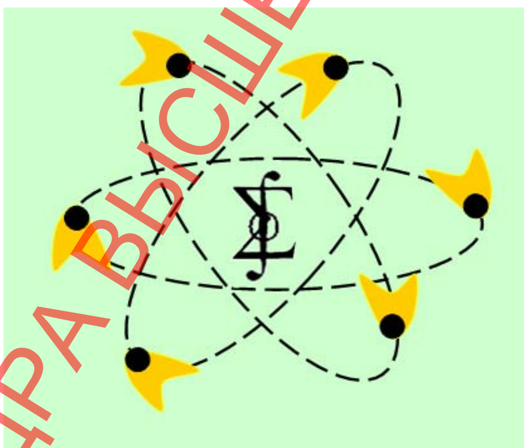
МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

РЯЗАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ РАДИОТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

А.И. СЮСЮКАЛОВ,
Е.А. СЮСЮКАЛОВА

ИЗБРАННЫЕ НЕСТАНДАРТНЫЕ ЗАДАЧИ ПО МАТЕМАТИКЕ

Часть 2



Рязань 2014

Министерство образования и науки Российской Федерации

Рязанский государственный радиотехнический университет

А.И. СЮСЮКАЛОВ,
Е.А. СЮСЮКАЛОВА

ИЗБРАННЫЕ НЕСТАНДАРТНЫЕ ЗАДАЧИ ПО МАТЕМАТИКЕ

Часть 2

Учебное пособие

Рязань 2014

УДК 512

Избранные нестандартные задачи по математике. Часть 2: учеб. пособие / А.И. Сюсюкалов, Е.А. Сюсюкалова; Рязан. гос. радиотехн. ун-т. – Рязань, 2014. – 100 с.

Содержит циклы задач по избранным разделам олимпиадной математики.

Предназначено учащимся старших классов, студентам 1 и 2 курсов, готовящихся к участию в олимпиадах, а также преподавателям физико-математического профиля.

Ил. 37. Библиогр.: 32 назв.

Натуральные, целые числа, каноническое разложение, признаки делимости, наибольший общий делитель, наименьшее общее кратное, метод математической индукции, сравнения, решение уравнений в целых числах

Печатается по решению редакционно-издательского совета Рязанского государственного радиотехнического университета.

Рецензент: кафедра высшей математики Рязанского государственного радиотехнического университета (зав. кафедрой канд. физ.-мат. наук К.В. Бухенский)

Предисловие

Настоящее пособие рекомендуется учащимся старших классов, студентам 1 и 2 курсов, готовящихся к участию в олимпиадах, а также преподавателям физико-математических классов.

Эта книга является непосредственным продолжением первой части [27].

В §1 изложены задачи по арифметике целых чисел. Актуальность углубленного изучения этих задач возросла в связи с включением в ЕГЭ задач С 6. Такие задачи часто встречаются на олимпиадах и конкурсных испытаниях в ведущие вузы.

Во многих олимпиадных задачах наиболее трудная часть решения не доказательство и вычисление, а построение необычного примера, конструкции. Этим вопросам посвящен §2.

Следующий раздел иллюстрирует основные понятия теории позиционных игр в которых, двое участников, делая ходы по очереди в соответствии с правилами игры, стремятся к определенной цели. Здесь представлены различные подходы и идеи, используемые для построения выигрышных стратегий.

При составлении данного пособия использованы задачники, указанные в библиографическом списке.

Учащиеся, успешно усвоившие изложенные в двух частях пособия идеи и методы, могут активно приступать к решению задач из известных сборников [1-5].

Пособие отражает опыт проведения занятий с учащимися – призерами олимпиад, а также освещает содержание курса лекций, который был прочитан учителям математики Рязанской области в РИРО.

Авторы выражают благодарность заведующему кафедрой высшей математики РГРТУ доценту Бухенскому К.В. за активную поддержку издания данного пособия, а также доценту Новикову А.И. за полезные обсуждения материала книги.

1. Арифметика целых чисел

1.1. Делимость. Признаки делимости. Десятичная запись числа. Простые числа. Метод математической индукции

Множество натуральных чисел обозначают буквой $\mathbb{N}$, а множество целых чисел — буквой $\mathbb{Z}$. Натуральное число a записывают так: $a = \overline{a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0}$ или в виде суммы
$a = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot 10 + a_0$, где
$a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ – цифры соответствующих разрядов.

Если r – остаток от деления натурального числа a на натуральное число m, то $a = mq + r$, где r может принимать одно из значений $0,1,\ldots,m-1$; q – целое неотрицательное число.

В том случае, когда $r = 0$, говорят, что a делится на m, и записывают так: $a \vdots m$.

Если r – остаток от деления натурального числа a на натуральное число m, то:

– остаток от деления на m числа na, где $n \in \mathbb{N}$, равен остатку от деления на m числа nr;

– остаток от деления на m числа a^k, где $k \in \mathbb{N}$, равен остатку от деления на m числа r^k.

Если r_1 и r_2 – остатки от деления на натуральное число m натуральных чисел a и b соответственно, то остатки от деления на m чисел $a+b, a-b$ и ab совпадают с остатками от деления на m чисел $r_1 + r_2, r_1 - r_2$ и $r_1 r_2$ соответственно.

При решении задач на целые числа необходимо знать следующий факт:

- любое натуральное число единственным образом (с точностью до перестановки сомножителей) может быть представлено в виде произведения простых чисел.

Полезно также помнить признаки делимости натуральных чисел:

- при делении на 5 и на 10 число дает такой же остаток, как и последняя его цифра;

- при делении на 4, 25, 50 и 100 число дает такой же остаток, как и число, записанное двумя его последними цифрами;
- при делении на 3 и на 9 число дает такой же остаток, как и сумма его цифр.

Поэтому если сумма цифр делится на 3 или на 9, то и само число делится на 3 или на 9.

Метод доказательства, называемый *методом математической индукции*, основан на следующем принципе, который является одной из аксиом арифметики натуральных чисел.

Предложение $A(n)$ зависящее от натуральной переменной n, считается истинным для всех $n \in \mathbb{N}$, если выполнены следующие два условия:

а) предложение $A(n)$ истинно для $n = 1$;

б) из предположения, что $A(n)$ истинно для $n = k$ (где k – любое натуральное число), следует, что оно истинно и для следующего значения n, т.е. для $n = k + 1$.

Этот принцип называется *принципом математической индукции*.

Под методом математической индукции понимают следующий способ доказательства: во-первых, проверяют истинность высказывания $A(1)$, и, во-вторых, предположив истинность высказывания $A(k)$, пытаются доказать, что истинно высказывание $A(k + 1)$. Если это удается доказать (при любом натуральном k), то предложение $A(n)$ считается истинным для всех значений n.

Пример 1. Остатки от деления на 3 чисел m и n равны 1 и 2 соответственно. Каковы остатки от деления на 3: а) суммы $m + n$; б) произведения $m \cdot n$?

Решение. Так как $m = 3k + 1$, а $n = 3l + 2$, то

$m + n = 3k + 3l = 3 \cdot (k + l + 1)$.

Следовательно, $m + n$ делится на 3 нацело. Рассмотрим теперь произведение

$mn = (3k + 1) \cdot (3l + 2) = 9kl + 3l + 6k + 2 = 3(3kl + l + 2k) + 2$,

то есть при делении на 3 произведения mn остаток равен 2.

Ответ. а) 0, б) 2.

Пример 2. Докажите, что для всех натуральных n выражение (n^3+3n^2+2n) делится на 6.

Решение. Так как $n^3+3n^2+2n = n(n+1)(n+2)$ есть произведение трех последовательных чисел, которое всегда делится и на 2, и на 3, то n^3+3n^2+2n делится на 6.

Пример 3. Дано число 2^{1995}. Найдите:

а) последнюю цифру этого числа, б) остаток от деления на 7.

Решение. а) Представим исходное число в виде

$$2^{1995} = 2^{4\cdot 498+3} = 16^{498}\cdot 8.$$

Поскольку 16 в любой натуральной степени оканчивается на 6, а $6\cdot 8 = 48$, последняя цифра числа 2^{1995} равна 8.

б) Рассмотрим остатки степеней двойки от деления на 7:

- 2^1 при делении на 7 дает остаток 2,
- 2^2 при делении на 7 дает остаток 4,
- 2^3 при делении на 7 дает остаток 1.

Эти остатки повторяются с периодом $T = 3$. Так как $1995 = 3\cdot 665$, то 2^{1995} при делении на 7 дает остаток 1.

Ответ. а) 8, б) 1.

Пример 4. Докажите, что натуральное число

$$a = \overline{a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0} = a_n\cdot 10^n + a_{n-1}\cdot 10^{n-1} + \ldots + a_1\cdot 10 + a_0$$

делится на 11 тогда и только тогда, когда на 11 делится сумма

$$s = a_0 - a_1 + a_2 + \ldots + (-1)^{n-1}a_{n-1} + (-1)^n a_n,$$

т.е. сумма цифр этого числа, взятых с чередующимися знаками.

Доказательство. Остаток от деления на 11 чисел 10^{2k}, где $k \in$ □, равен 1, так как $10^{2k} = \underbrace{99\ldots99}_{2k \text{ цифр}} + 1$, а остаток от деления на 11 чисел 10^{2k+1}, где $k = 0,1,2,\ldots$, равен -1, так как $10 = 11 - 1$, $10^{2k+1} = 10^{2k}(11-1)$, а остаток от деления на 11 числа 10^{2k} равен 1.

Итак, остаток от деления на 11 числа a равен s.

Пример 5. Докажите, что число $a = n^3 + 17n$ делится на 6 при любом натуральном числе n.

Доказательство. Натуральное число делится на 6 тогда и только тогда, когда на 6 делится число $a + 6k$, где k – целое число. В частности, число a делится на 6, если число

$b = a - 18n = n^3 - n$ делится на 6. Но $b = n^3 - n = (n-1)\cdot$

$\cdot\, n \cdot (n+1)$ – произведение трех последовательных натуральных чисел, из которых одно делится на 3 и по крайней мере одно делится на 2. Поэтому число b делится на 6, откуда следует, что число a также делится на 6.

Пример 6. Найдите последнюю цифру числа $a = 432^{283}$

Решение. Последняя цифра у числа a такая же, как и у числа 2^{283}. Выпишем последовательные степени двойки:

$2^1 = 2,\ 2^2 = 4,\ 2^3 = 8,\ 2^4 = 16,\ 2^5 = 32,\ 2^6 = 64$ и т.д.

Отсюда следует, что последние цифры этих чисел повторяются через 4. Поэтому последняя цифра у числа 2^k такая же, как у числа 2^p, где p – одно из чисел $1, 2, 3, 4$, а разность $k - p$ кратна четырем. Так как $283 = 280 + 3$, где 280 делится на 4, то последняя цифра числа 2^{283} – восьмерка ($2^3 = 8$).

Пример 7. Докажите, что существует бесконечно много простых чисел.

Доказательство. Предположим противное. Пусть $p_1, p_2, \dots, p_n$ – все простые числа.

Рассмотрим число $p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_n + 1$. Это число не делится ни на одно из чисел $p_1, p_2, \dots, p_n$ и, следовательно, не может быть разложено в произведение простых. Противоречие.

Пример 8. Доказать, что при любом натуральном n число $4^n + 15n - 1$ делится на 9.

Доказательство. 1). При $n = 1$ имеем $4^1 + 15 \cdot 1 - 1 = 18 \vdots 9$ – верно.

2). Пусть при $n = k$ выполняется условие делимости $4^k + 15k - 1 \vdots 9$. Докажем, что и при $n = k + 1$ оно также будет выполняться, т.е. $4^{k+1} + 15(k+1) - 1 \vdots 9$. Действительно, $4^{k+1} + 15(k+1) - 1 = 4(4^k + 15k - 1) - 45k + 18$. Здесь первое слагаемое делится на 9 по предположению индукции, и оставшаяся группа $-45k + 18$, очевидно, также кратна 9. Поэтому число $4^{k+1} + 15(k+1) - 1$ делится на 9, что и требовалось доказать.

3). Из пунктов 1 и 2 вытекает, что утверждение верно при всех n.

Пример 9. Найдите все такие $a \in \mathbb{N}$, что $\frac{2a+1}{a-2}$ – целое число.

Решение. Если число $\frac{2a+1}{a-2}$ целое, то это равносильно тому, что $(2a+1) \vdots (a-2)$. Тогда и разность этих чисел тоже будет делиться на $a-2$: $(2a+1)-(a-2) \vdots a-2$,
$a+3 \vdots a-2$. Но и разность этих чисел тоже должна делиться на $a-2$: $(a+3)-(a-2) \vdots a-2$, $5 \vdots a-2$. Значит, $a-2$ – делитель числа 5. Но у 5 не так много делителей – это $1, 5, -1, -5$.

Переберем все случаи:

1) $a-2=1$. Тогда $a=3$, а наша дробь
$\frac{2a+1}{a-2}=\frac{6+1}{3-2}=7 \in \mathbb{Z}$. Значение $a=3$ подходит.

2) $a-2=-1$. Тогда $a=1$, а наша дробь
$\frac{2a+1}{a-2}=\frac{2+1}{1-2}=-3 \in \mathbb{Z}$. Значение $a=1$ подходит.

3) $a-2=5$. Тогда $a=7$, а наша дробь
$\frac{2a+1}{a-2}=\frac{14+1}{7-2}=3 \in \mathbb{Z}$. Значение $a=7$ подходит.

4) $a-2=-5$. Тогда $a=-3$ – не натуральное.
Этот случай не подходит.

Ответ. $\frac{2a+1}{a-2} \in \mathbb{Z}$ только при $a=1, 3, 7$.

Пример 10. Натуральные числа m и n таковы, что и m^3+n, и m^3+m делятся на m^2+n^2. Найдите m и n.

Решение. Заметим, что если $(m^3+m) \vdots (m^2+n^2)$ и $(m^3+n) \vdots (m^2+n^2)$, то $(m^3+m)-(m^3+n) \vdots (m^2+n^2)$, т.е. $(n-m) \vdots (m^2+n^2)$. Будем считать, что $n \geq m$ (иначе будем рассматривать дальше $m-n$ вместо $n-m$). Отсюда либо $n-m \geq m^2+n^2$, чего, очевидно, не бывает, либо $n-m=0$, значит, $n=m$. Тогда можно считать, что нам дано следующее: $m^3+m \vdots 2m^2$. Заметим, что $m^3 \vdots m^2$, значит, и m должно делиться на m^2, а такое бывает только при $m=1$.

Ответ. $m=n=1$.

1.2. Задачи для самостоятельного решения

1. Докажите, что если число $a \in$ □ не делится на 5, то число a^4-1 делится на 5.

2. Сформулируйте и докажите признак делимости на 7 для четырехзначных чисел.

3. Целые числа n, m, k не делятся нацело на 3. Докажите, что число $n^6 + m^4 + k^2$ делится на 3.

4. Доказать, что натуральное число, десятичная запись которого состоит из 243 единиц, делится на 243.

5. Докажите, что $n^3 + 2n$ делится на 3 для любого натурального n.

6. Докажите, что $n^5 + 4n$ делится на 5 при любом натуральном n.

7. Докажите, что $n^3 + 2$ не делится на 9 ни при каком натуральном n.

8. а) Докажите, что $p^2 - 1$ делится на 24, если p – простое число и $p > 3$.

б) Докажите, что $p^2 - q^2$ делится на 24, если p и q – простые числа, большие 3.

9. Пусть a и b – натуральные числа, причем число $a^2 + b^2$ делится на 21. Докажите, что оно делится и на 441.

10. Пусть a, b, c – натуральные числа, причем $a + b + c$ делится на 6. Докажите, что $a^3 + b^3 + c^3$ тоже делится на 6.

11. Найдите последнюю цифру числа 2^{50}

12. а) $p, p + 10, p + 14$ – простые числа. Найдите p.

б) $p, 2p + 1, 4p + 1$ – простые числа. Найдите p.

13. p и $8p^2 + 1$ – простые числа. Найдите p.

14. Докажите, что не существует натуральных чисел a и b таких, что $a^2 - 3b^2 = 8$.

15. а) Может ли сумма квадратов двух нечетных чисел быть квадратом целого числа?

б) Может ли сумма квадратов трех нечетных чисел быть квадратом целого числа?

16. Докажите, что сумма квадратов пяти последовательных натуральных чисел не является точным квадратом.

17. Докажите, что число 100…00500…001 (в каждой из двух групп по 100 нулей) не является кубом целого числа.

18. Докажите, что $a^3 + b^3 + 4$ не является кубом целого числа ни при каких натуральных a и b.

19. Пусть x, y, z – натуральные числа, причем $x^2 + y^2 = z^2$. Докажите, что xy делится на 12.

20. Докажите, что если $(n-1)!+1$ делится на n, то n – простое число.

21. Найдите все такие простые числа p, для которых $14p^2+1$ – тоже простое.

22. Докажите, что для любого натурального $n\,(n \geq 3)$ произведение всех простых чисел, не превосходящих n, больше n.

23. Пусть $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$, где p_i – простые числа, причем $p_1 < p_2 < \dots < p_k$. Докажите, что число делителей n равно $d(n) = (\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\dots(\alpha_k+1)$.

24. Докажите, что существует бесконечно много простых чисел вида $3k+2$.

25. Найдите все такие $a \in \mathbb{Z}$, что $(a^2+a-1) \vdots (a-2)$.

26. При каких $n \in \mathbb{Z}$ выражение $\frac{3n+2}{n-1}$ является целым числом?

27. Докажите, что дробь $\frac{n^2-n+1}{n^2+1}$ несократима ни при каком n.

28. При каких натуральных n число n^4+4 простое?

29. Является ли полным квадратом число $M = \underbrace{11\dots1}_{2n \text{ цифр}} - \underbrace{22\dots2}_{n \text{ цифр}}$?

30. Шестизначное число начинается с цифры 2. Если эту цифру перенести на последнее место, то полученное число будет втрое больше первоначального. Найдите первоначальное число.

31. Покажите, что каждое число последовательности $49, 4489, 44448889, 4444488889, \dots$ является полным квадратом.

32. Докажите, что число $10^{1999}-1999$ делится на 9

33. Найдите все числа вида $\overline{34X5Y}$ такие, чтобы они делились без остатка на 36.

34. Существуют ли целые числа m и n, удовлетворяющие уравнению $m^2+1998=n^2$?

35. Пусть остаток от деления натурального числа m на 7 равен 3. Найдите остаток от деления на 7 числа $3m^2+5m+1$.

36. Целые числа n, m, k не делятся нацело на 3. Докажите, что число $n^6+m^4+k^2$ делится на 3.

37. Докажите, что если p и $8p^2+1$ – простые числа, то $8p^2-1$ – тоже простое число.

38. Докажите, что ни при каком натуральном n число $3^n+2\cdot17^n$ не является квадратом натурального числа.

39. Найдите последнюю цифру числа 5432^{1998}

40. Установите, является ли число $n^4 + 64$ $(n \in \mathbb{Z})$ простым или составным

41. Установите, является простым или составным число $n^3 - 6n^2 + 12n + 117$ $(n \in \mathbb{Z})$.

42. Найдите все простые числа вида $\frac{n(n+1)}{2} - 1,\ n \in \mathbb{N}$.

43. Докажите, что для всех простых чисел p число $p^4 + 4$ – составное.

44. Докажите, что произведение четырех последовательных целых чисел в сумме с 1 дает полный квадрат.

45. Докажите, что для любого натурального n, $n \geq 2$, число $n^{n-1} - 1$ делится нацело на $(n-1)^2$.

46. Докажите, что число $M = \underbrace{11\ldots1}_{2n} - \underbrace{22\ldots2}_{n}$ при любом натуральном n является полным квадратом.

47. Найдите сумму n первых членов ряда $7 + 77 + 777 + \ldots$

48. Найдите две последние цифры числа $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + 98^3 + 99^3$.

49. Докажите, что $a^n + b^n$ делится на $a + b$, если n – нечетное число.

1.3. Решения, указания, ответы

1. Решение. Пусть r – остаток от деления a на 5. Так как a не делится на 5, то $a = 5k + r$, где $k \in$ □ , r – одно из чисел $1, 2, 3, 4$. Из равенства $a^4 = (5k + r)^4 = 5p + r^4$, где $p \in$ □ , следует, что остаток от деления a^4 на 5 равен остатку от деления r^4 на 5. Так как $1^4 = 1,\ 2^4 = 5 \cdot 3 + 1,\ 3^4 = 5 \cdot 16 + 1,$ $4^4 = 5 \cdot 31 + 1$, то остаток от деления r^4 на 5 при $r = 1, 2, 3, 4$ равен 1. Поэтому остаток от деления $a^4 - 1$ на 5 равен нулю, т.е. число $a^4 - 1$ делится на 5, если a не делится на 5.

2. Решение. Выведем требуемый признак делимости. Пусть $\overline{abcd}$ – произвольное четырехзначное число. Представим его в виде $\overline{abcd} = 1000 \cdot a + 100 \cdot b + 10 \cdot c + d$.

Далее, представим каждое из слагаемых (за исключением последнего) в виде суммы числа, кратного 7, и некоторого ненулевого остатка:

$1000 \cdot a + 100 \cdot b + 10 \cdot c + d =$
$= (994 + 6) \cdot a + (98 + 2) \cdot b + (7 + 3) \cdot c + d =$
$= (994a + 98b + 7c) + (6a + 2b + 3c + d).$

Здесь каждое из чисел $994a,\ 98b,\ 7c$, очевидно, делится на 7.

Теперь можно сформулировать искомый признак: «Четырехзначное число $\overline{abcd}$ делится нацело на 7 тогда и только тогда, когда выражение $(6a + 2b + 3c + d)$ кратно 7».

3. Доказательство. Если n не делится нацело на 3, то возможны два случая: $n = 3l + 1$ и $n = 3l + 2$. В первом случае $n^2 = (3l + 1)^2$ – делится на 3 с остатком 1, а значит, $n^{2p},\ p \in$ □, также делится на 3 с остатком 1. Аналогично во втором случае: $n^2 = (3l + 2)^2$ делится на 3 с остатком 1, следовательно, n^{2p} делится на 3 с остатком 1. Таким образом, если целое число не делится нацело на 3, то его квадрат (любая четная степень) при делении на 3дают остаток 1. Но тогда сумма трех таких четных степеней кратна 3.

4. Доказательство. Заметим, что $243 = 3^5$. Докажем по индукции более общее утверждение, что натуральное число, десятичная запись которого состоит из 3^n единиц, делится на 3^n.

1. При $n = 1$ утверждение верно (111 делится на 3).

2. Пусть при некотором произвольном $n = k\ (k > 1)$ число, записанное единицами в количестве 3^k, делится на 3^k. Докажем, что тогда число, записанное 3^{k+1} единицами, будет делиться на 3^{k+1}. Действительно, $111111111 = 111 \cdot 1001001$ и вообще $\underbrace{1 \dots 1}_{3^{k+1}} = \underbrace{1 \dots 1}_{3^k} \cdot 1\underbrace{0 \dots 0}_{3^k - 1}1\underbrace{0 \dots 0}_{3^k - 1}1$, причем первый из двух сомножителей справа делится, по предположению индукции, на 3^k, а второй множитель делится на 3 (по признаку делимости на 3). Это обосновывает индуктивный переход, что и требовалось доказать.

5. Решение. Число n может давать при делении на 3 один из трех остатков: $0, 1, 2$. Рассмотрим три случая.

Если n дает остаток 0, то и n^3 и $2n$ делятся на 3 и поэтому n^3+2n также делится на 3.
Если n дает остаток 1, то n^3 дает остаток 1, $2n$ – остаток 2, а $1+2$ делится на 3.
Если n дает остаток 2, то n^2 дает остаток 1, n^3 – остаток 2, $2n$ – остаток 1, а $2+1$ делится на 3. Требуемое доказано.
6. Указание. Переберите остатки от деления на 5.
7. Указание. Переберите остатки от деления на 9.
8. Указание. Докажите, что указанные числа делятся и на 3 и на 8.
9. Указание. Проверьте, что и a и b делятся и на 3 и на 7.
10. Указание. Проверьте, что числа x^3 и x имеют одинаковые остатки от деление на 6.
11. Решение. Выпишем последние цифры нескольких начальных степеней двойки:2, 4, 8, 6, 2, …. Мы видим, что 2^5 так же, как и 2^1, оканчивается на 2. Поскольку очередная цифра полностью определяется последней цифрой предыдущей степени, то произойдет «зацикливание»: 2^6 (как и 2^2) оканчивается на 4, 2^7 (как и 2^3) – на 8, 2^8 – на 6, 2^9 – на 2 и т.д. Поскольку длина цикла равна 4, то последняя цифра числа 2^{50} определяется остатком от деления числа 50 на 4. Так как он равен 2, то последняя цифра числа 2^{50} совпадает с последней цифрой числа 2^2, то есть равна 4.
12. Указание. Рассмотрите остатки от деления на 3.**Ответ.** Одно из этих чисел делится на 3. а) $p=3$; б) $p=3$.
13. Ответ. $p=3$.
14. Указание. Рассмотрите остатки по модулю 3.
15. Указание. Проверьте, что остаток квадрата нечетного числа от деления на 4 равен 1, а остаток квадрата четного числа – 0.
16. Указание. Проверьте, что остаток квадрата нечетного числа от деления на 4 равен 1, а остаток квадрата четного числа – 0.
17. Указание. Это число дает остаток 7 от деления на 9.
18. Указание. Выясните, какой остаток может давать число a^3+b^3+4 от деления на 9.
19. Указание. Если ни одно из чисел x, y не делится на 3, то z^2 дает остаток 2 при делении на 3, что невозможно. Заметьте теперь, что квадрат нечетного числа при делении на 8 дает

остаток 1, квадрат четного числа, не делящегося на 4, – остаток 4, квадрат четного числа, делящегося на 4, – остаток 0. Докажите, что либо x и y оба четны, либо среди них есть число, кратное 4.

20. Указание. Если n – составное число ($n > 4$), то $(n-1)!$ делится на n.

21. Ответ. $p = 3$. Если $p \neq 3$, число $14p^2 + 1$ делится на 3.

