<x\le 1,\\ 1, & 1<x.\end{cases}$$

График функции распределения представлен на рис. 2.8.

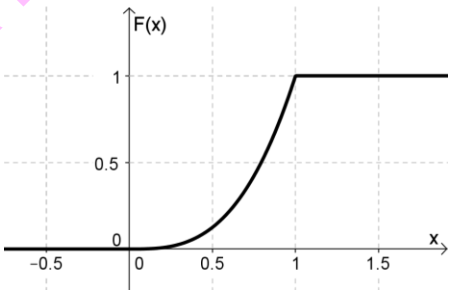


Рис. 2.8

Найдем числовые характеристики НСВ X:

$$M(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x\,p(x)dx=\int_{-\infty}^{0} x\cdot 0\,dx+\int_{0}^{1} x\cdot 3x^2dx+\int_{1}^{+\infty} x\cdot 0\,dx=$$

$$=0+3\cdot\frac{x^4}{4}\Bigg|_0^1+0=\frac{3}{4}=0{,}75;$$

$$D(X)=M\left(X^2\right)-M^2(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2p(x)dx-M^2(X)=$$

$$=\int_{-\infty}^{0} x^2\cdot 0\,dx+\int_{0}^{1} x^2\cdot 3x^2dx+\int_{1}^{+\infty} x^2\cdot 0\,dx-\left(\frac{3}{4}\right)^2=$$

$$=0+3\cdot\frac{x^5}{5}\Bigg|_0^1+0-\frac{9}{16}=\frac{3}{80}=0{,}0375;$$

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\sqrt{0{,}0375}\approx 0{,}194.$$

Ответ: $M(X)=0{,}75$, $D(X)=0{,}0375$, $\sigma(X)\approx 0{,}194$.

0.5. Случайная величина X распределена нормально с математическим ожиданием, равным 12,5. Вероятность попадания СВ X в интервал $(10;15)$ равна 0,2. Чему равна вероятность попадания СВ X в интервал $(35;40)$?

Решение. Если СВ X распределена нормально, то есть $X \sim N(m,\sigma)$, где m – математическое ожидание, σ – среднее квадратическое отклонение, то вероятность попадания на интервал (a,b) выражается формулой:

$$P(a<X<b)=\Phi\left(\frac{b-m}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{a-m}{\sigma}\right),$$

где $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt$ – функция Лапласа, которая является нечетной, т.е. $\Phi(x)=-\Phi(-x)$. Значения функции Лапласа занесены в таблицы (см. приложение 2).

Известно, что $P(10 < X < 15) = 0{,}2$, то есть

$$P(10 < X < 15) = \Phi\left(\frac{15-12{,}5}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{10-12{,}5}{\sigma}\right) =$$

$$= \Phi\left(\frac{2{,}5}{\sigma}\right) - \Phi\left(-\frac{2{,}5}{\sigma}\right) = 2\Phi\left(\frac{2{,}5}{\sigma}\right) = 0{,}2 \Rightarrow \Phi\left(\frac{2{,}5}{\sigma}\right) = 0{,}1.$$

Используя таблицы функции Лапласа, находим:

$$\frac{2{,}5}{\sigma} = 0{,}25 \Rightarrow \quad \sigma = \frac{2{,}5}{0{,}25} = 10.$$

Далее вычисляем требуемую вероятность:

$$P(35 < X < 40) = \Phi\left(\frac{40-12{,}5}{10}\right) - \Phi\left(\frac{35-12{,}5}{10}\right) =$$

$$= \Phi(2{,}75) - \Phi(2{,}25) = 0{,}4970 - 0{,}4878 = 0{,}0092.$$

Ответ: $P(35 < X < 40) = 0{,}0092$.

0.6. а) Пусть X – нормально распределенная величина с параметрами $m = 1$, $\sigma = 2$. Найти $P\{|X-2| < 1\}$.

б) Пусть X – нормально распределенная величина с параметрами $m = 1$, $\sigma = 2$. Найти $P\{|X-1| < 2\}$.

Решение. а) Раскрывая модуль, запишем искомую вероятность в виде:

$$P\{|X-2| < 1\} = P\{-1 < X-2 < 1\} = P\{1 < X < 3\}.$$

Выразим полученную вероятность попадания нормально распределенной величины в интервал через функцию Лапласа, которую затем найдем по таблицам:

$$P(a < X < b) = \Phi\left(\frac{b-m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-m}{\sigma}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(1 < X < 3) = \Phi\left(\frac{3-1}{2}\right) - \Phi\left(\frac{1-1}{2}\right) = \Phi(1) - \Phi(0) =$$

$$= 0{,}3413 - 0 = 0{,}3413.$$

б) Поскольку из нормально распределенной величины вычитается ее математическое ожидание $m=1$, то можно воспользоваться формулой:

$$P\{|X-m|<\delta\}=2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right).$$

Тогда при $\sigma=2$ и $\delta=2$ можно получить:

$$P\{|X-1|<2\}=2\Phi\left(\frac{2}{2}\right)=2\Phi(1)=2\cdot 0{,}3413=0{,}6826.$$

Ответ: а) $P\{|X-2|<1\}=0{,}3413$, б) $P\{|X-1|<2\}=0{,}6826$.

0.7. Дана табл. 2.4 распределения вероятностей двумерной случайной величины $(X;Y)$:

Таблица 2.4

$X \setminus Y$	-1	0	1
0	0	0,3	0,1
1	0,2	0,1	0,3

Найти частные законы распределения случайных величин X и Y, $M(X)$, $M(Y)$, $M(X\cdot Y)$, $D(X)$, $D(Y)$, $\operatorname{cov}(X,Y)$, r_{XY}, составить ковариационную матрицу $\mathbf{\Sigma}$, найти обобщенную дисперсию $|\mathbf{\Sigma}|$.

Решение. Нужно отметить, что для заданной таблицы выполняется условие нормировки:

$$\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{3}p_{i\,j}=0+0{,}3+0{,}1+0{,}2+0{,}1+0{,}3=1.$$

Складывая вероятности в столбцах и строках таблицы двумерного распределения, получаем одномерные распределения случайных величин X и Y (табл. 2.5а и табл. 2.5б):

Таблица 2.5а

X	0	1
p_i	0,4	0,6

Таблица 2.5б

Y	-1	0	1
p_j	0,2	0,4	0,4

Для каждой из полученных таблиц условие нормировки также выполняется:

$$\sum_{i=1}^{2} p_i = 0{,}4 + 0{,}6 = 1 \quad \text{и} \quad \sum_{j=1}^{3} p_j = 0{,}2 + 0{,}4 + 0{,}4 = 1.$$

Числовые характеристики каждой из случайных величин:

$$M(X) = 0 \cdot 0{,}4 + 1 \cdot 0{,}6 = 0{,}6;$$

$$D(X) = 0^2 \cdot 0{,}4 + 1^2 \cdot 0{,}6 - (0{,}6)^2 = 0{,}24;$$

$$M(Y) = -1 \cdot 0{,}2 + 0 \cdot 0{,}4 + 1 \cdot 0{,}4 = 0{,}2;$$

$$D(Y) = (-1)^2 \cdot 0{,}2 + 0^2 \cdot 0{,}4 + 1^2 \cdot 0{,}4 - (0{,}2)^2 = 0{,}56.$$

Найдем математическое ожидание произведения случайных величин X и Y, используя заданную табл. 2.4:

$$M(X \cdot Y) = \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{3} x_i y_j p_{ij} =$$

$$= 0 \cdot (-1) \cdot 0 + 0 \cdot 0 \cdot 0{,}3 + 0 \cdot 1 \cdot 0{,}1 + 1 \cdot (-1) \cdot 0{,}2 + 1 \cdot 0 \cdot 0{,}1 + 1 \cdot 1 \cdot 0{,}1 = 0{,}2.$$

Для подсчета ковариации будем использовать формулу:

$$\operatorname{cov}(X,Y) = M(X \cdot Y) - M(X) \cdot M(Y).$$

Тогда получаем:

$$\operatorname{cov}(X,Y) = 0{,}2 - 0{,}6 \cdot 0{,}2 = 0{,}08.$$

Далее находим коэффициент корреляции:

$$r_{XY} = \frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sigma(X) \cdot \sigma(Y)} = \frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)} \cdot \sqrt{D(Y)}} =$$

$$= \frac{0{,}08}{\sqrt{0{,}24} \cdot \sqrt{0{,}56}} \approx 0{,}22.$$

Составим ковариационную матрицу:

$$\mathbf{\Sigma} = \begin{pmatrix} \operatorname{cov}(X,X) & \operatorname{cov}(X,Y) \\ \operatorname{cov}(Y,X) & \operatorname{cov}(Y,Y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D(X) & \operatorname{cov}(X,Y) \\ \operatorname{cov}(X,Y) & D(Y) \end{pmatrix} =$$

$$=\begin{pmatrix} 0{,}24 & 0{,}08 \\ 0{,}08 & 0{,}56 \end{pmatrix}.$$

Обобщенная дисперсия $|\mathbf{\Sigma}|$ есть определитель ковариационной матрицы:

$$|\mathbf{\Sigma}| = \begin{vmatrix} 0{,}24 & 0{,}08 \\ 0{,}08 & 0{,}56 \end{vmatrix} = 0{,}24 \cdot 0{,}56 - (0{,}08)^2 = 0{,}128.$$

Ответ: $M(X) = 0{,}6$; $D(X) = 0{,}24$; $M(Y) = 0{,}2$; $D(Y) = 0{,}56$; $M(X \cdot Y) = 0{,}2$; $\operatorname{cov}(X,Y) = 0{,}08$; $r_{XY} \approx 0{,}22$; $\mathbf{\Sigma} = \begin{pmatrix} 0{,}24 & 0{,}08 \\ 0{,}08 & 0{,}56 \end{pmatrix}$; $|\mathbf{\Sigma}| = 0{,}128$.

0.8. Плотность распределения непрерывной двумерной случайной величины (X,Y) имеет вид:

$$p(x,y) = \begin{cases} Axy(-2x^2 + y), & (x,y) \in D, \\ 0, & (x,y) \notin D, \end{cases}$$

где область D – треугольник, образованный осями координат Ox и Oy, а также прямой, отсекающей от них отрезки $x_0 = 1$ и $y_0 = -2$ соответственно. Требуется найти: а) константу A; б) одномерные плотности распределения $p(x)$ и $p(y)$; в) числовые характеристики каждой СВ X и Y; г) ковариацию $\operatorname{cov}(X,Y)$ и коэффициент корреляции r_{XY}; д) составить ковариационную матрицу $\mathbf{\Sigma}$ и найти обобщенную дисперсию $|\mathbf{\Sigma}|$.

Решение. Составим уравнение прямой, отсекающей от осей координат отрезки $x_0 = 1$ и $y_0 = -2$:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \Leftrightarrow \frac{x}{1} + \frac{y}{-2} = 1 \Leftrightarrow y = 2x - 2.$$

Изобразим заданную область D (рис. 2.9).

