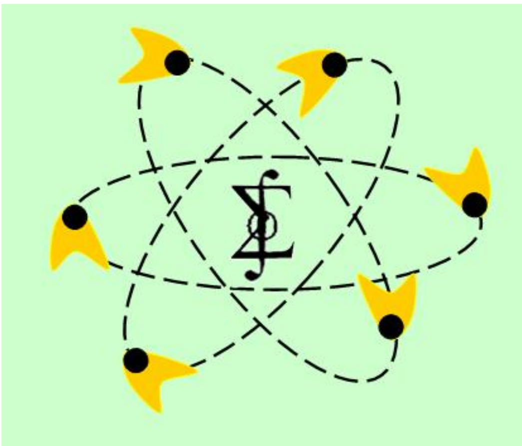
МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

РЯЗАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ РАДИОТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

В.А. АМБАРЦУМЯН, Е.А. АНДРЮЩЕНКО,
К.В. БУХЕНСКИЙ, Е.А. ДВОРЕЦКОВА,
А.Б. ДЮБУА, С.Н. МАШНИНА,
А.С. САФОШКИН

СТУДЕНЧЕСКИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОЛИМПИАДЫ

Часть 2



Рязань 2015

Министерство образования и науки Российской Федерации

Рязанский государственный радиотехнический университет

В.А. АМБАРЦУМЯН, Е.А. АНДРЮЩЕНКО,
К.В. БУХЕНСКИЙ, Е.А. ДВОРЕЦКОВА,
А.Б. ДЮБУА, С.Н. МАШНИНА,
А.С. САФОШКИН

СТУДЕНЧЕСКИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОЛИМПИАДЫ

Часть 2

Учебное пособие

Рязань 2015

УДК 512.8/514.122/517

Студенческие математические олимпиады. Часть 2: учеб. пособие / В.А. Амбарцумян, Е.А. Андрющенко, К.В. Бухенский, Е.А. Дворецкова, А.Б. Дюбуа, С.Н. Машнина, А.С. Сафошкин; Рязан. гос. радиотехн. ун-т. – Рязань, 2015. – 96 с.

Представлен подробный разбор «типовых» олимпиадных задач по интегральному исчислению, дифференциальным уравнениям.

Предназначено для индивидуальной и факультативной работы студентов, для подготовки к математическим олимпиадам.

Ил. 4. Библиогр.: 24 назв.

Неопределенный интеграл, определенный интеграл, несобственный интеграл, дифференциальные уравнения

Печатается по решению редакционно-издательского совета Рязанского государственного радиотехнического университета.

Рецензент: кафедра высшей математики Рязанского государственного радиотехнического университета (доц., канд. физ.-мат. наук Г.С. Лукьянова)

ГЛАВА 4. ИНТЕГРАЛЫ

1. Замена переменных

Для доказательства тождеств с определенными интегралами можно сделать замену переменной таким образом, чтобы подынтегральные выражения в левой и правой частях имели одинаковый вид. Возможно при этом исходный интеграл разбить на два и в одном из них сделать замену переменной, а потом собрать их в один, используя чётность или нечётность какой-либо функции.

4.1. Доказать равенство: $\int\limits_0^\infty f\left(x+\frac{a}{x}\right)dx=\int\limits_0^\infty f\left(x^2+4a\right)dx$, $a>0$.

Решение

Замена $x+\frac{a}{x}=\sqrt{y^2+4a}$,

откуда $y=x-\frac{a}{x}$; $dx=\frac{dy}{1+\frac{a}{x}}$; $x=\frac{y+\sqrt{y^2+4a}}{2}$.

Тогда $\int\limits_0^\infty f\left(x+\frac{a}{x}\right)dx=\int\limits_{-\infty}^\infty f\left(\sqrt{y^2+4a}\right)\frac{dy}{1+\frac{2a}{y^2+2a+y\sqrt{y^2+4a}}}$.

Делая замену $y\to -y$, получаем

$$\int\limits_0^\infty f\left(x+\frac{a}{x}\right)dx=\frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^\infty f\left(\sqrt{y^2+4a}\right)\left(\frac{y^2+2a+y\sqrt{y^2+4a}}{y^2+4a+y\sqrt{y^2+4a}}+\right.$$
$$\left.+\frac{y^2+2a-y\sqrt{y^2+4a}}{y^2+4a-y\sqrt{y^2+4a}}\right)dy.$$

Откуда следует искомое тождество.

4.2. Вычислить $\int\limits_0^1 \frac{\ln(1+t)}{1+t^2}dt$.

Решение

Заменим $t = \operatorname{tg} u$:

$$\int\limits_0^1 \frac{\ln(1+t)}{1+t^2}dt = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\ln(\sin u + \cos u)\right)du - \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\cos u)\,du =$$

$$= \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4} - u\right)\right)du - \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\cos u)\,du =$$

$$= \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\sqrt{2}du + \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(\cos\left(\frac{\pi}{4} - u\right)\right)du - \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\cos u)\,du = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\sqrt{2}du = \frac{\pi}{8}\ln 2.$$

4.3. Вычислить $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+(\operatorname{tg} x)^{\sqrt{2}}}$.

Решение

После подстановки $t = \operatorname{tg} x$ интеграл примет вид

$$I = \int\limits_0^{\infty} \frac{dt}{\left(1+t^{\sqrt{2}}\right)\left(1+t^2\right)} .$$

Теперь сделаем замену $t = \frac{1}{u}$, получим

$$I = \int\limits_0^{\infty} \frac{u^{\sqrt{2}}du}{\left(1+u^{\sqrt{2}}\right)\left(1+u^2\right)} = \int\limits_0^{\infty} \frac{1+u^{\sqrt{2}}-1}{\left(1+u^{\sqrt{2}}\right)\left(1+u^2\right)}du =$$

$$=\int_0^\infty \frac{du}{1+u^2}-\int_0^\infty \frac{du}{\left(1+u^{\sqrt{2}}\right)\left(1+u^2\right)}=\frac{\pi}{2}-I\,.$$

Откуда $2I=\frac{\pi}{2}$ или $I=\frac{\pi}{4}$.

4.4. Вычислите интеграл $\int_2^4 \frac{\sqrt{\ln(9-x)}}{\sqrt{\ln(9-x)}+\sqrt{\ln(x+3)}}dx$.

Решение

Сделаем замену $x=6-y$. Тогда интеграл приводится к виду $I=\int_2^4 \frac{\sqrt{\ln(y+3)}}{\sqrt{\ln(y+3)}+\sqrt{\ln(9-y)}}dy=\int_2^4 \frac{\sqrt{\ln(x+3)}}{\sqrt{\ln(x+3)}+\sqrt{\ln(9-x)}}dx$.

Отсюда $2I=\int_2^4 dx=2, I=1$.

4.5. Доказать, что $\int_0^{\sqrt{2\pi}} \sin x^2 dx>0$.

Решение

Сделаем замену переменной $x^2=y$; тогда

$$\int_0^{\sqrt{2\pi}} \sin x^2 dx=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\frac{\sin y}{\sqrt{y}}dy=\frac{1}{2}\left(\int_0^{\pi}\frac{\sin y}{\sqrt{y}}dy+\int_{\pi}^{2\pi}\frac{\sin y}{\sqrt{y}}dy\right).$$

Сделав во втором интеграле замену $z+\pi=y$, преобразуем полученное выражение к виду

$$\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\left(\frac{\sin y}{\sqrt{y}}-\frac{\sin y}{\sqrt{y+\pi}}\right)dy=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\sin y\left(\frac{1}{\sqrt{y}}-\frac{1}{\sqrt{y+\pi}}\right)dy,$$

что положительно, так как подынтегральная функция положительна на $(0,\pi)$.

2. Несобственные интегралы и интегралы, зависящие от параметров

Способы вычисления интеграла, зависящего от параметра:

1) продифференцировать или проинтегрировать по параметру;

2) вычислить полученный интеграл;

3) проинтегрировать или продифференцировать по параметру для получения исходного интеграла, а произвольную постоянную найти, вычислив данный интеграл при каком-то значении параметра.

Можно также составить дифференциальное уравнение (неизвестная функция — искомый интеграл, переменная — параметр) и решить его.

Вычисление интеграла I_n с целым параметром:

1) вычислить I_1, I_2;

2) вывести рекуррентное соотношение (выразить I_{n+1} или I_{n+2} через I_n) и с его помощью найти нужный интеграл. Возможно в задаче фигурирует конкретное значение n (то есть формально параметра нет), но выводить часто удобнее общее рекуррентное соотношение, а потом применить его нужное количество раз. Независимость интеграла от параметра можно установить непосредственно, а если это не удаётся сделать, то продифференцировать его по параметру и доказать, что производная равна нулю;

3) при дифференцировании несобственного интеграла по параметру необходимо сначала установить его равномерную сходимость по этому параметру. Для этого достаточно воспользоваться одним из признаков равномерной сходимости по параметру.