22. Указание. Если произведение P всех простых чисел, не превосходящих n, не больше n, то $P - 1 < n$ не делится ни на одно простое число $p < n$.

23. Указание. Всякий делитель числа n имеет вид $p_1^{\gamma_1} p_2^{\gamma_2} \dots p_k^{\gamma_k}$, где $0 \leq \gamma_i \leq \alpha_i$ $(i = 1, \dots, k)$ и однозначно определяется набором чисел $(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k)$. Количество таких наборов равно $(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \dots (\alpha_k + 1)$.

24. Указание. Предположим, что имеется конечное множество простых чисел вида $3k + 2, p_1 = 2$ и $p_1, \dots, p_n$. Рассмотрите число $3p_2 \dots p_n + 2$.

25. Решение. Заметим, что число $a^2 + a - 6 \vdots a - 2$, так как $a^2 + a - 6 = (a-2)(a+3)$.

Тогда, если $(a^2 + a - 1) \vdots (a - 2)$ и $(a^2 + a - 6) \vdots (a - 2)$, то и $(a^2 + a - 1) - (a^2 + a - 6) \vdots (a - 2)$, т.е. $5 \vdots (a - 2)$.

Переберем все возможные значения $a - 2$ – делители 5:

1) $a - 2 = 1$. Тогда $a = 3$, и $a^2 + a - 1 = 9 + 3 - 1 = 11$, а $a - 2 = 1$, и тогда $11 \vdots 1$, значит, $a = 3$ нам подходит.

2) $a - 2 = -1$. Тогда $a = 1$, и $a^2 + a - 1 = 1 + 1 - 1 = 1$, а $a - 2 = -1$, и тогда $1 \vdots -1$, значит, $a = 1$ нам подходит.

3) $a - 2 = 5$. Тогда $a = 7$, и $a^2 + a - 1 = 49 + 7 - 1 = 55$, а $a - 2 = 5$, и тогда $55 \vdots 5$, значит, $a = 7$ подходит.

4) $a - 2 = -5$. Тогда $a = -3$, и оно не натуральное, этот случай не подходит.

Ответ. $a = 1, 3, 7$.

26. Решение. Так как $\frac{3n+2}{n-1} = \frac{3n-3+5}{n-1} = 3 + \frac{5}{n-1}$, то исходное число будет целым, только если целым будет число $\frac{5}{n-1}$, что возможно при $n - 1 \in \{\pm 5, \pm 1\}$.

Ответ. $n = -4; 0; 2; 6$.

27. Решение. Преобразуем исходную дробь

$$\frac{n^2-n+1}{n^2+1}=1-\frac{n}{n^2+1}.$$

Если сократима дробь $\frac{n^2-n+1}{n^2+1}$, то сократима дробь $\frac{n}{n^2+1}$. Если сократима дробь $\frac{n}{n^2+1}$, то сократима дробь $\frac{n^2+1}{n}=n+\frac{1}{n}$ и сократима дробь $\frac{1}{n}$, что неверно. Следовательно, исходная дробь несократима.

28. Решение. Так как

$$n^4+4=n^4+4n^2+4-4n^2=(n^2+4)^2-4n^2=$$

$=(n^2+2n+2)(n^4-2n+2)$, то n^4+4 – простое число, только если $n^2+2n+2=1$ или $n^2-2n+2=1$. Первое уравнение решений в натуральных числах не имеет. Решением второго уравнения является $n=1$, в этом случае выражение n^4+4 равно 5, то есть является простым числом. **Ответ**. $n=1$.

29. Решение. Так как $\underbrace{11\dots1}_{n\text{ цифр}}=\frac{10^n-1}{9}$, то

$$M=\frac{10^{2n}-1}{9}-2\cdot\frac{10^n-1}{9}=\frac{10^n-2\cdot10^n+1}{9}=\left(\frac{10^n-1}{3}\right)^2.$$

Так как 10^n-1 делится нацело на 3, то исходное число является полным квадратом. **Ответ**. Да.

30. Решение. Обозначим первоначальное число $\overline{2abcde}$. Тогда в результате перестановки первой цифры в конец числа получится новое число $\overline{abcde2}$. По условию задачи имеем уравнение $3\cdot\left(\overline{2abcde}\right)=\overline{abcde2}$.

Преобразуем числа к виду $\overline{2abcde}=200000+\overline{abcde}$, $\overline{abcde2}=\overline{abcde}\cdot10+2$ и введём новую неизвестную $n=\overline{abcde}$. Тогда уравнение примет вид

$$3\cdot(200000+n)=10n+2.$$

Решим уравнение, найдем $n=85714$. **Ответ**: 285714.

31. Решение. Обозначим $a_n=\underbrace{44\dots4}_{n}\underbrace{88\dots8}_{n-1}9$ – n - й член данной числовой последовательности. Воспользовавшись представлением

$(n=\overline{a_ka_{k-1}\dots a_1a_0}=a_k\cdot10^k+a_{k-1}\cdot10^{k-1}+\dots+a_1\cdot10^1+a_0)$, преобразуем a_n:

$$a_n=(4\cdot10^{2n-1}+4\cdot10^{2n-2}+\ \dots\ +4\cdot10^n)+$$
$$+(8\cdot10^{n-1}+8\cdot10^{n-2}+\ \dots\ +8\cdot10)+9=$$

$= 4(10^n + 10^{n+1} + \ \dots + 10^{2n-1}) + 8(10 + 10^2 + \ \dots + +10^{n-1}) + 9.$
Выражения в скобках являются суммами геометрических прогрессий. Используя формулу для суммы первых n членов геометрической прогрессии $\{b_n\}$ со знаменателем q, а именно $S_n = b_1 \frac{q^n-1}{q-1}$, упрощаем эти выражения. Итак,

$$a_n = 4 \cdot 10^n \cdot \frac{10^n - 1}{10 - 1} + 8 \cdot 10 \cdot \frac{10^{n-1} - 1}{10 - 1} + 9 =$$
$$= \frac{4}{9}(10^{2n} - 10^n) + \frac{8}{9}(10^n - 10) + \frac{81}{9} =$$
$$= \frac{1}{9}(4 \cdot 10^{2n} + 4 \cdot 10^n + 1) = \left(\frac{2 \cdot 10^n + 1}{3}\right)^2.$$

Поскольку число $2 \cdot 10^n + 1$ делится нацело на 3 (по признаку делимости на 3), то задача решена.

32. Решение. Преобразуем число к виду

$$10^{1999} - 1999 = (10^{1999} - 1) - 1998 = \underbrace{99 \dots 9}_{1999} - 1998.$$

Каждое из двух слагаемых делится нацело на 9 по признаку делимости на 9. Следовательно, их разность также кратна 9, что и требовалось доказать.

33. Решение. Поскольку $36 = 4 \cdot 9$, то воспользуемся признаками делимости на 4 и 9. Начнем с признака делимости на 4 (он использует только одну из двух неизвестных цифр). Число $\overline{34X5Y}$ кратно 4 тогда и только тогда, когда двузначное число $\overline{5Y}$ делится нацело на 4, а это выполняется, только если $Y = 2$ или $Y = 6$. Рассмотрим эти два случая и в каждом из них применим признак делимости на 9.

1) Если $Y = 2$, то число $\overline{34X52}$ должно делиться нацело на 9, т.е. сумма всех цифр данного числа $3 + 4 + X + 5 + 2 = 14 + X$ должна быть кратна 9. Это возможно лишь при $X = 4$. Имеем число 34452.

2) Если $Y = 6$, то число $\overline{34X56}$ кратно 9 $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 3 + 4 + X + 5 + 6 = 18 + X$ кратно 9, т.е. $X = 0$ или $X = 9$. Таким образом, нашли еще два числа: 34056 и 34956.

Ответ. 34452, 34056 и 34956.

34. Решение. Преобразуем уравнение к виду $1998 = n^2 - m^2 \Leftrightarrow 1998 = (n + m)(n - m)$. Так как $(n + m)$ и $(n - m)$ – всегда числа одинаковой четности, то их проведение $(n +$

$m)(n-m)$ либо нечетно (что невозможно, так как 1998 – четное число), либо кратно четырем. Но 1998 на 4 не делится.
Ответ: не существуют.
35. Решение. Из условия следует, что число m имеет вид: $m = 7k+3$. Тогда
$$3m^2+5m+1 = 3(7k+3)^2+5(7k+3)+1 =$$
$$= 7(21k^2+23k+6)+1.$$
Таким образом, остаток от деления числа $3m^2+5m+1$ на 7 равен 1.
36. Доказательство. Если n не делится 3, то возможны два случая: $n=3l+1$ и $n=3l+2$. В первом случае
$n^2=(3l+1)^2$ – делится на 3 с остатком 1, а значит, $n^{2p}, p \in \mathbb{N}$ также делится на 3 с остатком 1. Аналогично во втором случае: $n^2=(3l+2)^2$ делится на 3 с остатком 1 $\Rightarrow$ n^{2p} делится на 3 с остатком 1. Таким образом, если целое число не делится нацело на 3, то его квадрат (любая чётная степень) при делении на 3 дают остаток 1. Но тогда сумма трёх таких чётных степеней кратна 3.
37. Доказательство. Если p не делится на 3, то остаток от деления p^2 на 3 равен 1. Но тогда $8p^2+1$ делилось бы на 3, что противоречит условию. Следовательно, $p \vdots 3 \Rightarrow p=3$, тогда действительно $8p^2+1=73$ – простое число, и при этом $8p^2-1=71$ тоже является простым.
38. Решение. Выясним, на какую цифру может оканчиваться число $3^n+2\cdot 17^n$. Сделаем это последовательно. Сначала оценим последнюю цифру числа 3^n:

3^1 оканчивается на 3,
3^2 оканчивается на 9,
3^3 оканчивается на 7,
3^4 оканчивается на 1,…,

Далее эта последовательность последних цифр $3, 9, 7, 1, 3, 9, 7, 1, \ldots$ циклически повторяется. Оценим теперь последние цифры чисел 17^n и $2\cdot 17^n$:

17^1 оканчивается на 7 $\Rightarrow$ $2\cdot 17^1$ оканчивается на 4,
17^2 оканчивается на 9 $\Rightarrow$ $2\cdot 17^2$ оканчивается на 8,
17^3 оканчивается на 3 $\Rightarrow$ $2\cdot 17^3$ оканчивается на 6,
17^4 оканчивается на 1 $\Rightarrow$ $2\cdot 17^4$ оканчивается на 2,…,

далее последовательность последних цифр $4, 8, 6, 2, \ldots$, также циклически повторяется. Суммируя, получаем, что

$$3^1 + 2 \cdot 17^1 \text{ оканчивается на } 7,$$
$$3^2 + 2 \cdot 17^2 \text{ оканчивается на } 7,$$
$$3^3 + 2 \cdot 17^3 \text{ оканчивается на } 3,$$
$$3^4 + 2 \cdot 17^4 \text{ оканчивается на } 3, \ldots,$$

и далее эта последовательность последних цифр выражения $3^n + 2 \cdot 17^n$ опять – таки циклически (с периодом 4) повторяется.

Таким образом, методом анализа последней цифры удалось установить, что при любых натуральных n число $3^4 + 2 \cdot 17^4$ может оканчиваться только на цифры 3 или 7. Но квадрат никакого натурального числа этими цифрами не оканчивается (квадрат натурального числа может оканчиваться только на одну из цифр $0, 1, 4, 5, 6, 9$), что и доказывает утверждение.

39. Решение. Решим сначала более простую задачу, а именно найдем последнюю цифру числа 2^{1998}. Выясним, на какие цифры может оканчиваться натуральная степень числа 2:

$$2^1 \to 2, \qquad 2^2 \to 4, \qquad 2^3 \to 8, \qquad 2^4 \to 6, \qquad 2^5 \to 2, \ldots$$

Очевидно, что при дальнейшем увеличении показателя степени последовательность последних цифр $2, 4, 8, 6, 2, 4, 8, 6, \ldots$ будет циклически повторяться. Представим число 1998 в виде: $1998 = 4 \cdot 499 + 2$. Имеем: $2^{1998} = 2^{4 \cdot 499 + 2} = (2^4)^{499} \cdot 4$. Заметим, что число 16 в скобках оканчивается цифрой 6, и поэтому любая его натуральная степень также будет оканчиваться этой цифрой. Итак, число $(2^4)^{499}$ оканчивается цифрой 6, и это число умножается на четыре. Поэтому последней цифрой их произведения будет 4. Если теперь повторить проведённые рассуждения для числа 5432^{1998}, то окажется, что добавление одной или нескольких цифр перед 2 не оказывает влияния на полученный результат. **Ответ**: число оканчивается цифрой 4.

40. Решение. Очевидно, достаточно ограничиться рассмотрением случая натуральных n (при целых отрицательных n результат будет аналогичен, а при $n = 0$ число будет составным). Чтобы дать ответ на этот вопрос, попробуем разложить данное число на множители:

$$n^4+64=(n^4+16n^2+64)-16n^2=(n^2+8)^2-(4n)^2=$$
$$=(n^2+4n+8)(n^2-4n+8).$$

Заметим, что $\forall\, n \in \mathbb{N}$ каждый из двух сомножителей строго больше единицы. Это означает, что исходное число составное.

41. Решение. Преобразуем данное выражение, выделив в нем полный куб разности

$$n^3-6n^2+12n+117=(n^3-6n^2+12n-8)+125=$$
$$=(n-2)^3+5^3$$

Теперь разложим на множители по формуле суммы кубов:

$$(n-2)^3+5^3=(n+3)((n-2)^2-5(n-2)+5^2)=$$
$$=(n+3)(n^2-9n+39)$$

Очевидно, что при натуральных n оба сомножителя в этом произведении целочисленные и больше единицы. Это означает, что исследуемое число является составным.

42. Решение. Обозначим $a_n=\frac{n(n+1)}{2}-1=\frac{(n-1)(n+2)}{2}$.

1) Если $n=2k$ $(k \in \mathbb{N})$, то $a_{2k}=\frac{(2k-1)(2k+2)}{2}=$ $=(2k-1)(k+1)$.

При натуральных k оба сомножителя натуральны, причём второй сомножитель больше 1, поэтому a_{2k} может быть простым числом, только если $2k-1=1$, т.е. при $k=1$, тогда $a_2=2$.

2) Если $n=2k-1$ $(k \in \mathbb{N})$, то имеем

$$a_{2k-1}=\frac{(2k-2)(2k+1)}{2}=(k-1)(2k+1).$$

При $k=1$ имеем $a_1=0$ – не является ни простым, ни составным числом. При $k>2$ оба сомножителя целочисленные и больше 1 и, значит, число будет составным. Только при $k=2$ получаем простое число $a_3=5$. **Ответ**: таких чисел два: 2 и 5.

43. Решение. <u>1-й способ</u>. Разложим исследуемое число на множители:

$$p^4+4=(p^2+2\,)^2-(2p)^2=(p^2+2p+2)(p^2-2p+2)$$

Так как при простых p оба сомножителя больше единицы, но тем самым необходимое утверждение доказано.

<u>2-й способ</u>. Покажем, что если $p \neq 5k,\ k \in \mathbb{N}$, то p^4 при делении на 5 дает остаток 1:

1) $p = 5k + 1 \Rightarrow p^4 = (5k+1)^4$ – остаток равен 1;
2) $p = 5k + 2 \Rightarrow p^4 = (5k+2)^4$ – остаток равен 1;
3) $p = 5k + 3 \Rightarrow p^4 = (5k+3)^4$ – остаток равен 1;
4) $p = 5k + 4 \Rightarrow p^4 = (5k+4)^4$ – остаток равен 1.

Тогда число $p^4 + 4$ делится нацело на 5, а значит, является составным. Если же $p = 5k$, то $p = 5 \Rightarrow p^4 + 4 = 629 = 37 \cdot 17$ – составное.

44. Решение. По условию, требуется доказать, что выражение
$$n(n+1)(n+2)(n+3)+1$$
является квадратом целого числа. Сгруппируем сомножители следующим образом: $\big(n(n+3)\big)\big((n+1)(n+2)\big)+1$, и положим $y = n^2 + 3n$. Тогда
$$\big(n(n+3)\big)\big((n+1)(n+2)\big)+1 = y(y+2)+1 = (y+1)^2$$
Выполняя обратную подстановку, приходим к ответу.

Ответ: $n(n+1)(n+2)(n+3)+1 = (n^2+3n+1)^2$.

45. Доказательство. Обозначим $m = n - 1$ $(m \in \mathbb{N})$. Требуется доказать, что для любого натурального m число $(m+1)^m - 1$ делится нацело на m^2. Воспользуемся формулой сокращенного умножения
$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1})\text{, тогда}$$
$$(m+1)^m - 1 = \big((m+1)-1\big)\cdot$$
$$\cdot\big((m+1)^{m-1} + (m+1)^{m-2} + \ldots + (m+1) + 1\big)$$
Первый из двух сомножителей делится на m. Покажем, что и второй сомножитель кратен m. Действительно, во вторых скобках стоит сумма m чисел, делящихся на m с остатком 1. При сложении таких чисел остатки складываются, поэтому их сумма будет делиться на m с остатком m, т.е. с остатком 0. Утверждение доказано.

46. Решение. Так как число $\underbrace{11\ldots1}_{2n}$ представимо в виде

$\underbrace{11\ldots1}_{2n} = \frac{1}{9}\cdot\underbrace{99\ldots9}_{2n}$, а число $\underbrace{22\ldots2}_{n}$, соответственно, в виде

$\underbrace{22\ldots2}_{n} = \frac{2}{9}\cdot\underbrace{99\ldots9}_{n}$, то, подставляя в M и учитывая формулу

$\underbrace{99\ldots9}_{n} = 10^n - 1$, получим:

$$M=\underbrace{11\ldots1}_{2n}-\underbrace{22\ldots2}_{n}=\frac{1}{9}\cdot\underbrace{99\ldots9}_{2n}-\frac{2}{9}\cdot\underbrace{99\ldots9}_{n}=$$

$$=\frac{1}{9}\cdot\left((10^{2n}-1)-2(10^{n}-1)\right)=\frac{1}{9}(10^{n}-1)^{2}=\left(\frac{\overbrace{99\ldots9}^{n}}{3}\right)^{2}=$$

$=\left(\underbrace{33\ldots3}_{n}\right)^{2}$, т.е. M при любом $n\in\mathbb{N}$ является квадратом целого числа $\underbrace{33\ldots3}_{n}$.

47. Решение. Обозначим $a_k=\underbrace{77\ldots7}_{k}$ – k-й член данного ряда. Требуется найти сумму

$$\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}\underbrace{77\ldots7}_{k}=\sum_{k=1}^{n}\frac{7}{9}\cdot\left(\underbrace{99\ldots9}_{k}\right)$$

Воспользовавшись формулами преобразований $\underbrace{99\ldots9}_{k}=10^{k}-1$, а также

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k\pm b_k)=\sum_{k=1}^{n}a_k\pm\sum_{k=1}^{n}b_k\,,\quad\sum_{k=1}^{n}(p\cdot a_k)=p\cdot\sum_{k=1}^{n}a_k$$

получаем, что

$$\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}\frac{7}{9}\cdot(10^{k}-1)=\frac{7}{9}\cdot\sum_{k=1}^{n}(10^{k}-1)=$$

$$=\frac{7}{9}\left(\sum_{k=1}^{n}10^{k}-\sum_{k=1}^{n}1\right)=\frac{7}{9}\left((10+10^{2}+\ldots+10^{n})-n\right)$$

Применяя, далее, формулу для нахождения суммы первых n членов геометрической прогрессии, упрощаем выражение во внутренних скобках:

$$\sum_{k=1}^{n}a_k=\frac{7}{9}\left(10\cdot\frac{10^{n}-1}{10-1}-n\right)=\frac{7}{9}\left(\frac{10}{9}\cdot\underbrace{99\ldots9}_{n}-n\right)=$$

$$=\frac{7}{9}\left(10\cdot\underbrace{11\ldots1}_{n}-n\right)=\frac{7}{9}\left(\underbrace{11\ldots10}_{n}-n\right)$$

48. Решение. Сгруппируем вместе первое слагаемое с последним, второе – с предпоследним и т.д..:

$1^3+2^3+3^3+\ldots+98^3+99^3=$

$=(1^3+99^3)+(2^3+98^3)+\ldots+(49^3+51^3)+50^3$

Воспользуемся формулой суммы кубов и преобразуем с её помощью каждое выражений в скобках:

$(1^3+99^3)+(2^3+98^3)+\ldots+(49^3+51^3)+50^3=$

$=(1+99)(1^2-1\cdot 99+99^2)+(2+98)(2^2-2\cdot 98+98^2)+\ldots+$
$+(49+51)(49^2-49\cdot 51+51^2)+50^3=100(1^2-1\cdot 99+99^2)+$
$+100(2^2-2\cdot 98+98^2)+\ldots+100(49^2-49\cdot 51+51^2)+5^3\cdot 1000$

Очевидно, что каждое слагаемое, а значит, их сумма оканчивается двумя нулями.

49. Указание.

$a^n+b^n=(a+b)(a^{n-1}-a^{n-2}b+\ldots+(-1)^{n-1}b^{n-1})$

1.4. Сравнения по модулю

Если два целых числа a и b при делении на натуральное число n дают один и тот же остаток q, где $0\le q<n$, то числа a и b называют сравнимыми по модулю n. Это обозначают следующим образом $a\equiv b(\mathrm{mod}\, n)$ и читают: « a равно b по модулю n».

Операция сравнения обладает следующими свойствами.

1. Два числа, сравнимые с третьим по одному и тому же модулю, сравнимы между собой (по этому же модулю):

$$a\equiv c(\mathrm{mod}\, n),\ b\equiv c(\mathrm{mod}\, n)\ \Rightarrow\ a\equiv b(\mathrm{mod}\, n).$$

2. Сравнения по одному модулю можно складывать:

$$a\equiv b(\mathrm{mod}\, n),\ c\equiv d(\mathrm{mod}\, n)\ \Rightarrow\ a+c\equiv b+d(\mathrm{mod}\, n).$$

Остаток суммы нескольких чисел по модулю n равен сумме остатков слагаемых по модулю n. То есть, проще говоря, при сложении чисел их остатки (от деления на одно и то же число n) также складываются.

3. Сравнения по одному модулю можно почленно перемножать:

$$a\equiv b(\mathrm{mod}\, n),\ c\equiv d(\mathrm{mod}\, n)\ \Rightarrow\ a\cdot c\equiv b\cdot d(\mathrm{mod}\, n)$$

Остаток произведения нескольких чисел по модулю n равен произведению остатков сомножителей по модулю n. Т.е., проще говоря, при перемножении чисел их остатки (от деления на одно и то же число n) также перемножаются.

4. Обе части сравнения и модуль можно умножить на одно и то же целое число:

$$a \equiv b(\mathrm{mod}\, n) \;\Rightarrow\; ak \equiv bk(\mathrm{mod}\, nk)$$

Пример 11. Докажите, что n^2+1 не делится на 3 ни при каком целом n.

Решение. Ясно, что каждое целое число n сравнимо по модулю 3 либо с 0, либо с 1, либо с 2.
Если $n \equiv 0(\mathrm{mod}\,3)$, то $n^2 \equiv 0(\mathrm{mod}\,3)$ – (умножение сравнений) и $n^2+1 \equiv 1(\mathrm{mod}\,3)$ – (сложение сравнений).
Если $n \equiv 1(\mathrm{mod}\,3)$, то $n^2+1 \equiv 2(\mathrm{mod}\,3)$.
Если $n \equiv 2(\mathrm{mod}\,3)$, то $n^2+1 \equiv 2(\mathrm{mod}\,3)$.
Таким образом, ни в одном случае мы не получим

$$n^2+1 \equiv 0(\mathrm{mod}\,3).$$

Пример 12. Найдите остаток от деления 6^{100} на 7.

Решение. Заметим, что $6 \equiv -1(\mathrm{mod}\,7)$. Возводя это сравнение в сотую степень, получаем $6^{100} \equiv (-1)^{100}(\mathrm{mod}\,7)$, то есть $6^{100} \equiv 1(\mathrm{mod}\,7)$.

Пример 13. Докажите, что ни одно из чисел вида 10^{3n+1} нельзя представить в виде суммы двух кубов натуральных чисел

Решение. Куб натурального числа сравним по модулю 7 либо с 0, либо с 1, либо с -1. Поэтому сумма двух кубов сравнима с одним из следующих чисел: -2, -1, 0, 1, 2. Заметим, что $10 \equiv 3(\mathrm{mod}\,7)$, а $10^3 \equiv -1(\mathrm{mod}\,7)$. Поэтому 10^{3n+1} сравнимо либо с 3, либо с -3 по модулю 7.

Пример 14. Докажите, что $11^{n+2}+12^{2n+1}$ делится на 133 при любом натуральном n.

Решение.

$$11^{n+2}+12^{2n+1} = 121\cdot 11^n + 12\cdot 12^{2n} =$$
$$= 133\cdot 11^n - 12\cdot 11^n + 12\cdot 12^{2n} \equiv$$
$$\equiv 12(12^{2n}-11^n) = 12(144^n-11^n) \equiv 0(\mathrm{mod}\,133)$$

Пользуясь свойствами сравнений, можно получить универсальный критерий делимости (сравнимости) многозначных чисел.

Признак Паскаля. Пусть r_1 – остаток от деления 10 на натуральное число m, r_2 – остаток от деления на m произведения $10r_1$ и так далее, r_n – остаток от деления на m произведения $10r_{n-1}$. Тогда для натурального числа a с десятичной записью $a = \overline{a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0}$ верно сравнение $a \equiv a_0 + r_1 a_1 + \ldots + r_n a_n (\operatorname{mod} m)$.

Действительно, из определения чисел r_k и свойств сравнений следует, что

$r_1 \equiv 10 (\operatorname{mod} m)$, $r_2 \equiv 10 r_1 (\operatorname{mod} m) \equiv 10^2 (\operatorname{mod} m)$, и вообще $r_k \equiv 10^k (\operatorname{mod} m)$, $k = 1, \dots, n$. Отсюда, складывая сравнения, получаем

$$a = a_0 + 10a_1 + \ldots + 10^n a_n \equiv a_0 + r_1 a_1 + \ldots + r_n a_n (\operatorname{mod} m) .$$

Пример 15. Найти остаток от деления на 7 числа 48916.