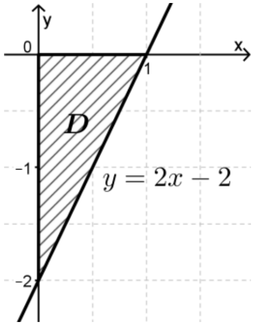


Рис. 2.9

а) Найдем коэффициент A по свойству нормировки плотности распределения непрерывного случайного вектора (X,Y):

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} p(x,y)dxdy = 1.$$

В данном случае имеем $p(x,y)=0$ при $(x,y)\notin D$, поэтому:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} p(x,y)dxdy = \iint_D p(x,y)dxdy = \int_0^1 dx \int_{2x-2}^{0} p(x,y)dy =$$

$$= \int_0^1 dx \int_{2x-2}^{0} Axy\left(-2x^2+y\right)dy = A\int_0^1 xdx \int_{2x-2}^{0}\left(-2x^2y+y^2\right)dy =$$

$$= A\int_0^1 x\cdot\left(-x^2y^2+\tfrac{1}{3}y^3\right)\Big|_{2x-2}^{0} dx = A\int_0^1 x\left(x^2(2x-2)^2-\tfrac{1}{3}(2x-2)^3\right)dx =$$

$$= A\int_0^1 x\left(4x^4-\tfrac{32}{3}x^3+12x^2-8x+\tfrac{8}{3}\right)dx = \tfrac{1}{5}A = 1.$$

Значит, $A=5$, поэтому получим:

$$p(x,y)=\begin{cases}5xy\left(-2x^2+y\right), & (x,y)\in D,\\ 0, & (x,y)\notin D.\end{cases}$$

б) Найдем одномерную плотность распределения $p(x)$ СВ X. Известно, что $p(x)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} p(x,y)dy$. Если $x \notin [0;1]$, то $p(x,y)=0$, поэтому при $x \notin [0;1]$ имеем $p(x)=0$. При $x \in [0;1]$ найдем:

$$p(x)=\int\limits_{2x-2}^{0} 5xy\left(-2x^2+y\right)dy = 5x\int\limits_{2x-2}^{0}\left(-2x^2y+y^2\right)dy =$$

$$=5x\left(-x^2y^2+\tfrac{1}{3}y^3\right)\Big|_{2x-2}^{0} = 20x^5-\tfrac{160}{3}x^4+60x^3-40x^2+\tfrac{40}{3}x .$$

Поэтому в итоге получим:

$$p(x)=\begin{cases}20x^5-\frac{160}{3}x^4+60x^3-40x^2+\frac{40}{3}x, & x\in[0;1],\\ 0, & x\notin[0;1].\end{cases}$$

Проверка по условию нормировки $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx = 1$:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx = \int\limits_{0}^{1}(20x^5-\tfrac{160}{3}x^4+60x^3-40x^2+\tfrac{40}{3}x)dx = 1 .$$

Аналогично для одномерной плотности $p(y)$ СВ Y имеем:

$$p(y)=0 \text{ при } y\notin[-2;0],$$

при $y\in[-2;0]$ получим $y=2x-2 \Rightarrow x=\frac{1}{2}y+1$, а также:

$$p(y)=\int\limits_{0}^{\frac{1}{2}y+1} 5xy\left(-2x^2+y\right)dx = 5y\int\limits_{0}^{\frac{1}{2}y+1}\left(-2x^3+xy\right)dx =$$

$$=5y\left(-\tfrac{1}{2}x^4+\tfrac{1}{2}x^2y\right)\Big|_{0}^{\frac{1}{2}y+1} = -\tfrac{5}{32}y^5-\tfrac{5}{8}y^4-\tfrac{5}{4}y^3-\tfrac{5}{2}y^2-\tfrac{5}{2}y .$$

Поэтому в итоге получим:

$$p(y)=\begin{cases}-\frac{5}{32}y^5-\frac{5}{8}y^4-\frac{5}{4}y^3-\frac{5}{2}y^2-\frac{5}{2}y, & y\in[-2;0],\\ 0, & y\notin[-2;0].\end{cases}$$

Проверка по условию нормировки $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} p(y)dy = 1$:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} p(y)dy = \int\limits_{-2}^{1} (-\tfrac{5}{32}y^5 - \tfrac{5}{8}y^4 - \tfrac{5}{4}y^3 - \tfrac{5}{2}y^2 - \tfrac{5}{2}y)dy = 1.$$

Заметим, что $p(x,y) \neq p(x)\cdot p(y)$, поэтому СВ X и Y зависимы между собой.

в) Найдем числовые характеристики СВ X.

Математическое ожидание:

$$M(X) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x\cdot p(x,y)dx\,dy = \iint\limits_{D} x\cdot p(x,y)dx\,dy =$$

$$= \iint\limits_{D} x\cdot 5xy\left(-2x^2 + y\right)dxdy =$$

$$= 5\int\limits_{0}^{1} x^2 dx \int\limits_{2x-2}^{0}\left(-2x^2y + y^2\right)dy = 5\int\limits_{0}^{1} x^2\left(-x^2y^2 + \tfrac{1}{3}y^3\right)\Big|_{2x-2}^{0} dx =$$

$$= 5\int\limits_{0}^{1} x^2\left(x^2(2x-2)^2 - \tfrac{1}{3}(2x-2)^3\right)dx =$$

$$= 5\int\limits_{0}^{1}\left(4x^6 - \tfrac{32}{3}x^5 + 12x^4 - 8x^3 + \tfrac{8}{3}x^2\right)dx = \tfrac{26}{63}.$$

То же можно найти по-другому:

$$M(X) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x\cdot p(x)dx =$$

$$= \int\limits_{0}^{1} x\cdot\left(20x^5 - \tfrac{160}{3}x^4 + 60x^3 - 40x^2 + \tfrac{40}{3}x\right)dx = \tfrac{26}{63}.$$

Дисперсия СВ X:

$$D(X) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2 p(x,y)dxdy - M^2(X) = \iint\limits_{D} x^2 p(x,y)dxdy - M^2(X) =$$

$$= \iint\limits_{D} x^2\cdot 5xy\left(-2x^2 + y\right)dx\,dy - \left(\tfrac{26}{63}\right)^2 =$$

$$=5\int_0^1 x^3dx\int_{2x-2}^{0}\left(-2x^2y+y^2\right)dy-\tfrac{676}{3969}=$$

$$=5\int_0^1 x^3\cdot\left(4x^4-\tfrac{32}{3}x^3+12x^2-8x+\tfrac{8}{3}\right)dx-\tfrac{676}{3969}=$$

$$=5\cdot\tfrac{3}{70}-\tfrac{676}{3969}=\tfrac{349}{7938}.$$

Аналогично можно провести проверку:

$$D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2p(x)dx-M^2(X)=$$

$$=\int_0^1 x^2\left(20x^5-\tfrac{160}{3}x^4+60x^3-40x^2+\tfrac{40}{3}x\right)dx-\left(\tfrac{26}{63}\right)^2=\tfrac{349}{7938}.$$

Среднее квадратическое отклонение:

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\sqrt{\tfrac{349}{7938}}.$$

Найдем числовые характеристики СВ Y.

Математическое ожидание:

$$M(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}y\cdot p(x,y)dx\,dy=\iint_D y\cdot p(x,y)dx\,dy=$$

$$=\iint_D y\cdot 5xy\left(-2x^2+y\right)dxdy=5\int_0^1 x\,dx\int_{2x-2}^{0}\left(-2x^2y^2+y^3\right)dy=$$

$$=5\int_0^1 x\left(\tfrac{16}{3}x^5-20x^4+32x^3-\tfrac{88}{3}x^2+16x-4\right)dx=-\tfrac{6}{7}.$$

Проверка: $M(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}y\cdot p(y)dy=$

$$=\int_{-2}^{0}y\cdot\left(-\tfrac{5}{32}y^5-\tfrac{5}{8}y^4-\tfrac{5}{4}y^3-\tfrac{5}{2}y^2-\tfrac{5}{2}y\right)dy=-\tfrac{6}{7}.$$

Дисперсия СВ Y:

$$D(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}y^2p(x,y)dxdy-M^2(Y)=\iint_D y^2p(x,y)dxdy-M^2(Y)=$$

$$=\iint_D y^2\cdot 5xy\left(-2x^2+y\right)dx\,dy-\left(-\tfrac{6}{7}\right)^2=$$

$$=5\int_0^1 x\,dx\int_{2x-2}^{0}\left(-2x^2y^3+y^4\right)dy-\tfrac{36}{49}=$$

$$=5\int_0^1 x\cdot\left(8x^6-\tfrac{192}{5}x^5+80x^4-96x^3+72x^2-32x+\tfrac{32}{5}\right)dx-\tfrac{36}{49}=$$

$$=5\cdot\tfrac{19}{105}-\tfrac{36}{49}=\tfrac{25}{147}.$$

Проверка: $D(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty} y^2 p(y)dy-M^2(Y)=$

$$=\int_0^1 y^2\left(-\tfrac{5}{32}y^5-\tfrac{5}{8}y^4-\tfrac{5}{4}y^3-\tfrac{5}{2}y^2-\tfrac{5}{2}y\right)dy-\left(-\tfrac{6}{7}\right)^2=\tfrac{25}{147}.$$

Среднее квадратическое отклонение:

$$\sigma(Y)=\sqrt{D(Y)}=\sqrt{\tfrac{25}{147}}=\tfrac{5}{21}\sqrt{3}.$$

г) Найдем ковариацию (корреляционный момент):

$$\operatorname{cov}(X,Y)=M\left[\left(X-M_X\right)\cdot\left(Y-M_y\right)\right]=M(XY)-M(X)M(Y)=$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xy\cdot p(x,y)dx\,dy-\tfrac{26}{63}\cdot\left(-\tfrac{6}{7}\right)=$$

$$=\iint_D xy\cdot 5xy\left(-2x^2+y\right)dx\,dy+\tfrac{52}{147}=$$

$$=5\int_0^1 x^2dx\int_{2x-2}^{0}\left(-2x^2y^2+y^3\right)dy+\tfrac{52}{147}=\tfrac{10}{147}.$$

Найдем коэффициент корреляции:

$$r_{XY}=\frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sigma(X)\cdot\sigma(Y)}=\frac{10/147}{\sqrt{349/7938}\cdot\sqrt{25/147}}=6\sqrt{\frac{6}{349}}.$$

д) Составим ковариационную матрицу:

$$\mathbf{\Sigma}=\begin{pmatrix}\operatorname{cov}(X,X) & \operatorname{cov}(X,Y)\\ \operatorname{cov}(Y,X) & \operatorname{cov}(Y,Y)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}D(X) & \operatorname{cov}(X,Y)\\ \operatorname{cov}(X,Y) & D(Y)\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 349/7938 & 10/147 \\ 10/147 & 25/147 \end{pmatrix}.$$

Найдем обобщенную дисперсию:

$$|\mathbf{\Sigma}| = \begin{vmatrix} 349/7938 & 10/147 \\ 10/147 & 25/147 \end{vmatrix} = \frac{349}{7938}\cdot\frac{25}{147} - \left(\frac{10}{147}\right)^2 = \frac{475}{166698}.$$

Ответ: а) $A = 5$;

б) $p(x) = \begin{cases} 20x^5 - \frac{160}{3}x^4 + 60x^3 - 40x^2 + \frac{40}{3}x, & x \in [0;1], \\ 0, & x \notin [0;1]; \end{cases}$

$$p(y) = \begin{cases} -\frac{5}{32}y^5 - \frac{5}{8}y^4 - \frac{5}{4}y^3 - \frac{5}{2}y^2 - \frac{5}{2}y, & y \in [-2;0], \\ 0, & y \notin [-2;0]; \end{cases}$$

в) $M(X) = \frac{26}{63}$, $D(X) = \frac{349}{7938}$, $\sigma(X) = \sqrt{\frac{349}{7938}}$, $M(Y) = -\frac{6}{7}$, $D(Y) = \frac{25}{147}$, $\sigma(Y) = \frac{5}{21}\sqrt{3}$;

г) $\operatorname{cov}(X,Y) = \frac{10}{147}$, $r_{XY} = 6\sqrt{\frac{6}{349}}$;

д) $\mathbf{\Sigma} = \begin{pmatrix} 349/7938 & 10/147 \\ 10/147 & 25/147 \end{pmatrix}$, $|\mathbf{\Sigma}| = \frac{475}{166698}$.

3. ТИПОВОЙ РАСЧЕТ «ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ»

Задание 1

В результате эксперимента получены данные, записанные в виде статистического ряда. Требуется:

а) записать значения результатов эксперимента в виде вариационного ряда;

б) найти размах выборки и разбить его на интервалы;

в) построить полигон частот, гистограмму относительных частот и график эмпирической функции распределения;

г) найти числовые характеристики выборки $\overline{x}$ и D_x;

д) найти доверительные интервалы для математического ожидания и среднего квадратичного отклонения при надежности p;

е) приняв в качестве нулевой гипотезу H_0: генеральная совокупность, из которой извлечена выборка, имеет нормальное распределение, проверить ее, пользуясь критерием Пирсона при уровне значимости α.

1.1. $p = 0{,}9$, $\alpha = 0{,}01$.

17,1	21,4	15,9	19,1	22,4	20,7	17,9	18,6	21,8	16,1
19,1	20,5	14,2	16,9	17,8	18,1	19,1	15,8	18,8	17,2
16,2	17,3	22,5	19,9	21,1	15,1	17,7	19,8	14,9	20,5
17,5	19,2	18,5	15,7	14,0	18,6	21,2	16,8	19,3	17,8
18,8	14,3	17,1	19,5	16,3	20,3	17,9	23,0	17,2	15,2
15,6	17,4	21,3	22,1	20,1	14,5	19,3	18,4	16,7	18,2
16,4	18,7	14,3	18,2	19,1	15,3	21,5	17,2	22,6	20,4
22,8	17,5	20,2	15,5	21,6	18,1	20,5	14,0	18,9	16,5
20,8	16,6	18,3	21,7	17,4	23,0	21,1	19,8	15,4	18,1
18,9	14,7	19,5	20,9	15,8	20,2	21,8	18,2	21,2	20,1

1.2. $p = 0{,}95$, $\alpha = 0{,}025$.