Отсутствие или неполнота такой проверки – грубая ошибка. Формальное вычисление в таком случае не представляет решения.

4) для вычисления интеграла без параметра часто удобно параметр ввести и, используя описанные выше приёмы, найти этот более общий интеграл, а затем взять нужное значение параметра и получить ответ.

Признак Вейерштрасса

Пусть для любого $y \in Y$ функция $f(x, y)$ интегрируема по x на любом отрезке $[a, b'] \subset [a, b)$, и пусть на $[a, b)$ существует функция $\varphi(x)$ такая, что для всех $y \in Y$ и всех $x \in [a, b)$ выполнено неравенство $|f(x, y)| \le \varphi(x)$, а несобственный интеграл $\int_a^b \varphi(x)dx$ сходится. Тогда интеграл $\int_a^b f(x, y)dx$ сходится равномерно по параметру y на множестве Y.

Признак Дирихле

Пусть:

1) для любого $y \in Y$ функции $f(x, y)$, $g(x, y)$ и $\dfrac{\partial g(x, y)}{\partial x}$ непрерывны как функции x на полуинтервале $[a, +\infty)$;

2) функция $F(x, y)$, являющаяся при любом $y \in Y$ первообразной по x функции $f(x, y)$, ограничена при $y \in Y$, $x \in [a, +\infty)$;

3) $\dfrac{\partial g(x, y)}{\partial x} \le 0$ при $y \in Y$, $x \in [a, +\infty)$;

4) существует непрерывная на $[a, +\infty)$ функция $\psi(x)$ такая, что $\lim\limits_{x \to +\infty} \psi(x) = 0$ и $|g(x, y)| \le \psi(x)$ для $y \in Y$, $x \in [a, +\infty)$.

Тогда интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x,y)g(x,y)dx$ сходится равномерно по параметру $y \in Y$.

Критерий Коши

Для того чтобы несобственный интеграл $\int\limits_a^b f(x,y)dx$ сходился равномерно по параметру y на множестве Y, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовало $b' \in [a,b)$ такое, что для любых $\xi, \xi' \in [a,b)$ и для любого $y \in Y$ выполнялось неравенство

$$\left| \int\limits_{\xi}^{\xi'} f(x,y)dx \right| < \varepsilon .$$

4.6. Вычислить интегралы Лапласа

$$I_1 = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos xy}{1+x^2}dx , \qquad I_2 = \int\limits_0^{+\infty} \frac{x\sin xy}{1+x^2}dx .$$

Решение

Оба интеграла сходятся равномерно по параметру y в силу признака Дирихле на $[\delta, +\infty)$, где $\delta > 0$ так как:

1) функции $\cos xy$ и $\sin xy$ имеют ограниченные первообразные;

2) при $x \geq 1$ производные

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1+x^2}\right) = -\frac{2x}{\left(1+x^2\right)^2} \leq 0 , \qquad \frac{d}{dx}\left(\frac{x}{1+x^2}\right) = \frac{1-x^2}{\left(1+x^2\right)^2} \leq 0 .$$

Следовательно, дифференцирование функции $I_1 = I_1(y)$ по параметру y допустимо:

$$\frac{dI_1(y)}{dy} == -\int_0^{+\infty} \frac{x \sin xy}{1+x^2} dx = -I_2(y).$$

Дифференцировать функцию $I_2 = I_2(y)$ по параметру y нельзя, так как расходится интеграл

$$\frac{dI_2(y)}{dy} = \int_0^{+\infty} \frac{x^2 \cos xy}{1+x^2} dx .$$

Поступим следующим образом. Используя известный интеграл Дирихле

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin xy}{x} dx = \frac{\pi}{2}, \qquad y > 0$$

и складывая его с равенством $\frac{dI_1(y)}{dy} = -\int_0^{+\infty} \frac{x \sin xy}{1+x^2} dx$,

получаем, что $\frac{dI_1(y)}{dy} + \frac{\pi}{2} = \int_0^{+\infty} \frac{\sin xy}{x(1+x^2)} dx$.

В силу признака Вейерштрасса интеграл в правой части сходится равномерно, следовательно, допустимо дифференцирование по параметру y

$$\frac{d^2 I_1(y)}{dy^2} = \frac{d}{dy}\left(\frac{dI_1(y)}{dy} + \frac{\pi}{2} \right) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos xy}{1+x^2} dx = I_1(y).$$

4.7. Доказать, что $\int_0^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^\alpha)}$ не зависит от величины α.

Решение

Имеем

$$\int_0^\infty \frac{dx}{\left(1+x^2\right)\left(1+x^\alpha\right)} = \int_0^1 \frac{dx}{\left(1+x^2\right)\left(1+x^\alpha\right)} + \int_1^\infty \frac{dx}{\left(1+x^2\right)\left(1+x^\alpha\right)} = J_1 + J_2.$$

Сделаем в первом интеграле замену $x = 1/y$, тогда

$$J_1 = \int_1^\infty \frac{dy}{\left(1+y^2\right)\left(1+y^{-\alpha}\right)}$$

откуда получаем, что

$$J_1 + J_2 = \int_1^\infty \left(\frac{1}{1+x^\alpha} + \frac{x^\alpha}{1+x^\alpha}\right)\frac{dx}{1+x^2} = \int_1^\infty \frac{dx}{1+x^2},$$

что не зависит от α .

4.8. Известно, что $\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. Вычислите $\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2}\cos(\alpha x)dx$.

Решение

Обозначим $J(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2}\cos(\alpha x)dx$.

Тогда

$$J'(\alpha) = -\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\cdot x\sin(\alpha x)dx = \begin{vmatrix} u = \sin\alpha x, du = \alpha\cos\alpha x dx \\ dv = e^{-x^2}\cdot x dx, v = -\frac{1}{2}e^{-x^2} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2}e^{-x^2}\sin(\alpha x)\Big|_0^{+\infty} - \frac{\alpha}{2}\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\cos(\alpha x)dx = -\frac{\alpha}{2}J(\alpha).$$

Получили следующую задачу Коши

$$J'(\alpha) = -\frac{\alpha}{2} J(\alpha) \text{ при } J(0) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Общее решение $\ln|J| = -\frac{\alpha^2}{4} + C$ или $J = C_1 e^{-\frac{\alpha^2}{4}}$.

С учетом начального условия $J = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-\frac{\alpha^2}{4}}$.

4.9. Исследовать на сходимость интегралы:

1) $\int\limits_0^\infty \frac{dx}{1 + x^4 \cos^2 x}$;

2) $\int\limits_0^\infty \frac{xdx}{1 + x^2 \cos^2 x}$.

Решение

1) Положим $f(x) = \frac{1}{1 + x^4 \cos^2 x}$, тогда при $\pi n \le x \le \pi(n+1)$ имеем $\frac{1}{1 + \pi^4 (n+1)^4 \cos^2 x} \le f(x) \le \frac{1}{1 + (\pi n)^4 \cos^2 x}$;

$$\int\limits_{\pi n}^{\pi(n+1)} \frac{dx}{1 + \pi^4 (n+1)^4 \cos^2 x} \le \int\limits_{\pi n}^{\pi(n+1)} f(x) dx \le \int\limits_{\pi n}^{\pi(n+1)} \frac{dx}{1 + (\pi n)^4 \cos^2 x},$$

$$\int\limits_0^\pi \frac{dx}{1 + \pi^4 (n+1)^4 \cos^2 x} =$$

$$= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d(\operatorname{tg} x)}{\operatorname{tg} x + 1 + \pi^4 (n+1)^4} + \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{d(\operatorname{tg} x)}{\operatorname{tg}^2 x + 1 + \pi^4 (n+1)^4} = \frac{\pi}{\sqrt{1 + \pi^4 (n+1)^4}}.$$

Суммируя по n, находим

$$\pi\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\pi^4(n+1)^4}}\le\int_0^{\infty}f(x)dx\le\pi\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\pi^4n^4}},$$

откуда видно, что интеграл сходится.

2) $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{xdx}{1+x^2\cos^2 x}\ge\int_0^{\infty}\frac{xdx}{1+x^2}$, т.е. интеграл расходится.

4.10. Пусть интеграл $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx$ сходится и равен *J*. Доказать, что интеграл $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}f\left(x-\frac{1}{x}\right)dx$ тоже сходится и равен *J*.

Решение

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f\left(x-\frac{1}{x}\right)dx=\int_{0}^{+\infty}f\left(x-\frac{1}{x}\right)dx+\int_{-\infty}^{0}f\left(x-\frac{1}{x}\right)dx=I_1+I_2\,.$$

В каждом из интегралов делаем замену переменной $x-\dfrac{1}{x}=t$.