Решение. Вычислим r_k для применения признака Паскаля:

$$10 \equiv 3 (\operatorname{mod} 7), \qquad 3 \cdot 10 \equiv 3 \cdot 3 \equiv 2 (\operatorname{mod} 7),$$

$$2 \cdot 10 \equiv 2 \cdot 3 \equiv 6 (\operatorname{mod} 7), \; 6 \cdot 10 \equiv 6 \cdot 3 \equiv 4 (\operatorname{mod} 7).$$

Таким образом, нужные остатки суть $3, 2, 6, 4$. Для удобства подсчета заменим 6 и 4 на $-1 \equiv 6 (\operatorname{mod} 7)$ и $-3 \equiv 4 (\operatorname{mod} 7)$ соответственно. Итак,

$$48916 \equiv 6 + 3 + 2 \cdot 9 - 1 \cdot 8 - 3 \cdot 4 = 7 \equiv 0 (\operatorname{mod} 7) .$$

Ответ. 48916 делится на 7.

Этот абзац посвящен замечательному и глубокому теоретико-числовому факту, который был сформулирован и доказан Пьером Ферма. Однако сначала рассмотрим вопрос о сокращении сравнений.

Лемма 1. Пусть $ka \equiv kb (\operatorname{mod} m)$, k и m – взаимно просты. Тогда $a \equiv b (\operatorname{mod} m)$.

Доказательство. Поскольку $ka \equiv kb (\operatorname{mod} m)$, то $ka - kb = k(a - b)$ делится на m. Так как k и m взаимно простые, то $a - b$ делится на m, т.е. $a \equiv b (\operatorname{mod} m)$.

На примерах легко убедиться, что требование взаимной простоты k и m необходимо. Действительно,

$5 \cdot 3 \equiv 5 \cdot 7 (\operatorname{mod} 10)$, но при этом 3 и 7 не сравнимы $(\operatorname{mod} 10)$.

Однако верно следующее утверждение:

Лемма 2. Пусть $ka \equiv kb (\operatorname{mod} kn)$. Тогда $a \equiv b (\operatorname{mod} n)$.

Теперь рассмотрим малую теорему Ферма.

Теорема. Пусть p – простое число, и A не делится на p. Тогда $A^{p-1} \equiv 1(\mathrm{mod}\, p)$.

Доказательство. Рассмотрим $p-1$ число:

$$A, 2A, 3A, \dots, (p-1)A.$$

Покажем, что среди них нет двух чисел, имеющих одинаковые остатки при делении на p. Действительно, если $kA \equiv nA(\mathrm{mod}\, p)$, то $k \equiv n(\mathrm{mod}\, p)$ (см лемму 1), – а это невозможно при разных натуральных k и n, меньших p. Следовательно, среди остатков при делении на p этих $p-1$ чисел встречающихся ровно по одному разу все числа от 1 до $p-1$. Поэтому, перемножив все числа, получим $A \cdot 2A \cdot 3A \dots (p-1)A \equiv 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (p-1)(\mathrm{mod}\, p)$, то есть , $(p-1)! \cdot A^{p-1} \equiv (p-1)!\,(\mathrm{mod}\, p)$. Так как p – простое число, то $(p-1)!$ и p – взаимно простые. Поэтому, вновь воспользовавшись результатом леммы 1, получим $A^{p-1} \equiv 1(\mathrm{mod}\, p)$, что и требовалось доказать.

Следствие. Пусть p – простое число. Тогда для любого целого A имеем $A^p \equiv A(\mathrm{mod}\, p)$.

Пример 16. Найти остаток от деления 3^{102} на 101.

Решение. Так как 101 – простое число, то $3^{100} \equiv 1(\mathrm{mod}\, 101)$. Отсюда $3^{102} \equiv 9 \cdot 3^{100} = 9(\mathrm{mod}\, 101)$

1.5. Задачи для самостоятельного решения

50. Докажите, что $30^{99} + 61^{100}$ делится на 31.

51. Докажите, что $1^n + 2^n + \ldots + (n-1)^n$ делится на n при нечетном n.

52. Докажите, что существует бесконечно много натуральных чисел, не представимых в виде суммы трех точных кубов.

53. Докажите, что $43^{101} + 23^{101}$ делится на 66.

54. Докажите, что среди 51 целого числа найдутся два, квадраты которых дают одинаковые остатки при делении на 100.

55. Докажите, что $\overline{a_1 a_2 a_3 \dots a_{n-1} a_n} = \overline{a_{n-1} a_n}(\mathrm{mod}\, 4)$.

56. Найдите наименьшее натуральное число, делящееся на 36, в записи которого встречаются все 10 цифр.

57. Докажите, что

$$\overline{a_1 a_2 \dots a_n} \equiv a_n - a_{n-1} + \ldots + (-1)^{n-1} a_1 (\mathrm{mod}\, 11).$$

58. Докажите, что число 111 … 11 ($2n$ единиц) – составное.

59. Докажите, что число $\overline{a_1a_2 \dots a_na_n \dots a_2a_1}$ – составное.
60. Сумма цифр трехзначного числа равна 7. Докажите, что это число делится на 7 тогда и только тогда, когда две его последние цифры равны.
61. Найти остаток от деления 2^{100} на 101
62. Докажите, что $300^{3000} - 1$ делится на 1001.
63. Докажите, что $7^{120} - 1$ делится на 143.
64. Докажите, что число $30^{239} + 239^{30}$ – составное.
65. Пусть p – простое число. Докажите, что
$(a + b)^p = a^p + b^p (\mathrm{mod}\, p)$ для любых целых a и b.
66. Сумма трех чисел a, b и с делится на 30. Докажите, что $a^5 + b^5 + c^5$ также делится на 30.
67. Пусть p и q – различные простые числа. Докажите, что $p^q + q^p = p + q (\mathrm{mod}\, pq)$.
68. Пусть p – простое число. Докажите, что
$(p - 1)! \equiv -1 (\mathrm{mod}\, p)$
69. Пусть n – натуральное число, не кратное 17. Докажите, что либо $n^8 + 1$, либо $n^8 - 1$ делится на 17.
70. Докажите, что
а) если $a^4 + b^4 + c^4 + d^4$ делится на 5, то каждое из чисел a, b, c, d делится на 5;
б) если $a^2 + b^2$ делится на 7, то a и b делятся на 7;
в) если $a^3 + b^3 + c^3$ делится на 7, то и abc делится на 7.
71. Докажите, что число $5^{2n+1} + 3^{n+2} \cdot 2^{n-1}$ при любом натуральном n делится на 19.
72. При каких натуральных n число $2^{2n+1} - 3 \cdot 7^n + 5^{n+1} \cdot 6^n$ делится на 23?
73. Докажите, что число $11^{19} + 11^8 + 1$ делится на 133.
74. Докажите, что $m^2 + 1$ ни при каких целых m не делится на 19.
75. Найти остаток от деления 5^{20} на 24.
76. Докажите, что при любом натуральном n число
$37^{n+2} + 16^{n+1} + 23^n$ делится на 7.
77. Докажите, что $5^{5k+1} + 4^{5m+2} + 3^{5n}$ делится на 11, если k, m, n – натуральные числа.

78. Докажите, что при любых целых a и b и целом неотрицательном n число $(7a+3)^{2n+1}+(7b+25)^{2n+1}$ делится на 7.

1.6. Решения, указания, ответы

50. Решение.
$30^{99} \equiv (-1)^{99} \equiv -1(\mathrm{mod}\,31)$, $61^{100} \equiv (-1)^{100} \equiv 1(\mathrm{mod}\,31)$.
51. Указание: Рассмотрите сумму симметричных слагаемых.
52. Указание: Рассмотрите числа вида $8k+7$
54. Указание: Используйте тождество $x^2-y^2=(x-y)(x+y)$
55. Указание: все степени десяти, начиная со 100, делятся на 4.
56. Ответ. 1023457896.
57. Указание: $10 \equiv -1(\mathrm{mod}\,11)$.
58. Указание. Это число делится на 11.
59. Указание. Это число делится на 11.
60. Решение.
$\overline{abc}=100a+10b+c \equiv 2a+3b+c(\mathrm{mod}\,7) \equiv b-c(\mathrm{mod}\,7)$, так как $2(a+b+c) \equiv 0(\mathrm{mod}\,7)$. Значит, $\overline{abc}$ делится на 7 тогда и только тогда, когда $b-c$ делится на 7. Но так как $b,c<7$, то это условие равносильно тому, что $b=c$.
61. Ответ. Вследствие малой теоремы Ферма, он равен 1.
62. Решение. $300^{3000}=(300^{500})^6 \equiv 1(\mathrm{mod}\,7)$. Аналогично, $300^{3000} \equiv 1(\mathrm{mod}\,11)$ и $(\mathrm{mod}\,13)$. Следовательно, $300^{3000}-1$ делится и на 7, и на 11, и на 13, т.е. на 1001 .
63. Решение. Докажем, что $7^{120}-1$ делится на 11 и на 13. Действительно, $(7^{12})^{10} \equiv 1(\mathrm{mod}\,11)$ и $(7^{10})^{12} \equiv 1(\mathrm{mod}\,13)$.
64. Ответ. Это число делится на 31.
65. Решение. $(a+b)^p \equiv (a+b)=a+b \equiv a^p+b^p(\mathrm{mod}\,p)$.
66. Указание. Докажите, что для произвольного целого x верно сравнение $x^5 \equiv x(\mathrm{mod}\,30)$.
67. Указание. Докажите, что p^q+q^p-p-q делится и на p, и на q.
69. Указание. $(n^8+1)(n^8-1)=n^{16}-1 \equiv 0(\mathrm{mod}\,17)$.
70. Указание: Рассмотрите степени остатков по соответствующим модулям. Например, если a не делится на 5, то $a^4 \equiv 1(\mathrm{mod}\,5)$.
71. Решение.

$5^{2n+1} + 3^{n+2} \cdot 2^{n-1} \equiv 5 \cdot 6^n + 27 \cdot 6^{n-1} \equiv 57 \cdot 6^{n-1} (\mathrm{mod}\ 19).$

72. Решение. При $n = 11 + 22l$.

$2^{2n+1} - 3 \cdot 7^n + 5^{n+1} \cdot 6^n \equiv 2(4^n + 7^n)(\mathrm{mod}\ 23)$

73. Решение. $11^3 = 1331 \equiv 1(\mathrm{mod}\ 133)$. Поэтому $11^{19} \equiv 11(\mathrm{mod}\ 133)$, $11^8 \equiv 11^6 \cdot 11^2 \equiv 11^2(\mathrm{mod}\ 133)$ и $11^{19} + 11^8 + 1 \equiv 0(\mathrm{mod}\ 133)$

74. Указание: Рассмотрите остатки чисел $1^2, 2^2, \ldots, 18^2$ при делении на 19.

75. Решение. Имеем $5^2 \equiv 1(\mathrm{mod}\ 24)$. Возведя обе части этого сравнения в десятую степень, получаем $5^{20} \equiv 1(\mathrm{mod}\ 24)$. Таким образом, искомый остаток есть 1.

76. Решение. Так как

$37 = 7 \cdot 5 + 2,\ 16 = 7 \cdot 2 + 2,\ 23 = 7 \cdot 3 + 2,\ 37 \equiv 2(\mathrm{mod}\ 7),$ $16 \equiv 2(\mathrm{mod}\ 7),\ 23 \equiv 2(\mathrm{mod}\ 7)$. Возвышая обе части каждого из этих сравнений в степень, получим $37^{n+2} \equiv 2^{n+2}(\mathrm{mod}\ 7)$, $16^{n+1} \equiv 2^{n+1}(\mathrm{mod}\ 7),\ 23^n \equiv 2^n(\mathrm{mod}\ 7)$.

Сложив эти сравнения, получим

$37^{n+2} + 16^{n+1} + 23^n \equiv 2^n \cdot 7(\mathrm{mod}\ 7)$,т.е. $37^{n+2} + 16^{n+1} + 23^n$ делится на 7.

77. Решение. Так как

$5^5 = 3125 = 11 \cdot 284 + 1,\quad 4^5 = 1024 = 11 \cdot 93 + 1,$

$3^5 = 243 = 11 \cdot 22 + 1$, то

$$\begin{array}{ll|ll|ll|}
5^5 & \equiv 1(\mathrm{mod}\ 11), & 4^5 & \equiv 1(\mathrm{mod}\ 11), & 3^5 & \equiv 1(\mathrm{mod}\ 11), \\
5^{5k} & \equiv 1(\mathrm{mod}\ 11), & 4^{5m} & \equiv 1(\mathrm{mod}\ 11), & 3^{5n} & \equiv 1(\mathrm{mod}\ 11) \\
5^{5k+1} & \equiv 5(\mathrm{mod}\ 11) & 4^{5m+2} & \equiv 4^2(\mathrm{mod}\ 11), & & \\
 & & 4^{5m+2} & \equiv 5(\mathrm{mod}\ 11) & &
\end{array}$$

Сложив сравнения

$5^{5k+1} \equiv 5(\mathrm{mod}\ 11), 4^{5m+2} \equiv 5(\mathrm{mod}\ 11), 3^{5n} \equiv 1(\mathrm{mod}\ 11),$

получим $5^{5k+1} + 4^{5m+2} + 3^{5n} \equiv 11(\mathrm{mod}\ 11)$, или

$5^{5k+1} + 4^{5m+2} + 3^{5n} \equiv 0(\mathrm{mod}\ 11)$, т.е. $5^{5k+1} + 4^{5m+2} + 3^{5n}$ делится на 11.

78. Решение. Так как

$7a + 3 \equiv 3(\mathrm{mod}\ 7),\ 7b + 25 \equiv -3(\mathrm{mod}\ 7)$, то возводя обе части каждого из этих сравнений в нечетную степень $2n + 1$, имеем

$(7a + 3)^{2n+1} \equiv 3^{2n+1}(\mathrm{mod}\ 7),\ (7b + 25)^{2n+1} \equiv -3^{2n+1}(\mathrm{mod}\ 7).$

Сложив эти сравнения, получим
$(7a+3)^{2n+1}+(7b+25)^{2n+1}\equiv 0(\mathrm{mod}\ 7)$; следовательно, $(7a+3)^{2n+1}+(7b+25)^{2n+1}$ делится на 7.

1.7. Наибольший общий делитель, наименьшее общее кратное, их свойства

Наибольшим общим делителем (НОД) двух чисел называется наибольшее число, на которое делится каждое из чисел. *Наименьшим общим кратным* (НОК) двух чисел называется наименьшее число, которое делится на каждое из этих чисел.

Для любых натуральных a, b, c, d справедливы следующие **свойства**:

1. $\text{НОД}(a,b)\cdot\text{НОК}(a,b)=ab$.
2. Если $\text{НОД}(a,b)=n$, то найдутся такие натуральные числа c,d, что $a=cn, b=dn$, причем $\text{НОД}(c,d)=1$.
3. Если $\text{НОД}(a,b)=1$, то $\forall n,k\in\mathbb{N}$ $\text{НОД}\left(a^n,b^k\right)=1$.
4. Если $a \vdots b$, то $\text{НОД}(a,b)=b, \text{НОК}(a,b)=a$.
5. Общий множитель можно выносить из-под знаков НОД и НОК: $\text{НОД}(ac,bc)=c\cdot\text{НОД}(a,b), \text{НОК}(ac,bc)=c\cdot\text{НОК}(a,b)$.
6. Два (три) последовательных натуральных числа взаимно просты: $\text{НОД}(a,a+1)=1, \text{НОД}(a,a+1,a+2)=1$.
7. Пошаговое (последовательное) вычисление НОД и НОК: $\text{НОД}(a,b,c)=\text{НОД}(\text{НОД}(a,b),c)$,
   $\text{НОК}(a,b,c)=\text{НОК}(\text{НОК}(a,b),c)$.
8. Если $b>a$, то $\text{НОД}(a,b)=\text{НОД}(a,b-a)$.

Чтобы найти НОД и НОК, достаточно выписать разложения чисел на простые множители и взять их «пересечение» (т.е. каждый простой множитель берется в меньшей из степеней) и «объединение» (соответственно, в большей).

Однако в случае больших чисел удобнее использовать ***алгоритм Евклида.*** Он основан на следующих утверждениях:

1. $\text{НОД}(a,b)=\text{НОД}(a\pm b,b)$.

Выполнив деление с остатком a на b, получим $a=bq_0+r_1$

2. $\text{НОД}(a,b)=\text{НОД}(b,r_1)$

Суть алгоритма Евклида состоит в следующем. Пусть a,b – целые числа, $a\geq b>0$, требуется найти $\text{НОД}(a,b)$. Выполнив деление с остатком a на b, получим равенство $a = bq_0 + r_1$. Если $r_1 \neq 0$, то выполнив деление с остатком b на r_1, получим, что $b = r_1q_1 + r_2$. Затем выполняется деление с остатком r_1 на r_2 и т.д. В результате повторных делений получим систему равенств

$$a = bq_0 + r_1,\ b = r_1q_1 + r_2,\ r_1 = r_2q_2 + r_3, \ldots$$
$$r_{n-2} = r_{n-1}q_{n-1} + r_n\ ,\ r_{n-1} = r_nq_n\ ,$$

где $b > r_1 > r_2 > r_3 >\ldots> r_n > 0$. Из утверждения 2 последний ненулевой остаток r_n является НОД(a, b).

Покажем, как он работает для конкретных чисел.
Найдем наибольший общий делитель чисел 1381955 и 690713:

$$\text{НОД}(1381955, 690713) = \text{НОД}(690713, 529) =$$
$$= \text{НОД}(529, 368) = \text{НОД}(368, 161) = \text{НОД}(161, 46) =$$
$$= \text{НОД}(46, 23) = \text{НОД}(23, 0) = 23.$$

Пример 17. Найдите наибольший общий делитель чисел $2n + 13$ и $n + 7$.

Решение.
$\text{НОД}(2n + 13, n + 7) = \text{НОД}(n + 7, n + 6) = \text{НОД}(n + 6, 1) = 1.$

Пример 18. Докажите, что дробь $\frac{12n+1}{30n+2}$ – несократима ни при каком натуральном n.

Решение.
$\text{НОД}(30n + 2, 12n + 1) = \text{НОД}(12n + 1,\ n6) = \text{НОД}(n6,\ 1) = 1.$

Пример 19. Докажите, что числа 1111111 и 1111 взаимно просты.

Решение. Применим алгоритм Евклида

$$\text{НОД}(1111111, 1111) = \text{НОД}(1111, 111) = \text{НОД}(111, 1) =$$
$$= \text{НОД}(1,0) = 1.$$

Значит, $\text{НОД}(1111111, 1111) = 1$.

Пример 20. Найдите $\text{НОД}(2^{30} - 1, 2^{40} - 1)$.

Решение. Заметим, что разность двух чисел делится на их НОД. Тогда $2^{40} - 1 - (2^{30} - 1) ⋮ \text{НОД}(2^{40} - 1, 2^{30} - 1)$,
$2^{30}(2^{10} - 1) ⋮ \text{НОД}(2^{40} - 1, 2^{30} - 1)$. Число 2^{30}, очевидно, взаимно просто с нашими числами (оба они нечетные), следовательно, $2^{10} - 1 ⋮ \text{НОД}(2^{40} - 1, 2^{30} - 1)$. Заметим, что НОД этих чисел тоже делится на $2^{10} - 1$, так как
$2^{40} - 1 = (2^{20} - 1)(2^{20} + 1) =$

$= (2^{10}-1)(2^{10}+1)(2^{20}+1) \vdots 2^{10}-1,$
$2^{30}-1 = (2^{10}-1)(2^{20}+2^{10}+1) \vdots 2^{10}-1.$
Значит, НОД этих чисел и есть в точности $2^{10}-1 = 1023$.
Ответ. 1023.

Пример 21. Найдите наибольший общий делитель всех чисел вида p^2-1, где p – простое число, большее 3, но меньшее 2012.

Решение. Заметим, что p^2-1 делится на 3 при любом p, не делящемся на 3 (квадрат по модулю 3 дает остаток $1 \cdot 1$ либо остаток $2 \cdot 2$, что по модулю 3 одно и то же). Значит, наши числа все будут делиться на 3. Заметим также, что они все будут делиться на 8, так как p^2 при делении на 8 может давать только остаток 1 (оно сравнимо либо с $1 \cdot 1$, либо с $3 \cdot 3$, либо с $5 \cdot 5$, либо с $7 \cdot 7$, что по модулю 8 одно и то же). Но заметим, что больше ни на что наш общий делитель делиться не может, так как $5^2-1 = 24 = 3 \cdot 8$, а общий делитель должен быть меньше либо равен каждому из чисел. Значит, искомый общий делитель – это 24.
Ответ. 24.

1.8. Задачи для самостоятельного решения

79. Найдите НОД$(2^{100}-1, 2^{120}-1)$.
80. Найдите НОД$(111 \dots 111, 11 \dots 11)$ – в записи первого числа 100 единиц, в записи второго – 60.
81. Найдите такие натуральные числа a и b, что НОД$(a,b) = 3$, НОК$(a,b) = 630$, и при этом сумма $a+b$ минимальна.
82. Натуральные числа a, b и c таковы, что НОК$(a,b) = 60$ и НОК$(a,c) = 270$. Найдите НОК(b,c).
83. Натуральные числа m и n таковы, что НОД(n,m) + НОК$(n,m) = m+n$. Докажите, что одно из них является делителем другого.
84. Натуральные числа a, b, c таковы, что НОК$(a,b) = 60$ и НОК$(a,c) = 270$. Найдите НОК(b,c).
85. Натуральные числа m и n таковы, что НОД(n,m) + НОД$(n,m) = n+m$. Докажите, что одно из них является делителем другого.

86. Каким может быть наибольший общий делитель натуральных чисел m и n, если при увеличении числа m на 6 он увеличивается в 4 раза?

87. Известно, что $x, y \in \mathbb{N}$ НОД$(x, y) = 13$, НОК$(x, y) = 52$. Найдите x и y.

88. На какое число и при каких натуральных n сократима дробь $\frac{n^2-1}{n^4+n^3-n^2+n+1}$?

89. Найдите наибольший общий делитель чисел $11\,111\,111$ и $\underbrace{11 \ldots 111}_{2012}$.

90. Докажите, что дробь $\frac{12n+1}{30n+2}$ несократима ни при каких натуральных значениях n.

91. Докажите, что дробь $\frac{n^5+n^4+4n^3+3n^2+3n+1}{n^4+n^3+3n^2+2n+1}$ несократима ни при каких натуральных значениях n.

92. Чему равен наибольший общий делитель всех чисел $4^{n+2} + 5^{2n+1}$ при натуральных значениях n?

93. Найдите все целые n, при которых $\frac{19n+17}{7n+11}$ – целое число.

94. Все обыкновенные правильные несократимые дроби, числители и знаменатели которых двузначные числа, упорядочили по возрастанию. Между какими двумя последовательно расположенными дробями находится число $\frac{4}{7}$?

95. Среди обыкновенных дробей с положительными знаменателями, расположенными между числами $\frac{87}{38}$ и $\frac{88}{39}$, найдите такую, знаменатель которой минимален.

1.9. Решения, указания, ответы

79. Указание. Воспользуйтесь алгоритмом Евклида.

80. Указание. Воспользуйтесь алгоритмом Евклида.

81. Решение. Так как НОД$(a, b) = 3$, то по свойству **(2)** существуют такие взаимно простые натуральные числа m, n , что $a = 3m$, $b = 3n$. Тогда задачу можно сформулировать в виде: «Найти такие натуральные m, n, что НОД$(m, n) = 1$, НОК$(m, n) = 210$ и при этом сумма $m + n$ минимальна»

Далее задача решается перебором. Заметим, что условия симметричные относительно m и n.Пусть, ради определенности, $m \le n$. Так как $210 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$, то возможны следующие случаи:

m	n	$m+n$
2	$3 \cdot 5 \cdot 7$	> 70
3	$2 \cdot 5 \cdot 7$	> 70
5	$2 \cdot 3 \cdot 7$	> 40
7	$2 \cdot 3 \cdot 5$	37
$2 \cdot 3$	$5 \cdot 7$	41
$2 \cdot 5$	$3 \cdot 7$	31
$2 \cdot 7$	$3 \cdot 5$	29

Итак, сумма $m+n$ минимальна (и равна 29), если $m = 14$, $n = 15$. Им соответствуют $a = 42$, $b = 45$. С учётом симметрии получаем ответ. **Ответ**: $(a;\ b) \in \{(42; 45); (45; 42)\}$.

82. Решение. Сравним разложения на простые множители чисел $A = \text{НОК}(a, b) = 60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$ и $B = \text{НОК}(a, c) = 270 = 2 \cdot 3^3 \cdot 5$. Исходя из вида A, предположим, что a делится на 2^2, тогда $B \vdots 2^2$. Но это не так, следовательно, на 2^2 делится число b. Аналогично, предположим, что a делится на 3^3, тогда $A \vdots 3^3$. Поскольку это не так, то на 3^3 делится число c. Поэтому число $C = \text{НОК}(b, c)$ делится на произведение $2^2 \cdot 3^3 = 108$.
Множитель 5 может либо присутствовать в разложении хотя бы одного из чисел b и c, либо нет. Соответственно, получаем $C = 108 \cdot 5 = 540$ либо $C = 108$. Отметим, что первый случай реализуется, например, для чисел $a = 1$, $b = 60$, $c = 270$, а второй – для $a = 30$, $b = 12$, $c = 27$. **Ответ**: 108 или 540.

83. Решение. Обозначим $d = \text{НОД}(n, m)$, тогда по свойству **(2)** существуют такие натуральные $p, q, \text{НОД}(p, q) = 1$, что
$n = pd, m = qd$
Подставим в исходное равенство:
$$d + pqd = d(p+q) \Leftrightarrow 1 + pq = p + q \Leftrightarrow (1-p)(q-1) = 0$$
Если $p = 1$, то $n = d, m = qd$ и $m \vdots n$.
Если $q = 1$, то $m = d, n = pd$ и $n \vdots m$, что и требовалось доказать.

84. Ответ. 108 или 540.