16,8	17,9	21,4	14,1	19,1	18,1	15,1	18,2	20,3	16,7
19,5	18,5	22,5	18,4	16,2	18,3	19,1	21,4	14,5	16,1
21,5	14,9	18,6	20,4	15,2	18,5	17,1	22,4	20,8	19,8
17,2	19,7	16,3	18,7	14,4	18,8	19,5	21,6	15,3	17,3
22,8	17,4	22,2	16,5	21,7	15,4	21,3	14,3	20,5	16,4
20,6	15,5	19,4	17,5	20,9	23,0	18,9	15,9	18,2	20,7
17,9	21,8	14,2	21,2	16,1	18,4	17,5	19,3	22,7	19,6
22,1	17,6	16,7	20,4	15,7	18,1	16,6	18,3	15,5	17,7
19,2	14,8	19,7	17,7	16,5	17,8	18,5	14,0	21,9	16,9
15,8	20,8	17,1	20,1	22,6	18,9	15,6	21,1	20,2	15,1

1.3. $p = 0{,}98$, $\alpha = 0{,}05$.

189	207	213	208	186	210	198	219	231	227
202	211	220	236	227	220	210	183	213	190
197	227	187	226	213	191	209	196	202	235
211	214	220	195	182	228	202	207	192	226
193	203	232	202	215	195	220	233	214	185
234	215	196	220	203	236	225	221	193	215
204	184	217	193	216	205	197	203	229	204
225	216	233	223	208	204	207	182	216	191
210	190	207	205	232	222	198	217	211	201
185	217	225	201	208	211	189	205	207	199

1.4. $p = 0{,}9$, $\alpha = 0{,}025$.

9,4	7,9	0,3	6,8	4,2	11,9	7,8	1,7	5,1	8,8
8,7	11,1	7,7	1,8	5,5	10,5	4,3	3,8	1,4	11,2
1,1	7,3	3,7	4,4	11,8	8,6	1,9	5,6	10,1	8,4
10,0	11,6	5,2	2,1	5,7	4,8	7,4	0,8	4,7	3,6
8,3	7,6	0,7	7,3	3,4	11,4	5,7	9,9	2,2	7,2
2,3	4,7	9,7	11,3	5,8	4,9	3,3	0,5	7,5	4,6
5,0	0,4	8,9	7,1	9,6	11,5	5,9	9,0	5,3	2,4
9,5	5,9	1,0	9,1	2,5	6,0	8,2	3,2	10,9	6,1
10,2	2,6	4,5	3,1	6,2	11,7	6,3	0,2	7,0	9,2
1,2	6,4	11,9	6,9	8,1	6,5	2,9	6,2	4,4	10,3

1.5. $p = 0{,}95$, $\alpha = 0{,}01$.

1,6	4,4	10,9	6,4	4,0	2,8	5,2	1,2	7,6	3,4
2,9	5,3	1,7	7,7	6,9	10,1	5,4	4,1	8,8	6,5
6,6	4,2	5,5	0,5	8,9	4,5	1,8	5,6	7,8	3,0
1,9	10,2	7,9	2,5	5,7	3,1	6,7	4,3	0,6	9,0
6,8	3,2	4,4	9,1	10,3	6,0	7,9	6,9	8,0	2,0
7,0	10,7	8,1	2,1	5,8	6,4	0,3	4,5	9,2	3,3
7,6	9,3	3,4	4,6	5,0	3,8	5,9	8,2	2,2	7,1
2,3	0,8	7,2	8,3	11,1	6,5	3,5	9,4	10,8	4,7
4,8	6,1	3,6	9,5	8,4	2,4	6,2	7,3	5,7	0,9
7,4	8,5	5,8	1,1	5,9	4,9	3,7	9,6	2,6	6,1

1.6. $p = 0{,}98$, $\alpha = 0{,}025$.

20	26	32	34	26	28	22	30	17	24
30	28	18	22	24	26	34	28	22	20
34	24	28	20	32	17	22	24	26	30
30	22	26	35	28	24	30	32	28	18
20	30	17	24	32	28	22	26	24	30
34	26	24	28	22	30	35	32	20	17
28	22	36	30	20	26	28	23	24	32
20	26	30	24	32	17	22	28	35	26
28	35	32	22	26	24	26	24	30	24
18	24	26	28	35	30	26	22	26	28

1.7. $p = 0{,}9$, $\alpha = 0{,}05$.

57	46	33	49	29	50	38	41	27	34
37	49	51	26	55	42	59	43	46	30
31	43	58	41	35	47	33	45	49	37
47	34	54	39	60	49	25	50	31	53
38	41	30	51	37	55	47	43	35	42
35	46	27	45	41	34	50	29	51	39
42	59	43	31	38	58	54	37	26	43
29	42	33	41	24	39	53	45	33	51
45	25	54	50	37	30	41	60	42	46
38	53	34	47	35	49	57	39	55	31

1.8. $p = 0{,}95$, $\alpha = 0{,}05$.

37	49	43	31	44	38	40	31	28	43
32	44	47	29	51	25	43	38	41	32
38	24	49	40	32	34	31	28	37	46
41	35	43	25	37	46	38	24	41	50
38	29	41	32	34	49	44	37	31	47
50	34	25	37	40	32	35	28	44	43
46	37	41	35	29	43	38	31	26	34
49	32	46	26	38	35	40	51	37	46
37	25	40	34	24	44	32	28	34	38
44	34	29	47	37	49	43	35	47	50

1.9. $p = 0{,}98$, $\alpha = 0{,}01$.

70	95	75	85	60	77	55	63	80	67
90	78	57	76	84	82	75	68	73	62
62	81	77	72	97	68	85	56	92	71
73	78	98	63	83	85	70	90	66	91
86	68	55	93	71	96	77	81	86	72
82	62	70	78	67	87	91	99	78	87
91	58	81	97	75	83	71	66	61	76
73	85	65	90	86	61	54	75	78	93
87	58	72	92	66	98	65	81	76	63
95	83	65	57	80	87	61	92	56	71

1.10. $p = 0{,}9$, $\alpha = 0{,}025$.

57,3	75,1	78,1	69,3	60,1	77,3	66,1	69,5	72,1	68,7
81,1	69,4	63,1	67,4	77,1	82,6	64,8	72,5	62,5	80,7
77,6	65,8	78,3	57,7	80,7	64,4	82,8	67,3	83,1	70,6
75,3	58,0	60,7	81,3	67,1	69,6	82,4	62,3	66,9	80,6
62,7	73,8	68,9	83,8	57,0	72,6	65,6	78,7	59,5	70,0
73,5	58,1	64,0	83,9	84,0	63,5	74,1	77,7	68,5	80,5
66,3	73,0	79,1	71,1	80,4	62,1	66,7	83,7	76,8	59,3
71,3	63,7	71,2	78,9	65,2	77,9	74,9	69,1	70,8	74,8
71,6	72,9	61,9	71,5	75,4	71,7	59,9	74,3	76,1	70,9
61,3	71,4	71,8	65,0	67,8	75,5	71,9	64,9	74,7	62,9

1.11. $p = 0{,}95$, $\alpha = 0{,}01$.

181	141	162	103	136	124	41	117	69	153
101	24	67	154	172	110	62	59	197	121
135	58	199	159	81	39	142	87	179	85
171	107	125	192	163	200	133	150	178	98
148	56	113	169	73	138	104	31	90	109
127	116	190	20	111	94	157	119	53	76
66	132	166	91	44	115	72	26	128	149
46	75	105	137	82	64	186	96	176	97
156	33	188	58	112	139	86	174	106	77
152	130	43	108	119	129	37	71	96	114

1.12. $p = 0{,}98$, $\alpha = 0{,}025$.

32	105	48	80	144	128	64	112	18	81
66	129	113	17	94	78	90	51	104	34
110	149	36	103	82	53	93	130	68	150
114	84	55	131	70	38	102	77	16	135
41	19	142	61	85	159	115	57	72	101
56	100	86	146	73	40	141	25	87	126
151	71	94	15	125	76	54	99	39	140
17	124	52	98	139	37	147	88	69	109
35	158	67	30	93	123	50	138	21	97
96	121	49	137	89	145	91	65	92	33

1.13. $p = 0{,}9$, $\alpha = 0{,}05$.

0,053	0,026	0,037	0,056	0,041	0,035	0,031	0,046	0,021	0,054
0,035	0,039	0,043	0,031	0,038	0,023	0,045	0,026	0,037	0,042
0,030	0,041	0,021	0,047	0,026	0,046	0,033	0,038	0,053	0,035
0,049	0,054	0,039	0,034	0,051	0,029	0,046	0,023	0,038	0,043
0,026	0,039	0,033	0,020	0,042	0,050	0,025	0,037	0,041	0,029
0,029	0,038	0,027	0,043	0,035	0,030	0,049	0,055	0,039	0,034
0,022	0,045	0,034	0,055	0,037	0,025	0,033	0,051	0,027	0,045
0,041	0,051	0,027	0,046	0,029	0,038	0,042	0,020	0,039	0,031
0,025	0,047	0,030	0,050	0,023	0,039	0,035	0,049	0,030	0,047
0,034	0,022	0,042	0,031	0,049	0,033	0,056	0,037	0,050	0,025

1.14. $p = 0{,}95$, $\alpha = 0{,}05$.

0,026	0,034	0,028	0,036	0,030	0,038	0,041	0,038	0,030	0,028
0,028	0,030	0,034	0,038	0,040	0,036	0,034	0,023	0,032	0,026
0,034	0,032	0,024	0,036	0,032	0,026	0,030	0,028	0,038	0,034
0,038	0,041	0,028	0,026	0,030	0,034	0,032	0,040	0,036	0,032
0,030	0,036	0,034	0,032	0,023	0,032	0,028	0,032	0,026	0,038
0,026	0,032	0,028	0,040	0,038	0,030	0,032	0,024	0,036	0,030
0,024	0,032	0,030	0,036	0,028	0,041	0,032	0,038	0,034	0,026
0,041	0,034	0,023	0,038	0,026	0,030	0,028	0,036	0,040	0,028
0,030	0,026	0,034	0,028	0,024	0,036	0,032	0,030	0,038	0,034
0,028	0,034	0,040	0,036	0,030	0,038	0,023	0,034	0,032	0,026

1.15. $p = 0{,}98$, $\alpha = 0{,}01$.

0,86	1,04	1,45	1,31	1,22	1,09	0,73	1,11	0,95	0,84
0,96	0,78	1,23	1,13	1,04	1,44	1,32	1,29	0,68	0,86
1,33	1,08	0,87	0,67	1,28	0,97	1,14	0,83	1,33	1,40
1,24	1,43	0,98	1,34	0,81	0,88	1,10	0,70	1,15	1,23
1,34	1,09	0,80	1,16	1,24	0,75	0,99	1,41	0,88	0,79
1,36	1,25	0,89	1,26	1,42	1,35	0,80	1,17	0,90	1,00
1,11	0,69	1,18	0,82	1,01	0,90	1,36	1,25	0,67	0,91
1,37	1,02	0,92	1,27	1,19	1,38	1,46	0,93	1,27	0,83
1,04	1,11	1,47	1,07	0,72	0,93	1,26	0,77	1,20	1,28
0,77	1,10	0,95	1,05	1,08	1,11	1,10	1,48	1,07	0,92

1.16. $p = 0{,}9$, $\alpha = 0{,}01$.

0,76	0,82	0,70	0,86	0,78	0,96	0,68	0,83	0,92	0,86
0,86	0,84	0,66	0,92	0,76	0,95	0,84	0,91	0,78	0,70
0,78	0,70	0,82	0,99	0,83	0,86	0,67	0,91	0,75	0,86
0,83	0,75	0,95	0,79	0,65	0,84	0,78	0,88	0,70	0,95
0,87	0,71	0,92	1,00	0,75	0,87	0,80	0,79	0,66	0,90
0,79	0,82	0,65	0,83	0,88	0,96	0,75	0,91	0,71	0,87
0,76	0,90	0,71	0,87	0,74	0,94	0,80	1,00	0,95	0,79
0,96	0,98	0,84	0,79	0,91	0,71	0,65	0,90	0,88	0,74
0,74	0,67	0,94	0,72	1,01	0,82	0,80	0,83	0,99	0,83
0,88	0,80	0,72	0,91	0,84	0,74	0,94	0,72	0,83	0,87

1.17. $p = 0{,}95$, $\alpha = 0{,}05$.