Имеем $x=\dfrac{t+\sqrt{t^2+4}}{2}$ при $x>0$, $x=\dfrac{t-\sqrt{t^2+4}}{2}$ при $x<0$, т.е.

$$I_1=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\left(1+\frac{t}{\sqrt{t^2+4}}\right)dt,\quad I_2=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\left(1+\frac{t}{\sqrt{t^2+4}}\right)dt.$$

Интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\left(1+\frac{t}{\sqrt{t^2+4}}\right)dt$ сходится, если сходится $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$ (по признаку Абеля). Отсюда получаем, что I_1 и I_2 сходятся и $I_1+I_2=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$.

4.11. Исследовать на сходимость интеграл $\int\limits_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^\alpha\sin^2 x}$.

Решение

Сходимость интеграла эквивалентна сходимости ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty}\int\limits_{\pi n}^{\pi(n+1)}\frac{dx}{1+x^\alpha\sin^2 x}=\sum_{n=0}^{\infty}\int\limits_0^{\pi}\frac{dt}{1+(\pi n+t)^\alpha\sin^2 t}.$$

Оценим члены a_n этого ряда

$$\int\limits_0^{\pi}\frac{dt}{1+(\pi(n+1))^\alpha\sin^2 t}\le a_n\le\int\limits_0^{\pi}\frac{dt}{1+(\pi n)^\alpha\sin^2 t},$$

$$\int\limits_0^{\pi}\frac{dt}{1+b^2\sin^2 t}=2\int\limits_0^{\pi/2}\frac{dt}{1+b^2\sin^2 t}=2\int\limits_0^{\infty}\frac{d(\operatorname{tg}t)}{1+(b^2+1)\operatorname{tg}^2 t}=\frac{\pi}{\sqrt{b^2+1}}.$$

Отсюда $a_n\sim n^{-\alpha/2}$, т.е. интеграл сходится при $\alpha>2$ и расходится при $\alpha\le 2$.

4.12. Известно, что $\int\limits_0^1\frac{\ln(1+x)}{x}dx=\frac{\pi^2}{12}$. Вычислите $\int\limits_0^1\frac{\ln(1-x^3)}{x}dx$.

Решение

Обозначим $I_k = \int\limits_0^1 \frac{\ln\left(1-x^k\right)}{x}dx = \frac{1}{k}\int\limits_0^1 \frac{\ln\left(1-y\right)}{y}dy$.

Тогда $I = \int\limits_0^1 \frac{\ln\left(1+x\right)}{x}dx = I_2 - I_1 = -\frac{I_1}{2}$,

$$I_3 = \int\limits_0^1 \frac{\ln\left(1-x^3\right)}{x}dx = \frac{I_1}{3} = -\frac{I}{3} = -\frac{\pi^2}{18}.$$

Эйлеровы интегралы: бета- и гамма-функции

1. Бета-функция

Так называется интеграл Эйлера первого рода

$$\mathrm{B}\left(x,y\right) = \int\limits_0^1 t^{x-1}\left(1-t\right)^{y-1}dt = \int\limits_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{\left(1+t\right)^{x+y}}dt,$$
$$x, y > 0.$$

Данный интеграл равномерно сходится по $x, y > 0$.

Свойства:

1) $\mathrm{B}\left(x,y\right) = \mathrm{B}\left(y,x\right)$;

2) $\mathrm{B}\left(x+1,y\right) = \frac{x}{x+y}\mathrm{B}\left(x,y\right)$, $\mathrm{B}\left(x,y+1\right) = \frac{y}{x+y}\mathrm{B}\left(x,y\right)$;

3) если $y \in \mathbb{N}$, то $\mathrm{B}\left(x,n\right) = \mathrm{B}\left(n,x\right) = \frac{1\cdot 2\cdot 3\ldots\cdot\left(n-1\right)}{x\left(x+1\right)\ldots\left(x+n-1\right)}$;

4) $\mathrm{B}\left(x,1-x\right) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{z^{x-1}}{1+z}dz$.

2. Гамма-функция

Так называется интеграл Эйлера второго рода

$$\Gamma(x)=\int\limits_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt=\int\limits_0^1\left(\ln\frac{1}{t}\right)^{x-1}dt .$$

Данный интеграл равномерно сходится по $x>0$.

График гамма-функции представлен на рис. 4.1.

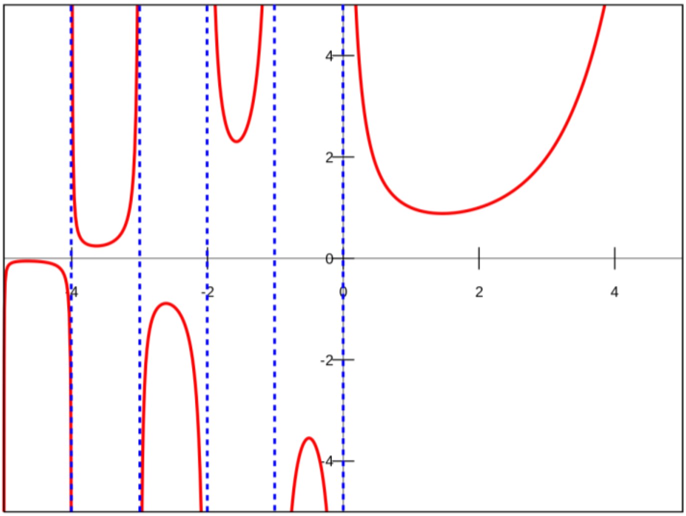


Рис. 4.1

Свойства:

1) функция $\Gamma(x)$ непрерывна и бесконечно дифференцируема, причем

$$\Gamma^{(n)}(x)=\int\limits_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\ln^{(n)}t\,dt ;$$

2) формула приведения $\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$. Из этой формулы, в частности, следует, что $\Gamma(n+1)=n!$, $n\in\mathbb{N}$.

3) для любых $x,y>0$ справедливо:

$$\mathrm{B}(x,y)=\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)};$$

4) для отрицательных нецелых x также справедлива формула $\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$;

5) справедлива формула $\Gamma(x)\Gamma(1-x)=\dfrac{\pi}{\sin\pi x}$ при $x\neq n$, $n\in\mathbb{Z}$;

6) при вычислении многих интегралов большую роль играет так называемая логарифмическая производная функции $\Gamma(x)$

$$\frac{d\Gamma(x)}{dx}=\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)},\ x>0.$$

Важны её различные интегральные представления:

$$\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}=\int_0^{+\infty}\left(e^{-t}-\frac{1}{(1+t)^x}\right)\frac{dt}{t}.$$

Полагая $x=1$, получаем формулу Гаусса

$$\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}-\Gamma'(1)=\int_0^1\frac{1-t^{x-1}}{1-t}dt.$$

С учётом того, что

$$\frac{1}{1-t}=1+t+t^2+\ldots,\qquad |t|<1, \text{ то}$$

$$\int_0^1\frac{1-t^{x-1}}{1-t}dt=\int_0^1\left(1-t^{x-1}\right)\left(1+t+t^2+\ldots\right)dt=\int_0^1\sum_{k=0}^{\infty}\left(t^k-t^{k+x-1}\right)dt.$$

Ряд, стоящий под интегралом, равномерно сходится, следовательно, его можно интегрировать почленно.

Тогда

$$\int_0^1 \frac{1-t^{x-1}}{1-t}dt = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+x}\right)$$

и $\dfrac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} - \Gamma'(1) = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\dfrac{1}{k+1}-\dfrac{1}{k+x}\right)$. (*)

Откуда можно получить важную формулу

$$\frac{d^n \ln\Gamma(x)}{dx^n} = (-1)^n (n-1)!\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(k+x)^n}.$$

Интегрируя почленно ряд (*), получаем

$$\ln\Gamma(x) - \Gamma'(1)(x-1) = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{x-1}{k+1} - \ln\frac{x+k}{k+1}\right).$$

Подставив $x = 2$, получим

$$\ln\Gamma(2) - \Gamma'(1) = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{k+1} - \ln\frac{2+k}{k+1}\right).$$

Так как

$$\ln\Gamma(2) = \ln\left(\int_0^{+\infty} t^1 e^{-t} dt\right) = \ln 1 = 0,$$

получаем равенство

$$\Gamma'(1) = -\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{k+1} - \ln\frac{2+k}{k+1}\right) = -\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k} - \ln\frac{1+k}{k}\right).$$

С учётом того, что

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}-\ln n\right) = C,$$

где $C = 0{,}577215665\ldots$ - постоянная Эйлера, получаем, что $\Gamma'(1) = -C$;

7) интересна теорема Фруллани:

а) если существует $\lim\limits_{x\to 0+} f(x) = f(0+)$, то

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx = f(0+) \ln \frac{b}{a};$$

б) если существует $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = A$, то

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx = A \ln \frac{a}{b}.$$

Примеры

4.13. Вычислить интеграл $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sqrt[5]{x}}{(1+x)^2} dx$.