85. Указание. Ввести $d = \text{НОД}(n,m)$, тогда $\exists p,q \in \mathbb{N}$: $\text{НОД}(p,q)=1$ и $n=pd,\ m=qd$. Далее подставить в уравнение, перенести все в одну сторону и разложить на множители.

86. Решение. Пусть $\text{НОД}(n,m)=d$, тогда $\text{НОД}(n,m+6)=4d$, $d\in\mathbb{N}$. Из первого условия следует, что $n \vdots d$ и $m \vdots d$, а из второго, дополнительно, что $m+6 \vdots d$. Следовательно, $6 \vdots d$, т.е. $d\in\{1;2;3;4\}$. Из второго условия также следует, что поскольку $n \vdots 4$ и $m+6 \vdots 4$, то n и m – четные $\Rightarrow$ d – четное. Итак, $d\in\{2;4\}$. Покажем, что оба случая возможны. Например, если $n=8, m=2$, то $d=2$, а если $n=24, m=18$, то $d=6$.
Ответ. 2 или 6.

87. Указание. Используйте то, что оба этих числа делятся на 13 и являются делителями 52. **Ответ**. 13 и 52.

88. Указание. Используйте алгоритм Евклида для нахождения НОД. **Ответ**. На 3 при $n=2k+1, k\in\mathbb{Z}$.

89. Решение. При делении большего из чисел $a=\underbrace{11\dots111}_{2012}$ на меньшее число $b=11\,111\,111$ получим неполное частное $q=\underbrace{\overbrace{10000000}\dots\overbrace{10000000}}_{401\text{ раз}}$ и остаток $r=1111$, то есть

$a=bq+1111,\ a-bq=1111.$

Отсюда видно, что всякий делитель чисел a и b, в том числе и наибольший, является также и делителем числа 1111. Но легко видеть, что число 1111 само является делителем чисел a и b, а, значит, оно и есть их НОД
Ответ. 1111.

90. Решение. $\text{НОД}(12n+1,\ 30n+2)=\text{НОД}(12n+1,\ 6n)=\text{НОД}(1,6n)=1.$

91. Решение. Обозначим $\text{НОД}(n^5+n^4+4n^3+3n^2+3n+1,\ n^4+n^3+3n^2+2n+1\,)=d$. Предположим, что $d\neq 1$.

Выделим из данной дроби целую часть, то есть выполним деление с остатком числителя дроби на ее знаменатель:

$$\frac{n^5+n^4+4n^3+3n^2+3n+1}{n^4+n^3+3n^2+2n+1}=n+\frac{n^3+n^2+2n+1}{n^4+n^3+3n^2+2n+1},$$

$n^5+n^4+4n^3+3n^2+3n+1=(n^4+n^3+3n^2+2n+1)\cdot n+$ $+(n^3+n^2+2n+1).$

Поскольку числитель и знаменатель данной дроби делятся на d, то и остаток от деления n^3+n^2+2n+1 тоже делится на d.

Теперь разделим делитель $n^4+n^3+3n^2+2n+1$ на остаток n^3+n^2+2n+1 с остатком: $n^4+n^3+3n^2+2n+1=$
$=(n^3+n^2+2n+1)\cdot n+(n^2+n+1\ )$.

Поскольку числа $n^4+n^3+3n^2+2n+1$ и n^3+n^2+2n+1 делятся на d, то и новый остаток n^2+n+1 тоже делится на d.

Аналогично разделим n^3+n^2+2n+1 на n^2+n+1 с остатком: $n^3+n^2+2n+1=(n^2+n+1)\cdot n+(n+1)$.

Так как n^3+n^2+2n+1 и n^2+n+1 делятся на d, то и новый остаток $n+1$ тоже делится на d.

Наконец, разделим n^2+n+1 на $n+1$ с остатком:
$n^2+n+1=(n+1)\cdot n+1$.

Поскольку здесь n^2+n+1 и $n+1$ делятся на d, то и остаток, равный 1, тоже делится на d. Но это невозможно, поскольку по нашему предположению $d\neq 1$. Из полученного противоречия заключаем, что $d=1$, и, значит, данная дробь несократима.

92. Решение. Обозначим наибольший общий делитель всех таких чисел через d. Заменим в данной сумме n на $n+1$, получим сумму $4^{n+3}+5^{2n+3}=4^{n+3}+25\cdot 5^{2n+1}$, которая также делится на d. Умножим данную сумму на 4, получим, что и $(4^{n+2}+5^{2n+1})\cdot 4=4^{n+3}+4\cdot 5^{2n+1}$ тоже делится на d.
Значит, на d делится и разность
$(4^{n+3}+25\cdot 5^{2n+1})-(4^{n+3}+4\cdot 5^{2n+1})=21\cdot 5^{2n+1}$.
Поскольку d нечетно, то $21 \vdots d$, откуда d может принимать одно из значений: $1,3,7,21$. Для определения d положим в данной сумме $n=1$: $4^{1+2}+5^{2\cdot 1+1}=64+125=189=21\cdot 9$. Полученное значение делится на 21. Кроме того, из хода решения видно, что если при некотором натуральном n данная сумма делится на 21, то она также делится на 21 при замене n на $n+1$. Это означает, что наибольшим общим делителем всех чисел указанного вида случит 21. **Ответ**. 21.

93. Решение. $\frac{19n+17}{7n+11}=3-\frac{2n+16}{7n+11}$. Найдем целые n, при которых $\left|\frac{2n+16}{7n+11}\right|<1$: при этих значениях данная дробь не является целым числом. Получим $n<-3$ или $n>1$. Осталось проверить дробь при $n=-3,-2,-1,0,1$.

Ответ. $n \in \{-3, -2, 1\}$.

94. Решение. Из условия задачи следует:
$$\begin{cases} \frac{x}{y} < \frac{4}{7} < \frac{u}{v}, \\ 10 \le x, y, u, v \le 99, \\ \text{НОД}(x, y) = \text{НОД}(u, v) = 1 \end{cases}$$
Требуется найти такие значения x, y, u, v, при которых разности $\frac{4}{7} - \frac{x}{y} = \frac{4y-7x}{7y}$ и
$\frac{u}{v} - \frac{4}{7} = \frac{7u-4v}{7v}$ минимальны.

Используем следствие из алгоритма Евклида: *для взаимно простых чисел x, y найдутся такие взаимно простые числа a, b, что $ax - by = 1$.*

Из приведенного утверждения следует, что существуют такие числа x, y, u, v, $\text{НОД}(x, y) = \text{НОД}(u, v) = 1$ что $\begin{cases} 4y - 7x = 1, \\ 7u - 4v = 1. \end{cases}$

Решим первое уравнение системы:
$4y - 7x = 1$, $\quad y = \frac{7x+1}{4} = x + \frac{3x+1}{4}$; $\frac{3x+1}{4} \in \mathbb{N}$, обозначим $\frac{3x+1}{4} = m$, тогда $x = \frac{4m-1}{3} = m + \frac{m-1}{3}$; $\frac{m-1}{3} \in \mathbb{N}$, обозначим $\frac{m-1}{3} = k$, тогда $m = 3k + 1$, $x = 4k + 1$, $y = 7k + 2$.

Среди найденных решений имеется множество двузначных. Выбираем из них такое, чтобы знаменатель дроби был максимальным (из допустимых значений): тогда будет минимальна дробь $\frac{4y-7x}{7y} = \frac{1}{7y}$. Искомое значение $k = 13$, а $\frac{x}{y} = \frac{53}{93}$. Аналогично находим $\frac{u}{v} = \frac{56}{96}$. **Ответ**. $\frac{53}{93} < \frac{4}{7} < \frac{56}{96}$.

95. Решение. Пусть $\frac{88}{39} < \frac{x}{y} < \frac{87}{38}$. Тогда
$2 + \frac{10}{39} < 2 + \frac{x-2y}{y} < 2 + \frac{11}{38}$, $\quad \frac{10}{39} < \frac{x-2y}{y} < \frac{11}{38}$.
Далее:
$$\frac{38}{11} < \frac{y}{x - 2y} < \frac{39}{10}, \quad 3 + \frac{5}{11} < 3 + \frac{-3x + 7y}{x - 2y} < 3 + \frac{9}{10},$$
$$\frac{5}{11} < \frac{-3x + 7y}{x - 2y} < \frac{9}{10}; \quad \frac{10}{9} < \frac{x - 2y}{-3x + 7y} < \frac{11}{5},$$
$$1 + \frac{1}{9} < 1 + \frac{4x - 9y}{-3x + 7y} < 1 + \frac{6}{5}, \qquad \frac{1}{9} < \frac{4x - 9y}{-3x + 7y} < \frac{6}{5}.$$

Положим $\begin{cases} 4x - 9y = a, \\ -3x + 7y = b \end{cases}$. Тогда $\begin{cases} x = 7a + 9b, \\ y = 3a + 4b \end{cases}$.

Имеем $\frac{1}{9} < \frac{a}{b} < \frac{6}{5}$, откуда $\frac{5}{6}a < b < 9a$.

Допустимые значения $y = 3a + 4b$: $6\frac{1}{3}a < y < 40a$.

Наименьшее возможное значение y достигается при $a = 1$ и равняется 7. При этом $b = 1, x = 16$. Следовательно, $\frac{16}{7}$ – искомая дробь. **Ответ**. $\frac{16}{7}$.

1.10. Уравнения в целых числах

Уравнение вида $f(x, y, \dots) = 0$, переменные в котором считаются целочисленными, называется *уравнением в целых числах* или *диофантовым уравнением*. Набор целочисленных значений переменных, при подстановке которых в уравнение получается верное равенство, называется *решением* диофантова уравнения.

Уравнение вида $ax + by = c$ называется *линейным диофантовым уравнением*.

Для решения в целых числах уравнения вида $ax + by = c$, где a, b, c – целые числа, отличные от нуля, приведем ряд теоретических положений, которые позволят установить правило решения. Эти положения основаны на известных фактах теории делимости.

Теорема 1. Если НОД$(a, b) = d$, то существуют такие целые числа x и y, что имеет место равенство $ax + by = d$.

(Это равенство называется *линейной комбинацией* или *линейным представлением* наибольшего общего делителя двух чисел через сами эти числа.)

Доказательство теоремы основано на использовании равенств алгоритма Евклида для нахождения наибольшего общего делителя двух чисел (наибольший общий делитель данных чисел выражается через неполные частные и остатки, начиная с последнего равенства в алгоритме Евклида).

Пример 22. Найти линейное представление наибольшего общего делителя чисел 1232 и 1672.

Решение. 1) Составим равенства алгоритма Евклида:

$$1672 = 1232 \cdot 1 + 440,$$

$$1232 = 440 \cdot 2 + 352,$$
$$440 = 352 \cdot 1 + 88,$$
$$352 = 88 \cdot 4, \qquad \text{т.е } \text{НОД}(1672{,}352) = 88.$$

2) Выразим 88 последовательно через неполные частные и остатки, используя полученные выше равенства, начиная с конца:

$88 = 440 - 352 \cdot 1 = (1672 - 1232) - (1232 - 1672 \cdot 2 + 1232 \cdot 2) =$
$= 1672 \cdot 2 - 1232 \cdot 4$

т.е. $88 = 1672 \cdot 3 + 1232 \cdot (-4)$

Теорема 2. Если в уравнении $ax + by = 1$ НОД$(a, b) = 1$, то уравнение имеет, по крайней мере, одно целое решение.

Справедливость этой теоремы следует из теоремы 1. Таким образом, чтобы найти одно целое решение уравнения $ax + by = 1$, если НОД$(a, b) = 1$, достаточно представить число 1 в виде линейной комбинации чисел a и b.

Пример 23. Найти целое решение уравнения
$15x + 37y = 1$.

Решение.1) $37 = 15 \cdot 2 + 7, 15 = 7 \cdot 2 + 1$. 2) $1 = 15 - 7 \cdot 2 =$
$= 15 - (37 - 15 \cdot 2) \cdot 2 = 15 \cdot 5 + 37 \cdot (-2)$,

т.е. $x_0 = 5$, $y_0 = -2$ – решение данного уравнения.

Теорема 3.Если в уравнении $ax + by = c$ НОД$(a, b) = d > 1$ и c не делится на d, то уравнение целых решений не имеет.

Для доказательства теоремы достаточно предположить противное.

Пример 24. Найти целое решение уравнения $16x - 34y = 7$.

Решение. НОД$(16{,}34) = 2$, 7 не делится на 2, уравнение целых решений не имеет.

Теорема 4.Если в уравнении $ax + by = c$ НОД$(a, b) = d > 1$ и $c \vdots d$, то оно равносильно уравнению $a_1x + b_1y = c_1$, в котором НОД$(a_1, b_1) = 1$.

При доказательстве теоремы следует показать, что произвольное целое решение первого уравнения является также решением второго уравнения и обратно.

Теорема 5. Если в уравнении $ax + by = c$ НОД$(a, b) = 1$, то все целые решения этого уравнения заключены в формулах:

$$x = x_0c + bt, \qquad y = y_0c - at,$$

где x_0, y_0– целое решение уравнения $ax + by = 1$, t – любое целое число.

При доказательстве теоремы следует показать, во-первых, что приведенные формулы действительно дают решения данного уравнения и, во-вторых, что произвольное целое решение этого уравнения заключено в приведенных формулах.

Приведенные теоремы позволяют установить следующее правило решения в целых числах уравнения $ax + by = c$, где НОД$(a, b) = 1$:
1) находится целое решение уравнения $ax + by = 1$ путем представления 1 как линейной комбинации чисел a и b (существуют и другие способы отыскания целых решений этого уравнения, например при использовании цепных дробей);
2) составляется общая формула целых решений данного уравнения: $x = x_0 c + bt,\ y = y_0 c - at$, где x_0, y_0 – целое решение уравнения $ax + by = 1$, t – любое целое число.
Придавая t определенные целые значения, можно получить частные решения данного уравнения: наименьшие по абсолютной величине, наименьшие положительные (если можно) и т.д.

Пример 25. Найти целые решения уравнения $407x - 2816y = 33$.

Решение. 1) Упрощаем данное уравнение, приводя его к виду $37x - 256y = 3$. 2) Решаем уравнение $37x - 256y = 1$.
$256 = 37 \cdot 6 + 34,\ 37 = 34 \cdot 1 + 3,\ 34 = 3 \cdot 11 + 1.$
$1 = 34 - 3 \cdot 11 = 256 - 37 \cdot 6 - 11\ \ (37 - 256 + 37 \cdot 6) =$
$= 256 \cdot 12 - 37 \cdot 83 = 37 \cdot (-83) - 256 \cdot (-12),$
т. е. $x_0 = -83, y_0 = -12.$
Общий вид всех целых решений данного уравнения:
$x = -83 \cdot 3 - 256t = -249 - 256t,$
$y = -12 \cdot 3 - 37t = -36 - 37t.$
Положив $t = -1$, получим $x_1 = 7, y_1 = 1$ и общие формулы решений примут вид: $x = 7 - 256t, y = 1 - 37t.$

Одной из идей решений уравнений в целых числах является ограничение перебора. Для этого может быть использовано, например, разложение на множители.

Пример 26. Решите уравнение: $xy + x - 3y = 4$.
Решение. Уравнение приводится к виду $(x-3)(y+1) = -7$, а -7 можно разложить в произведение двух множителей только двумя способами: $-7 = -1 \cdot 7$ и $-7 = 1 \cdot (-7)$. Отсюда получаем ответ: $\{(-4;0),\ (2;6),\ (4;\ -8),\ (10;\ -2)\}$

Другим способом решения этого уравнения является выражение x через y:
$x = \frac{3y-4}{y+1} = 3 - \frac{7}{y+1}$. Так как $\frac{7}{y+1}$ должно быть целым числом, то $(y+1)$ может быть равно только $1, -1,\ 7, -7$.

Ограничить перебор можно преобразованием левой части уравнения к сумме неотрицательных функций.

Пример 27. Решите уравнение $5x^4 + 10x^2 + 2y^6 + 4y^3 = 6$.
Решение. Приводим уравнение к виду
$5(x^2+1)^2 + 2(y^3+1)^2 = 13$. Отсюда имеем $5(x^2+1)^2 \le 13$, а так как $(x^2+1)^2$– целое число, то (x^2+1) может быть равен только $0, 1, -1$. Легко видеть, что возможно только $x = 0$. Тогда $(y^3+1)^2 = 4$ и $y = 1$.
Ответ. $(0,\ 1)$.

Если относительно одного из неизвестных уравнение является квадратным, то ограничить перебор можно, используя не отрицательность дискриминанта.

Пример 28. Решите уравнение $10x + y = x^2 + y^2 - 13$.
Решение. Уравнение квадратное относительно x:
$x^2 - 10x + (y^2 - y + 13) = 0$. Условием существования решения является $D/_4 = 25 - y^2 + y - 13 \ge 0$, т.е. $-3 \le y \le 4$. Таким образом, достаточно перебрать случаи $y = -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4$.
Ответ.$(-5, -3), (5,\ 4)$.

Другой идеей является сравнение левой и правой частей уравнения по какому-то модулю (или сравнение остатков).

Пример 29. Решите уравнение $x^2 + y^2 = 4z - 1$.
Решение. Так как $x^2 \equiv 0,\ 1 (\mathrm{mod}\ 4)$, то $x^2 + y^2 \equiv 0,\ 1,\ 2 (\mathrm{mod}\ 4)$, а $4z - 1 \equiv -1 (\mathrm{mod}\ 4)$.
Ответ. Решений нет

Пример 30. Решите уравнение $3^m + 7 = 2^n$ в целых числах.

Решение. Если $m > 0$, то левая часть $3^m + 7 \equiv 1(\mathrm{mod}\,3)$, значит, если решение есть, то n четно, т.е. $n = 2k$. Тогда $3m = 2^{2k} - 7 = 4^k - 7$. Но $4k - 7 \equiv 1(\mathrm{mod}\,4)$, значит, если решение есть, то и m должно быть четным, т.е. $m = 2p$. Итак, в результате имеем $3^{2p} = 2^{2k} - 7$, или

$7 = 2^{2k} - 3^{2p} = (2^k - 3^p)(2^k + 3^p)$. Отсюда $2^k + 3^p = 7$, $2^k - 3^p = 1$, т.е.$m = 2,\ n = 4$. При $m = 0$ получаем второй ответ: $n = 3$.

Ответ. $m = 2,\ n = 4;\ \ m = 0,\ n = 3$.

Пример 31. Докажите, что уравнение $x^2 + y^2 + z^2 = 2xyz$ (1) неразрешимо в натуральных числах.

Решение. Применим так называемый метод «бесконечного спуска». Положим противное.

Пусть данное уравнение разрешимо в натуральных числах. Правая часть уравнения делится на 2, следовательно, и его левая часть делится на 2. Это возможно лишь тогда, когда либо $x,\ y,\ z$ – четные числа, либо одно из них четное, а два других нечетные. В последнем случае правая часть уравнения делится на 4, а левая – только на 2. Значит, остается положить, что числа $x,\ y,\ z$ четные, т.е. $x = 2x_1,\ y = 2y_1,\ z = 2z_1$, тогда уравнение (1) примет вид: $x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = 4x_1y_1z_1$. (2)

Применив к уравнению (2) те же рассуждения, что и к уравнению (1), запишем:

$$x_1 = 2x_2, \qquad y_1 = 2y_2, \qquad z_1 = 2z_2,$$
$$x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 = 8x_2y_2z_2.$$

Соотношения $x_k = 2x_{k+1}$ приводят к бесконечной последовательности натуральных чисел

$x > x_1 > x_2 > \ldots > x_k > x_{k+1} > \ldots$. Но эта последовательность должна быть конечной. Следовательно, наше предположение не является верным и уравнение (1) в натуральных числах неразрешимо.

1.11. Задачи для самостоятельного решения

96. Решите уравнение в целых числах, используя представление наибольшего общего делителя двух чисел в виде их линейной комбинации: а) $27x - 40y = 1$; б) $81x + 52y = 5$;
в) $42x + 34y = 5$; г) $253x - 449y = 3$.

97. Найдите все целочисленные решения уравнения
$3x^2 + 4xy - 7y^2 = 13$.

98. Решите в целых числах уравнение $2x^2 - 2xy + 9x + y = 2$.

99. Найдите натуральные x и y, для которых выполняется равенство $2^x - 15 = y^2$.

100. Найдите натуральные числа x и y, для которых выполняется равенство $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = y^2$

101. Найти все пары целых чисел (x, y), удовлетворяющих уравнению: $x^2 - 2xy + 2y^2 = 9$

102. Докажите, что уравнение $x^2 + 4x - 11 = 8y$ не имеет решений в целых числах.

103. Решите в целых числах систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 - y^2 - z^2 = 1, \\ y + z - x = 3. \end{cases}$$

104. Решите в целых числах уравнение $xy + 2x + 3y = 7$.

105. Решите в натуральных числах уравнение $x^2 + x + 1 = y^2$.

106. Решите в целых числах уравнение $4^x + 3^y = 5^z$.

107. Решите в натуральных числах уравнение $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$ при $x \le y \le z$.

108. Решите в натуральных числах уравнение $2xy = x^2 + 2y$.

109. Решите в целых числах уравнение $2^x + 1 = y^2$.

110. Докажите, что уравнение $y^2 = 5x^2 + 6$ не имеет решений в целых числах.

111. Решите в натуральных числах уравнение
$2xy + 4z = zx^2 + 4y^2z$.

112. Найдите все пары целых чисел x, y, при которых является верным равенство $x^3 - 3x^2 - xy - 8x - 2y + 27 = 0$

113. Найдите все целые положительные решения уравнения

$$3x^2 + 3xy + 2x - y = 565.$$

114. Может ли дискриминант квадратного уравнения с целыми коэффициентами равняться 23?

115. Решите в натуральных числах уравнение
$n! + 5n + 13 = k^2$, где $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$ – произведение всех натуральных чисел от 1 до n.
116. Решить в натуральных числах уравнение:
$xz + 4y = yx^2 + z^2y$.
117. Решите в целых числах уравнение $\frac{xy}{z} + \frac{xz}{y} + \frac{yz}{x} = 3$.
118. Решите уравнение $2x + 3y + 5z = 11$ в целых числах.
119. Найдите все пары целых чисел x и y, удовлетворяющие уравнению: $(x^2 + y^2)(x + y - 3) = 2xy$.
120. Докажите, что имеется бесконечно много простых чисел, сравнимых с 3 по модулю 4.
121. Решите уравнение в целых числах $x^2 - 7y^2 + 2 = 0$.
122. Доказать, что уравнение $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{xy} + \frac{1}{y^2} = 1$ не имеет целых положительных решений.
123. Найдите все упорядоченные тройки $(x; y; z)$ натуральных чисел, удовлетворяющих равенству $x + \frac{1}{y+\frac{1}{z}} = \frac{30}{13}$.
124. Решите в целых числах уравнение $9^x = 4y + 1$.
125. Решите в целых числах уравнение $2x^2 + 9y^2 - 8xy - 3y = 0$.
126. Для всех значений параметра $a \in (2,\ 4)$ найдите все целые числа x и y, удовлетворяющие равенству $x^2 + 5xy + 6y^2 = a$.
127. Найдите все пары целых чисел x и y, при которых является верным равенство $x^3 - xy - 7x + 2y + 23 = 0$.
128. Решите в целых числах уравнение $x^3 + xy^2 + 2y^3 = 0$.
129. Найти все простые числа p и q, для которых верно равенство $p^2 - 2q^2 = 1$.
130. Решите в целых числах уравнение $2xy + 3y^2 = 24$.
131. Найдите все пары (x, y) натуральных чисел, удовлетворяющие уравнению $x^2 + y^2 = x^3$.
132. Найдите все натуральные числа n и m такие, что
$1! + 2! + \ldots + n! = m^2$
133. Докажите, что не существует таких целых чисел n и m, что
$m^3 + 6m^2 + 5m = 27n^3 + 9n^2 + 9n + 1$.

1.12. Решения, указания, ответы

96. Ответ. а) $\begin{cases} x = 3 + 40t, \\ y = 2 + 27t; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x = -7 + 52t, \\ y = 11 + 81t; \end{cases}$ в) уравнение целых решений не имеет; г) $\begin{cases} x = 71 + 449t, \\ y = 40 + 253t. \end{cases}$

97. Решение. Разложим левую часть на множители:
$3x^2 + 4xy - 7y^2 = (x - y)(3x + 7y)$.
Имеем $(x - y)(3x + 7y) = 13$. Поскольку 13 можно представить в виде произведения двух целых чисел с учетом порядка четырьмя способами
$(13 = 1 \cdot 13 = 13 \cdot 1 = (-1) \cdot (-13) = (-13) \cdot (-1))$, то получаем четыре системы:
$\begin{cases} x - y = 1, \\ 3x + 7y = 13, \end{cases}$ $\begin{cases} x - y = 13, \\ 3x + 7y = 1, \end{cases}$ $\begin{cases} x - y = -1, \\ 3x + 7y = -13, \end{cases}$
$\begin{cases} x - y = -13, \\ 3x + 7y = -1. \end{cases}$
Целочисленные решения имеют лишь 1-я и 3-я системы.
Ответ. $(2;\ 1); (-2;\ -1)$

98. Решение. Выразим y через x: $y = \frac{2x^2+9x-2}{2x-1}$. Преобразуем полученную дробь

$$y = \frac{2x^2+9x-2}{2x-1} = \frac{2x^2-x+10x-5+3}{2x-1} = x + 5 + \frac{3}{2x-1}.$$

Поскольку y и x – целые, то $\frac{3}{2x-1}$ должно быть целым числом. Имеем четыре возможности: 1) $2x - 1 = 1$; 2) $2x - 1 = 3$; 3) $2x - 1 = -1$; 4) $2x - 1 = -3$.
Затем находим x и y. **Ответ**.$(1;\ 9);\ (2;\ 8);\ (0;\ 2);\ (-1; 3)$.