1,66	2,21	1,21	1,46	1,16	1,81	0,86	1,74	2,08	1,38
2,27	0,81	2,39	2,19	2,25	1,67	1,84	1,37	2,12	2,37
1,15	2,17	1,45	1,75	1,14	1,94	1,53	0,83	1,68	1,35
2,39	1,63	1,86	1,24	1,73	1,07	2,10	1,13	1,91	1,31
1,78	2,09	1,54	1,79	1,08	1,42	0,80	1,96	1,19	0,85
1,88	1,27	0,84	2,60	1,44	1,77	2,45	1,10	2,16	1,59
1,56	2,30	2,48	0,99	1,18	2,11	1,64	2,28	1,29	1,93
2,15	1,72	1,83	1,47	1,87	1,17	2,29	1,90	1,71	2,55
2,31	1,39	1,85	2,38	1,65	2,51	1,48	1,28	2,18	1,49
2,14	1,76	1,51	1,82	0,91	2,51	2,34	2,59	1,69	2,13

1.18. $p = 0{,}98$, $\alpha = 0{,}025$.

2,1	2,3	1,5	3,1	2,7	1,9	2,4	0,9	2,5	1,1
1,3	2,9	2,3	3,9	2,4	3,6	1,6	3,2	2,9	2,0
2,1	3,3	0,8	3,5	1,7	2,6	4,1	2,8	1,2	2,5
1,1	2,4	1,5	3,2	2,7	1,5	3,7	1,9	3,1	4,0
4,1	2,9	2,0	2,0	1,1	0,7	3,3	2,5	1,6	2,4
2,1	3,2	0,9	2,8	4,2	2,8	1,9	1,2	1,7	3,5
2,7	3,9	2,4	1,7	3,6	2,5	0,8	3,1	2,1	1,3
3,2	1,6	0,7	2,6	1,3	2,0	3,7	2,9	4,0	3,1
2,8	4,1	1,9	3,6	3,3	2,9	0,6	1,5	1,2	2,4
1,1	3,5	1,6	2,4	3,9	2,7	2,5	1,9	2,6	3,2

1.19. $p = 0{,}9$, $\alpha = 0{,}01$.

19,3	44,5	49,9	26,9	50,2	51,1	18,6	72,7	35,4	25,4
42,7	17,5	51,7	49,3	26,2	47,1	71,4	27,1	75,7	43,2
25,5	27,2	80,4	50,4	70,2	14,9	52,4	62,3	41,7	49,5
40,6	14,5	62,8	34,5	53,4	26,1	69,3	52,5	27,3	80,3
25,3	43,1	27,4	80,1	68,4	63,3	13,4	55,4	39,5	33,1
38,4	19,7	63,8	40,4	80,8	56,4	66,1	27,5	79,1	24,6
28,6	47,9	78,4	57,4	66,5	37,3	23,4	67,6	11,1	64,3
22,7	64,8	36,2	58,7	10,8	47,7	58,4	29,2	46,7	77,2
51,9	31,3	44,7	66,3	20,1	65,3	45,5	76,3	67,8	35,1
66,9	18,9	42,9	50,7	34,9	43,5	32,5	48,4	53,1	65,8

1.20. $p = 0{,}95$, $\alpha = 0{,}01$.

56,5	47,3	23,1	38,6	92,5	50,9	74,9	65,7	47,5	83,9
11,8	70,1	57,1	39,9	54,7	70,9	47,4	28,1	39,1	76,2
32,3	92,1	20,7	48,6	87,1	66,3	45,8	41,4	56,9	22,6
45,8	58,4	53,4	51,4	11,6	30,9	31,4	37,4	65,8	19,3
45,3	74,4	21,2	25,7	56,7	20,3	48,3	60,1	46,2	64,1
15,1	47,7	12,7	92,6	29,5	52,0	60,2	32,1	74,5	54,2
36,1	47,2	26,1	65,3	42,0	50,1	72,1	56,4	25,1	75,1
83,8	38,7	81,2	65,1	87,4	35,3	92,4	85,6	83,5	20,5
76,3	69,4	41,6	35,9	29,7	80,9	49,9	59,5	83,4	76,5
24,4	55,9	74,2	27,3	76,7	29,9	69,1	30,1	65,4	18,4

1.21. $p = 0{,}98$, $\alpha = 0{,}05$.

15,2	23,1	27,1	18,6	25,1	27,5	16,0	28,8	22,7	18,8
24,9	26,3	21,2	28,0	25,5	27,7	20,9	31,9	16,8	29,1
26,8	17,4	31,5	21,4	24,8	17,2	30,8	23,7	29,7	21,1
20,4	24,5	26,0	28,7	20,0	33,0	27,9	24,5	20,6	32,1
26,9	19,7	21,5	19,8	16,8	21,7	26,4	23,2	22,9	26,6
25,3	25,8	16,6	23,6	15,0	22,3	24,0	22,4	32,5	19,1
24,7	29,8	18,2	29,6	23,4	18,1	16,9	24,2	24,1	32,2
24,4	18,4	22,1	30,1	22,0	17,8	28,0	25,7	30,9	22,5
30,7	22,5	30,0	27,3	25,4	26,2	20,7	28,1	19,3	28,9
20,3	30,4	24,3	31,6	30,0	22,6	29,2	32,7	26,7	15,8

1.22. $p = 0{,}9$, $\alpha = 0{,}025$.

19,1	23,5	19,6	27,5	33,3	31,2	27,7	21,4	27,3	20,5
21,9	20,7	15,2	27,3	23,0	31,7	18,9	23,7	33,1	27,9
23,9	18,5	24,1	28,1	22,0	16,4	30,8	27,1	19,9	30,4
20,5	30,9	31,9	26,9	19,8	28,3	22,7	15,6	22,4	18,3
28,5	16,2	22,5	18,1	28,4	33,9	30,8	19,6	26,7	32,5
21,1	24,3	26,5	15,4	24,5	26,4	28,7	17,9	30,6	23,1
32,1	23,2	17,7	28,9	22,9	20,1	30,4	26,3	16,0	25,4
26,1	15,8	30,2	19,4	25,1	25,3	17,5	24,7	21,7	29,1
21,2	21,8	17,3	33,5	29,3	24,9	30,0	15,0	25,2	25,8
33,7	24,5	25,6	23,3	29,8	17,2	25,1	22,4	29,6	19,3

1.23. $p = 0{,}95$, $\alpha = 0{,}01$.

81	106	135	170	206	60	181	178	154	103
78	176	31	204	145	85	229	47	108	234
110	207	241	168	133	68	174	143	89	182
203	153	172	93	48	228	255	134	112	58
144	235	114	77	208	183	59	170	95	154
104	202	39	164	247	226	110	67	121	193
123	91	164	57	209	30	185	162	250	225
201	160	239	211	131	142	101	153	76	125
137	54	127	87	66	190	158	241	33	221
100	195	156	146	231	220	129	83	151	56

1.24. $p = 0{,}98$, $\alpha = 0{,}025$.

76	28	151	91	60	204	177	102	128	217
120	66	207	126	124	152	27	221	131	51
241	77	250	134	123	147	184	195	47	160
159	74	169	178	79	129	250	223	182	96
135	199	56	25	82	116	44	229	145	203
88	209	146	224	239	103	201	245	130	163
71	165	176	194	78	154	99	78	127	69
171	173	31	181	117	84	73	161	240	149
247	107	140	53	205	155	29	132	185	179
180	128	42	114	93	191	174	210	133	226

1.25. $p = 0{,}9$, $\alpha = 0{,}05$.

157,2	137,1	136,0	131,1	142,1	152,0	150,2	125,7	146,6	141,6
138,5	143,4	147,3	144,2	158,3	146,0	140,8	135,8	150,9	156,4
145,1	122,4	139,1	155,5	150,2	146,2	159,6	146,2	164,1	140,5
156,4	141,6	134,4	149,2	145,3	128,4	150,6	133,7	142,1	136,9
127,2	138,2	160,8	155,2	121,8	150,5	144,5	150,5	141,4	128,0
136,2	145,9	162,5	136,9	142,9	146,4	153,2	161,4	150,8	141,6
149,8	154.1	148,4	144,8	150,8	129,3	145,3	141,2	146,4	135,5
134,8	147,1	137,5	159,7	142,7	145,7	150,3	123,5	139,6	153,6
138,4	166,8	148,8	152,5	151,6	133,4	145,6	144,5	144,4	140,8
152,1	137,4	132,1	149,7	166,2	151,1	145,1	139,5	130,1	145,6

1.26. $p = 0{,}95$, $\alpha = 0{,}025$.

2,85	5,92	3,06	2,47	6,28	3,86	2,19	5,81	3,88	3,01
3,91	3,11	1,46	4,67	3,95	5,76	3,08	3,99	6,38	1,51
2,34	4,19	5,72	4,14	3,03	4,08	6,47	4,05	5,96	4,01
4,23	2,16	6,55	3,14	4,26	4,31	1,48	4,45	2,71	5,69
6,60	4,69	2,93	7,68	0,65	6,68	3,18	5,64	4,56	3,36
2,64	3,23	6,75	4,57	5,61	3,29	7,08	2,91	4,59	2,59
4,65	1,98	6,21	3,39	4,62	2,28	4,64	3,45	5,56	4,07
3,58	4,73	3,61	2,24	4,31	3,81	5,52	4,26	4,17	7,49
1,29	4,45	4,78	5,01	7,85	5,49	2,01	4,89	0,98	4,84
2,26	5,47	4,63	4,98	5,42	4,60	5,10	4,96	4,63	5,05

1.27. $p = 0{,}98$, $\alpha = 0{,}01$.

76,23	45,29	92,41	35,48	56,81	45,67	54,01	45,88	25,56	65,91
48,11	6,32	26,31	74,27	27,82	88,04	36,12	56,97	4,97	46,31
55,78	46,85	57,31	37,28	66,41	28,53	72,48	29,34	38,34	62,35
46,82	39,47	81,04	54,06	48,64	61,22	40,56	30,11	78,45	48,53
86,24	47,51	66,92	42,74	4,83	47,83	64,02	57,84	41,63	53,75
65,21	43,82	58,31	33,71	44,95	68,91	32,84	45,21	84,47	31,27
49,29	83,09	55,11	94,75	49,85	58,86	55,30	69,44	50,41	35,07
67,24	41,78	50,56	34,05	37,91	71,25	17,84	14,51	18,23	51,93
50,89	9,41	16,31	51,33	70,58	15,91	51,84	59,31	25,01	60,31
85,52	59,77	75,26	52,22	95,73	19,04	60,85	22,91	53,84	15,02

1.28. $p = 0{,}9$, $\alpha = 0{,}01$.

1,58	1,95	0,89	1,76	1,54	2,18	1,13	2,59	1,91	1,60
1,19	1,70	2,58	1,31	2,54	1,90	2,20	1,49	2,69	1,51
1,77	1,93	1,48	2,21	1,64	2,92	1,25	1,97	0,90	1,78
1,12	2,48	1,38	1,79	1,75	0,67	2,22	1,62	1,82	1,09
1,61	1,71	0,95	2,23	1,46	1,99	2,24	1,72	2,03	1,25
1,28	2,04	1,83	1,69	1,81	1,22	2,05	1,07	1,74	1,88
1,80	0,69	2,07	1,29	2,27	2,75	1,41	2,08	2,30	2,15
1,34	1,84	1,73	2,31	1,86	1,40	2,46	0,73	2,33	1,85
1,02	2,13	1,66	2,84	1,16	2,34	1,44	2,89	2,09	2,90
1,87	1,43	2,11	0,84	1,91	2,44	2,10	1,75	2,60	1,68

1.29. $p = 0{,}95$, $\alpha = 0{,}05$.

30,2	51,9	43,1	58,9	34,1	55,2	47,9	43,7	53,2	34,9
47,8	65,7	37,8	68,6	48,4	67,5	27,3	66,1	52,0	55,6
54,1	26,9	53,6	42,5	59,3	44,8	52,8	42,3	55,9	48,1
44,5	69,8	47,3	35,6	70,1	39,5	70,3	33,7	51,8	56,1
28,4	48,7	41,9	58,1	20,4	56,3	46,5	41,8	59,5	38,1
41,4	70,4	31,4	52,5	45,2	52,3	40,2	60,4	27,6	57,4
29,3	53,8	46,3	40,1	50,3	48,9	35,8	61,7	49,2	45,8
45,3	71,5	35,1	57,8	28,1	57,6	49,6	45,5	36,2	63,2
61,9	25,1	65,1	49,7	62,1	46,1	39,9	62,4	50,1	33,1
33,3	49,8	39,8	45,9	37,3	78,0	64,9	28,8	62,5	58,7

1.30. $p = 0{,}98$, $\alpha = 0{,}05$.