Решение

Преобразуем исходный интеграл для приведения к бета- и гамма-функциям

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sqrt[5]{x}}{(1+x)^2} dx = \int\limits_0^{+\infty} \frac{x^{\frac{6}{5}-1}}{(1+x)^{\frac{6}{5}+\frac{4}{5}}} dx,$$

тогда

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sqrt[5]{x}}{(1+x)^2} dx = \int\limits_0^{+\infty} \frac{x^{\frac{6}{5}-1}}{(1+x)^{\frac{6}{5}+\frac{4}{5}}} dx = \mathrm{B}(x, y) =$$

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{6}{5}\right)\Gamma\left(\frac{4}{5}\right)}{\Gamma(2)} = \Gamma\left(1+\frac{1}{5}\right)\Gamma\left(\frac{4}{5}\right) = \frac{1}{5}\Gamma\left(\frac{1}{5}\right)\Gamma\left(\frac{4}{5}\right) =$$

$$= \frac{1}{5}\Gamma\left(\frac{1}{5}\right)\Gamma\left(1-\frac{1}{5}\right) = \frac{1}{5} \cdot \frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{5}} = \frac{\pi}{5} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5-\sqrt{5}}}.$$

4.14. Определить область существования и вычислить интеграл $I = \int\limits_0^{\pi/2} \sin^m x \cos^n x dx$.

Решение

Пусть $\sin x = \sqrt{t}$, $t \geq 0$. Тогда $\cos x dx = \dfrac{1}{2\sqrt{t}} dt$, и для искомого интеграла получаем

$$I = \int\limits_0^{\pi/2} \sin^m x \cos^n x dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 t^{\frac{m-1}{2}} (1-t)^{\frac{n-1}{2}} dt = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 t^{\frac{m+1}{2}-1} (1-t)^{\frac{n+1}{2}-1} dt.$$

Тогда искомый интеграл сходится при $\dfrac{m+1}{2} > 0$ и $\dfrac{n+1}{2} > 0$ и его значение равно

$$I = \frac{1}{2} \mathrm{B}\left(\frac{m+1}{2}, \frac{n+1}{2}\right).$$

4.15. Вычислить площадь области, ограниченной кривой $\left(x^2 + y^2\right)^6 = x^4 y^2$.

Решение

Очевидно, что $S = 4S_1$, где S_1 - площадь в первой четверти.

Вводя обозначения $x = r\cos\varphi; y = r\sin\varphi$, получаем уравнение кривой $r^{12} = \cos^4\varphi \sin^2\varphi \Leftrightarrow r = \cos^{2/3}\varphi \sin^{2/3}\varphi$.

Так как площадь криволинейного сектора $S=\frac{1}{2}\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^2(\varphi)\,d\varphi$,

то $S_1=\frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi/2}\cos^{4/3}\varphi\sin^{4/3}\varphi$. Используя результат предыдущей задачи, получаем при $n=\frac{4}{3};m=\frac{2}{3}$:

$$S_1=\frac{1}{4}B\left(\frac{4/3+1}{2};\frac{2/3+1}{2}\right)=\frac{1}{4}B\left(\frac{7}{6};\frac{5}{6}\right).$$

Так как $B(x,y)=\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$, то

$S_1=\frac{1}{4}\frac{\Gamma\left(\frac{7}{6}\right)\Gamma\left(\frac{5}{6}\right)}{\Gamma(2)}\Rightarrow\Gamma(2)=1;\quad \Gamma\left(\frac{7}{6}\right)=\Gamma\left(1+\frac{1}{6}\right)=\frac{1}{6}\Gamma\left(\frac{1}{6}\right)$, то $S_1=\frac{1}{24}\Gamma\left(\frac{1}{6}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{5}{6}\right)==\frac{1}{24}\Gamma\left(\frac{1}{6}\right)\cdot\Gamma\left(1-\frac{1}{6}\right)$; так как $\Gamma(x)\cdot\Gamma(1-x)=\frac{\pi x}{x\sin\pi x}=\frac{\pi}{\sin\pi x}$, откуда $S_1=\frac{1}{24}\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{6}}=\frac{\pi}{12}$. Следовательно, площадь всей области равна $S=4S_1=4\cdot\frac{\pi}{12}=\frac{\pi}{3}$. График области представлен на рис. 4.2.

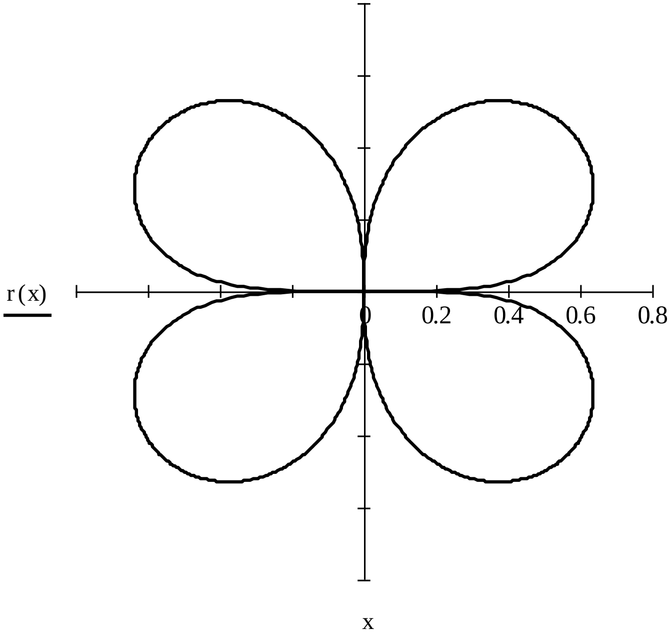


Рис. 4.2

4.16. Вычислить площадь области, ограниченной кривой $(x^2+y^2)^4 = xy^3$.

Решение

Очевидно, что $S = 2S_1$, где S_1 - площадь в первой четверти (необходимо выполнение условия $xy > 0$).

Вводя обозначения $x = r\cos\varphi; y = r\sin\varphi$, получаем уравнение кривой $(\mathrm{r}^2\cos^2\varphi + \mathrm{r}^2\sin^2\varphi)^4 = r\cos\varphi \cdot r^3\sin^3\varphi$.

$$r^8 = r^4\cos\varphi\sin^3\varphi \Rightarrow r^4 = \cos\varphi\sin^3\varphi \Rightarrow r = \cos^{\frac{1}{4}}\varphi\sin^{\frac{3}{4}}\varphi\,.$$

Так как площадь криволинейного сектора $S=\frac{1}{2}\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^2(\varphi)\,d\varphi$, то

$$S_1=\frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi/2}\cos^{\frac{1}{2}}\varphi\sin^{\frac{3}{2}}\varphi d\varphi=\frac{1}{4}\mathrm{B}\left(\frac{\frac{1}{2}+1}{2};\frac{\frac{3}{2}+1}{2}\right)=$$

$$=\frac{1}{4}\mathrm{B}\left(\frac{3}{4};\frac{5}{4}\right)=\frac{1}{4}\frac{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)}{\Gamma(2)}=\frac{1}{4}\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)=$$

$$=\frac{1}{4}\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\Gamma\left(1+\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{16}\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{16}\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(1-\frac{1}{4}\right)=$$

$$=\frac{1}{16}\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{8\sqrt{2}}.$$

Тогда площадь всей области $S=2S_1=\frac{\pi}{4\sqrt{2}}=\frac{\pi\sqrt{2}}{8}$. График области представлен на рис. 4.3.

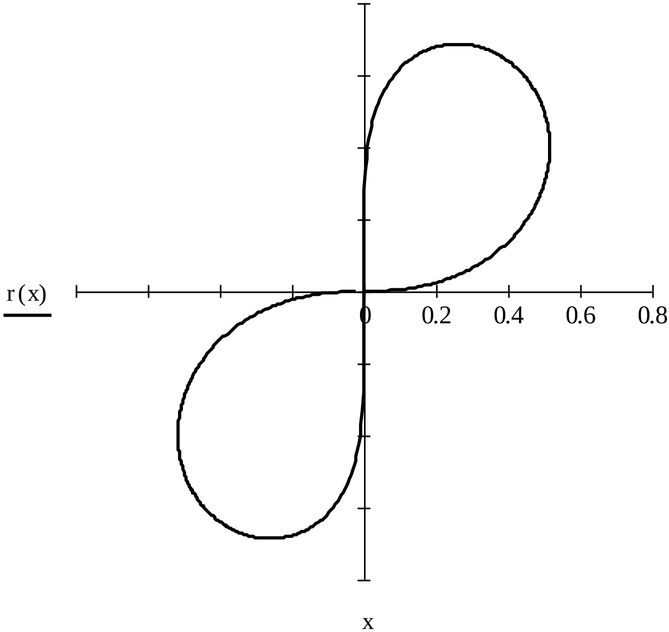


Рис. 4.3

4.17. Вычислить $\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2} \ln^2 x dx$.