99. Решение. Рассмотрим два случая. **1)** $x = 2k + 1$ (x – нечетное число). Поскольку 2^2 при делении на 3 дает в остатке 1, то 2^{2k+1} при делении на 3 дает в остатке 2 $(2^{2k+1} = (2^2)^k \cdot 2 = 1 \cdot 2(3) = 2)$, 15 делится на 3. Следовательно, y^2 не делится на 3. Но квадрат числа, не делящегося на 3, дает при делении на 3 в остатке 1. Таким образом, равенство невозможно (левая и правая части дают при делении на разные остатки).
2) $x = 2k$. Тогда $2^{2k} - y^2 = 15$, откуда $(2^k - y)(2^k + y) = 15$. оба множителя слева целые и положительные (так как второй

множитель положителен), второй больше первого. Возможны два варианта: $2^k - y = 1, 2^k + y = 15$ и $2^k - y = 3, 2^k + y = 5$

Ответ. (4; 1); (6; 7).

100. Решение. Представим левую часть в виде $\left(x^2 + \frac{x}{2} + \frac{3}{8}\right)^2 + \frac{5}{8}x + \frac{55}{64}$. Умножая обе части на 64, получаем равенство

$$(8x^2 + 4x + 3)^2 + 40x + 55 = (8y)^2.$$

Таким образом, $8y > 8x^2 + 4x + 3$, $2y \geq 2x^2 + x + 1$. Умножим обе части исходного равенства на 4, а затем, воспользовавшись тем, что

$$4y^2 \geq (2x^2 + x + 1)^2 = 4x^4 + 4x^3 + 5x^2 + 2x + 1,$$

будем иметь $4x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 4x + 4 \geq 4x^4 + 4x^3 + 5x^2 + 2x + 1$, или $x^2 - 2x - 3 \leq 0$, откуда $x \leq 3$. Осталось проверить для x значения 1, 2, 3.

Ответ. $x = 3, y = 11$.

101. Решение. Преобразуем исходное уравнение к виду: $(x - y)^2 + y^2 = 9$. Следовательно, справедлива система неравенств:

$$\begin{cases} (x-y)^2 \leq 9, \\ y^2 \leq 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x-y| \leq 3, \\ |y| \leq 3 \end{cases}$$

Из неравенства $|y| \leq 3$ находим все возможные целые y: $y = -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$.

В данном случае, проще, не решая неравенства $|x - y| \leq 3$, сразу подставить эти значения в исходное уравнение и решить его относительно x. Получаем:

$$\begin{cases} x = -3, \\ y = -3, \end{cases} \quad \begin{cases} x = \pm 2 \pm \sqrt{5}, \\ y = \pm 2, \end{cases} \quad \begin{cases} x = \pm 1 \pm \sqrt{8}, \\ y = \pm 1, \end{cases} \quad \begin{cases} x = \pm 3, \\ y = 0. \end{cases}$$

Ответ. $(-3; -3)$; $(-3; 0)$; $(3; 0)$.

102. Решение. *1-й способ*. Преобразуем данное уравнение:

$$x^2 - 11 = 8y - 4x.$$

Правая часть $8y - 4x$ при любых целых x и y четна. Левая же часть уравнения, если оно имеет решения, может быть четной только при нечетном x^2 и, следовательно, нечетном x. Теперь уравнение запишем в следующем виде: $x^2 + 4x + 3 - 8y = 14$ или $(x + 1)(x + 3) - 8y = 14$.

Если x нечетно, то $x+1$ и $x+3$ – два последовательных четных числа, а потому их произведение кратно 8. Поскольку $8y$ тоже кратно 8, то левая часть уравнения кратна 8. Однако правая часть не делится на 8.

Следовательно, уравнение $(x+1)(x+3)-8y=14$, а вместе с ним и данное уравнение не имеют решений ни при каких целых x и y.

2-й способ. Преобразуем данное уравнение, выделив полный квадрат в правой части: $(x+2)^2-15=8y$

Пусть $x+2=z$. Перейдем теперь к сравнению по модулю 8: $z^2 \equiv 7 \pmod 8$, так как $15 \equiv 7 \pmod 8$.

Сравнение $z^2 \equiv 7 \pmod 8$ не имеет решений, так как не существует квадрата натурального числа, которое при делении на 8 давало бы в остатке 7. В самом деле, если $z=8k$, то $z^2 \equiv 0 \pmod 8$; если $z=8k\pm1$, то $z^2 \equiv 1 \pmod 8$; если $z=8k\pm2$, то $z^2 \equiv 4 \pmod 8$; если $z=8k\pm3$, то $z^2 \equiv 1 \pmod 8$, и, наконец, если $z=8k\pm4$, то $z^2 \equiv 0 \pmod 8$.

Ответ. Решений в целых числах нет.

103. Решение. Выразим из второго уравнения x через y и z и подставим в первое: $yz-3y-3z+4=0$.

Отсюда $y=\frac{3z-4}{z-3}=3+\frac{5}{z-3}$. Так как $y \in \mathbb{Z}$, то $\frac{5}{z-3} \in \mathbb{Z}$. А это возможно лишь при условии $z-3=\pm1$ и $z-3=\pm5$.

Таким образом, получаем: $z_1=4,\ z_2=2,\ z_3=8,\ z_4=-2$, затем находим соответствующие значения x и y. Тогда решение системы запишем в виде:

$$(9;8;4);\ (-3;-2;2);\ (9;4;8);\ (-3;2;-2).$$

Ответ. $(9;8;4)$; $(-3;-2;2)$; $(9;4;8)$; $(-3;2;-2)$.

104. Решение. Представим левую часть уравнения в виде $xy+2x+3y=(x+3)(y+2)-6$, после чего уравнение приобретает вид $(x+3)(y+2)=13$.

Если x и y – целые числа, то множители $x+3$ и $y+2$ также должны быть целыми.

Число 13 раскладывается в произведение целых чисел четырьмя различными способами: $13=1\cdot13=13\cdot1=$ $=(-1)\cdot(-13)=(-13)\cdot(-1)$. Поэтому все решения данного уравнения в целых числах получаются из систем:

$\begin{cases} x+3=1, \\ y+2=13, \end{cases}$ $\begin{cases} x+3=13, \\ y+2=1, \end{cases}$ $\begin{cases} x+3=-1, \\ y=2=-13, \end{cases}$ $\begin{cases} x+3=-13, \\ y+2=-1, \end{cases}$

решая которые, получаем ответ: $(-2,\ 11), (10,\ -1), (-4, -15)$, $(-16, -3)$.

Ответ. $(-2,\ 11), (10,\ -1), (-4, -15), (-16, -3)$.

105. Решение. Рассмотрим уравнение $x^2+x+1-y^2=0$ как квадратное относительно x. Тогда $x=\frac{-1\pm\sqrt{4y^2-3}}{2}$. Для того чтобы x было целым числом, необходимо, чтобы $4y^2-3$ было точным квадратом, а это верно только при $y=\pm1$

$(4y^2-3=z^2 \iff (2y-z)(2y+z)=3 \iff y=1,\ z=\pm1$

или $y=-1,\ z=\pm1$ **Ответ**. $(-1,\ 1)$ и $(0,\ 1)$.

106. Решение. Рассмотрим остатки, получающиеся при делении обеих частей уравнения на 4. Правая часть при натуральных значениях z дает остаток 1, а левая часть может давать остатки 1 при четных значениях y и 3 при нечетных значениях y. Таким образом, только четные значения y могут входить в решения данного уравнения. Пусть $y=2k$, где k – натуральное число.

Рассмотрим остатки от деления обеих частей уравнения на 3. Выражение 4^y дает при делении на 3 остаток 1, а 5^z при четных значениях z дает остаток 1, а при нечетных значениях z – остаток 2. Поэтому только четные значения z могут входить в решения. Пусть $z=2l$, где l – натуральное число.

Из исходного уравнения, перенося в правую часть 3^y и раскладывая по формуле разности квадратов, получаем

$4^x=(5^l-3^k)(5^l+3^k)$.

Каждый из полученных множителей должен являться неотрицательной степенью числа 2, поскольку в разложении их произведения на простые множители присутствуют только двойки. Имеем

$$\begin{cases} 5^l+3^k=2^s, \\ 5^l-3^k=2^t, \end{cases} \text{ причем } s>t.$$

Сложив эти уравнения, получаем $2\cdot5^l=2^t\cdot(2^{s-t}+1)$. Поскольку в разложение левой части на простые множители 2 входит в степени 1, а в разложение правой части – в степени t (так как $2^{s-t}+1$ – нечетное число, а значит, в его разложении на простые множители нет двоек), получаем $t=1$ и

$5^l = 2^{s-t} + 1$.

Имеем уравнение $5^l - 3^k = 2$ (2-е уравнение системы), из которого, перебрав остатки от деления обеих частей уравнения на 3, получаем, что l – нечетное число.

Перепишем уравнение $5^l = 2^{s-t} + 1$ в виде $2^{s-t} = 5^l - 1$, откуда при $l > 1$ получаем $2^{s-t} = (5-1)\left(5^{l-1} + 5^{l-2} + \ldots + 1\right)$. Вторая скобка является суммой l нечетных слагаемых, т.е. нечетным числом, большим 1, которое не может входить множителем в произведение, равное точной степени двойки. Значит, $l = 1$, а тогда и $k = 1$. Окончательным ответом является единственная тройка чисел $(2,\ 2,\ 2)$.

Ответ. $(2,\ 2,\ 2)$.

107. Решение. Наибольшая из дробей, т.е. $\frac{1}{x}$, не меньше $\frac{1}{3}$. Тогда $x = 2$ или $x = 3$. Подставляя в исходное уравнение, получаем два случая, разбиваем аналогично. **Ответ**. $(3;3;3), (2;3;6), (2;4;4)$.

108. Решение. $2xy = x^2 + 2y \Leftrightarrow y^2 - 2y = (x-y)^2 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (y-1)^2 - (x-y)^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad (2y - x - 1)(x-1) = 1$.
Следовательно, оба множителя равны единице и $x = 2,\ y = 2$.
Ответ. $(2;\ 2)$.

109. Решение. Если $x < 0$, то $0 < 2^x < 1$ и $y^2 \notin \mathbb{Z}$. При $x = 0$ также $y \notin \mathbb{Z}$. Пусть $x > 0$, тогда $2^x = (|y|-1)(|y|+1)$, следовательно, $|y| - 1 = 2^p$, $|y| + 1 = 2^q$ и $0 \le p < q$. Откуда $2^q - 2^p = 2 \quad \Leftrightarrow \quad 2^p(2^{q-p} - 1) = 2$.

Возможны варианты: а) $\begin{cases} 2^p = 2, \\ 2^{q-p} - 1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p = 1, \\ q - p = 1 \end{cases} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \begin{cases} p = 1, \\ q = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \pm 3, \\ x = 3. \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2^p = 2, \\ 2^{q-p} - 1 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \emptyset$.

Ответ. $(3;3); (3;-3)$.

110. Решение. Перепишем уравнение в виде

$$y^2 - x^2 = 4x^2 + 6 \quad \Leftrightarrow \quad (y-x)(y+x) = 4x^2 + 6.$$

Так как правая часть уравнения является четным числом, то и левая часть также должна быть четным числом. Если $(y + x)$ четно, то $(y - x)$ тоже четно и наоборот. Следовательно, левая часть уравнения делится на 4, но правая часть на 4 не делится.

Значит, уравнение не имеет решений. **Ответ**. Целых решений нет.

111. Решение. Вынесем z за скобки: $z(x^2+4y^2-4)=2xy$ Выражение в скобках не равно нулю, так как иначе $2xy=0$, что неверно при $x,y\in\mathbb{N}$. Следовательно, $z=\frac{2xy}{x^2+4y^2-4}$. Так как $z\in\mathbb{N}$, то $z\geq 1$, то есть $\frac{2xy}{x^2+4y^2-4}\geq 1 \quad\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\ x^2+4y^2-4-2xy\leq 0\ \Leftrightarrow\ (x-y)^2+3y^2\leq 4$.

Откуда видно, что y не может быть больше 1, а при $y=1$ получаем $(x-y)^2\leq 1$. Следовательно, $x=1$ либо $x=2$. **Ответ**. $(1;\ 1;\ 2),\ (2;\ 1;\ 1)$.

112. Ответ. $(-1;\ 31);\ (-3;\ 3);\ (21;\ 339);\ (-25;\ 751)$

113. Указание. Приведите уравнение к виду: $y=-x-1+\frac{55}{3x-1}$.

Ответ. $(2;\ 8)$.

114. Указание. Если $b^2-4ac=23$,то b – число нечетное $(b=2k+1)$. Имеем $4k^2+4k-4ac=22$. Левая часть делится на 4, правая нет.

Ответ. Не может.

115. Решение. Предположим, что $n\geq 5$. Тогда $n!$ делится на 2 и 5, а значит, десятичная запись в левой части оканчивается на 3 или на 8. Но несложный перебор по последней цифре показывает, что квадрат целого числа не может оканчиваться ни на 3, ни на 8. Наконец, перебирая n от 1 до n находим единственное решение. **Ответ.** $n=2; k=5$.

116. Решение. Преобразуем исходное уравнение:

$(x^2+z^2-4)y=xz$. Так как $xz\neq 0$ $(x,y,z\in\mathbb{N})$, то $x^2+z^2-4\neq 0$, и можно записать из $(x^2+z^2-4)y=xz$: $y=\frac{xz}{x^2+z^2-4}$, так как $y\in\mathbb{N}$, то x^2+z^2-4 является делителем xz, и должно быть $x^2+z^2-4\leq xz$, с другой стороны, в силу неравенства между средним арифметическим и средним геометрическим $\frac{(a+b)}{2}\geq\sqrt{ab}$:

$$x^2+z^2\geq 2xz\ \Rightarrow\ x^2+z^2-4\geq 2xz-4,$$

подставляя в $x^2+z^2-4\leq xz$, получим:

$$2xz-4\leq x^2+z^2-4\leq xz\ \Rightarrow 2xz-4\leq xz\ \Leftrightarrow\ xz\leq 4.$$

Осталось подставить натуральные x, z и y, удовлетворяющие $y = \frac{xz}{x^2+z^2-4}$ и $xz \le 4$. Это единственная тройка чисел : $x = 2, y = 2, z = 1$. **Ответ**.$(2; 2; 1)$.

117. Решение.1-й способ. Приводя к общему знаменателю, получим, что $xyz > 0$, поэтому из натурального решения можно получить целые решения, заменив значения двух переменных на противоположные. Преобразуя уравнение к виду

$$(xy - xz)^2 + (xz - yz)^2 + (yz - xy)^2 =$$

$= 2xyz\big((1-x) + (1-y) + (1-z)\big)$, получим (из неотрицательности обеих частей) единственное натуральное решение $(1, 1, 1)$.

2-й способ. По неравенству Коши

$$\frac{xy}{z} + \frac{xz}{y} + \frac{yz}{x} \ge 3\sqrt[3]{\frac{xy}{z} \cdot \frac{xz}{y} \cdot \frac{yz}{x}} = 3\sqrt[3]{xyz} \ge 3.$$

Равенство достигается лишь, если $\frac{xy}{z} = \frac{xz}{y} = \frac{yz}{x}$ и $xyz = 1$.

Ответ.$(1, 1, 1); (-1, -1, 1), (-1, 1, -1), (1, -1, -1)$.

118. Ответ. $x = 5p + 3q - 11$, $y = 11 - 5p - 2q$, $z = p$; p, q – любые целые числа.

119. Указание. Очевидно, что точка $x = 0$, $y = 0$ является решением. Если $x^2 + y^2 \neq 0$, то есть $(x, y) \neq (0, 0)$, то $x + y - 3 = \frac{2xy}{x^2+y^2}$. Отсюда следует, что $\frac{2xy}{x^2+y^2}$ – целое число. Заметим, что по неравенству для средних $\left|\frac{2xy}{x^2+y^2}\right| \le 1$. Поэтому либо $\frac{2xy}{x^2+y^2} = 0$, и тогда $x = 0 \Rightarrow y = 3$ или $y = 0 \Rightarrow x = 3$, либо $\left|\frac{2xy}{x^2+y^2}\right| = 1 \Leftrightarrow x = \pm y$, и тогда $x = y \Rightarrow 2x - 3 = 1$ $x = 2$ или $x = -y \Rightarrow 3 = -1 \Leftrightarrow \emptyset$.

Ответ.$(0, 0)$; $(3, 0)$; $(0, 3)$; $(2, 2)$.

120. Решение. Предположим, что $p_1, p_2, \ldots, p_n$ – это все простые числа, такие что $p \equiv 3 (\mathrm{mod}\, 4)$. Ясно, что $p_1 = 3$. Число $p = 4p_2p_3 \ldots p_n + 3$ не делится ни на 3, ни на одно из чисел $p_2, \ldots, p_n$. Если оно является простым, то мы пришли к противоречию с предположением, так как $p \equiv 3 (\mathrm{mod}\, 4)$. Если это число не является простым, то оно представляется в виде произведения степеней некоторых простых чисел $q_1, q_1, \ldots, q_k$.

Если $q_i \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 4)$ при всех i, то тогда и $p \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 4)$. Следовательно, среди чисел q_i хотя бы одно сравнимо с 3 по модулю 4. Опять пришли к противоречию, так как это число не может совпадать ни с одним из чисел $p_1, p_2, \dots, p_n$.

121. Решение. Перепишем уравнение в виде: $x^2 + 2 = 7y^2$. Заметим, что правая часть уравнения при любом целом y делится нацело на 7. Выясним, какие остатки при делении на 7 дает левая часть данного уравнения. Для этого разобьём множество всех целых x на 7 групп в зависимости от остатка при делении на 7: $x = 7p + q$, где $q = 0, 1, 2, \dots, 6$, и рассмотрим каждый из этих случаев в отдельности.

1) Если $x = 7p$, то $x^2 + 2 = (7p)^2 + 2 \vdots 7$ с остатком 2;
2) если $x = 7p + 1$, то $x^2 + 2 = (7p + 1)^2 + 2 \vdots 7$ с остатком 3;
3) если $x = 7p + 2$, то $x^2 + 2 = (7p + 2)^2 + 2 \vdots 7$ с остатком 6;
4) если $x = 7p + 3$, то $x^2 + 2 = (7p + 3)^2 + 2 \vdots 7$ с остатком 4;
5) если $x = 7p + 4$, то $x^2 + 2 = (7p + 4)^2 + 2 \vdots 7$ с остатком 4;
6) если $x = 7p + 5$, то $x^2 + 2 = (7p + 5)^2 + 2 \vdots 7$ с остатком 6;
7) если $x = 7p + 6$, то $x^2 + 2 = (7p + 6)^2 + 2 \vdots 7$ с остатком 3.

Итак, правая часть уравнения делится на 7 нацело (т.е. с остатком 0), а левая часть при этом – с остатками $2, 3, 34, 6$. Однако равные числа при делении на одно и то же целое число 7 должны давать одинаковые остатки. Полученное противоречие говорит о том, что данное уравнение не имеет решений в целых числах.

Ответ. Решений в целых числах нет.

122. Решение. Пусть, для определенности, $1 \le x \le y$. Тогда

$$1 = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{xy} + \frac{1}{y^2} \le \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2} = \frac{3}{x^2},$$

откуда находим оценку $x^2 \le 3$, т.е. $x = 1 \Rightarrow y = -1$ – не удовлетворяет условию задачи. Аналогично рассматривается случай $1 \le y \le x$.

123. Решение. Приведем уравнение к виду $13x = 30 - \frac{13}{y+(1/z)}$.
Так как $13x = 30 - \frac{13}{y+(1/z)} < 30$, то получаем: $x \in \{1; 2\}$.
1)Если $x = 1$, то, подставляя в уравнение, находим $y + (1/z) = 13/17$, что невозможно, так левая часть в этом равенстве больше 1, а правая – меньше 1.
2) Если $x = 2$. то получаем $4/z = 13 - 4y$. Справа стоит целое число, следовательно,$4/z \in \mathbb{N}$, откуда $z \in \{1; 2; 4\}$. При $z = 1$ имеем $y = 9/4 \notin \mathbb{N}$; при $z = 2$ имеем $y = 11/4 \notin \mathbb{N}$; при $z = 4$ находим $y = 3$. **Ответ**.$(2; 3; 4)$.
124. Решение. При целом $x < 0$ в левой части равенства находится дробное число, а в правой – целое, что невозможно. Следовательно, в этом случае решений нет.
2)Перепишем уравнение в виде $y = (9^x - 1)/4$. При целом $x \geq 0$ выражение $9^x - 1$ можно разложить на множители:
$9^x - 1 = (9 - 1)(9^{x-1} + 9^{x-2} + \ldots + 1)$.
Отсюда следует, что это выражение делится нацело на 8, а значит $(9^x - 1)/4$ – целое число. **Ответ**.$(p;\ (9^x - 1)/4)$, где $p = 0, 1, ..$
125. Решение. Рассмотрим данное уравнение как квадратное относительно неизвестной x. Приведя его к стандартному виду, получаем $2x^2 - 8yx + 9y^2 - 3y = 0$.
Необходимым и достаточным условием существования решений у этого уравнения является условие неотрицательности его дискриминанта: $D = -8y(y - 3) \geq 0$ откуда находим ограничения на y: $y \in [0, 3]$. С учетом целочисленности получаем, что $y \in \{0; 1; 2; 3\}$. Рассмотрим каждый из случаев в отдельности.
1) Если $y = 0$, то $x_{1,2} = \frac{8y \pm \sqrt{-8y(y-3)}}{4} = 0$; 2) если $y = 1$, то $x_3 = 1, x_4 = 3$; 3) если $y = 2$, то $x_5 = 3, x_6 = 5$; 4) если $y = 3$, то $x_{7,8} = 6$. **Ответ**.$(0;\ 0)$; $(1; 1)$; $(3; 1)$; $(3; 2)$; $(5; 2)$; $(6; 2)$.
126. Решение. Так как слева от знака равенства находится целое число, то a должно быть целым, следовательно, $a = 3$. Итак, имеем: $x^2 + 5xy + 6y^2 = 3$
Разложим левую часть уравнения на множители:
$(x^2 + 2xy) + (3xy + 6y^2) = 3 \iff x(x + 2y) + 3y(x + 2y) = 3 \iff$

$$\Leftrightarrow \quad (x+2y)(x+3y)=3.$$

Так как при целых x, y оба сомножителя в левой части целочисленные, то число 3 в правой части можно разложить на произведение двух целых чисел следующими способами:

$$\begin{cases} x+2y=-1 \\ x+3y=-3 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x+2y=1 \\ x+3y=3 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x+2y=-3 \\ x+3y=-1 \end{cases} \quad \text{или}$$

$$\begin{cases} x+2y=3 \\ x+3y=1 \end{cases}$$

Ответ. При $a=3$ – четыре решения

$(3;\ -2);\ (-3;2);\ (-7;2);\ (7;-2)$,

при $a\in(2,3)\cup(3,4)$ уравнение не имеет решений.

127. Решение. Поскольку $x=2$, очевидно, не является решением уравнения, то приведём уравнение (оно линейное относительно y) к эквивалентному виду:

$$y=\frac{x^3-7x+23}{x-2} \quad \Leftrightarrow \quad y=x^2+2x-3+\frac{17}{x-2}.$$

В силу целочисленности x,y, дробь $17/x-2$ должна быть целым числом, поэтому знаменатель должен принимать значения целочисленных делителей числа 17, т.е. $x-2\in\{\pm1;\ \pm17\}$. Рассмотрим каждый из этих случаев.

Если $x-2=1$, т.е. $x=3$, то $y=x^2+2x-3+17/x-2=29$; если $x-2=-1$, т.е. $x=1$, то $y=17$; если $x-2=17$, т.е. $x=19$, то $y=397$; если $x-2=-17$, т.е $x=-15$, то $y=191$.

Ответ.$(3;29);\ (1;\ -17);\ (19;\ 397);\ (-15;191)$.

128. Решение. Заметим, что если $y=0$, то $x=0$, и, значит, пара $(0;0)$ удовлетворяет уравнению. Пусть $y\neq0$, тогда поделим обе части уравнения на y^3: $(x/y)^3+x/y+2=0$.

Обозначим $t=x/y$, тогда имеем кубическое уравнение $t^3+t+2=0$. Подбором находим корень $t=-1$. Делением многочлена t^3+t+2 на $t+1$ получаем: $(t+1)(t^2-t+2)=0$ Убеждаемся в том, что данное кубическое уравнение имеет единственный корень $t=-1$, что соответствует $y=-x$. Положим $x=p$, где p – произвольное целое число, не равное 0. Тогда $y=-p$, и имеем бесконечно много решений в виде пар чисел $(p;-p)$, $p\in\mathbb{Z}$, $p\neq0$. Объединяя все полученные решения, приходим к ответу. **Ответ**. $(p;\ -p)$, где $p\in\mathbb{Z}$.

129. Решение. Перепишем уравнение в виде $q^2 = \frac{(p-1)(p+1)}{2}$. Заметим, что p – нечетное число. Отсюда q – четное. Значит, $q = 2$ (2 – единственное четное простое число) и $p = 3$.
Ответ. $q = 2,\ p = 3$.

130. Решение. Преобразуем уравнение к виду $2xy = 3(8 - y^2)$. Левая часть – число четное, откуда следует, что y также четно. Пусть $y = 2z$. Тогда $xz = 3(2 - z^2)$ или $x = \frac{6}{z} - 3z$. Чтобы x было целым числом, необходимо, чтобы z было делителем 6. Значит, z – одно из чисел $\pm1,\ \pm2,\ \pm3$ или ±6.
Ответ. $(3; 2),\ (-3; -2),\ (-3; 4),\ (3; -4),\ (-7; 6),\ (7; -6),\ (-17; 12),\ (17; -12)$.

131. Решение. Из уравнения $y^2 = x^2(x - 1)$ следует, что x^2 является делителем y^2, значит, $y = kx$ $(k \in \mathbb{N})$ и $k^2x^2 = x^2(x - 1)$. Но $x \neq 0$, поэтому $x - 1 = k^2$ и $x = k^2 + 1$. Следовательно, решениями уравнения являются пары $(x, y) = (k^2 + 1,\ (k^2 + 1)k), k \in \mathbb{N}$.
Ответ. $(x, y) = (k^2 + 1,\ (k^2 + 1)k), k \in \mathbb{N}$.