88	72	100	60	116	74	36	143	114	70
56	75	30	76	89	53	117	90	135	103
35	128	71	86	43	76	61	113	34	83
62	84	50	69	120	91	102	47	119	99
33	76	91	37	85	17	85	63	121	74
46	85	63	104	77	92	54	78	42	105
85	79	49	80	93	32	106	81	64	79
73	19	80	65	107	123	51	94	80	108
52	83	124	81	96	82	109	20	95	68
66	41	82	98	111	67	125	97	112	58

Задание 2

Получены данные о зависимости случайной величины Y от случайной величины X, расположенные в таблице. Предполагая, что модель наблюдения имеет вид $Y = a + bX$, требуется:

а) построить корреляционное поле,

б) найти оценки параметров $\hat{a}$ и $\hat{b}$ линейной регрессии,

в) найти выборочный коэффициент корреляции,

г) составить уравнение линейной регрессии,

д) построить график линейной регрессии.

1	*X*	*Y*
1	3,04	12,14
2	2,88	8,65
3	4,09	10,83
4	4,51	12,53
5	1,48	2,93
6	2,11	6,56
7	5,01	12,49
8	3,48	10,66
9	2,98	9,53
10	4,47	10,81
11	2,78	11,27
12	2,54	8,97
13	3,06	8,84

2	*X*	*Y*
1	3,66	9,04
2	4,03	12,51
3	4,62	12,27
4	3,94	10,093
5	4,38	11,72
6	3,62	12,67
7	4,29	8,58
8	5,07	9,09
9	3,71	8,33
10	3,07	7,94
11	2,17	7,55
12	2,59	9,38

3	*X*	*Y*
1	5,32	12,39
2	4,79	16,87
3	4,37	15,61
4	3,96	12,67
5	4,31	15,33
6	4,88	15,36
7	6,07	15,86
8	4,84	18,22
9	3,27	15,67
10	3,23	8,82
11	5,32	17,98
12	5,76	19,95
13	3,71	10,71

4	*X*	*Y*
1	6,12	16,63
2	5,63	13,88
3	3,83	17,92
4	6,51	14,39
5	3,47	15,97
6	4,25	14,37
7	7,12	12,18
8	5,11	11,36
9	4,96	15,04
10	4,59	17,28
11	4,98	14,42
12	4,17	19,29
13	5,67	8,53

5	*X*	*Y*
1	2,84	15,18
2	3,06	9,33
3	4,02	7,25
4	4,52	10,03
5	3,73	7,14
6	2,86	14,98
7	3,61	15,79
8	4,03	5,88
9	3,51	8,12
10	4,52	12,51
11	2,29	16,34
12	3,68	15,82
13	5,45	13,09

6	*X*	*Y*
1	4,52	9,715
2	4,53	15,39
3	3,63	11,93
4	3,67	19,61
5	2,22	17,19
6	4,52	17,02
7	3,91	16,02
8	4,72	14,12
9	5,86	14,87
10	2,01	19,43
11	5,21	9,88
12	2,71	11,41

7	*X*	*Y*
1	5,17	10,11
2	2,83	14,12
3	3,33	8,55
4	4,73	13,75
5	3,76	15,03
6	4,87	14,42
7	4,37	16,92
8	6,32	11,18
9	3,11	11,69
10	3,68	15,76
11	2,35	13,44

8	*X*	*Y*
1	3,84	14,74
2	2,79	14,03
3	3,47	17,92
4	3,45	16,41
5	4,23	16,91
6	2,63	15,17
7	4,56	15,87
8	3,51	9,96
9	3,82	10,76
10	4,19	17,27

9	*X*	*Y*
1	3,66	13,14
2	3,59	13,36
3	4,74	10,83
4	2,93	14,69
5	4,61	10,52
6	3,56	14,65
7	4,17	11,17
8	5,07	13,32
9	2,59	12,79
10	5,37	7,71

10	*X*	*Y*
1	4,06	9,28
2	2,71	10,01
3	4,09	8,71
4	2,96	9,88
5	3,25	10,86
6	4,35	8,92
7	3,03	9,26
8	3,31	9,26
9	1,16	9,42
10	3,56	8,09

11	*X*	*Y*
1	4,16	19,81
2	4,86	17,83
3	2,96	14,81
4	3,59	9,12
5	2,62	11,07
6	3,71	16,87
7	2,07	11,42
8	4,55	16,16
9	2,56	12,58
10	3,07	15,23
11	3,01	12,48

12	*X*	*Y*
1	4,67	8,04
2	3,17	8,17
3	3,78	9,08
4	3,75	6,71
5	4,56	8,05
6	4,15	7,13
7	4,69	7,43
8	3,72	7,02
9	5,21	11,13
10	4,04	9,73
11	6,01	8,22

13	*X*	*Y*
1	5,64	17,02
2	3,98	10,32
3	2,89	14,85
4	4,14	13,42

14	*X*	*Y*
1	4,28	10,52
2	3,79	9,09
3	5,54	10,21
4	4,35	10,76

15	*X*	*Y*
1	4,17	10,38
2	1,77	9,39
3	4,11	9,21
4	3,67	10,01

5	3,17	10,21
6	3,66	10,67
7	3,29	8,08
8	6,07	10,42
9	5,43	11,24
10	2,71	12,08

5	3,34	10,79
6	5,78	12,86
7	4,63	11,25
8	3,78	11,78
9	5,53	7,24
10	3,73	8,82

5	4,83	10,61
6	6,11	10,81
7	4,88	13,54
8	5,84	10,29
9	4,09	8,23
10	5,69	8,12

16	*X*	*Y*
1	5,48	16,46
2	5,44	12,06
3	5,63	8,01
4	5,17	13,69
5	3,02	17,31
6	3,17	18,14
7	5,29	13,31
8	3,28	14,28
9	5,07	13,33
10	0,97	18,62
11	4,72	8,82
12	5,34	20,96

17	*X*	*Y*
1	3,07	16,19
2	3,94	11,74
3	5,55	11,65
4	5,72	10,58
5	6,41	7,08
6	3,27	14,49
7	5,35	9,77
8	6,13	11,18
9	5,53	8,45
10	4,14	12,01
11	4,34	11,85
12	5,68	9,72

18	*X*	*Y*
1	5,42	6,74
2	5,97	7,79
3	4,53	9,38
4	4,59	7,31
5	5,38	8,11
6	5,68	7,16
7	4,53	9,73
8	3,19	13,47
9	4,35	6,25
10	5,59	9,43
11	3,72	10,05
12	6,29	10,03

19	*X*	*Y*
1	3,91	8,55
2	2,95	10,25
3	3,19	11,58
4	3,63	9,95
5	6,41	6,75
6	3,68	8,14
7	4,45	8,83
8	5,03	7,97
9	4,71	8,67

20	*X*	*Y*
1	3,48	8,88
2	2,95	12,85
3	4,78	9,24
4	3,07	8,83
5	2,39	7,78
6	3,96	11,84
7	3,57	13,31
8	4,07	13,23
9	4,02	10,72

21	*X*	*Y*
1	2,77	10,55
2	2,62	10,06
3	4,65	7,63
4	3,13	8,08
5	3,91	10,97
6	3,44	9,72
7	4,69	13,65
8	4,02	16,47
9	3,73	9,76

10	4,85	6,15
11	5,88	6,71

10	2,73	11,04
11	4,23	8,12

10	2,42	9,61
11	3,23	7,97

22	*X*	*Y*
1	4,04	15,24
2	3,76	18,18
3	4,78	11,78
4	4,83	11,58
5	6,58	12,39
6	5,73	10,31
7	5,08	14,86
8	4,82	12,98
9	3,53	11,56
10	3,74	12,44
11	2,03	17,25

23	*X*	*Y*
1	3,93	14,93
2	5,15	7,86
3	4,62	15,39
4	4,06	15,18
5	6,74	13,71
6	6,69	16,12
7	4,32	16,93
8	2,84	16,06
9	5,84	11,47
10	4,03	13,38
11	4,15	14,54

24	*X*	*Y*
1	3,21	17,47
2	5,41	11,06
3	1,41	16,49
4	3,27	16,07
5	2,56	16,71
6	4,05	17,04
7	3,02	12,04
8	3,58	12,47
9	3,81	10,55
10	5,15	12,05
11	3,18	9,63

25	*X*	*Y*
1	1,94	10,56
2	4,93	9,51
3	3,15	8,31
4	4,19	13,78
5	3,29	11,74
6	4,65	15,16
7	4,05	13,97
8	4,15	10,54
9	3,58	6,67
10	4,69	12,75

26	*X*	*Y*
1	4,87	10,93
2	4,46	9,23
3	4,07	10,65
4	4,06	10,73
5	6,49	4,59
6	7,54	5,18
7	4,02	10,15
8	4,11	13,16
9	5,81	6,52
10	4,52	10,94

27	*X*	*Y*
1	4,72	13,55
2	3,82	13,48
3	6,22	18,95
4	5,05	16,72
5	2,96	8,44
6	6,49	20,84
7	2,82	8,43
8	6,15	17,41
9	4,44	10,63
10	5,52	10,97

28	*X*	*Y*
1	3,43	10,43
2	3,74	9,49

29	*X*	*Y*
1	2,57	14,14
2	3,71	16,51

30	*X*	*Y*
1	4,58	18,36
2	5,53	19,48

3	4,73	11,22
4	3,34	9,81
5	3,86	9,25
6	3,89	8,66
7	3,35	8,49
8	4,45	10,44
9	5,73	11,27
10	3,04	5,41
11	3,54	9,46

3	2,88	11,78
4	2,87	12,69
5	3,37	15,96
6	3,07	7,96
7	3,52	14,07
8	2,02	9,45
9	1,62	10,26
10	3,03	13,05
11	2,09	12,72

3	4,76	17,97
4	2,82	12,63
5	5,12	15,27
6	3,02	10,61
7	3,54	16,73
8	4,58	16,35
9	5,86	18,29
10	2,95	10,02
11	2,12	14,88

Решение нулевого варианта

Задание 0.1. В результате эксперимента получены данные, записанные в виде статистического ряда (табл. 3.1). Требуется:

а) записать значения результатов эксперимента в виде вариационного ряда;

б) найти размах выборки и разбить ее на интервалы;

в) построить полигон частот, гистограмму относительных частот и график эмпирической функции распределения;

г) найти числовые характеристики выборки $\bar{x}$ и D_x;

д) найти доверительные интервалы для математического ожидания и среднего квадратического отклонения при надежности $p = 0{,}9$;

е) приняв в качестве нулевой гипотезу H_0: генеральная совокупность, из которой извлечена выборка, имеет нормальное распределение, проверить ее, пользуясь критерием Пирсона при уровне значимости $\alpha = 0{,}025$.

Таблица 3.1

44,8	46,2	45,6	44,0	46,4	45,2	46,7	45,4	45,3	46,1
44,3	45,3	45,6	46,7	44,5	46,0	45,7	45,0	46,4	45,9
44,4	45,4	46,1	43,4	46,5	45,9	43,9	45,7	47,1	44,9
43,8	45,6	45,2	46,4	44,2	46,5	45,7	44,7	46,0	45,8
44,3	45,5	46,7	44,9	46,2	46,7	44,6	46,0	45,4	45,0
45,4	45,3	44,1	46,6	44,8	45,6	43,7	46,8	45,2	46,1

Окончание таблицы 3.1

44,5	45,4	45,1	46,2	44,2	46,4	45,7	43,9	47,2	45,0
43,9	45,6	44,9	44,5	46,2	46,7	44,3	46,1	47,7	45,8
45,6	45,2	44,2	46,0	44,7	46,5	43,5	45,4	47,1	44,0
46,2	44,2	45,5	46,0	45,7	46,4	44,6	47,0	45,2	46,9

Решение. а) Располагаем значения результатов эксперимента в порядке возрастания, т.е. записываем вариационный ряд (табл. 3.2):

Таблица 3.2

43,4	43,5	43,7	43,8	43,9	43,9	43,9	44,0	44,0	44,1
44,2	44,2	44,2	44,3	44,3	44,3	44,4	44,5	44,5	44,5
44,6	44,6	44,7	44,7	44,8	44,8	44,8	44,9	44,9	44,9
45,0	45,0	45,1	45,2	45,2	45,2	45,2	45,2	45,3	45,3
45,3	45,4	45,4	45,4	45,4	45,4	45,4	45,5	45,5	45,6
45,6	45,6	45,6	45,6	45,7	45,7	45,7	45,7	45,7	45,7
45,8	45,8	45,9	45,9	46,0	46,0	46,0	46,0	46,0	46,0
46,1	46,1	46,1	46,1	46,2	46,2	46,2	46,2	46,2	46,4
46,4	46,4	46,4	46,4	46,5	46,5	46,5	46,6	46,7	46,7
46,7	46,7	46,7	46,8	46,9	47,0	47,1	47,1	47,2	47,7

б) Находим размах выборки:

$$R = x_{\max} - x_{\min} = 47,7 - 43,4 = 4,3.$$

Число интервалов для интервального ряда находим по формуле Стерджесса $m = 1 + \log_2 n$, где n – объем выборки. Для практического применения более удобно формулу Стерджесса записать в виде:

$$m = 1 + \log_2 n = 1 + \frac{\lg n}{\lg 2} \approx 1 + 3,322 \lg n.$$

В данной задаче $n = 100$, поэтому получим:

$$m \approx 1 + 3,322 \lg 100 \approx 7,644 \approx 8.$$

Значит, выборку нужно разбивать на 8 интервалов. Найдем длину частичного интервала:

$$h = \frac{R}{m} = \frac{4,3}{8} = 0,5375 \approx 0,54.$$

В качестве границы первого интервала можно выбрать значение $x_{\min}$. Тогда границы следующих частичных интервалов вычисляем по формуле $x_i = x_{\min} + i \cdot h$, где $i = \overline{1, m}$. Далее находим середины интервалов $x_i' = \dfrac{x_i + x_{i+1}}{2}$. Затем подсчитываем число значений результатов эксперимента, попавших в каждый интервал, т.е. находим частоты интервалов n_i. Потом вычисляем относительные частоты $p_i^* = \dfrac{n_i}{n}$, где $n = 100$, и их плотности $\dfrac{p_i^*}{h}$, где h – длина частичного интервала, $h = 0{,}54$. Все полученные результаты помещаем в табл. 3.3.