Решение

$t = x^2$, тогда $I = 2\int\limits_0^{+\infty} t^{-\frac{1}{2}} e^{-t} \ln^2 t dt$.

Пусть $\Gamma(x) = \int\limits_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$, $\Gamma'(x) = \int\limits_0^{+\infty} \ln t \cdot t^{x-1} e^{-t} dt$, $\Gamma''(x) = \int\limits_0^{+\infty} \ln^2 t \cdot t^{x-1} e^{-t} dt$.

Следовательно, $I = 2\Gamma''\left(\frac{1}{2}\right)$.

Так как $\dfrac{d^2 \ln\Gamma(x)}{dx^2} = \left(\dfrac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}\right) = \dfrac{\Gamma''(x) - (\Gamma'(x))^2}{\Gamma^2(x)} =$

$= \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{(n+x)^2}$, то при $x = \dfrac{1}{2}$, $\dfrac{\Gamma'' - \left(\Gamma'\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2}{\Gamma^2\left(\frac{1}{2}\right)} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{4}{(2n+1)^2}$.

$$\frac{\Gamma'\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} = C + \int_0^1 \frac{1-t^{-\frac{1}{2}}}{1-t} dt = C - \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t}(1+\sqrt{t})} = C - 2\ln 2 .$$

Тогда $\Gamma'\left(\dfrac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}(\mathrm{C} - 2\ln 2)$.

Так как $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2} = \dfrac{\pi^2}{6}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2} - 2\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(2n)^2} = \dfrac{\pi^2}{12}$, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(2n-1)^2} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\pi^2}{6} + \dfrac{\pi^2}{12}\right) = \dfrac{\pi^2}{8}$.

Тогда $\Gamma''\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{4\frac{\pi^2}{8}\Gamma^2\left(\frac{1}{2}\right) + \left(\Gamma'\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} =$

$$= \frac{\pi^2}{2}\sqrt{\pi} + (\sqrt{\pi})^2(\mathrm{C} - 2\ln 2)^2 = \pi\left(\frac{\pi\sqrt{\pi}}{2} + (\mathrm{C} - 2\ln 2)^2\right).$$

Где $C \approx 0{,}57...$ - постоянная Эйлера.

4.18. Вычислить $\int\limits_0^9 g(x)dx$, где $g(x)$- функция, обратная функции $f(x) = x^3 + x$.

Решение

Первый способ решения

$$\int\limits_0^9 g(y)dy = S = 9a - \int\limits_0^9 \left(x^3 + x\right)dx = 9a - \frac{a^4}{4} - \frac{a^2}{2},$$

где a - решение уравнения $x^3 + x = 9$.

Второй способ решения

Так как $f(x) = x^3 + x$, то $f(0) = 0$. Пусть $f(a) = 9$. Тогда из геометрического смысла графиков взаимно обратных функций и из геометрического смысла определенного интеграла, как площади криволинейной трапеции следует, что

$$S = 9a - \int\limits_0^a \left(x^3 + x\right)dx = 9a - \left(\frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^a = 9a - \frac{a^4}{4} - \frac{a^2}{2}.$$

Здесь a - решение уравнения $x^3 + x = 9$.

4.19. Доказать, что $\int\limits_1^3 t^t dt \geq 7$.

Решение

Первый способ решения

Представим интеграл в виде

$$\int_1^3 t^t dt = \int_1^2 t^t dt + \int_2^3 t^t dt\ .$$

При $1 \le t \le 2$ имеем $t^2 \ge t$, поэтому

$$\int_1^2 t^t dt \ge \int_1^2 t dt = \frac{t^2}{2}\Big|_1^2 = \frac{3}{2}\ .$$

При $2 \le t \le 3$ имеем $t^t \ge t^2$, а значит,

$$\int_2^3 t^t dt \ge \int_2^3 t^2 dt = \frac{t^3}{3}\Big|_2^3 = \frac{19}{3}\ .$$

Окончательно получаем $\int_1^3 t^t dt = \frac{3}{2} + \frac{19}{3} = 7\frac{5}{6} > 7$.

Второй способ решения

Рассмотрим функцию $y = t^t$.

$$y' = \left(e^{t\ln t}\right)' = e^{t\ln t}\left(t\ln t\right)' = t^t\left(\ln t + 1\right).$$

$$y'' = \left(t^t\right)'\left(\ln t + 1\right) + t^t\left(\ln t + 1\right)' = t^t\left(\ln t + 1\right)^2 + t^t\frac{1}{t} > 0$$

при $t \ge 1$. Следовательно, функция $y = t^t$ выпукла вниз.

Поэтому для возрастающих функций, выпуклых вниз, имеем:

$$\int_a^b f(x)dx \ge \left(\frac{b-a}{n}\right)\left(f(a) + f\left(a + \frac{b-a}{n}\right) + \ldots + f\left(a + \frac{b-a}{n}(n-1)\right)\right).$$

Разобьем отрезок $[1;3]$ на четыре одинаковых отрезка.

Тогда имеем

$$J \geq \frac{1}{2}y(1)+\frac{1}{2}y\left(\frac{3}{2}\right)+\frac{1}{2}y(2)+\frac{1}{2}y\left(\frac{5}{2}\right)=\frac{1}{2}\left(1+1.5^{1.5}+2^2+2.5^{2.5}\right).$$

Далее, $1.5^{1.5}=1.5\sqrt{1.5}>1.5\sqrt{1.44}=1.5\cdot 1.2=1.8$,

$2.5^{2.5}=2.5^2\cdot\sqrt{2.5}=6.25\cdot\sqrt{6.25}>6.25\cdot\sqrt{1.96}=6.25\cdot 1.4=$
$=6.25+2.5=8.75$.

Отсюда $J \geq \dfrac{1}{2}(1+1.8+4+8.75)=\dfrac{15.55}{2}=7.7525>7$.

4.20. Вычислите сумму интегралов: $\int\limits_{\sqrt{\pi/6}}^{\sqrt{\pi/3}}\sin(x^2)dx+\int\limits_{1/2}^{\sqrt{3}/2}\sqrt{\arcsin x}dx$.

Решение

Подынтегральные функции являются взаимно обратными, положительными, возрастающими. Пределы интегрирования соответствуют друг другу. Поэтому если во втором интегральном выражении заменить переменную *x* на *y*, то интегралы будут численно равны площадям заштрихованных фигур, изображенных на рис. 4.4.

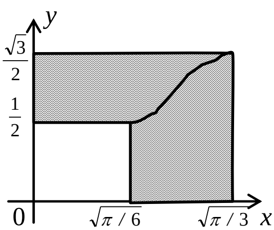


Рис. 4.4

Сумма площадей вычисляется как разность площадей прямоугольников и равна $\dfrac{\sqrt{\pi}\left(\sqrt{6}-1\right)}{2\sqrt{6}}$.

4.21. Вычислить $\int\limits_{1}^{\frac{5}{4}}\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)dx$.

Решение

Первый способ решения

Функция $y = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$ обратная к функции $y = \operatorname{ch} x$.

$$\int_1^{\frac{5}{4}} \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right) dx = \int_0^{\ln 2} y d \operatorname{ch} y = y \operatorname{ch} y \Big|_0^{\ln 2} - \int_0^{\ln 2} \operatorname{ch} y dy =$$

$$= \ln 2 \cdot \frac{2 + 1/2}{2} - \operatorname{sh} y \Big|_0^{\ln 2} = \ln 2 \cdot \frac{2 + 1/2}{2} - \frac{2 - 1/2}{2} = \frac{5}{4} \ln 2 - \frac{3}{4}.$$

Второй способ решения

Применяя формулу интегрирования по частям, получаем:

$$\int_1^{\frac{5}{4}} \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right) dx = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right) x \Big|_1^{5/4} - \int_1^{\frac{5}{4}} x \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}}{x + \sqrt{x^2 - 1}} dx =$$

$$= \frac{5}{4} \ln\left(\frac{5}{4} + \sqrt{\frac{9}{16}}\right) - 1 \cdot \ln 1 - \int_1^{5/4} \frac{x dx}{\sqrt{x^2 - 1}} = \frac{5}{4} \ln 2 - \sqrt{x^2 - 1} \Big|_1^{5/4} = \frac{5}{4} \ln 2 - \frac{3}{4}.$$

4.22. Найти $\lim\limits_{n \to \infty} \int_0^{\pi} \cos\left(x^n\right) dx$.