132. Решение. Если $n = 1, 2, 3, 4$, то левая часть уравнения равна $1, 3, 9$ и 33 соответственно (откуда и следует ответ). Если $n \geq 5$, то число слева заканчивается на 3 и поэтому не может быть полным квадратом. **Ответ**. $n = 1, m = 1$ и $n = 3, m = 3$.

133. Решение. В равенстве $m(m + 1)(m + 2) + 3m(m + 1) = = 3(9n^3 + 3n^2 + 3n) + 1$ левая часть делится на 3, а правая – нет.

§2. Необычные примеры. Контрпримеры

В данном разделе предлагаются задачи на построение интересных примеров и конструкций.

Иллюстративный пример подтверждает истинность утверждения, помогает уяснить его смысл.

В некоторых задачах наибольшую трудность решения представляет не доказательство и вычисление, а построение необычного примера, обладающего определенными свойствами.

Существует множество неверных утверждений, кажущихся на первый взгляд верными. Для опровержения такого рода высказываний необходимо построить соответствующий пример, который называют контрпримером.

Основная цель большинства разбираемых примеров состоит в том, чтобы обратить внимание учащихся на ряд «опасных» вопросов и моментов, при встрече с которыми легко можно дать неправильные ответы.

2.1. Задачи для самостоятельного решения

1. Можно ли в листе бумаги, вырванном из школьной тетради, прорезать такую дыру, в которую пролезет взрослый человек?

2. Один человек каждый месяц записывал свой доход и расход. Может ли быть так, что за любые пять идущих подряд месяцев его общий расход превышал доход, а в целом за год его доход превысил расход?

3. Поезд двигался в одном направлении 5,5 ч. Известно, что за любой отрезок времени длительностью в один час он проезжал ровно 100 км.

а) Верно ли, что поезд ехал равномерно?

б) Верно ли, что средняя скорость поезда равна 100 км/ч?

4. Можно ли число 203 представить в виде суммы нескольких натуральных чисел так, чтобы и произведение всех этих чисел тоже было равно 203?

5. Верно ли следующее утверждение: из любых шести натуральных чисел можно выбрать либо три попарно взаимно простых числа, либо три числа, имеющих общий делитель, больший единицы?

6. Верны ли следующие утверждения:

а) из любых пяти различных чисел, выписанных в ряд, можно выбрать какие-нибудь три, стоящие в этом ряду в порядке убывания или в порядке возрастания;

б) из любых девяти различных чисел, выписанных в ряд, можно выбрать какие-нибудь четыре, стоящих в этом ряду в порядке убывания или в порядке возрастания?

7. Пусть $f(x)$ – функция, непрерывная в каждой точке отрезка $[0;1]$ и такая, что $f(0)=f(1)$. Верно ли, что график этой функции имеет хорду, параллельную оси абсцисс длины $1/5$? (Хорда графика – отрезок с концами на графике.)

8. Можно ли число 123 представить в виде произведения нескольких натуральных чисел так, чтобы сумма квадратов этих чисел тоже равнялась 123?

9. Подберите четыре тройки целых неотрицательных чисел так, чтобы каждое целое число от 1 до 81 можно было представить в виде суммы четырех чисел – по одному из каждой тройки.

10. Могут ли числа 7, 8, 9 быть членами (не обязательно соседними) одной геометрической прогрессии?

11. Существует ли такой многочлен $P(x,y)$, множество значений которого – множество всех положительных чисел?

12. Существует ли многочлен $P(x)$, такой, что $P(1)=1, P(2)=2$ и $P(n)$ иррационально для любого целого n, отличного от 1 и 2?

13. Разбейте множество натуральных чисел на два подмножества так, чтобы ни одно из них не содержало бесконечную арифметическую прогрессию.

14. Может ли так быть, что длины всех сторон одного треугольника меньше 1 см, длины всех сторон другого треугольника больше 100 м, а площадь первого треугольника больше площади второго?

15. Может ли так быть, что:

а) длины всех трех высот треугольника меньше 1 см, а его площадь больше 100 см^2;

б) длины всех трех высот треугольника больше 2 см, а его площадь меньше 2 см^2?

16. Верно ли следующее утверждение: для любой точки, лежащей внутри выпуклого четырехугольника, сумма расстояний от нее до вершин четырехугольника меньше его периметра?

17. Можно ли в деревянном кубе проделать такую дыру, через которую можно протащить такой же куб?

18. Существует ли многогранник (не обязательно выпуклый), у которого столько же ребер, вершин и граней, сколько их у куба, но у которого нет четырехугольных граней?

19. Можно ли расположить на плоскости шесть точек и соединить их непересекающимися отрезками так, чтобы каждая точка была соединена ровно: а) с тремя точками; б) с четырьмя другими точками?

20. Существует ли замкнутая ломаная, которая пересекает каждое свое звено ровно один раз и состоит из: а) 6 звеньев; б) 7 звеньев?

21. Про некоторую компанию известно, что в ней каждые два не знакомых друг с другом человека имеют ровно двух общих знакомых, а каждые два знакомых не имеют общих знакомых. Может ли такая компания насчитывать более четырех человек?

22. Три друга сыграли несколько партий в шахматы, причем каждые двое сыграли одинаковое количество партий друг с другом. Потом они стали решать, кто из них оказался победителем. Первый сказал: «У меня больше выигрышей, чем у каждого из вас». Второй сказал: « У меня меньше проигрышей, чем у каждого из вас». Третий промолчал, но когда подсчитали очки, то оказалось, что больше всего очков набрал именно третий. Могло ли так быть? (Очки подсчитывались так: выигрыш – 1 очко, ничья – $1/2$ очка, проигрыш – 0 очков.)

23. Верны ли следующие утверждения:

а) если в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$ и $\angle A = \angle A_1$, то треугольники равны;

б) если три угла и две стороны одного треугольника равны трем углам и двум сторонам другого треугольника, то такие треугольники равны;

в) если основания и боковые стороны одной трапеции соответственно равны основаниям и боковым сторонам другой трапеции, то такие трапеции равны?

24. Может ли так быть:

а) длины всех трех биссектрис треугольника меньше 1 см, а его площадь больше 1 см^2;

б) длины всех трех биссектрис треугольника больше 100 см, а его площадь меньше 1 см^2?

25. Может ли какой-нибудь треугольник поместиться внутри круга, радиус которого меньше радиуса описанного вокруг этого треугольника круга?

26. Четырехугольник периметра P_1 расположен на плоскости внутри четырехугольника периметра P_2. Может ли быть: а) $P_1 > P_2$; б) $P_1 > 2P_2$?

27. Можно ли расположить на плоскости: а) 12; б)13 точек и соединить их непересекающимися отрезками так, чтобы каждая точка была соединена с пятью другими?

28. Одна треугольная пирамида расположена внутри другой треугольной пирамиды.

а) Может ли сумма длин всех ребер внутренней пирамиды быть больше суммы длин ребер внешней?

б) Может ли полная поверхность внутренней пирамиды быть больше полной поверхности внешней?

29. Список упорядоченных в порядке возрастания длин сторон и диагоналей для одного выпуклого четырехугольника совпадает с таким же списком для другого. Следует ли из этого, что четырехугольники равны?

30. На бесконечном листе клетчатой бумаги (размер клетки 1×1) укладывается кости домино размером 1×2 так, что они накрывают все клетки. Можно ли при этом добиться того, чтобы любая прямая, идущая по линиям сетки, разрезала лишь конечное число костей?

31. На плоскости расположено несколько непересекающихся отрезков. Всегда ли можно соединить концы некоторых из них отрезками так, чтобы получилась замкнутая не самопересекающаяся ломаная?

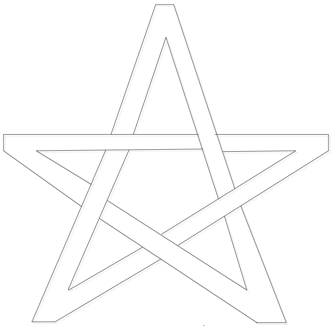


*рис.*1

32. Обязательно ли треугольник равнобедренный, если центр его вписанной окружности одинаково удален от середин двух сторон?

33. Сложите 6 спичек так, чтобы образовалось 4 правильных треугольника со стороной, равной длине спички.

34. Предложите практический способ непосредственного измерения диагонали кирпича (без каких-либо вычислений).

35. Можно ли изготовить звезду, изображенную на рис. 1?

36. Решая задачу, ученик изобразил тетраэдр, в котором проведено сечение (рис.2). Правилен ли его чертеж?

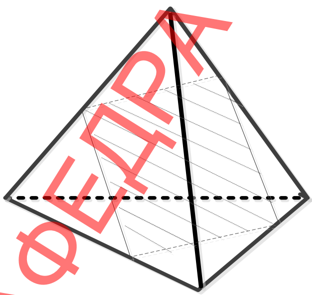
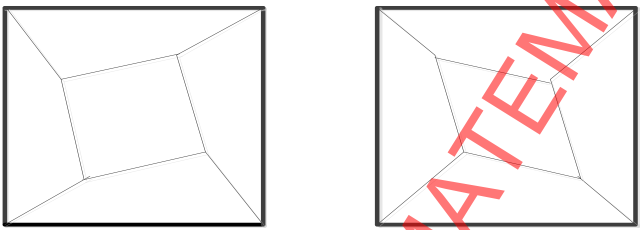


*рис.*2

37. На рис.3 изображены проекции двух многогранников, точнее говоря, их вид сверху. (Никаких невидимых ребер нет.) Возможны ли такие многогранники?

38. Какую форму должна иметь пробка, чтобы ею можно было заткнуть отверстия трех видов: треугольное, квадратное и круглое?

39. Можно ли в плоскости прорезать тонкое отверстие, не разбивающее ее на части, сквозь которое можно продеть каркас: а) куба; б) тетраэдра? (Ребра каркаса считаются сколь угодно тонкими.)



а) *б*)

рис .3

40. Вырежьте из прямоугольного листа бумаги фигуру, изображенную на рис. 4. (Клеем пользоваться нельзя.)

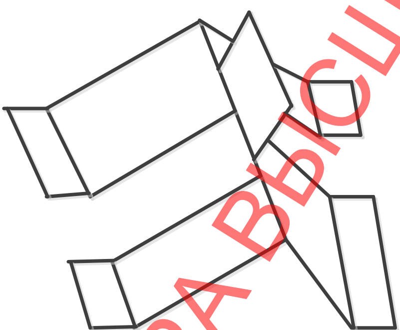


рис.4

41. а) Вершины M и N куба с ребром a симметричны относительно центра куба. Найдите длину кратчайшего пути, идущего из M в N по поверхности куба.

б) Коробка имеет форму прямоугольного параллелепипеда размером $30\times12\times12$. Точка A находится на грани 12×12, причем она удалена на расстояние 1 от одной стороны этой грани и равноудалена от двух других параллельных сторон. Какова длина кратчайшего пути по поверхности коробки из точки A в точку, симметричную ей относительно центра параллелепипеда?

42. Можно ли единичный кубик завернуть в платок размером 3×3?

43. а) Существует ли четырехугольная пирамида, у которой две несмежные грани перпендикулярны плоскости основания?

б) Существует ли шестиугольная пирамида, у которой три (смежные или нет) боковые грани перпендикулярны плоскости основания?

44. Вершина E тетраэдра $ABCE$ расположена внутри тетраэдра $ABCD$. Обязательно ли сумма длин ребер внешнего тетраэдра больше суммы длин ребер внутреннего?

45. Существует ли тетраэдр, все грани которого – тупоугольные треугольники?

46. Существует ли такой тетраэдр, что основания всех его высот лежат вне соответствующих граней?

47. В пирамиде $SABC$ ребро SC перпендикулярно основанию. Могут ли углы ASB и ACB быть равны?

48. Любой ли трехгранный угол можно так пересечь плоскостью, что в сечении получится правильный треугольник?

49. Обязательно ли является кубом многогранник, все грани которого – равные между собой квадраты?

50. Все ребра многогранника равны и касаются одной сферы. Обязательно ли его вершины принадлежат одной сфере?

51. Может ли конечное множество точек в пространстве, не лежащих в одной плоскости, обладать следующим свойством: для любых двух точек A и B из этого множества найдутся еще две такие точки C и D из него, что $AB\|CD$ и эти прямые не совпадают?

52. Дан выпуклый четырехгранный угол. Постройте такое его сечение плоскостью, чтобы в сечении получился параллелограмм.

53. Докажите, что любую треугольную призму с достаточно большой высотой можно пересечь плоскостью так, чтобы в сечении получился правильный треугольник.

2.2. Решения, указания, ответы

1. Ответ: можно. **Решение**. Примерный способ показан на рис. 5. Количество разрезов можно делать больше или меньше, в зависимости от «солидности» того, кто должен пролезать.

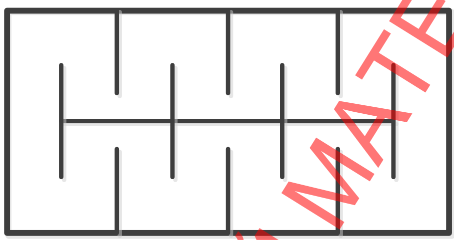


рис.5

2. Ответ: может. **Решение.** Приведем пример: $2; 2; 2; 2; -9; 2; 2; 2; 2; -9; 2; 2$. Здесь выписаны подряд (с учетом знака) разности между доходами и расходами человека (сальдо) за каждый месяц года. Мы видим, что сумма любых пяти последовательных чисел выписанной цепочки отрицательна (равна -1), а в целом за год сумма всех чисел положительна (равна 2).

3. Ответ: поезд мог ехать неравномерно, и его средняя скорость не обязательно равна 100 км/ч. **Решение**. а)Разобьем все время движения поезда на 11 получасовых интервалов. Пусть каждый нечетный по счету получас поезд движется точно так же, как первый получас, и проходит за каждый такой получас k км $7\cdot 11\left(0\le k\le 100\right)$, а за каждый четный получас пусть он движется точно так же, как второй по счету получас и проходит за каждый четный получас $\left(100-k\right)$ км. Тогда, как бы не двигался поезд первые два получаса – равномерно или нет, - за каждый час движения поезд пройдет ровно 100 км. б) Найдем среднюю скорость движения поезда. Расстояние, пройденное поездом за все нечетные получасовые интервалы времени, равно $6k$, а расстояние, пройденное им за все четные интервалы, равно $5(100-k)$. Таким образом, за все 5,5 часов движения поезд прошел $6k+5(100-k)=500+k$. Поэтому его средняя скорость равна $(500+k)/5,5$ (км/ч). При $k \neq 50$ эта скорость не равна 100 км/ч.

4. Ответ: можно. **Решение**. Действительно:

$$203=7+29+\underbrace{1+1+1+\ldots+1}_{167\,\text{åäèíèö}}=7\cdot 29\cdot\underbrace{1\cdot 1\cdot\ldots\cdot 1}_{167\,\text{åäèíèö}}.$$

5. Ответ: неверно. **Решение**. Приведем контрпример: $6,10,15,77,91,143$. Из этих шести чисел , никакие три не имеют общего простого множителя, но два из каждых входят в первую или во вторую тройку и потому не взаимно просты.

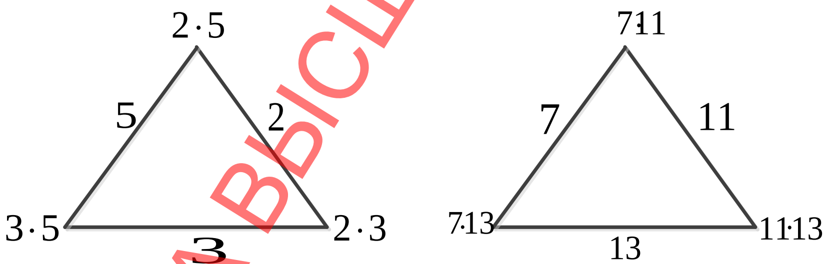


рис.6

Это хорошо видно на схеме. В каждой вершине треугольника поставлено одно из чисел, а на каждой стороне – общий множитель чисел, стоящих в ее концах.

6. Ответ: а) верно. **Решение**. Пусть a и b наибольшие и наименьшее из выписанных чисел. Если между ними есть какое-то число, то утверждение верно. Если они стоят рядом, то либо справа, либо слева от них есть еще два числа. Они и образуют нужную тройку чисел либо с числом a, либо с числом b.

б) неверно. Приведем контрпример – девять чисел: $3,2,1,6,5,4,9,8,7$. Докажем, что никакие четыре цифры в этой последовательности не идут ни в порядке возрастания, ни в порядке убывания. Для этого разобьем члены последовательности на три тройки: $321,654,987$.

Если какие-то две цифры из данных девяти стоят в убывающем порядке (та, которая меньше, стоит дальше от начала последовательности), то они обязательно из одной тройки. Значит, нельзя выбрать больше трех цифр, стоящих в убывающем порядке, поскольку все цифры должны находиться в одной тройке. Если же какие-то две цифры из этих девяти стоят в возрастающем порядке, то они обязательно из разных троек. Так как троек всего три, то нельзя выбрать более трех цифр, стоящих в возрастающем порядке.

7. Ответ: верно. **Решение**. Рассмотрим функцию $y=F(x)=f\left(x+\frac{1}{5}\right)-f(x)$, определенную и непрерывную на отрезке $[0;4/5]$. Нам нужно доказать, что на этом отрезке найдется такая точка x_0, что $F(x_0)=0$. По определению функции $y=F(x)$, имеем:

$$F(0)=f\left(\frac{1}{5}\right)-f(0) \qquad (1)$$

$$F\left(\frac{1}{5}\right)=f\left(\frac{2}{5}\right)-f\left(\frac{1}{5}\right) \qquad (2)$$

$$F\left(\frac{2}{5}\right)=f\left(\frac{3}{5}\right)-f\left(\frac{2}{5}\right) \qquad (3)$$

$$F\left(\frac{3}{5}\right)=f\left(\frac{4}{5}\right)-f\left(\frac{3}{5}\right) \qquad (4)$$

$$F\left(\frac{4}{5}\right)=f(1)-f\left(\frac{4}{5}\right) \qquad (5)$$

Поскольку $f(0)=f(1)$, почленно сложив равенства (1) - (5), мы получим $F(0)+F\left(\frac{1}{5}\right)+F\left(\frac{2}{5}\right)+F\left(\frac{3}{5}\right)+F\left(\frac{4}{5}\right)=0 \quad (*)$.

Равенство $(*)$ возможно только в двух случаях: либо все пять слагаемых в его левой части равны нулю – тогда задача решена, либо среди этих слагаемых есть числа разных знаков. Пусть $F(x_1)$ и $F(x_2)$ – числа разных знаков, где $0\le x_1<x_2\le\frac{4}{5}$.

Тогда, в силу непрерывности функции $F(x)$, найдется такое число x_0 $(x_1<x_0<x_2)$, что $F(x_0)=0$, что и требовалось.

8. Указание. См. задачу №4.

9. Указание. Удобно каждое из чисел от 1 до 81 представить в виде суммы степеней тройки, т.е. записать в троичной системе счисления.

10. Указание. Если $7/8=q^k$, $9/8=q^n$ для некоторых целых k и n, то $7^n\cdot 9^k=8^{n+k}$.

11. Указание. Найдите множество значений многочлена $(1-xy)^2+x^2$.

12. Ответ: существует. **Решение**. Искомым является, например, многочлен $P(x)=\sqrt{2}(x-1)(x-2)+x$, так как сумма иррационального числа $\sqrt{2}(n-1)(n-2)$ $(n\ne 1,2)$ и целого числа n иррациональна.

13. Решение. Разобьем ряд натуральных чисел на такие куски:

$$\{1\},\{2,3\},\{4,5,6\},\{7,8,9,10\},\{11,12,13,14,15\},\ldots$$

и будем по очереди относить эти куски то к одному множеству, то к другому. Количество чисел в n – м куске равно n, поэтому если разность бесконечной арифметической прогрессии равна d, то начиная с d – го куска ни один кусок «не втиснется» между двумя соседними членами прогрессии.

14. Ответ: может. **Решение**. Приведем пример. В качестве первого возьмем правильный треугольник с длиной стороны $1/2$ см, а в качестве второго – равнобедренный треугольник с основанием 200 м и высотой 10^{-7} м. Его боковая сторона больше половины основания, т.е. тоже больше 100 м, а площадь равна 10^{-5} м^2. и меньше площади первого треугольника, равна $\sqrt{3}/16$ см^2.

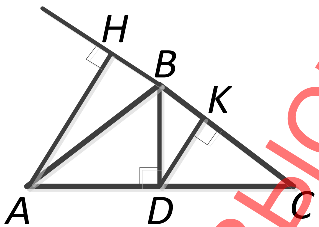


рис.7

15. а) Ответ: может. **Решение**. Приведем пример. Рассмотрим равнобедренный треугольник (рис.7) с основанием 800 см и высотой 0,3 см. Его площадь равна $\dfrac{800\cdot 0,3}{2}$ и тем самым больше 100 см^2. Покажем, что этот треугольник удовлетворяет условию. Действительно, его высота AH, опущенная на боковую сторону BC, равна удвоенной длине перпендикуляра DK, опущенного из середины основания D на боковую сторону BC, а этот перпендикуляр, в свою очередь, меньше наклонной BD. Отсюда вытекает, что высота AH меньше чем 0,6 см и,

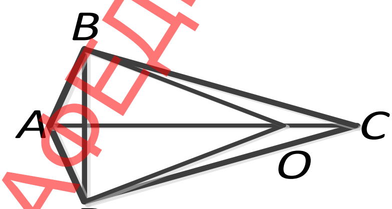


рис.8

начит, все высоты треугольника ABC меньше 1 см

б) Ответ: не может. **Решение**. Поскольку высоты треугольника больше 2 см, то и его стороны больше 2 см, а тогда его площадь больше чем $\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2=2$ (см^2).

16. Ответ: неверно. **Решение.** Рассмотрим контрпример. Возьмем три вершины A, B и D четырехугольника $ABCD$ (рис.8) очень близко друг к другу, а четвертую вершину C и точку O внутри четырехугольника – близко друг к другу и далеко от A, B и D.

17. Ответ: можно. **Решение**. Рассмотрим куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром a (рис. 9 а) и пространственный шестиугольник $AA_1B_1C_1CDA$ (его вершины не лежат в одной плоскости). Оказывается, что сквозь этот шестиугольник (а значит, и сквозь куб) можно свободно, не задевая его сторон, протащить куб с ребром a.

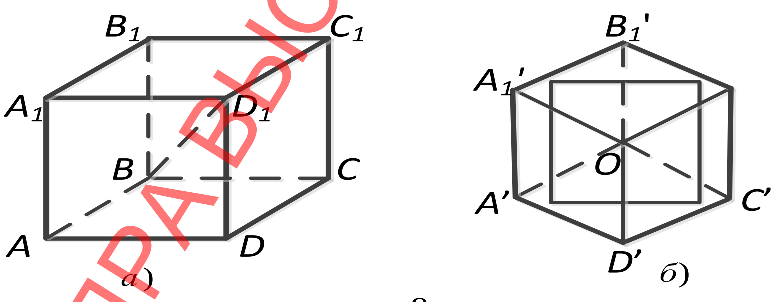
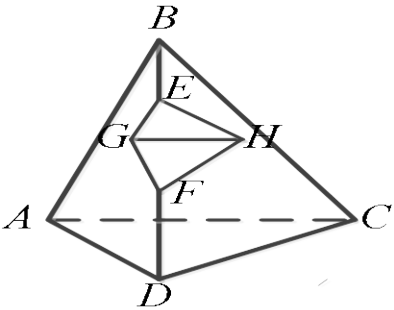


*рис.*9

Чтобы убедиться в этом, изобразим на рис. 9.б) проекцию куба на плоскость, перпендикулярную его диагонали BD_1. В силу симметрии куба эта проекция – правильный шестиугольник $A'A_1'B_1'C_1'C'D'$, где A' – проекция точки A, A_1' – проекция точки A_1 и т.д. Таким образом, контур шестиугольника $A'A_1'B_1'C_1'C'D'$ – проекция пространственного шестиугольника $AA_1B_1C_1CD$, а в центр O правильного шестиугольника проектируются оба конца диагонали куба BD_1.



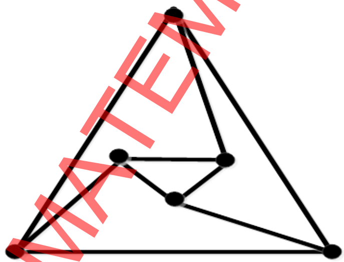


рис.11

18. Ответ: существует. **Решение**. На рисунке 10 приведен пример такого многогранника. Он получен следующим образом: на ребре BD тетраэдра $ABCD$ сделана «зарубка» из двух треугольных граней – GEH и GFH. У него 8 вершин, 6 граней, 12 ребер.

19. а)**Ответ:** можно. **Указание**. Пример приведен на рис. 11.

б) **Ответ:** можно. **Указание**. Пример показан на рис. 12

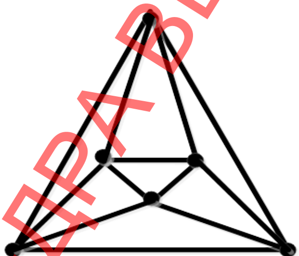


рис.12

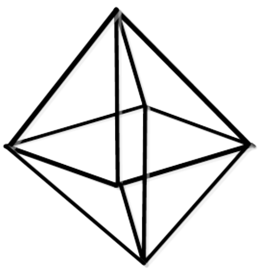


рис.13

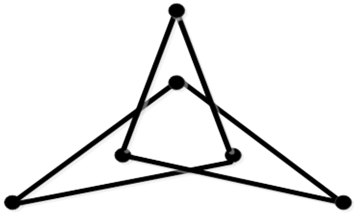


*рис.*14

Можно считать, что здесь изображен проволочный октаэдр (см. рис.13), сфотографированный из точки, лежащей вблизи центра одной из его граней.

20. а) **Ответ:** существует. **Указание**. Пример показан на рис.14.

б) **Ответ:** не существует. **Решение**. Предположим, что удалось построить такую ломаную. Рассмотрим какую-нибудь точку ее самопересечения. В ней пересекаются два звена, причем больше ни с какими другими звеньями они не пересекаются. Поэтому все звенья ломаной можно разбить на пары, соответствующие точкам ее самопересечения. Значит, звеньев – четное число и их не может быть семь.