Таблица 3.3

i	$[x_i;\ x_{i+1}]$	$x_i' = \dfrac{x_i + x_{i+1}}{2}$	n_i	$p_i^* = \dfrac{n_i}{n}$	$\dfrac{p_i^*}{h}$
1	$[43{,}4;\ 43{,}94]$	43,67	7	0,07	0,13
2	$[43{,}94;\ 44{,}48]$	44,21	10	0,10	0,19
3	$[44{,}48;\ 45{,}02]$	44,75	15	0,15	0,28
4	$[45{,}02;\ 45{,}56]$	45,29	17	0,17	0,31
5	$[45{,}56;\ 46{,}10]$	45,83	23	0,23	0,43
6	$[46{,}10;\ 46{,}64]$	46,31	16	0,16	0,30
7	$[46{,}64;\ 47{,}18]$	46,91	10	0,10	0,19
8	$[47{,}18;\ 47{,}72]$	47,45	2	0,02	0,04

Для проверки найдем:

$$\sum_{i=1}^{8} n_i = 7 + 10 + 15 + 17 + 23 + 16 + 10 + 2 = 100 = n,$$

$$\sum_{i=1}^{8} p_i^* = 0{,}07 + 0{,}1 + 0{,}15 + 0{,}17 + 0{,}23 + 0{,}16 + 0{,}1 + 0{,}02 = 1.$$

в) Строим полигон частот (рис. 3.1) и гистограмму относительных частот (рис. 3.2).

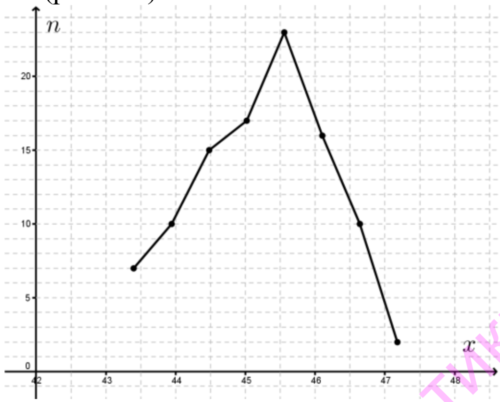


Рис. 3.1

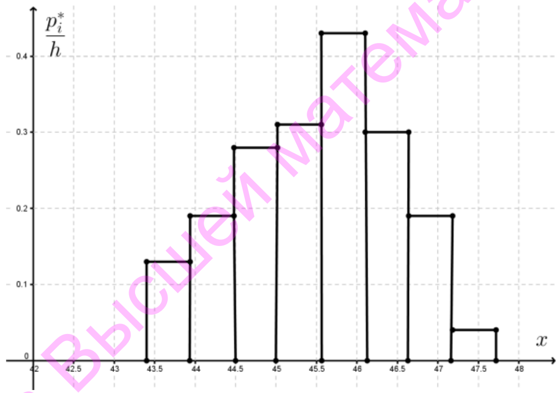


Рис. 3.2

Для построения эмпирической функции распределения $F_n^*(x)=\sum_{x<x_i'} p_i^*$ используем дискретный статистический ряд, в котором вместо интервалов записаны их середины x_i' из табл. 3.2.

$$F_n^*(x)=\begin{cases}0, & x \le 43{,}67,\\ 0{,}07, & 43{,}67 < x \le 44{,}21,\\ 0{,}17, & 44{,}21 < x \le 44{,}75,\\ 0{,}32, & 44{,}75 < x \le 45{,}29,\\ 0{,}49, & 45{,}29 < x \le 45{,}83,\\ 0{,}72, & 45{,}83 < x \le 46{,}37,\\ 0{,}88, & 46{,}37 < x \le 46{,}91,\\ 0{,}98, & 46{,}91 < x \le 47{,}45,\\ 1, & x > 47{,}45.\end{cases}$$

Строим график эмпирической функции распределения (рис. 3.3).

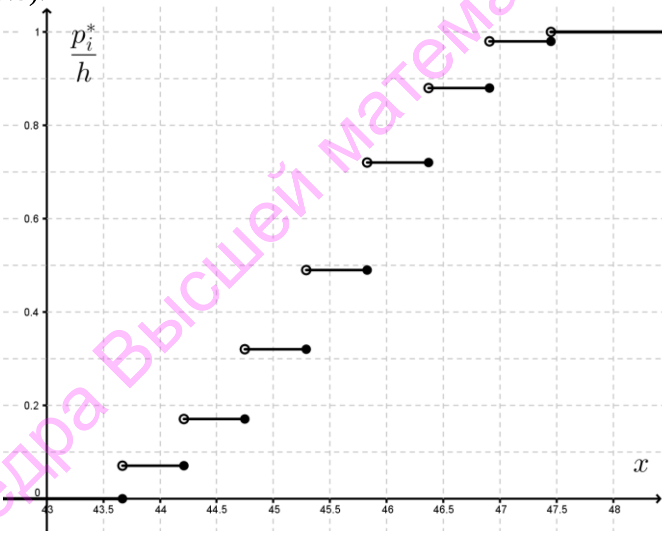


Рис. 3.3

г) Находим выборочное среднее:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m} x_i' n_i$$

и выборочную дисперсию:

$$D_x = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m}\left(x_i' - \bar{x}\right)^2 n_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m}\left(x_i'\right)^2 n_i - \bar{x}^2 .$$

Для этого составляем расчетную таблицу (табл. 3.4).

Таблица 3.4

i	x_i'	n_i	$x_i' \cdot n_i$	$\left(x_i'\right)^2$	$\left(x_i'\right)^2 \cdot n_i$
1	43,67	7	305,69	1907,07	13 349,50
2	44,21	10	442,10	1954,52	19 545,20
3	44,75	15	671,25	2002,56	30 038,40
4	45,29	17	769,93	2051,18	34 870,06
5	45,83	23	1054,09	2100,39	48 308,97
6	46,37	16	741,92	2150,18	34 402,88
7	46,91	10	469,10	2200,55	22 005,50
8	47,45	2	94,90	2251,50	4 503,0
$\sum$		100	4 548,98		207 023,56

Из табл. 3.4 получим выборочную среднюю:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m} x_i' n_i = \frac{4\,548{,}98}{100} \approx 45{,}49$$

и выборочную дисперсию:

$$D_x = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m}\left(x_i'\right)^2 n_i - \bar{x}^2 = \frac{207\,023{,}56}{100} - 45{,}49^2 \approx 0{,}9 .$$

Исправленная выборочная дисперсия равна:

$$S_x^2 = \frac{n}{n-1} D_x = \frac{100}{99} \cdot 0{,}9 \approx 0{,}91 .$$

д) В случае когда дисперсия неизвестна, доверительный интервал для математического ожидания имеет вид:

$$\left(\bar{x} - \frac{t_p S_x}{\sqrt{n}};\ \bar{x} + \frac{t_p S_x}{\sqrt{n}}\right),$$

где значение t_p находится из таблицы квантилей распределения Стьюдента (приложение 5), S_x – исправленное выборочное среднее, $S_x^2 = \dfrac{n}{n-1} D_x \approx 0{,}91$, $n = 100$ – число экспериментальных данных.

Найдем t_p при надежности $p = 0{,}9$, при этом уровень значимости $\alpha = 1 - p = 1 - 0{,}9 = 0{,}1$. Число степеней свободы равно $\tau = m - r - 1$, где m – число интервалов, r – число параметров распределения (для нормального распределения $r = 2$), т.е.

$$\tau = m - r - 1 = 8 - 2 - 1 = 5.$$

Тогда из приложения 5 получим $t_p = 2{,}02$, поэтому доверительный интервал с надежностью $p = 0{,}9$ для математического ожидания имеет вид:

$$\left(45{,}49 - \frac{2{,}02 \cdot \sqrt{0{,}9}}{\sqrt{100}};\ 45{,}49 - \frac{2{,}02 \cdot \sqrt{0{,}9}}{\sqrt{100}}\right) =$$

$$= (45{,}2981;\quad 45{,}6819).$$

Доверительный интервал для дисперсии с неизвестным математическим ожиданием будем находить по формуле:

$$\frac{(\tau - 1) \cdot S_x^2}{\chi^2_{\beta;\ \tau-1}} < \sigma^2 < \frac{(\tau - 1) \cdot S_x^2}{\chi^2_{1-\beta;\ \tau-1}},$$

где S_x^2 – исправленная выборочная дисперсия, $\chi^2_{\beta;\ \tau-1}$ и $\chi^2_{1-\beta;}$ – квантили порядка β и $1-\beta$ соответственно распределения хи-квадрат с $\tau - 1$ степенями свободы (приложение 4), при этом $\beta = \dfrac{1+p}{2} = 1 - \dfrac{\alpha}{2}$ и $1 - \beta = \dfrac{1-p}{2} = \dfrac{\alpha}{2}$. Известно: $S_x^2 \approx 0{,}91$, $\tau = 5$, $\beta = \dfrac{1+0{,}9}{2} = 0{,}95$, $1 - \beta = \dfrac{1-0{,}9}{2} = 0{,}05$. Из таблицы приложения 4 найдем:

$$\chi^2_{0{,}05;\,4} = 9{,}49,\quad \chi^2_{0{,}95;\,4} = 0{,}711.$$

Доверительный интервал для дисперсии получим в виде:

$$\left(\frac{4\cdot 0{,}91}{9{,}49};\quad \frac{4\cdot 0{,}91}{0{,}711}\right)\approx\left(0{,}38;\quad 5{,}12\right).$$

е) Проверим гипотезу о нормальном распределении заданных экспериментальных данных, пользуясь критерием Пирсона при уровне значимости $\alpha = 0{,}025$. При этом примем в качестве нулевой гипотезы H_0: генеральная совокупность, из которой извлечена выборка, имеет нормальное распределение.

Для решения данной задачи устанавливается мера расхождения между экспериментальными данными, представленными выборкой, и теоретическим распределением, сформулированными в виде гипотезы.

Разобьем область возможных значений случайной величины X на m непересекающихся интервалов Δ_i, где $i=\overline{1,m}$. Если такая область – вся числовая прямая, то крайние интервалы группировки будут полупрямыми (см. табл. 3.5).

Таблица 3.5

№ интервала	1	2	3	4	5	6	7	8
Интервал Δ_i	$-\infty$ 43,94	43,94 44,48	44,48 45,02	45,02 45,56	45,56 46,10	46,10 46,64	46,64 47,18	47,18 $+\infty$

Определим эмпирические n_1, n_2, …, n_8 и теоретические n_1^T, n_2^T, …, n_8^T попадания в указанные интервалы. Эмпирические частоты n_i, где $i=\overline{1,8}$, известны из интервального ряда (табл. 3.3). Теоретической частотой события $X\in\Delta_i$ в n независимых испытаниях называется число n_i^T, равное произведению числа испытаний n на вероятность события p_i, т.е. такую частоту можно вычислить по формуле:

$$n_i^T = n \cdot p_i = n \cdot \left(F(\beta_i) - F(\alpha_i)\right),$$

где $F(x)$ – предполагаемая функция распределения СВ X, неизвестные параметры которой оцениваются по выборке; α_i и β_i – соответственно нижняя и верхняя границы интервала Δ_i.