Решение

При $|x| < 1 \quad \cos\left(x^n\right) \to 1, n \to \infty$, следовательно,

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^1 \cos\left(x^n\right) dx = 1.$$

В интеграле $J_n = \int_1^{\pi} \cos\left(x^n\right) dx$ сделаем замену $t = x^n$ и полученный интеграл проинтегрируем по частям:

$$J_n = \frac{1}{n}\int_1^{\pi^n} t^{\frac{1}{n}-1}\cos t dt = \frac{1}{n}\left(\left(t^{\frac{1}{n}-1}\sin t\right)\Big|_1^{\pi^n} + \frac{n-1}{n}\int_1^{\pi^n} t^{\frac{1}{n}-2}\sin t dt\right) \le$$

$$\le \frac{1}{n}\left(1 + \int_1^{\pi^n} t^{\frac{1}{n}-2} dt\right) \to 0, n \to \infty.$$

4.23. Вычислить площадь, ограниченную кривыми

$(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2),\ \ x^2 + y^2 \ge a^2.$

Решение

Задача решается переходом к полярным координатам.

Ответ. $a^2(\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}).$

4.24. Функция $f(x)$ интегрируема на $[0,1]$, причем $\int_0^1 f(x)dx > 0.$

Доказать, что существует отрезок $[a,b] \subset [0,1]$, на котором $f(x) > 0$.

Решение

Так как $f(x)$ интегрируема на $[0,1]$, то при любом выборе точек $\frac{i-1}{n} \le \xi_i \le \frac{i}{n}$ сумма $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)$ стремится к $\int_0^1 f(x)dx$ при $n \to \infty.$ Если же на любом отрезке $[a,b]$ существует точка, в которой $f(x) \le 0$, то точки ξ_i можно выбирать так, что $f(\xi_i) \le 0$; при этом суммы $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)$ будут неположительны, и их предел не может быть положительной величиной.

4.25. Известно, что если $f(x)$ монотонна и $\int\limits_0^{\infty} f(x)dx$ сходится, то $\int\limits_0^{\infty} f(x)dx = \lim\limits_{h\to 0+0} h\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(nh)$.

Найти предел $\lim\limits_{t\to 1-0}(1-t)\left(\dfrac{t}{1+t}+\dfrac{t^2}{1+t^2}+\ldots+\dfrac{t^n}{1+t^n}+\ldots\right)$.

Решение

Функция $f(x)=\dfrac{1}{1+e^x}$ монотонна; $\int\limits_0^{\infty}\dfrac{dx}{1+e^x}<\infty$, так что

$$\int\limits_0^{\infty}\frac{dx}{1+e^x}=\ln 2=\lim_{h\to 0+0} h\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+e^{nh}}=\lim_{t\to 1-0}(-\ln t)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+e^{-n\ln t}}=$$

$$=\lim_{t\to 1-0}(-\ln t)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{1+t^n}.$$

Но $\ln t=\ln\big(1-(1-t)\big)=-(1-t)+o(1-t)$ при $t\to 1-0$, так что

$\dfrac{-\ln t}{1-t}\to 1$ при $t\to 1-0$ и

$$\lim_{t\to 1-0}(-\ln t)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{1+t^n}=\lim_{t\to 1-0}(1-t)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{1+t^n}.$$

Таким образом, искомый предел равен ln2.

4.26. Вычислить $\int\limits_0^1\dfrac{x^b-x^a}{\ln x}dx \quad (a>0, b>0)$.

Решение

Обозначим $\int\limits_0^1\dfrac{x^b-x^a}{\ln x}dx=\Phi(b)$.

Тогда имеем

$$\Phi'(b)=\int_0^1 \frac{x^b \ln x}{\ln x}dx=\frac{1}{b+1}, \text{т.е. } \Phi=\int_0^b \frac{db}{b+1}+C=\ln(b+1)+C.$$

Но $\Phi'(b)$ при $b=a$ обращается в нуль, откуда $C=-\ln(a+1)$ и $\Phi(b)=\ln\dfrac{b+1}{a+1}$.

4.27. Определить объем тора (тела, полученного вращением круга радиусом R вокруг непересекающей его оси). Расстояние от центра круга до оси равно d .

Решение

Пусть тор получается вращением окружности $y=d\pm\sqrt{R^2-x^2}$ относительно оси Ox ; тогда его объем равен

$$\pi\int_{-R}^{R}(d+\sqrt{R^2-x^2})^2dx-\pi\int_{-R}^{R}(d-\sqrt{R^2-x^2})^2dx=$$

$$=4\pi d\int_{-R}^{R}\sqrt{R^2-x^2}dx=4\pi dR^2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\varphi d\varphi=2\pi^2dR^2.$$

4.28. Пусть $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$ и удовлетворяет соотношению $f\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)\le\dfrac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$.

Доказать, что

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a)\le\int_a^b f(x)dx\le\frac{f(a)+f(b)}{2}(b-a).$$

Решение

Из непрерывности и выпуклости $f(x)$ следует, что

$$f(x) \le \frac{f(a)(b-x)+f(b)(x-a)}{(b-a)}, \text{ при } x\in[a,b].$$

Отсюда получается правое неравенство. Для доказательства левого неравенства делаем замену переменной $x=(a+b)/2+t.$ Тогда

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{-\frac{b-a}{2}}^{\frac{b-a}{2}} f\left(\frac{a+b}{2}+t\right)dt = \int_0^{\frac{b-a}{2}} \left[f\left(\frac{a+b}{2}+t\right)+f\left(\frac{a+b}{2}-t\right)\right]dt \ge$$

$$\ge \int_0^{\frac{b-a}{2}} 2f\left(\frac{a+b}{2}\right)dt = (b-a)f\left((a+b)/2\right)$$

4.29. Существует ли функция, непрерывная и положительная на $[0,+\infty)$ такая, что $\int_0^{\infty} f(x)dx$ сходится, но $f(x)$ не стремится к 0 при $x\to+\infty$?

Решение

В качестве такой функции можно взять, например, функцию $e^{-x}+h(x)$, $h(x)$ – функция, равная нулю вне отрезков $\left[k-\frac{1}{k^2}, k+\frac{1}{k^2}\right]$ $(k=2,3...)$, равная единице при $(x=2,3...)$ и линейная на отрезках $\left[k-\frac{1}{h^2},k\right]$ и $\left[k,k+\frac{1}{h^2}\right]$.

4.30. Функция $f(x)$ непрерывна и положительна на всей оси. Известно, что $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t-x|} f(x)dx \le 1$ при всех t. Доказать, что при всех $a<b$ справедливо $\int_a^b f(x)dx \le \frac{b-a}{2}+1$.

Решение

Функция $F(t)=\int\limits_a^b e^{-|t-x|} f(x)dx$ непрерывна, так что существует

$$\int\limits_a^b F(t)dt=\int\limits_a^b f(x)dx\int\limits_a^b e^{-|t-x|}dt=\int\limits_a^b f(x)\left(2-e^{a-x}-e^{x-b}\right)dx.$$

Так как $F(t)\le 1$, имеем

$$2\int\limits_a^b f(x)dx-\int\limits_a^b e^{a-x} f(x)dx-\int\limits_a^b e^{x-b} f(x)dx\le b-a\ ,$$

откуда

$$\int\limits_a^b f(x)dx\le\frac{b-a}{2}+\frac{1}{2}\int\limits_a^b e^{-|a-x|} f(x)dx+\frac{1}{2}\int\limits_0^b e^{-|b-x|} f(x)dx\le\frac{b-a}{2}+1.$$

4.31. Доказать, что для непрерывно дифференцируемой на $[a,b]$ функции $f(x)$

$$\max_{a\le x\le b}\left|f'(x)\right|\ge\frac{4}{(b-a)^2}\int\limits_a^b\left|f(x)\right|dx,$$

если $f(a)=f(b)=0$.

Решение

Пусть $x\in(a,b)$. Тогда

$f(x)=f'(\theta_1)(x-a)=f'(\theta_2)(x-b)$, где $\theta_1\in(a,x)$, $\theta_2\in(x,b)$,

так что

$$\left|f(x)\right|\le M(x-a),\left|f(x)\right|\le M(b-x),\text{ где } M=\max_{a\le x\le b}\left|f'(x)\right|.$$

Имеем далее

$$\frac{4}{(b-a)^2}\int_a^b |f(x)|dx \le \frac{4}{(b-a)^2}\left(\int_0^{(a+b)/2} M(x-a)dx + \int_{(a+b)/2}^{b} M(b-x)dx\right) =$$

$$= \frac{4}{(b-a)^2}\left[\frac{(b-a)^2}{8}M + \frac{(b-a)^2}{8}M\right] = M.$$

4.32. Существует ли функция $f(x)$ на отрезке $[0,2]$, удовлетворяющая следующим условиям: $f(x)$ непрерывно дифференцируемая на $[0,2]$, $f(0) = f(2) = 1$, $\left|\int_0^2 f(x)dx\right| \le 1$, $|f'(x)| \le 1$?