21. Ответ: может. **Решение**. Поставим в соответствие каждому человеку точку, причем разным людям – разные точки. Если два

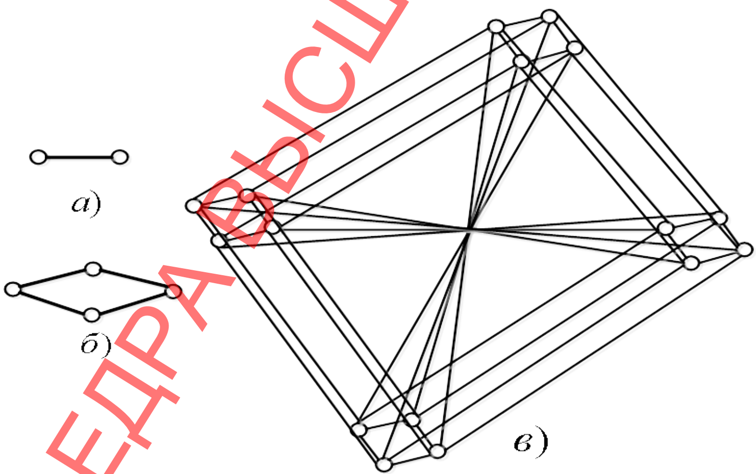


*рис.*15

человека знакомы между собой, то соединим соответствующие им точки отрезком. Тогда задача сведется к такой: существует ли схема, у которой нет треугольников, а каждые две точки либо соединены отрезком, либо являются противоположными вершинами ровно одного четырехугольника?

На рис.15а,б приведены два простейших примера таких схем. Нам требуется привести пример схемы, состоящей более чем из четырех точек.

На рис. 15,в приведен пример схемы из 16 точек и 40 отрезков, удовлетворяющий условию. Полученная схема удовлетворяет условию задачи. В этом можно убедиться перебором, который упрощается из-за симметрии схемы.

22. Ответ: могло. **Решение**. На рис.16 схематически показаны результаты всех партий турнира шахматистов, удовлетворяющего условию задачи. В нем каждая пара шахматистов сыграла по 7 партий. При этом:

- первый выиграл у второго две партии;
- второй выиграл у первого две партии;
- первый выиграл у третьего три партии;
- третий выиграл у первого четыре партии;
- остальные партии турнира окончились вничью.

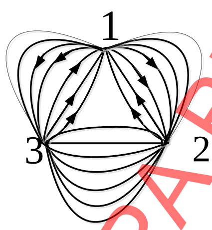


*рис.*16

В этом турнире первый шахматист набрал 6,5 очков, второй – 7 очков, третий – 7,5 очков; при этом первый выиграл больше всех – 5 партий, второй проиграл меньше всех – 2 партии, а больше всех очков набрал третий.

23. Указание. **а**) Постройте с помощью циркуля и линейки треугольник по двум сторонам и углу против одной из них. Исследуйте, сколько решений имеет эта задача на построение.

б) Рассмотрите два треугольника: один со сторонами $1, a, a^2$, второй – со сторонами a, a^2, a^3. Выясните, при каких a существуют эти треугольники?

24. Указание. Докажите, что один из углов между биссектрисами треугольника не меньше $60°$ (выразите для этого углы между биссектрисами через углы треугольника). Оцените площадь четырехугольника, диагоналями которого являются эти биссектрисы.

25. Ответ: может.

26. Указание. а) Внутренний четырехугольник не обязательно выпуклый. **б**) Длина любого отрезка, расположенного внутри четырехугольника, не превосходит половины его периметра.

27. Ответ: **а**) можно. **б**) нельзя.

28. Указание. **а**) Возьмите отрезок, поместите три вершины внешней пирамиды очень близко к одному его концу, а четвертую – к другому. Две вершины внутренней пирамиды поместите вблизи одного конца отрезка, а две другие – вблизи другого.

б) Эта задача – обобщение следующей теоремы: периметр выпуклого многоугольника меньше периметра любого содержащего его многоугольника.

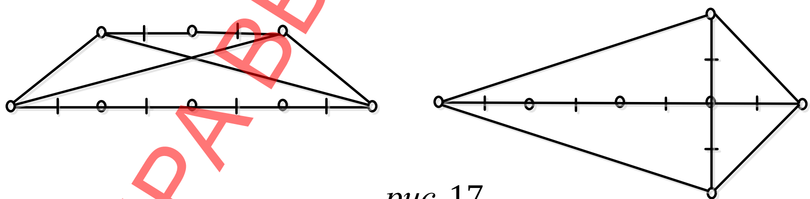


рис.17

29. Ответ: не следует. **Решение**. Легко проверить, что список длин сторон и диагоналей для равнобедренной трапеции с высотой 1 и основаниями 2 и 4 совпадает с таким же списком для четырехугольника с перпендикулярными диагоналями длиной 2 и 4, делящимися точкой пересечения на отрезки длиной 1 и 1, 1 и 3 (рис.17) .

30. (Прасолов 27.11) **Ответ:** можно. **Решение**. Требуемый пример приведен на рис.18.

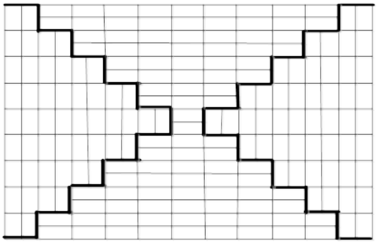


рис.18

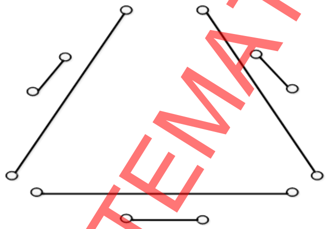


рис.19

31. Ответ: не всегда. **Решение**. Рассмотрим отрезки, изображенные на рис. 19.

Концы каждого короткого отрезка можно соединить только с концами ближайшего к нему длинного отрезка. Ясно, что при этом не может получиться замкнутая не самопересекающаяся ломаная.

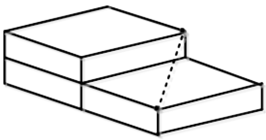


рис.20

32. Ответ: не обязательно. **Решение**. Докажем, что центр O вписанной окружности треугольника ABC со сторонами $AB = 6, BC = 4$ и $CA = 8$ одинаково удален от середин сторон AC и BC. Обозначим середины сторон AC и BC через B_1 и A_1, а основания перпендикуляров, опущенных из точки O на AC и BC – через B_2 и A_2. Можно показать, что $A_1A_2 = 1 = B_1B_2$ и $OA_2 = OB_2$, тогда $\triangle OA_1A_2 = \triangle OB_1B_2$, т.е.

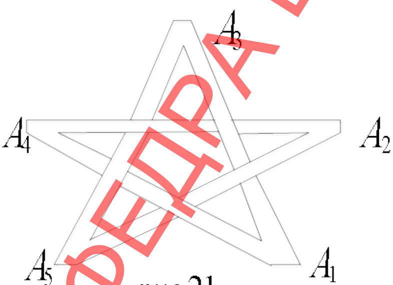


рис.21

$OA_1 = OB_1$.

33. Решение. Сложите спички в виде правильного тетраэдра.

34.Ответ: можно. **Решение**. Сложите три кирпича так, как показано на рис. 20. Измерьте расстояние между отмеченными точками.

35. Ответ: нельзя. **Решение**. Обозначим вершины звезды так, как показано на рис.21. Рассмотрим плоскость $A_1A_3A_5$. Звено A_5A_2 показывает, что точка A_2 лежит «выше» этой плоскости; звено A_1A_4 показывает, что точка A_4 лежит «ниже» ее. А звено A_2A_4 показывает, что, наоборот, A_2 лежит «ниже», а A_4 «выше».

36. Ответ: Заштрихованный на рис.2 четырехугольник не может быть плоским. **Решение**. Продолжения противоположных сторон сечения, изображенных сплошной линией, пересекают продолжения переднего ребра тетраэдра в двух различных точках. Этого не может быть, так как плоскость и прямая, в ней не лежащая, имеют не более одной общей точки.

37. Ответ: изображенные многоугольники невозможны. **Решение**. а) Обозначим на рис.3 а) вершины внешнего четырехугольника (квадрата), начиная с правой нижней, против часовой стрелки через A, B, C и D, а вершины внутреннего четырехугольника через A_1, B_1, C_1 и D_1 соответственно. Рассматривая сечения, параллельные плоскости $ABCD$, убедимся, что B_1 отстоит от плоскости $ABCD$ дальше, чем A_1, C_1 – дальше, чем B_1, D_1 – дальше, чем C_1, A_1 - дальше, чем D_1. Это невозможно.

рис.22

б) Введем на рис.3 б) такие же обозначения, как и на рис.3 а). Как и в предыдущем случае, легко убедиться, что точки A_1 и C_1 менее удалены от плоскости $ABCD$, чем точки B_1 и D_1. Следовательно, любая точка отрезка A_1C_1 менее удалена от плоскости $ABCD$, чем любая точка отрезка B_1D_1, а значит, эти отрезки не пересекаются. Поэтому точки A_1, B_1, C_1 и D_1 не могут лежать в одной плоскости.

38. Ответ: задача имеет бесконечно много решений. **Решение**. Условию задачи удовлетворяет, например, пробка, изображенная на рис.22 (кусок цилиндра с квадратным сечением обрезан в виде клина).

39. Решение. а) Процесс протаскивания каркаса куба сквозь

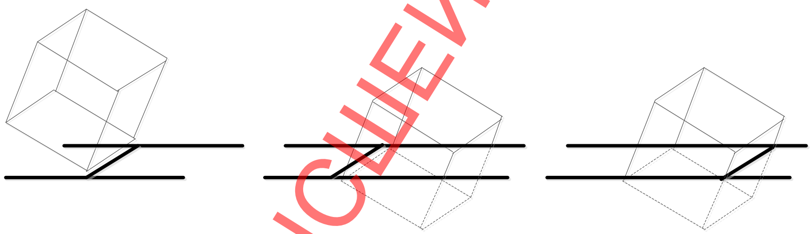


рис.23

отверстие в виде буквы **Н** изображен на рис.23. Сначала подводим одно ребро куба к перекладине и двигаем куб до тех пор, пока сквозь перекладину не пройдет второе ребро. Затем сдвигаем куб так, чтобы к перекладине переместилась другая пара «вертикальных» ребер. Дальнейший процесс аналогичен предыдущему.

б) Процесс протаскивания каркаса тетраэдра сквозь отверстие

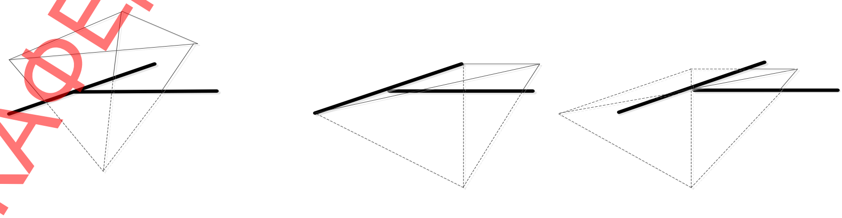


рис.24

в виде буквы **Т** изображен на рис. 24.

Расположим тетраэдр так, чтобы одна его грань была параллельна данной плоскости, а его противоположная вершина была обращена к плоскости. Подведем эту вершину к разрезу и начнем проталкивать тетраэдр так, чтобы два его ребра двигались по горизонтальной «перекладине» буквы **Т**, а одно – по ее вертикальной «стойке».

Когда к «перекладине» подойдет ребро грани, параллельной плоскости, повернем слегка тетраэдр вокруг этого ребра. Оставшаяся часть тетраэдра проталкивается сквозь отверстие очевидным образом.

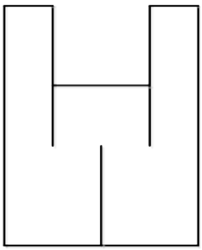
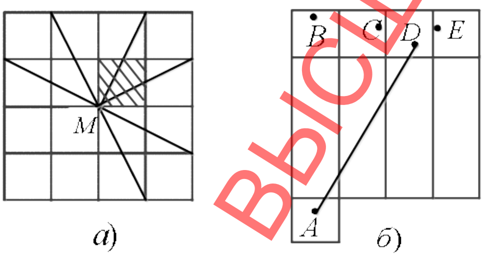


рис.25

40. Решение. Требуемая выкройка изображена на рис.25. Ее нужно взять в руки, держа левой рукой левый край, а правой – правый, и повернуть правый край на $180°$ на себя. Дальнейшее очевидно.

41. Решение.а) Любой путь, идущий по поверхности куба можно, можно развернуть на плоскость. На рис.26а) изображены развертки шести кратчайших путей, идущих из M в N. Длина каждого из них равна $\sqrt{5}a$.



а) *б)*

рис.26

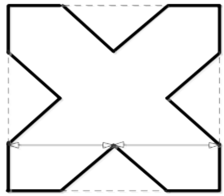
б) Как и в задаче а), достаточно выбрать наименьший из отрезков AB, AC, AD и AE (рис.26 б)). Ясно, что

$AB^2 = 42^2 = 1764,$

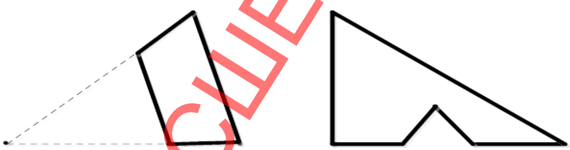
$AC^2 = 37^2 + 17^2 = 1658,$ $AD^2 = 32^2 + 24^2 = 1600$ и $AE > AD$.

Кратчайший путь AD имеет длину 40.

42. Ответ: можно. **Решение**. Из квадрата со стороной можно вырезать фигуру, в которую можно завернуть единичный кубик (на рис. 27). Ясно также, что $2\sqrt{2} < 3$.



43. Ответ: такие пирамиды существуют. **Решение**. В качестве оснований таких пирамид можно взять, например, четырехугольник и невыпуклый шестиугольник, изображенные на рис.28; вершины этих пирамид лежат на перпендикулярах, восстановленных из точек P и Q соответственно.



44. Ответ: нет, не обязательно. **Решение**. Рассмотрим равнобедренный треугольник ABC, основание AC которого много меньше боковой стороны. Вершину D поместим вблизи середины стороны AC, а вершину E – внутри тетраэдра $ABCD$ и близи вершины B. Периметр внешнего тетраэдра можно сделать сколь угодно близким к $3a$, где a – длина боковой стороны треугольника ABC, а периметр внутреннего – к $4a$.

45. Ответ: существует. **Решение**. Пусть в треугольнике ABC угол C тупой, точка D лежит на высоте, опущенной из вершины C. Слегка приподняв точку D над плоскостью ABC, получим требуемый тетраэдр.

46. Ответ: существует. **Указание**. Этим свойством обладает тетраэдр, у которого два противоположных двугранных угла тупые. Для построения такого тетраэдра можно, например, взять две диагонали квадрата и чуть-чуть приподнять одну над другой.

47. Ответ: могут. **Решение**. Пусть точки C и S лежат на одной дуге окружности, проходящей через A и B, причем $SC \perp AB$ и точка C ближе к прямой AB, чем точка S. (рис.29)

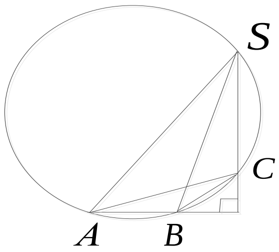


*рис.*29

Тогда треугольник ABS можно так повернуть вокруг оси AB, что отрезок SC станет перпендикулярен плоскости ABC.

48. Ответ: нет, не любой. **Решение**. Рассмотрим трехгранный угол $SABC$, у которого $\angle BSC < 60°$ и ребро AS перпендикулярно грани SBC. Предположим, что его сечение ABC является правильным треугольником. В прямоугольных треугольниках ABS и ACS равны гипотенузы, поэтому $SB = SC$. В равнобедренном треугольнике SBC угол при вершине S наименьший, поэтому $BC < SB$. Ясно также, что $SB < AB$, а значит, $BC < AB$. Получено противоречие.

49. Ответ: нет, не обязательно. **Решение**. Возьмем куб и приложим к каждой из его граней по такому же кубу. У полученного (невыпуклого) многогранника все грани являются равными между собой квадратами.

50. Ответ: нет, не обязательно. **Решение**. Построим внешним образом на гранях куба как основаниях правильные четырехугольные пирамиды с двугранными углами при основании, равными $45°$. В результате получим 12– гранник, имеющий 14 вершин, причем 8 из них – вершины куба, а 6 – вершины построенных пирамид; ребра куба являются диагоналями его граней, а поэтому его ребрами не являются.

Все ребра этого многогранника равны, и они равноудалены от центра куба. Одной сфере его вершины принадлежать не могут, так как вершины куба удалены от центра на расстояние $a\sqrt{3}/2$, где a – ребро куба, а остальные вершины удалены от центра куба на расстояние a.

51. Ответ: может. **Решение**. Легко проверить, что вершины правильного шестиугольника обладают требуемым свойством. Рассмотрим теперь два правильных шестиугольника с общим центром O, лежащие в разных плоскостях. Если A и B – вершины разных шестиугольников, то в качестве C и D можно взять точки, симметричные A и B относительно точки O.

52. Решение. Найдем прямые пересечения плоскостей противоположных граней данного четырехгранного угла. Через эти две прямые проведем плоскость α. Затем проведем параллельную ей плоскость β, пересекающую все четыре ребра.

Докажем, что в сечении получится параллелограмм. Плоскость β параллельна прямой пересечения плоскостей двух

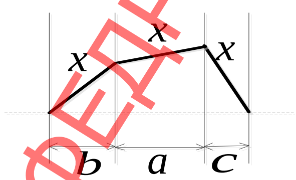


рис.30

противоположных граней, и, следовательно, она пересекает их по параллельным прямым. таким образом, в сечении получился четырехугольник, противоположные стороны которого попарно параллельны, т.е. параллелограмм.

53. Решение. Рассмотрим развертку боковой поверхности призмы (рис.30).

Существование нужного сечения эквивалентно существованию ломаной с вершинами на четырех параллельных прямых развертки, такой, что все ее три звена имеют одинаковую длину x, а концы лежат на прямой, перпендикулярной этим параллельным прямым. Таким образом, достаточно доказать, что уравнение $\sqrt{x^2-a^2}+\sqrt{x^2-b^2}=\sqrt{x^2-c^2}$ имеет решение при $a \ge b \ge c > 0$, $a < b+c$.

Рассмотрим функцию $y = f(x) = \sqrt{x^2-a^2}+\sqrt{x^2-b^2}-\sqrt{x^2-c^2}$.

Эта функция определена при $x^2 \ge a^2$ и непрерывна. Заметим, что $f(a)=\sqrt{a^2-b^2}-\sqrt{a^2-c^2} \le 0$, так как $b \ge c$, а $f\left(\sqrt{a^2+b^2}\right)=b+a-\sqrt{a^2+b^2-c^2} > 0$. Если значения непрерывной функции на концах отрезка имеют разные знаки, то в некоторой точке внутри отрезка функция обращается в нуль. В нашем случае эти условия выполнены на отрезке $\left[a;\sqrt{a^2+b^2}\right]$. Поэтому в некоторой точке x_0 внутри этого отрезка функция f обращается в нуль: $f\left(x_0\right)=0$, и тем самым уравнение имеет решение.

§ 3. Игры

3.1. Основы теории. Примеры

Математические игры отличаются от обычных тем, что в них можно заранее определить исход игры. В подобных задачах обычный вопрос один и тот же: кто и как выиграет при правильной игре, т.е. при наилучшей стратегии обеих сторон. Далее в условиях задачи это оговариваться не будет.

Для доказательства победы и ничьей используются следующие идеи:

Соответствие. Наличие удачного ответного хода (может обеспечиваться симметрией, разбиением на пары, дополнением числа).

Решение с конца. Последовательно определяются позиции, выигрышные и проигрышные для начинающего. Очередная позиция является выигрышной, если из нее можно получить ранее определенную проигрышную позицию, и является проигрышной, если любой ход из нее ведет к попаданию в ранее определенную выигрышную позицию.

Передача хода. Если мы можем воспользоваться стратегией противника, то наши дела не хуже, чем у него. Например, выигрыш (или ничья) обеспечивается, когда можно по своему желанию попасть в некоторую позицию либо заставить противника попасть в нее.

В некоторых задачах стратегию игры указывать не надо, так как исход игры не зависит от игры соперников.

Пример 1. Имеется три кучки камней: в первой – 10, во второй – 15, в третьей – 20. За ход разрешается разбить любую кучку на две меньшие; проигрывает тот, кто не сможет сделать ход.

Решение. После каждого хода количество кучек увеличивается на 1. Сначала их было 3, в конце 45. Таким образом, всего будет сделано 42 хода. Последний выигрывающий 42-й ход сделает второй игрок.

Для решения некоторых задач необходимо найти *симметрию*, при которой только что сделанный противником ход не препятствует осуществлению стратегии.

Пример 2. Двое по очереди кладут пятаки на круглый стол, причем так, чтобы они не накладывались друг на друга. Проигрывает тот, кто не может сделать ход.

Решение. В этой игре выигрывает первый независимо от размеров стола. Первым ходом он кладет пятак так, чтобы центры монеты и стола совпали. После этого на каждый ход второго игрока начинающий отвечает симметрично относительно центра стола. Отметим, что при такой стратегии после каждого хода первого игрока позиция симметрична. Поэтому если возможен очередной ход второго игрока, то возможен и симметричный ему ответный ход первого. Значит, он побеждает.

В математических играх существуют понятия *выигрышной стратегии*, т.е. набора правил (можно сказать, инструкции или алгоритма), следуя которым, один из игроков обязательно выиграет (не зависимо от того, как играет его соперник), и *ничейной стратегии*, следуя которой один из игроков обязательно добьется либо выигрыша, либо ничьей.

В любой математической игре существует либо выигрышная стратегия для одного из игроков, либо ничейные стратегии для обоих (если игра допускает ничью). В зависимости от этого игра называется выигрышной для первого или второго игрока, или ничейной.

Пример 3. Ладья стоит на поле $a1$. За ход разрешается сдвинуть ее на любое число клеток вправо или на любое число клеток вверх. Выигрывает тот, кто поставит ладью на поле $h8$

Решение. В этой игре побеждает второй игрок. Его стратегия очень проста: каждым своим ходом он возвращает ладью на большую диагональ $a1-h8$. Объясним, почему, играя так, второй игрок выигрывает. Дело в том, что первый игрок каждый раз вынужден будет уводить ладью с этой диагонали, а второй игрок после этого будет иметь возможность вернуть ладью на линию $a1 - h8$. Так как поле $h8$ принадлежит диагонали, то на него сумеет встать именно второй игрок.

Проанализируем это решение.

Нам удалось выделить класс *выигрышных позиций* (ладья стоит на одной из клеток диагонали $a1 - h8$), обладающих следующими свойствами:

1) Завершающая позиция игры – выигрышная;
2) За ход одной выигрышной позиции нельзя попасть в другую;
3) Из любой невыигрышной (проигрышной) позиции за один ход можно попасть в какую-то выигрышную.

Нахождение такого класса выигрышных позиций для игры равносильно ее решению. Действительно, к победе ведет стратегия – ходи в выигрышную позицию. Если исходная позиция выигрышная, то, как в разобранной задаче, выигрывает второй. В противном случае выигрывает начинающий.

Рассмотрим задачу, которую проще всего решать с конца.

Пример 4. В куче 25 камней. Игроки берут по очереди 2,4 и 7 камней. Проигрывает тот, кому некуда ходить.

Решение. Случаи 0, 1 камня проигрышны для начинающего. Поэтому случаи 2, 3, 4, 5, 7, 8 для начинающего выигрышны: своим ходом он переводит игру в позицию, проигрышную для противника. Аналогично, 6 и 9 камней проигрышны для начинающего и т.д. Легко установить последовательность выигрышных и проигрышных позиций и получить, в частности, ответ: победит начинающий.

Пример 5. Король стоит на поле $a1$. За один ход его можно передвинуть на одно поле вправо, или на одно поле вверх, или на одно поле по диагонали «вправо-вверх». Выигрывает тот, кто поставит короля на поле $h8$.

Решение. Попробуем найти выигрышные позиции, исходя из их свойств. Завершающая позиция игры (король стоит на $h8$) – выигрышная. Поэтому в клетку $h8$ поставим «+» (см рис.31,а). Так же мы будем отмечать все найденные выигрышные позиции. В клетках, соответствующих проигрышным позициям, будем ставить «-» .

							+

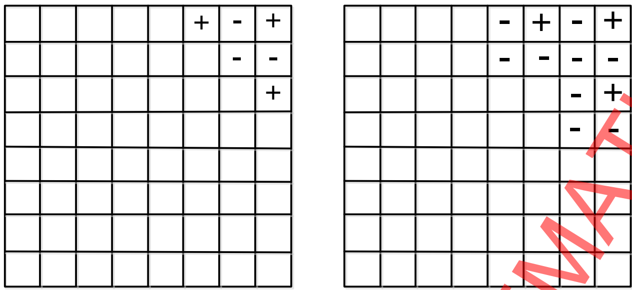
а)

						-	+
						-	-

б)

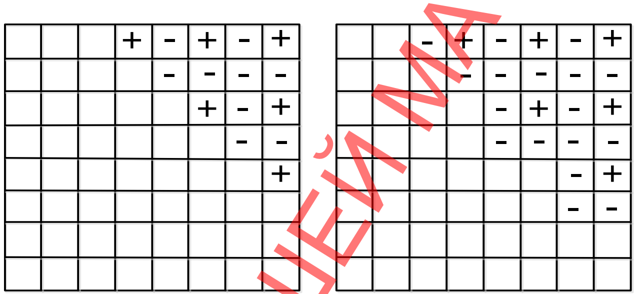
рис .31

Так как позиции, из которых король может за один ход попасть на выигрышное поле $h8$ – проигрышные, то возникает расстановка, изображенная на рис 31,б. С полей $h6$ и $f8$ за один ход можно попасть только на проигрышные поля. В этих клетках нужно поставить «+» - они выигрышные (см рис 32,а). Только что полученные выигрышные позиции порождают набор новых проигрышных позиций – $h5$, $q5$, $q6$, $f7$, $e7$, $e8$ (см рис 32,б).