Поскольку по нашей гипотезе теоретическое распределение – нормальное, то имеем:

$$n_i^T = n \cdot \left(\Phi\left(\frac{\beta_i - \bar{x}}{S_x}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha_i - \bar{x}}{S_x}\right)\right),\ i = \overline{1,8},$$

где $\Phi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ – нормированная функция Лапласа, значения которой определяются с помощью таблиц (приложение 2). Для данной задачи, учитывая, что $n = 100$, $\bar{x} = 45{,}49$, $S_x = \sqrt{0{,}91} \approx 0{,}95$, $\Phi(-x) = -\Phi(x)$, получим следующие результаты.

1) Для первого интервала $\Delta_1 = (-\infty; 43{,}94)$ нижняя граница равна $\alpha_1 = -\infty$, а верхняя – $\beta_1 = 43{,}94$. Тогда:

$$x_1 = \frac{\alpha_1 - \bar{x}}{S_x} = \frac{-\infty - 45{,}49}{0{,}95} = -\infty,\ x_2 = \frac{\beta_1 - \bar{x}}{S_x} = \frac{43{,}94 - 45{,}49}{0{,}95} = -1{,}63,$$

поэтому из приложения 2 найдем:

$$\Phi(x_1) = \Phi(-\infty) = -\Phi(\infty) = -0{,}5,$$

$$\Phi(x_2) = \Phi(-1{,}63) = -\Phi(1{,}63) = -0{,}44845.$$

Тогда искомая теоретическая частота будет равна:

$$n_1^T = n \cdot \left(\Phi(x_2) - \Phi(x_1)\right) = 100 \cdot (-0{,}44845 + 0{,}5) = 5{,}155.$$

2) Для второго интервала $\Delta_2 = (43{,}94; 44{,}48)$ нижняя граница равна $\alpha_2 = 43{,}94$, а верхняя – $\beta_2 = 44{,}48$. Тогда:

$$x_1 = \frac{\alpha_2 - \bar{x}}{S_x} = \frac{43{,}94 - 45{,}49}{0{,}95} = -1{,}63,$$

$$x_2 = \frac{\beta_2 - \bar{x}}{S_x} = \frac{44{,}48 - 45{,}49}{0{,}95} = -1{,}06,$$

поэтому из приложения 2 найдем:

$$\Phi(x_1) = \Phi(-1{,}63) = -\Phi(1{,}63) = -0{,}44845,$$

$$\Phi(x_2) = \Phi(-1{,}06) = -\Phi(1{,}06) = -0{,}35543.$$

Тогда искомая теоретическая частота будет равна:

$$n_2^T = n \cdot (\Phi(x_2) - \Phi(x_1)) = 100 \cdot (-0{,}35543 + 0{,}44845) = 9{,}302.$$

3) Для третьего интервала $\Delta_3 = (44{,}48;\, 45{,}02)$ нижняя граница равна $\alpha_3 = 44{,}48$, а верхняя – $\beta_3 = 45{,}02$. Тогда:

$$x_1 = \frac{\alpha_3 - \bar{x}}{S_x} = \frac{44{,}48 - 45{,}49}{0{,}95} = -1{,}06,$$

$$x_2 = \frac{\beta_3 - \bar{x}}{S_x} = \frac{45{,}02 - 45{,}49}{0{,}95} = -0{,}49,$$

поэтому из приложения 2 найдем:

$$\Phi(x_1) = \Phi(-1{,}06) = -\Phi(1{,}06) = -0{,}35543,$$

$$\Phi(x_2) = \Phi(-0{,}49) = -\Phi(0{,}49) = -0{,}18793.$$

Тогда искомая теоретическая частота будет равна:

$$n_3^T = n \cdot (\Phi(x_2) - \Phi(x_1)) = 100 \cdot (-0{,}18793 + 0{,}35543) = 16{,}75.$$

Далее, проведя аналогичные вычисления для оставшихся интервалов, занесем полученные данные в табл. 3.6.

Вычислим наблюдаемое значение χ^2 по формуле:

$$\chi^2_{набл} = \sum_{i=1}^{m} \frac{(n_i - n_i^T)^2}{n_i^T}.$$

Для контроля вычислений предыдущую формулу можно преобразовать к виду $\chi^2_{набл} = \sum_{i=1}^{m} \frac{n_i^2}{n_i^T} - n$. Все вычисления поместим в табл. 3.7. В данном случае имеем:

$$\chi^2_{набл} = 103{,}75484 - 100 = 3{,}75484 \approx 3{,}74184,$$

т.е. вычисления проведены верно.

Таблица 3.6

i	α_i	β_i	$x_1 = \frac{\alpha_i - \bar{x}}{S_x}$	$x_2 = \frac{\beta_i - \bar{x}}{S_x}$	$\Phi(x_1)$	$\Phi(x_2)$	$p_i = \Phi(x_1) - \Phi(x_2)$	$n_i^T = n \cdot p_i$
1	$-\infty$	43,94	$-\infty$	$-1{,}63$	$-0{,}5$	$-0{,}44845$	0,05155	5,155
2	43,94	44,48	$-1{,}63$	$-1{,}06$	$-0{,}44845$	$-0{,}35543$	0,09302	9,302
3	44,48	45,02	$-1{,}06$	$-0{,}49$	$-0{,}35543$	$-0{,}18793$	0,1675	16,75
4	45,02	45,56	$-0{,}49$	0,074	$-0{,}18793$	0,02790	0,21583	21,583
5	45,56	46,10	0,074	0,642	0,02790	0,23891	0,21101	21,101
6	46,10	46,64	0,642	1,21	0,23891	0,38686	0,14795	14,795
7	46,64	47,18	1,21	1,78	0,38686	0,46246	0,0756	7,56
8	47,18	$+\infty$	1,78	$+\infty$	0,46246	0,5	0,03754	3,754

Таблица 3.7

i	n_i	n_i^T	$\left(n_i - n_i^T\right)^2$	$\frac{\left(n_i - n_i^T\right)^2}{n_i^T}$	n_i^2	$\frac{n_i^2}{n_i^T}$
1	7	5,155	3,404025	0,66033	49	9,50533
2	10	9,302	0,487204	0,05238	100	10,75038
3	15	16,75	3,0625	0,18284	225	13,43284
4	17	21,58	20,9764	0,97203	289	13,39203
5	23	21,10	3,61	0,17109	529	25,07109
6	16	14,79	1,4641	0,09899	256	17,30899
7	10	7,56	5,9536	0,78751	100	13,22751
8	2	3,75	3,0625	0,81667	4	1,06667
$\sum$	100	99,987		3,74184		103,75484

Пусть $\chi^2_{набл} = 3{,}74$. Определим критическую точку $\chi^2_{крит}(\alpha, \tau)$, где α – уровень значимости, $\alpha = 0{,}025$; τ – число степеней свободы распределения χ^2, $\tau = m - r - 1 = 5$. По таблице квантилей χ^2-распределения (приложение 4) находим:

$$\chi^2_{крит}(0{,}025;\, 5) = 12{,}83.$$

Делаем заключение относительно выдвинутой гипотезы. Так как $\chi^2_{набл} = 3{,}74 < \chi^2_{крит} = 12{,}83$, то на принятом уровне значимости $\alpha = 0{,}025$ (с доверительной вероятностью $p = 1 - \alpha = 0{,}975$) экспериментальные данные, представленные в табл. 3.1, не противоречат гипотезе о нормальном распределении генеральной совокупности.

Задание 0.2. Получены следующие данные о зависимости случайной величины Y от случайной величины X (табл. 3.8).

Таблица 3.8

X	78	82	87	79	89	106	67	88	73	87	76	115
Y	33	48	34	54	62	95	39	58	52	62	59	73

Предполагая, что модель наблюдения имеет вид $Y = a + bX$, требуется:

а) построить корреляционное поле,

б) найти оценки параметров $\hat{a}$ и $\hat{b}$ линейной регрессии,

в) найти выборочный коэффициент корреляции,

г) составить уравнение линейной регрессии,

д) построить график линейной регрессии.

Решение. а) Строим корреляционное поле, нанося на координатную плоскость xOy точки (x_i, y_i), $i = \overline{1, 12}$ (рис. 3.4).

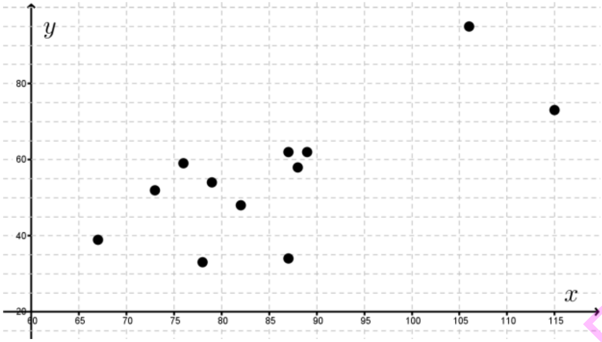


Рис. 3.4

б) Статистические оценки $\hat{a}$ и $\hat{b}$ параметров линейной регрессии $Y = a + bX$ выбираются таким образом, чтобы эмпирические значения $\hat{y}_i = \hat{a} + \hat{b}x_i$ как можно ближе приближались к фактическим значениям y_i. В качестве меры близости обычно выбирают сумму квадратов отклонений

$$Q(a, b) = \sum_{i=1}^{n} \left[y_i - (a + b\,x_i) \right]^2,$$

являющуюся функцией двух переменных a и b. Оценки $\hat{a}$ и $\hat{b}$, обладающие наилучшими свойствами, определяются из условия минимума функции $Q(a,b)$. Запишем необходимые условия минимума этой функции, т.е. находим частные производные и приравниваем их к нулю. Имеем:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial Q}{\partial a} = -2\sum\limits_i (y_i - a - b\,x_i) = 0, \\ \dfrac{\partial Q}{\partial b} = -2\sum\limits_i (y_i - a - b\,x_i)x_i = 0, \end{cases}$$

откуда получаем систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) для определения оценок $\hat{a}$ и $\hat{b}$:

$$\begin{cases} \hat{a}\,n + \hat{b}\sum x_i = \sum y_i, \\ \hat{a}\sum x_i + \hat{b}\sum x_i^2 = \sum x_i y_i. \end{cases}$$

Решая эту систему, получаем:

$$\begin{cases} \hat{b} = \dfrac{\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum (x_i - \bar{x})^2}, \\ \hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x}, \end{cases}$$

где $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$, $\bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i$ – средние значения эмпирических данных, n – число этих данных.

В данном случае $n = 12$, поэтому получим:

$$\bar{x} = \frac{1}{12}\sum_{i=1}^{12} x_i = \frac{1027}{12} \approx 85{,}58, \quad \bar{y} = \frac{1}{12}\sum_{i=1}^{12} y_i = \frac{669}{12} \approx 55{,}75.$$

Все дальнейшие расчеты поместим в табл. 3.9.

Таблица 3.9

i	x_i	y_i	$x_i - \bar{x}$	$y_i - \bar{y}$	$(x_i - \bar{x})\cdot(y_i - \bar{y})$	$(x_i - \bar{x})^2$	$(y_i - \bar{y})^2$
1	78	33	-7,58	-22,75	172,52	57,51	517,56
2	82	48	-3,58	-7,75	27,77	12,84	60,06
3	87	34	1,42	-21,75	-30,81	2,01	473,06
4	79	54	-6,58	-1,75	11,52	43,34	3,06
5	89	62	3,42	6,25	21,35	11,67	39,06
6	106	95	20,42	39,25	801,35	416,84	1540,56
7	67	39	-18,58	-16,75	311,27	345,34	280,56
8	88	58	2,42	2,25	5,44	5,84	5,06
9	73	52	-12,58	-3,75	47,19	158,34	14,06
10	87	62	1,42	6,25	8,85	2,01	39,06
11	76	59	-9,58	3,25	-31,15	91,8403	10,56
12	115	73	29,42	17,25	507,44	865,34	297,56
Σ	1027	669			1852,8	2012,92	3280,25

Тогда можно найти оценки параметров $\hat{a}$ и $\hat{b}$ линейной регрессии $Y = a + bX$:

$$\hat{b} = \frac{\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum (x_i - \bar{x})^2} \approx \frac{1852{,}75}{2012{,}92} \approx 0{,}92,$$

$$\hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\,\bar{x} \approx 55{,}75 - 0{,}92 \cdot 85{,}58 \approx -23{,}02\,.$$

в) Выборочный коэффициент корреляции можно вычислить по формуле:

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2}},$$

где $n = 12$ – число экспериментальных данных. В данном случае, используя расчеты из табл. 3.9, получаем:

$$r \approx \frac{1852{,}75}{\sqrt{2012{,}92} \cdot \sqrt{3280{,}25}} \approx 0{,}72\,.$$

Так как значение r близко к 1, то характеристика тесноты связи высокая.