Решение

При $x \in (0,2)$:

$f(x) = 1 + f'(\theta_1)x = 1 + f'(\theta_2)(2-x)$, где $\theta_1 \in (0,x), \theta_2 \in (x,2)$,

откуда соответственно $f(x) \ge 1-x, f(x) \ge x-1$ и

$$\int_0^1 f(x)dx \ge \int_0^1 (1-x)dx = \frac{1}{2}, \quad \int_1^2 f(x)dx \ge \int_1^2 (x-1)dx = \frac{1}{2},$$

причем равенства не могут иметь места одновременно, ибо тогда $f(x) = 1-x$ при $x \in [0,1]$ и $f(x) = x-1$ при $x \in [1,2]$ и нарушается условие непрерывной дифференцируемости $f(x)$.

Поэтому

$$\int_0^2 f(x)dx = \int_0^1 f(x)dx + \int_1^2 f(x)dx > 1,$$

что противоречит последнему условию.

Таким образом, не существует функции $f(x)$, удовлетворяющей поставленным условиям.

4.33. Доказать, что если $f \in C^2[0,1]$, то

$$\lim_{n\to\infty} n\left[\int_0^1 f(t)\,dt - \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)\right] = \frac{f(1)-f(0)}{2}.$$

Решение

Обозначим $c = \max_{x\in[0,1]}\left|f''(x)\right|$, тогда будем иметь

$$f\left(\frac{k}{n}\right) = f\left(\frac{k-1}{n}\right) + f'\left(\frac{k-1}{n}\right)\frac{1}{n} + f''(\alpha)\frac{1}{2n^2},$$

где $\alpha \in \left(\dfrac{k-1}{n}, \dfrac{k}{n}\right)$, т.е.

$$f'\left(\frac{k-1}{n}\right) = n\left[f\left(\frac{k}{n}\right) - f\left(\frac{k-1}{n}\right)\right] + \delta_{n,k}, \text{ где } \left|\delta_{n,k}\right| \le c/2n.$$

Далее,

$$\int_{(k-1)/n}^{k/n} f(t)\,dt = \int_{(k-1)/n}^{k/n}\left[f\left(\frac{k-1}{n}\right) + f'\left(\frac{k-1}{n}\right)\left(t-\frac{k-1}{n}\right) + \varphi_{k,n}(t)\right]dt,$$

где $\left|\varphi_{k,n}(t)\right| \le \dfrac{c}{2n^2}$ при $t \in \left[\dfrac{k-1}{n}, \dfrac{k}{n}\right]$, так что данный интеграл равен, с учетом выражения для $f'\left(\dfrac{k-1}{n}\right)$,

$$\frac{f\left(\frac{k}{n}\right) + f\left(\frac{k-1}{n}\right)}{2n} + \varepsilon_{n,k}, \left|\varepsilon_{n,k}\right| \le \frac{3}{4}\frac{c}{n^3}.$$

Таким образом,

$$n\int_0^1 f(t)dt-\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)=n\left(\sum_{k=1}^{n}\int_{(k-1)/n}^{k/n} f(t)dt-\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)\right)=$$

$$=n\left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{f\left(\frac{k-1}{n}\right)+f\left(\frac{k}{n}\right)}{2}-\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{k}{n}\right)\right]+o\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{f(1)-f(0)}{2}+o\left(\frac{1}{n}\right)$$

4.34. Пространственное тело T_r состоит из всех точек, находящихся на расстоянии, не большем r, от данного выпуклого многогранника S. Пусть V_r – объем этого тела. Найти $\lim\limits_{r\to+\infty}\dfrac{V(r)}{r^3}$.

Решение

Пусть P – произвольная точка многогранника S. Тогда шар радиусом r с центром в P содержится в T_r, так что $V(r)\ge\frac{4}{3}\pi r^3$. Пусть наибольшее из расстояний от P до других точек S равно d; тогда T_r содержится в шаре радиусом $r+d$ с центром в P, так что

$$V(r)\le\frac{4\pi}{3}(r+d)^3 \text{ и } \frac{4}{3}\pi\le\frac{V(r)}{r^3}\le\frac{4}{3}\pi\left(1+\frac{d}{r}\right)^3,$$

откуда $\lim\limits_{r\to\infty}\dfrac{V(r)}{r^3}=\dfrac{4}{3}\pi$.

4.35. Вычислить предел $\lim\limits_{p\to+\infty}\left(\int\limits_0^1 |f(x)^p|dx\right)^{1/p}$, где $f(x)\in C[0,1]$.

Решение

Обозначим $A=\max\limits_{x\in[0,1]}\left|f(x)\right|$, $A=\left|f(x_0)\right|$. При $p>0$ имеем

$$\left(\int\limits_0^1 |f(x)^p|dx\right)^{1/p}\le\left(\int\limits_0^1 A^p dx\right)^{1/p}=A.$$

Пусть $\varepsilon>0$; выберем $\delta>0$ так, что при $|x-x_0|<\delta$ $|f(x_0)|\ge A-\dfrac{\varepsilon}{2}$;

пусть $0\le\alpha\le x_0\le\beta\le 1$ и $0<|\alpha-\beta|<\delta.$

Тогда

$$\left(\int\limits_0^1 |f(x)^p|dx\right)^{1/p}\ge\left(\int\limits_\alpha^\beta \left|f(x)^p\right|dx\right)^{1/p}\ge\left(\int\limits_\alpha^\beta \left(A-\frac{\varepsilon}{2}\right)^p dx\right)^{1/p}=$$

$$=\left(A-\frac{\varepsilon}{2}\right)(\beta-\alpha)^{1/p}\ge A-\varepsilon$$

при достаточно больших p. Таким образом, искомый предел равен A.

4.36. Функция $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$, и для любого отрезка $[\alpha,\beta]\subset[a,b]$ имеет место неравенство $\left|\int\limits_\alpha^\beta f(x)dx\right|\le M\left|\beta-\alpha\right|^{1+\delta}$ (M,δ - положительные константы). Доказать, что $f(x)$ на $[a,b]$.

Решение

Пусть $\alpha \in (a,b), \varepsilon_k > 0,$ причем $\varepsilon_k \to 0$ при $k \to \infty$ и $\alpha + \varepsilon_k < b$ при $k \in \mathbb{N}$.

Тогда $\left| \int\limits_{\alpha}^{\alpha+\varepsilon_k} f(x)dx \right| \le M\varepsilon_k^{1+\delta}$ и по теореме о среднем

$$\int\limits_{\alpha}^{\alpha+\varepsilon_k} f(x)dx = \varepsilon_k f(\alpha_k) \text{ при } \alpha_k \in (\alpha, \alpha+\varepsilon_k),$$

откуда $|f(\alpha_k)| \le M\varepsilon_k^{\delta}$ и $|f(\alpha_k)| \to 0$ при $k \to \infty$, что в силу непрерывности $f(x)$ и $\alpha_k \to \alpha$ дает $f(\alpha) = 0,$ т.е. $f(x) \equiv 0$ на (a,b). Очевидно, что тогда $f(x) \equiv 0$ и на $[a,b]$.

4.37. Пусть γ - простая замкнутая кривая с непрерывной кривизной, ограничивающая выпуклую область *D*. Введем функцию $\rho(x,y),$ равную кратчайшему расстоянию от точки (x,y) до кривой, взятому со знаком минус, если $(x,y) \in D,$ и со знаком плюс, если $(x,y) \notin D$. Доказать, что при достаточно малых $a > 0$

$$\iint\limits_{|\rho| \le a} \rho(x,y)dxdy = \frac{4}{3}\pi a^3.$$

Решение

Пусть s – натуральный параметр на кривой $r = r(s)$ – ее уравнение, $\theta_{(s)}$ - угол между единичным вектором $\tau(s) = r'(s)$ и фиксированным направлением отсчета. В силу выпуклости кривой $\theta_{(s)}$ - монотонно возрастающая функция, так что кривизна $k(s) = \theta'_{(s)} \ge 0$. Пусть l – длина кривой. Тогда

$$\int_{\delta_0}^{s_0+l} k(s)ds = \theta(s)\Big|_{s_0}^{s_0+l} = 2\pi \,. \tag{4.1}$$

Пусть $a < 1/k_{\max}$. Рассмотрим отображение прямоугольника $s_0 \le s \le s_0 + l, |t| \le a$ на область $|\rho(x,y)| \le a$, которое задается формулой $r(s,t) = r(s) + n(s)t$, где $n(s)$ – единичный вектор внешней нормали.

Докажем, что оно взаимно однозначно.

Пусть $r(s_1,t_1) = r(s_2,t_2)$, причем $s_1 \le s_2$, $|l_1| \le a$, $|l_2| \le a$. Тогда

$$r(s_2) - r(s_1) = n(s_1)t_1 - n(s_2)t_2 \,. \tag{4.2}$$

В силу равенства (4.1) приращение $\theta_{(s)}$ на одном из отрезков $[s_1, s_2]$ или $[s_2, s_1 + l]$ не превосходит π . Поэтому, не уменьшая общности, можно считать, что $\theta_{(s_2)} - \theta_{(s_1)} = 2\theta_0 \le \pi.$ Выберем направление отсчета так, чтобы $\theta_{(s_2)} = -\theta_{(s_1)} = \theta_0$, и спроектируем (4.2) на это направление.