а) *б*)

рис.32



а) *б*)

рис.33

Продолжим аналогичным образом (см рис 33,а,б). После получения очередного набора минусов отмечаем плюсом те поля, из которых каждый ход ведет в проигрышную позицию. После этого отмечаем минусом те поля, из которых существует хотя бы один ход в выигрышную позицию. В итоге и минусы будут расставлены так, как показано на рисунке 34.

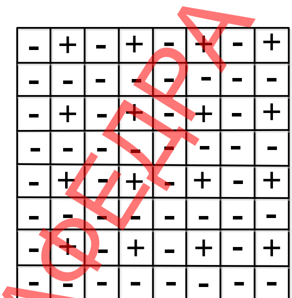


рис.34

Передача хода эффективна в задачах, где надо доказать, что один из игроков (обычно первый) всегда может добиться, по крайней мере, ничьей.

Пример 6. Двойными шахматами называется игра, отличающаяся от обычных шахмат только тем, что каждый из противников может делать по два хода подряд. Докажите, что при такой игре белые всегда могут выиграть или по крайней мере добиться ничьей.

Решение. Предположим, что выигрышная стратегия в этой игре есть у черных. Тогда сделаем белыми первый ход $Kb1 - c3 - b1$ (два последовательных прыжка конем, после которых он возвращается на исходную клетку), и в дальнейшем будет играть, пользуясь этой выигрышной стратегий для черных. Ясно, что действуя таким образом, белые заведомо не проиграют. Полученное противоречие показывает, что у белых существует беспроигрышная стратегия.

3.2. Задачи для самостоятельного решения

1. Числа от 1 до 20 выписаны в строчку. Игроки по очереди расставляют между ними плюсы и минусы. После того, как все места заполнены, подсчитывается результат. Если он четен, то выигрывает первый игрок, если нечетен, то второй.

2. Двое по очереди ставят ладей на шахматную доску так, чтобы ладьи не били друг друга. Проигрывает тот, кто не может сделать ход.

3. На доске написаны 10 единиц и 10 двоек. За ход разрешается стереть две любые цифры и, если они были одинаковыми, написать двойку, а если разными – единицу. Если последняя оставшаяся на доске цифра – единица, то выиграл первый игрок, если двойка – то второй.

4. На доске написаны числа 25 и 36. За ход разрешается дописать еще одно натуральное число – разность любых двух имеющихся на доске чисел, если она еще не встречалась. Проигрывает тот, кто не может сделать ход.

5 . Дана клетчатая доска размерами а) 9×10; б) 10×12;

в) 9×11. За ход разрешается вычеркнуть любую горизонталь или любую вертикаль, если в ней к моменту хода есть хотя бы одна не вычеркнутая клетка. Проигрывает тот, кто не может сделать ход.

6. Двое по очереди ставят слонов в клетки шахматной доски так, чтобы слоны не били друг друга. (Цвет слонов значения не имеет). Проигрывает тот, кто не может сделать ход.

7. Имеются две кучки камней – по 7 в каждой. За ход разрешается взять любое количество камней, но только из одной кучки. Проигрывает тот, кому нечего брать.

8. Двое по очереди ставят коней в клетки шахматной доски так, чтобы кони не били друг друга. Проигрывает тот, кто не сможет сделать ход.

9. Двое по очереди ставят королей в клетки доски 9×9 так, чтобы короли не били друг друга. Проигрывает тот, кто не может сделать ход.

10. Двое по очереди ставят ладей в клетки шахматной доски. Очередным ходом надо побить хотя бы одну не битую клетку. Ладья бьет и клетку, на которой стоит. Проигрывает тот, кто не может сделать ход.

11. Дана клетчатая доска 10×10.За ход разрешается покрыть любые 2 соседние клетки доминошкой (прямоугольником 1×2) так, чтобы доминошки не перекрывались. Проигрывает тот, кто не может сделать ход.

12. В каждой клетке доски 11×11 стоит шашка. За ход разрешается снять с доски любое количество подряд идущих шашек либо из одного вертикального, либо из одного горизонтального ряда. Выигрывает снявший последнюю шашку.

13. Имеются две кучки камней: в одной – 30, в другой – 20. За ход разрешается брать любое количество камней, но только из одной кучки. Проигрывает тот, кому нечего брать.

14. На окружности расставлено 20 точек. За ход разрешается соединить любые две из них отрезком, не пересекающим отрезков, проведенных ранее. Проигрывает тот, кто не может сделать ход.

15. У ромашки а) 12 лепестков; б) 11 лепестков. За ход разрешается оторвать либо один лепесток, либо два рядом растущих лепестка. Проигрывает тот, кто не может сделать хода.

16. Дан прямоугольный параллелепипед размерами а) $4 \times 4 \times 4$; б) $4 \times 4 \times 3$; в) $4 \times 3 \times 3$, составленный из единичных кубиков. За ход разрешается проткнуть спицей любой ряд, если в нем есть хотя бы один непроткнутый кубик. Проигрывает тот, кто не может сделать ход.

17. Двое по очереди разламывают шоколадку 5×10. За ход разрешается сделать прямолинейный разлом любого из имеющихся кусков вдоль углубления. Выигрывает тот, кто первым отломит дольку 1×1.

18. Двое по очереди ставят крестики и нолики в клетки доски 9×9. Начинающий ставит крестики, его соперник – нолики. В конце подсчитывается, сколько имеется строчек и столбцов, в которых крестиков больше, чем ноликов – это очки, набранные первым игроком. Количество строчек и столбцов, где ноликов больше – очки второго. Тот из игроков, кто наберет больше очков, побеждает.

19. Король стоит на поле $a1$. За один ход его можно передвинуть на одно поле вправо, или на одно поле вверх, или на одно поле по диагонали «вправо-вверх». Выигрывает тот, кто поставит короля на поле $h8$.

20. Имеются две кучки конфет: в одной – 20, в другой 21. За ход нужно съесть одну из кучек, а вторую разделить на две не обязательно равных кучки. Проигрывает тот, кто не может сделать ход.

21. На концах клетчатой полоски 1×20 стоит по шашке. За ход разрешается сдвинуть любую шашку в направлении другой на одну или на две клетки. Перепрыгивать шашкой через шашку нельзя. Проигрывает тот, кто не может сделать ход.

22. В коробке лежит 300 спичек. За ход разрешается взять из коробка не более половины имеющихся в нем спичек. Проигрывает тот, кто не может сделать ход.

23. Имеется три кучки камней: в первой – 50, во второй – 60, в третьей – 70. Ход состоит в разбиении каждой кучки, состоящей более чем из одного камня, на две меньшие кучки. Выигрывает тот, после чьего хода во всех кучках будет по одному камню.

24. Игра начинается с числа 60. За ход разрешается уменьшить имеющееся число на любой из его делителей. Проигрывает тот, кто получит ноль.

25. Имеется две кучки спичек: а) 101 спичка и 201 спичка; б) 100 спичек и 201 спичка. За ход разрешается уменьшить количество спичек в одной из кучек на число, являющееся делителем количества спичек в другой кучке. Выигрывает тот, после чьего хода спичек не остается.

26. Ферзь стоит на поле $c1$. За ход его можно передвинуть на любое число полей вправо, вверх или по диагонали «вправо-вверх». Выигрывает тот, кто поставит ферзя на поле $h8$

27. Имеется две кучки камней: в первой – 7 камней, во второй – 5. За ход разрешатся брать любое количество камней из одной кучки или поровну камней из обеих кучек. проигрывает тот, кто не может сделать ход.

28. Конь стоит на поле $a1$. За ход разрешается передвигать коня на две клетки вправо и одну клетку вверх или вниз, или на две вверх и на одну вправо или влево. Проигрывает тот, кто не может сделать ход.

29. а) Имеется две кучки по 7 камней. Заход разрешается взять один камень из любой кучки или по камню из каждой кучки. Проигрывает тот, кто не может сделать ход.

б) Кроме ходов, допустимых в пункте а), разрешается перекладывать один камень из первой кучки во вторую. В остальном правила те же.

30. Имеется две кучки по 11 спичек. За ход можно взять две спички из одной кучки и одну из другой. Проигрывает тот, кто не может сделать ход.

31. Игра начинается с числа 0. За ход разрешается прибавить к имеющемуся числу любое натуральное число от 1 до 9. Выигрывает тот, кто получит число 100.

32. Игра начинается с числа 1. За ход разрешается умножить имеющееся число на любое натуральное число от 2 до 9. Выигрывает тот, кто первым получит число больше 1000.

33. Игра начинается с числа 2. За ход разрешается прибавить к имеющемуся числу любое натуральное число, меньше его. Выигрывает тот, кто получит 1000.

34. Игра начинается с числа 1000. За ход разрешается вычесть из имеющегося числа любое, не превосходящее его, натуральное число, являющееся степенью двойки $\left(1=2^0\right)$. Выигрывает тот, кто получит ноль.

35. Докажите, что в игре «крестики-нолики» на бесконечной доске у ноликов отсутствует выигрышная стратегия.

36. Две компании A и B получили право освещать столицу международной шахматной мысли Нью-Васюки, представляющую собой прямоугольную сетку улиц. Они по очереди ставят на неосвещенный перекресток прожектор, который освещает весь северо-восточный угол города (от нуля до $90°$). Премию О. Бендера получит та компания, которой на своем ходе нечего будет освещать. Кто выиграет при правильной игре?

37. На доске написано число 2. За ход разрешается прибавить к числу на доске любой из его делителей, меньший самого числа. Выигрывает тот, кто первым получит число, большее 1000000.

38. Каждым ходом из лежащих на столе 50 конфет можно взять любое число, строго меньше половины, или ровно одну конфету. Выигрывает тот, кто взял последнюю конфету.

39. 5 ямок расположены в ряд. В каждой лежит по шарику. За ход разрешается переложить все шарики из какой-нибудь ямки в соседнюю справа ямку. Проигрывает тот, кто не может сделать ход (когда все шарики лежат в самой правой ямке).

3.3. Решение, указание, ответы

1. **Решение**. Четность результата не зависит от расстановки плюсов и минусов, а зависит только от количества нечетных чисел в первоначальном наборе. Так как в данном случае их 10 (т.е. четное число), то выигрывает первый игрок.

2. **Решение**. После каждого хода и количество вертикалей и количество горизонталей, на которые можно поставить ладей, уменьшается на 1. Поэтому игра будет продолжаться ровно 8 ходов. Последний, выигрышный ход будет сделан вторым игроком.

3. **Решение**. Четность числа единиц на доске после каждого хода не меняется. Поскольку сначала единиц было четное число, то после последнего хода на доске не может оставаться одна (нечетное число!) единица. Поэтому выигрывает второй игрок.

4. **Решение**. В процессе игры обязательно будет выписан наибольший общий делитель исходных чисел. Следовательно, будут выписаны и все числа, кратные ему, не превосходящие большего из исходных чисел. В нашем случае НОД равен 1. Поэтому будут выписаны все числа от 1 до 36. Таким образом игра будет продолжаться 34 хода (два числа были написаны сначала), и выигрывает второй игрок.

5. **Решение**. В данной игре выигрывающий, допустив ошибку, может проиграть. Эта ошибка состоит в том, что он после своего хода оставляет не вычеркнутые клетки только в одном столбце или только в одной строке, предоставляя противнику возможность выиграть в один ход. Заметим, что оставшуюся после вычеркивания горизонтали часть клетчатой доски $m \times n$ можно представить себе как доску $(m-1) \times n$. Аналогично, после вычеркивания вертикали остается доска $n \times (n-1)$. Ситуация, в которой каждый ход является «роковым», только одна – это доска 2×2. Таким образом, выигрывает игрок, после хода которого она возникла. Однако, при каждом ходе суммарное количество горизонталей и вертикалей на доске уменьшается на 1. Поэтому четность этой суммы в начале игры определяет победителя. В пункте а) выигрывает первый игрок, в пунктах б) и в) – второй.

6. **Решение**. Решение задачи легко провести применяя осевую симметрию. За ось симметрии можно взять прямую, разделяющую четвертую и пятую горизонтали. Симметричные относительно нее поля имеют разный цвет, и, тем самым, слон, поставленный на одно из них, не препятствует ходу на другое. В этой игре выигрывает второй игрок.

7. **Решение**. В этой игре второй игрок побеждает при помощи симметричной стратегии: каждым своим ходом он должен брать столько же камней, сколько предыдущим ходом взял первый игрок, но из другой кучки. Таким образом, у второго игрока всегда есть ход. (Симметрия в этой задаче состоит в равенстве числа камней в кучках).

8. **Указание**. Выигрывает второй. Можно использовать и центральную, и осевую симметрию.

9. **Указание**. Выигрывает первый. Первый ход в центр доски, а затем – центральная симметрия.

10. **Указание**. Выигрывает первый игрок. Центральная симметрия. Решающим соображением является то, что если два симметричных поля не побиты, то поля, с которых оба они бьются, также не побиты.

11. Указание. Выигрывает второй. Центральная симметрия.

12. Указание. Выигрывает первый. Первым ходом он снимает центральную шашку, а потом играет центрально-симметрично.

13. Указание. Выигрывает первый. Первым ходом он уравнивает количество камней в кучках, после чего играет как в задаче 7.

14. Указание. Выигрывает первый. Первым ходом он проводит хорду, по обе стороны от которой расположено по 9 вершин. После этого, на каждый ход второго он отвечает аналогичным ходом по другую сторону от этой хорды.

15. Указание. В обоих пунктах выигрывает второй игрок. Независимо от хода первого игрока, второй может после своего хода оставить две одинаковые по длине цепочки лепестков. Дальше – симметрия.

16. Указание. а) и б) – выигрывает второй. Центральная симметрия. в) Выигрывает первый. Первым ходом он протыкает ряд, состоящий из центральных кубиков четырех слоев 3×3. Дальше – центральная симметрия.

17. Указание. В этой игре проигрывает тот, кто отломит кусок ширины 1. Выигрывает первый игрок. Первым ходом он разламывает шоколадку на два куска 5×5. Дальше – симметрия.

18. Указание. Выигрывает первый. Первым ходом он ставит крестик в центральную клетку. Затем после каждого хода второго игрока первый ставит крестик в центрально-симметричную клетку.

19. Решение. Выигрывает первый игрок. Занумеруем горизонтали и вертикали шахматной доски в естественном порядке. Координаты поля $a1-(1,1)$, поля $h8-(8,8)$. Выигрышными являются позиции, в которых король стоит на поле с четными координатами. Первый ход – на поле $b2$.

20. **Указание**. Выигрывает первый игрок. Выигрышными являются позиции с двумя нечетными кучками. Первый ход – съесть кучку из 21 конфеты и разделить кучку из 20 конфет на любые две нечетные кучки.

21. **Указание**. Выигрывает второй игрок. Выигрышными являются позиции, в которых между шашками находится кратное 3 число пустых клеток.

22. **Указание**. Выигрывает первый игрок. Выигрышными являются позиции, при которых в коробке остается $2^n - 1$ спичка.

23. **Решение**. Выигрывает первый игрок. Выигрышными являются позиции, при которых в максимальной по количеству камней кучке остается $2n - 1$ камень. Первый ход – первую и вторую кучки можно разбить как угодно, а третью – на кучку из 63 камней и кучку из 7 камней.

24. **Указание**. В этой игре выигрывает тот, кто получит единицу. Побеждает первый. Выигрышными позициями являются нечетные числа.

25. **Указание**. В пункте а) выигрывает второй игрок, в пункте б) – первый. В этой игре выигрышными являются позиции, при которых в каждой кучке нечетное число спичек.

26. **Решение**. Пользуясь анализом с конца, можно получить расстановку плюсов и минусов, показанную на рис.35.

Выигрывает первый игрок, причем у него есть три варианта первого хода: на поля $c5$, $e3$, $d1$.

-	-	-	-	-	-	-	+
-	-	-	-	-	+	-	-
-	-	-	-	-	-	+	-
-	-	+	-	-	-	-	-
+	-	-	-	-	-	-	-
-	-	-	-	+	-	-	-
-	-	-	-	-	-	-	-
-	-	-	+	-	-	-	-

*рис.*35

-	-	+	+	-	-	+	+
-	-	+	+	-	-	+	+
-	-	-	-	-	-	-	-
-	-	-	-	-	-	-	-
-	-	+	+	-	-	+	+
-	-	+	+	-	-	+	+
-	-	-	-	-	-	-	-
+	-	-	-	-	-	-	-

*рис.*36

27. **Решение**. Переформулируем эту задачу на языке шахматной доски. Пронумеруем вертикали и горизонтали шахматной доски числами от 0 до 7: вертикали – сверху-вниз, а горизонтали – справа-налево. Каждой позиции исходной игры сопоставим клетку, находящуюся на пересечении горизонтали с номером, равным числу камней в первой кучке, и вертикали с номером, равным числу камней во второй кучке. Теперь заметим, что ходу в первоначальной игре соответствует ход ферзя вправо, вверх или по диагонали «вправо-вверх» на шахматной доске.

28. **Указание**. Выигрывает второй игрок. Расстановка плюсов и минусов приведена на рис 36.

29. **Решение**. Переформулируем пункты а) и б) в терминах шахматной доски. Игра а) оказывается тождественной игре из задачи 19. Расстановка плюсов и минусов в пункте б) такая же, как в пункте а) (см рис.34). В обоих пунктах выигрывает первый игрок.

30. **Указание**. Выигрывает первый. Расстановка плюсов и минусов после переформулировки в терминах

+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	+	+
-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	+
+	+	+	+	+	+	+	+	+	-	-	+
-	-	-	-	-	-	-	+	+	-	-	+
-	-	-	-	-	-	-	-	+	-	-	+
+	+	+	+	+	+	-	-	+	-	-	+
-	-	-	-	+	+	-	-	+	-	-	+
-	-	-	-	-	+	-	-	+	-	-	+
+	+	+	-	-	+	-	-	+	-	-	+
-	+	+	-	-	+	-	-	+	-	-	+
-	-	+	-	-	+	-	-	+	-	-	+

*рис.*37

клетчатой доски показана на рис. 37.

31. **Указание**. Плюсами и минусами удобно пометить числа. Плюсом оказываются помечены числа, делящиеся на 10. Таким образом, выигрывает второй игрок.

32. **Указание**. Анализируя с конца, находим выигрышные позиции. Это числа от 56 до111 и от 4 до 6. Таким образом, выигрывает первый игрок (его первый ход – в 4, 5 или 6).

33. **Указание**. Анализируя с конца, находим выигрышные позиции: 500, 250, 125, 62, 31, 15, 7, 3. Выигрывает первый игрок.

34. **Указание**. Анализируя с конца, находим выигрышные позиции. Это числа, делящиеся на 3. Выигрывает первый игрок. Первым ходом он может, например, вычесть 1, 4, 16.

35. **Решение**. Пусть у ноликов есть выигрышная стратегия. Тогда этой стратегией могут с тем же успехом воспользоваться крестики, игнорируя свой начальный знак. (Когда крестикам приходиться ходить на поле, где крестик уже стоит, они ходят куда угодно.)

36. **Решение**. Самый северо-восточный квартал города будет освещен в любом случае после первого хода. Допустим, у B есть выигрышная стратегия. Тогда у нее есть выигрышный ответ на ход A, состоящий в освещении только северо-восточного квартала. Но с этого же хода может начать игру A и затем воспользоваться выигрышной стратегией B! Противоречие. Значит, выигрышная стратегия есть у A.

37. **Решение**. (Передача хода). Первый игрок напишет число 3, второй – число 4. Далее первый может написать число 6, а может написать число 5, и тогда второй напишет число 6. После написания числа 6 выигрышная стратегия есть либо у ходящего, либо у его противника. Так как первый игрок после написания числа 6 может по своему желанию оказаться и ходящим, и противником ходящего, он может воспользоваться выигрышной стратегией. Таким образом, мы не показали, как именно должен играть первый игрок, но доказали, что у него есть выигрышная стратегия.

38. **Решение**. Второй выигрывает при числе конфет 2, 4, 16, 32, 64,…, поскольку из не степени двойки всегда можно получить степень двойки, а из степени двойки (кроме числа 2) можно получить только не степень двойки. Итак, при 50 конфетах выигрывает первый.

39. **Решение**. Выигрывает второй. Если первый перекладывает из второй ямки в третью, то второй перекладывает из четвертой в пятую, и наоборот. Далее второй выигрывает всегда. Если же первый перекладывает из первой ямки во вторую, то второй – из третьей в четвертую, и наоборот. Далее второй перекладывает шарики только из четных ямок.

Библиографический список

1. Агаханов Н.Х., Подлипский О.К. Математика. Всероссийские олимпиады. Вып.1. - М.: Просвещение, 2008. - 192 с.
2. Агаханов Н.Х., Подлипский О.К. Математика. Всероссийские олимпиады. Вып.2. - М.: Просвещение, 2009. - 159 с.
3. Агаханов Н.Х., Подлипский О.К. Математические олимпиады Московской области. – М.: Физматкнига, 2006. – 320 с.
4. Агаханов Н.Х., Подлипский О.К., Рубанов И.С. Математика. Всероссийские олимпиады. Вып.3. - М.: Просвещение, 2011. - 207 с.

5. Агаханов Н.Х., Подлипский О.К., Рубанов И.С. Математика. Всероссийские олимпиады. Вып.4. - М.: Просвещение, 2013. - 208 с.
6. Алфутова Н.Б., Егоров Ю.Е., Устинов А.В. 18х18 Вступительные задачи ФМШ при МГУ. – М.: МЦНМО, 2014. –215 с
7. Будак Б.А. и др.. Математика. Сборник задач по углубленному курсу: учебно-методическое пособие/под ред. М.В.Федотова.- М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2012. – 324 с.
8. Буфеев С.В. Коллекция задач по арифметике целых чисел. – М.:Издательство МГТУ, 2011.- 342 с.
9. Васильев Н.Б., Гутенмахер В.Л.и др. Заочные математические олимпиады. – М.:Наука, 1986. – 176 с.
10. Васильев Н.Б., Савин А.П., Егоров А.А. Избранные олимпиадные задачи. – М.:Бюро Квантум, 2007. – 160 с.
11. Вольфсон Г.И., Пратусевич М.Я. и др. ЕГЭ 2014. Математика Задача С6 Арифметика и алгебра. – М.: МЦНМО, 2014. –80 с
12. Галеев Э.М. Подготовка к вступительным экзаменам по математике в МГУ. - М.: Издательство МГУ,2004.– 70 с.
13. Генкин С.А., Итенберг И.В., Фомин Д.В., Ленинградские математические кружки. – Киров: Аса, 1994. – 272 с.
14. Горбачев Н.В. Сборник олимпиадных задач по математике. – М.:МЦНМО,2005.–560с.
15. Иванов О.А. Элементарная математика для школьников, студентов и преподавателей. - М.: МЦНМО, 2009. - 384 с.
16. Игудисман О.С. Математика на устном экзамене . – М.: Айрис пресс, 2000. – 255 с.
17. Канель-Белов А.Я., Ковальджи А.К. Как решают нестандартные задачи / под ред. В.О. Бугаенко. – М.: МЦНМО, 2004. – 96 с.

18. Кравцев С.В., Макаров Ю.Н. и др. Методы решения задач по алгебре: от простых до самых сложных – М.: Экзамен, 2001 - 544с.
19. Ляпин С.Е. Сборник задач по элементарной алгебре. – М.: Просвещение, 1973, - 400 с.
20. Под ред. А.А. Заславского, Скопенкова А.Б. и др. Математика в задачах. -М.: МЦНМО,2009.- 488 с.
21. Петров Н.Н. Математические игры. – М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2012. -192 с.
22. Прасолов В.В. Задачи по планиметрии. – М.: МЦНМО, 2006. – 168 с.
23. Прасолов В.В., Шарыгин И. Ф. Задачи по стереометрии. – М.: Наука, 1989. – 288 с.
24. Савин А.П. и др. Физико-математические олимпиады. Сборник. – М.: Знание,1977. –160 с.
25. Сивашинский И.Х. Теоремы и задачи по алгебре и элементарным функциям.- М.: Наука, 1971.-352с.
26. Смышляев В.К. Практикум по решению задач школьной математики. Выпуск V. – М.: Просвещение, 1978.-96 с.
27. Сюсюкалов А.И., Сюсюкалова Е.А. Избранные нестандартные задачи по математике Учебное пособие Ч.1. Ряз.гос.радиотехн. ун-т.- Рязань, 2012.-114с.
28. Хорошилова Е.В. Элементарная математика: Учебное пособие для старшеклассников и абитуриентов. Часть 1.– М.: Издательство МГУ,2010.– 472 с.
29. Хорошилова Е.В. Элементарная математика: Учебное пособие для старшеклассников и абитуриентов. Часть 2.– М.: Издательство МГУ,2011.– 434 с.
30. Шарыгин И.Ф. Решение задач: Учеб. Пособие для 10 кл.сред.шк.-М.:Просвещение, 1994. – 352 с.
31. Шабунин М.И. Математика для поступающих в вузы.- М.: Бином, 2004. – 694 с.

32. Шень А. Игры и стратегии с точки зрения математики. – М.: МЦНМО, 2013. – 48 с.

С ю с ю к а л о в Андрей Иванович
С ю с ю к а л о в а Елена Александровна

Избранные нестандартные задачи по математике

Часть 2

Учебное пособие

Редактор М.Е. Цветкова
Корректор Н.А. Орлова

Подписано в печать 18.02.2015. Формат бумаги 60×84 1/16.
Бумага офсетная. Печать офсетная. Усл. печ. л. 6,25
Тираж 100 экз. Заказ №38.
Рязанский государственный радиотехнический университет.
390005, Рязань, ул. Гагарина, 59/1.
Редакционно-издательский центр РГРТУ

Издательство Рязанский института развития образования.
390023, Рязань, ул. Урицкого, д. 2а.

Отпечатано в издательстве «Образование Рязани»
МБУ «Центр мониторинга и сопровождения образования»
390035, Рязань, ул. Гоголя, д. 5
тел. 92-82-99
e-mail: izdat@cmiso.ru

Отпечатано с материала заказчика

Оглавление