г) Составим выборочное уравнение линейной регрессии:

$$\hat{y} = \hat{a} + \hat{b}\,x\,.$$

В данном случае имеем $\hat{y} = -23{,}02 + 0{,}92\,x$.

д) Построим график полученной линейной регрессии (рис. 3.5).

Рис. 3.5

ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение 1. Значения функции $\varphi(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$

x	Сотые доли x									
	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3725	3712	3697
0,4	3683	3668	3653	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
x	Десятые доли x									
	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
2,	0540	0440	0355	0283	0224	0175	0136	0104	0079	0060
3,	0044	0033	0024	0017	0012	0009	0006	0004	0003	0002
4,	0001									

Приложение 2. Значения функции $\Phi(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt$

x	Сотые доли x									
	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
0,0	0,0000	4000	0080	0120	0160	0199	0239	0279	0319	0359
0,1	0398	0438	0478	0517	0557	0596	0636	0675	0714	0753
0,2	0793	0832	0871	0910	0948	0987	1026	1064	1103	1141
0,3	1179	1217	1255	1293	1331	1368	1406	1443	1480	1517
0,4	1554	1591	1628	1664	1700	1736	1772	1808	1844	1879
0,5	1915	1950	1985	2019	2054	2088	2123	2157	2190	2224
0,6	2257	2291	2324	2357	2389	2422	2454	2486	2517	2549
0,7	2580	2611	2642	2673	2704	2734	2764	2794	2823	2852
0,8	2881	2910	2939	2967	2995	3023	3051	3078	3106	3133
0,9	3159	3186	3212	3238	3264	3289	3315	3340	3365	3389
1,0	3413	3438	3461	3485	3508	3531	3554	3577	3599	3621
1,1	3643	3665	3686	3708	3729	3749	3770	3790	3810	3830
1,2	3849	3869	3888	3907	3925	3944	3962	3980	3997	4015
1,3	4032	4049	4066	4082	4099	4115	4131	4147	4162	4177
1,4	4192	4207	4222	4236	4251	4265	4279	4292	4306	4319
1,5	4332	4345	4357	4370	4382	4394	4406	4418	4429	4441
1,6	4452	4463	4474	4484	4495	4505	4515	4525	4535	4545
1,7	4554	4564	4573	4582	4591	4599	4608	4616	4625	4633
1,8	4641	4649	4656	4664	4671	4678	4686	4693	4699	4706
1,9	4713	4719	4726	4732	4738	4744	4750	4756	4761	4767
x	Десятые доли x									
	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
2,	4773	4851	4861	4893	4918	4938	4953	4965	4974	4981
3,	4987	4990	4993	4995	4997	4998	4998	4999	4999	5000

Приложение 3. Значения функции $\frac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda}$

m \ λ	**0,1**	**0,2**	**0,3**	**0,4**	**0,5**
0	0,90484	0,81873	0,740818	0,670320	0,606531
1	0,09048	0,16375	0,222245	0,268128	0,303265
2	0,00452	0,01637	0,033337	0,053626	0,075816
3	0,00015	0,00109	0,003334	0,007150	0,012636
4		0,00005	0,000250	0,000715	0,001580
5			0,000015	0,000057	0,000158
6			0,000001	0,000004	0,000013
7					0,000001

m \ λ	**0,6**	**0,7**	**0,8**	**0,9**	**1,0**
0	0,548812	0,496585	0,449329	0,406570	0,367879
1	0,329287	0,347610	0,359463	0,365913	0,367879
2	0,098786	0,121663	0,143785	0,164661	0,183940
3	0,019757	0,028388	0,038343	0,049398	0,061313
4	0,002964	0,004968	0,007669	0,011115	0,015328
5	0,000336	0,000696	0,001227	0,002001	0,003066
6	0,000035	0,000081	0,000164	0,000300	0,000511
7	0,000003	0,000008	0,000019	0,000039	0,000073
8			0,000002	0,000004	0,000009
9					0,000001

m \ λ	**2,0**	**3,0**	**4,0**	**5,0**	**6,0**
0	0,135335	0,049787	0,018316	0,006738	0,002479
1	0,270671	0,149361	0,073263	0,033690	0,014873
2	0,270671	0,224042	0,146525	0,084224	0,044618
3	0,180447	0,224042	0,195367	0,140374	0,089235
4	0,090224	0,168031	0,195367	0,175467	0,133853
5	0,036089	0,100819	0,156293	0,175467	0,160623
6	0,012030	0,050409	0,104196	0,146223	0,160623
7	0,003437	0,021604	0,059540	0,104445	0,137677
8	0,000859	0,008102	0,029770	0,065278	0,103258
9	0,000191	0,002701	0,013231	0,036266	0,068838
10	0,000038	0,000810	0,005292	0,018133	0,041303
11	0,000007	0,000221	0,001925	0,008242	0,022529
12	0,000001	0,000055	0,000042	0,003434	0,011262
13		0,000013	0,000197	0,001321	0,005199
14		0,000003	0,000056	0,000472	0,002228
15		0,000001	0,000015	0,000157	0,000891
16			0,000004	0,000049	0,000334
17			0,000001	0,000014	0,000118
18				0,000004	0,000039
19				0,000001	0,000012
20					0,000004
21					0,000001

m \ λ	**7,0**	**8,0**	**9,0**	**10,0**
0	0,000912	0,000335	0,000123	0,000004540
1	0,006383	0,002684	0,001111	0,000453999
2	0,022341	0,010735	0,004998	0,002269996
3	0,052129	0,028626	0,014994	0,007566655
4	0,091226	0,057252	0,033737	0,018916637
5	0,127717	0,091604	0,060727	0,037833275
6	0,149003	0,122138	0,091090	0,063055458
7	0,149003	0,139587	0,117116	0,090079226
8	0,130377	0,139587	0,131756	0,112599032
9	0,101405	0,124077	0,131756	0,125110036
10	0,070983	0,099262	0,118580	0,125110036
11	0,045171	0,072190	0,097020	0,113736396
12	0,026350	0,048127	0,072765	0,094780330
13	0,014188	0,029616	0,050376	0,072907946
14	0,007094	0,016924	0,032384	0,052077104
15	0,003311	0,009026	0,019431	0,034718070
16	0,001448	0,004513	0,010930	0,021698794
17	0,000596	0,002124	0,005786	0,012763996
18	0,000232	0,000944	0,002893	0,007091109
19	0,000085	0,000397	0,001370	0,003732163
20	0,000030	0,000159	0,000617	0,001866081
21	0,000010	0,000006	0,000264	0,000888610
22	0,000003	0,000002	0,000108	0,000403914
23	0,000001	0,000001	0,000042	0,000175615
24			0,000016	0,000073172
25			0,000005	0,000029269

Приложение 4. Квантили $\chi^2_{\alpha,\tau}$ распределения χ^2_τ (τ – число степеней свободы)

τ	Уровень значимости α					
	0,01	**0,025**	**0,05**	**0,95**	**0,975**	**0,99**
1	6,63	5,02	3,84	0,0039	0,00098	0,0002
2	9,21	7,38	5,99	0,103	0,051	0,020
3	11,34	9,35	7,81	0,352	0,216	0,115
4	13,28	11,14	9,49	0,711	0,484	0,297
5	15,09	12,83	11,07	1,15	0,831	0,554
6	16,81	14,45	12,59	1,64	1,24	0,872
7	18,48	16,01	14,07	2,17	1,69	1,24
8	20,09	17,53	15,51	2,73	2,18	1,65
9	21,67	19,02	16,92	3,33	2,70	2,09
10	23,21	20,48	18,31	3,94	3,25	2,56
11	24,72	21,92	19,68	4,57	3,82	3,05
12	26,22	23,34	21,03	5,23	4,40	3,57
13	27,69	24,74	22,36	5,89	5,01	4,11
14	29,14	26,12	23,68	6,57	5,63	4,66
15	30,58	27,49	25,00	7,26	6,26	5,23
16	32,00	28,85	26,30	7,96	6,91	5,81
17	33,41	30,19	27,59	8,67	7,56	6,41
18	34,81	31,53	28,87	9,39	8,23	7,01
19	36,19	32,85	30,14	10,12	8,91	7,63
20	37,57	34,17	31,41	10,85	9,59	8,26
21	38,93	35,48	32,67	11,59	10,28	8,90
22	40,29	36,78	33,92	12,34	10,98	9,54
23	41,64	38,08	35,17	13,09	11,69	10,20
24	42,98	39,36	36,42	13,85	12,40	10,86
25	44,31	40,65	37,65	14,61	13,12	11,52
26	45,64	41,92	38,89	15,38	13,84	12,20
27	46,96	43,19	40,11	16,15	14,57	12,88
28	48,28	44,46	41,34	16,93	15,31	13,56
29	49,59	45,72	42,56	17,71	16,05	14,26
30	50,89	46,98	43,77	18,49	16,79	14,95

Приложение 5. Квантили t-распределения Стьюдента

τ	Уровень значимости α					
	0,1	**0,05**	**0,02**	**0,01**	**0,002**	**0,001**
1	6,31	12,71	31,82	63,66	318,31	636,62
2	2,92	4,30	6,96	9,92	22,33	31,60
3	2,35	3,18	4,54	5,84	10,21	12,92
4	2,13	2,78	3,75	4,60	7,17	8,61
5	2,02	2,57	3,36	4,03	5,89	6,87
6	1,94	2,45	3,14	3,71	5,21	5,96
7	1,89	2,36	3,00	3,50	4,79	5,41
8	1,86	2,31	2,90	3,36	4,50	5,04
9	1,83	2,26	2,82	3,25	4,30	4,78
10	1,81	2,23	2,76	3,17	4,14	4,59
11	1,80	2,20	2,72	3,11	4,02	4,44
12	1,78	2,18	2,68	3,05	3,93	4,32
13	1,77	2,16	2,65	3,01	3,85	4,22
14	1,76	2,14	2,62	2,98	3,79	4,14
15	1,75	2,13	2,60	2,95	3,73	4,07
16	1,75	2,12	2,58	2,92	3,69	4,01
17	1,74	2,11	2,57	2,90	3,65	3,97
18	1,73	2,10	2,55	2,88	3,61	3,92
19	1,73	2,09	2,54	2,86	3,58	3,88
20	1,72	2,09	2,53	2,85	3,55	3,85
21	1,72	2,08	2,52	2,83	3,53	3,82
22	1,72	2,07	2,51	2,82	3,50	3,79
23	1,71	2,07	2,50	2,81	3,48	3,77
24	1,71	2,06	2,49	2,80	3,47	3,75
25	1,71	2,06	2,49	2,79	3,45	3,73
26	1,71	2,06	2,48	2,78	3,43	3,71
27	1,70	2,05	2,47	2,77	3,42	3,69
28	1,70	2,05	2,47	2,76	3,41	3,67
29	1,70	2,05	2,46	2,76	3,40	3,66
30	1,70	2,04	2,46	2,75	3,39	3,65
40	1,68	2,02	2,42	2,70	3,31	3,55
60	1,67	2,00	2,39	2,66	3,23	3,46

Библиографический список

1. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. – М.: Высшая школа, 2004.
2. Письменный Д.Т. Конспект лекций по теории вероятностей, математической статистике и случайным процессам. –М.: Айрис.-пресс, 2007.
3. Вентцель Е.С. Теория вероятностей и ее инженерные приложения. – М.: Академия, 2003.
4. Миносцев В.Б. Сборник типовых расчетов по высшей математике. – М.:МГИУ, 2001.
5. Рябушко А.П. Индивидуальные задания по высшей математике. – Минск: Вышэйная школа, 2006.
6. Бухенский К.В., Елкина Н.В., Маслова Н.Н. Краткий курс математики. Часть 4: учеб. пособие. – Рязань: РГРТУ, 2014.
7. Курашин В.Н. Элементы математической статистики: учеб. пособие. – Рязань: РФВУС, 2004.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Б у х е н с к и й Кирилл Валентинович
Е л к и н а Наталья Викторовна
М а с л о в а Наталия Николаевна

Расчетные задания
по теории вероятностей
и математической статистике

Редактор Н.А. Орлова
Корректор С.В. Макушина
Подписано в печать 27.08.2015. Формат бумаги 60×84 1/16.
Бумага писчая. Печать трафаретная. Усл. печ. л. 11,0.
Тираж 50 экз. Заказ
Рязанский государственный радиотехнический университет.
390005, Рязань, ул. Гагарина, 59/1.
Редакционно-издательский центр РГРТУ.