Проекция правой части равна - $\sin\theta_0(t_1 + t_2)$.

Левую часть запишем в виде $\int_{s_1}^{s_2} r'(s)ds$ и для ее проекции получим выражение $\int_{s_1}^{s_2} \cos\theta(s)ds$. Таким образом,

$$\int_{s_1}^{s_2} \cos\theta(s)ds = -\sin\theta_0(t_1 + t_2) \,. \tag{4.3}$$

Так как $|\theta_{(s)}| \le \pi/2$, то $\cos\theta_{(s)} \ge 0$ и

$$\int_{\delta_1}^{\delta_2} \cos\theta(s)ds \geq \int_{\delta_1}^{\delta_2} \cos\theta(s)\frac{k(s)}{k_{\max}}ds \geq a\int_{-\theta_0}^{\theta_0} \cos\theta d\theta = 2a\sin\theta_0.$$

Поскольку $|t_1|+|t_2|\leq 2a$, то отсюда следует, что равенство (4.3) возможно лишь при $\sin\theta_0 = 0$, т.е. при $\theta_0 = 0$. Но в этом случае $\cos\theta_{(s)} \equiv 1$, и из (3) получаем, что $s_1 = s_2$, а тогда из (4.2) $t_1 = t_2$.

Для вычисления интеграла произведем замену переменных, соответствующую отображению $r(s,t)$. Ясно, что $\rho(x,y) = t.$ Найдем якобиан отображения. Имеем

$$r_t^{'}(s,t) = n(s),\ \ r_s^{'}(s,t) = r^{'}(s) + n^{'}(s) = \tau(s) + k(s)\tau(s)t,$$

поскольку $n^{'}(s) = k(s)\tau(s)$. Таким образом, модуль якобиана равен $\left|r_t^{'}\times r_s^{'}\right| = 1 + h(s)t > 0$ при $|t|\leq a.$

Следовательно,

$$\iint\limits_{|\rho|\leq a} \rho(x,y)dxdy = \int_{\delta_0}^{s_0+1} ds\int_{-a}^{a}(1+k(s)t)tdt = \frac{2}{3}a^3\int_{s_0}^{s_0+l} k(s)ds = \frac{4}{3}\pi a^3.$$

4.38. Доказать, что

$$\frac{\pi^2}{809} \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{xdx}{100+2\sqrt{3}\sin^3 x\cos x} \leq \frac{\pi^2}{800}.$$

Решение

Обозначим

$$f(x) = \frac{1}{100+2\sqrt{3}\sin^3 x\cos x},\ \ g(x) = x.$$

Докажем, что $0 \le \sin^3 x \cos x \le \dfrac{3\sqrt{3}}{16}$ при $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$. Обозначим $\varphi(x) = \sin^3 x \cos x$, тогда

$$\varphi(x) = \frac{1}{4}\sin 2x(1 - \cos 2x) = \frac{1}{4}\sin 2x - \frac{1}{8}\sin 4x, \text{ откуда}$$

$$\varphi'(x) = \frac{1}{2}(\cos 2x - \cos 4x) = \sin x \sin 3x.$$

Уравнение $\varphi'(x) = 0$ имеет единственный корень $x = x_0 = \dfrac{\pi}{3}$ на интервале $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$, причём $\varphi'(x) > 0$ при $x \in \left(0, \dfrac{\pi}{3}\right)$ и $\varphi'(x) < 0$ при $x \in \left(\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{\pi}{2}\right)$. Следовательно, $x_0 = \dfrac{\pi}{3}$ точка максимума функции $\varphi(x)$ и $\max\limits_{\left[0,\frac{\pi}{2}\right]} \varphi(x) = \varphi(x_0) = \dfrac{3\sqrt{3}}{16}$. То есть $\dfrac{8}{809} \le f(x) \le \dfrac{1}{100}$.

Далее по формуле среднего значения имеем

$$\mu = \frac{\int\limits_a^b f(x)g(x)dx}{\int\limits_a^b g(x)dx}.$$

Учитывая, что $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} g(x)dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} xdx = \dfrac{\pi^2}{8}$, получаем

$$\frac{\pi^2}{809} \le \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{xdx}{100 + 2\sqrt{3}\sin^3 x \cos x} \le \frac{\pi^2}{800}.$$

4.39. Вычислить интеграл $\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x+1992x^{1992}}$.

Решение

Преобразуем подынтегральное выражение:

$$\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x+1992x^{1992}} = \int\limits_1^\infty \frac{1}{\left(\frac{1}{x^{1991}}+1992\right)} \frac{dx}{x^{1992}},$$

и проводя замену $\left|t = x^{-1991}\right|$, получаем

$$\int\limits_1^\infty \frac{1}{\left(\frac{1}{x^{1991}}+1992\right)} \frac{dx}{x^{1992}} = -\frac{1}{1991}\int\limits_1^0 \frac{dt}{t+1992} = \frac{1}{1991}\ln\frac{1993}{1992}.$$

4.40. Пусть $0<a<b$. Докажите, что

$$\int\limits_1^\infty \left(x^2+1\right)e^{-x^2}dx \ge e^{a^2}-e^{b^2}.$$

Решение

Первый способ

Пусть $f(x) = \int\limits_0^x \left(t^2+1\right)e^{-t^2}dt$ и $g(x) = -e^{-x^2}$; обе функции - возрастающие. Тогда по теореме Лагранжа существует $x \in (a,b)$, такой что

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{\left(x^2+1\right)e^{-x^2}}{2xe^{-x^2}} = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{x}\right) \ge \sqrt{x\cdot\frac{1}{x}} = 1.$$

Поэтому

$$\int\limits_1^\infty \left(x^2+1\right)e^{-x^2}dx = f(b)-f(a) \ge g(b)-g(a) = e^{a^2}-e^{b^2}.$$

Второй способ

$$\int_a^b \left(x^2+1\right)e^{-x^2}dx \ge \int_a^b 2xe^{-x^2}dx = \left[-e^{-x^2}\right]\Big|_a^b = e^{-a^2} - e^{-b^2}.$$

4.41. Доказать, что

$$\int_0^1\int_0^1 \frac{dxdy}{x^{-1}+|\ln y|-1} \le 1.$$

Решение

Первый способ

Докажем полезное неравенство

$$x^{-1}-1 \ge |\ln x|,\ x\in(0,1].$$

Дифференцируя тождество

$$\left(x^{-1}-1\right)\Big|_{x=1} = |\ln x|\Big|_{x=1} = 0,$$

получаем

$$\left(x^{-1}-1\right)' = -\frac{1}{x^2} \le -\frac{1}{x} = |\ln x|',\ x\in(0,1].$$

Тогда

$$\int_0^1\int_0^1 \frac{dxdy}{x^{-1}+|\ln y|-1} \le \int_0^1\int_0^1 \frac{dxdy}{|\ln x|+|\ln y|} = \int_0^1\int_0^1 \frac{dxdy}{|\ln(xy)|}.$$

Вводя замену $y = u/x$:

$$\int_0^1\int_0^1 \frac{dxdy}{|\ln(xy)|} = \int_0^1\left(\int_u^1 \frac{dx}{x}\right)\frac{du}{|\ln(u)|} = \int_0^1 |\ln(u)|\frac{du}{|\ln(u)|} = 1.$$

Второй способ

Обозначим $s = x^{-1}-1$ и $u = s-\ln y$,

$$\int_0^1\int_0^1 \frac{dxdy}{x^{-1}+|\ln y|-1} = \int_0^\infty\int_s^\infty \frac{e^{s-u}}{(s+1)^2 u} duds = \int_0^\infty \left(\int_0^u \frac{e^s}{(s+1)^2} ds \right) \frac{e^{-u}}{u} du .$$

Так как функция $\dfrac{e^s}{(s+1)^2}$ выпукла, то

$$\int_0^u \frac{e^s}{(s+1)^2} ds \le \frac{u}{2}\left(\frac{e^u}{(u+1)^2} + 1 \right),$$

поэтому

$$\int_0^1\int_0^1 \frac{dxdy}{x^{-1}+|\ln y|-1} \le \int_0^\infty \frac{u}{2}\left(\frac{e^u}{(u+1)^2}+1 \right)\frac{e^{-u}}{u} du = \frac{1}{2}\left(\int_0^\infty \frac{du}{(u+1)^2} + \int_0^\infty e^{-u} du \right) = 1.$$

4.42. Пусть $f,g:[a,b]\to[0,\infty)$ - непрерывные и неубывающие функции, для которых $\forall x\in[a,b]$, справедливо

$$\int_a^x \sqrt{f(t)}dt \le \int_a^x \sqrt{g(t)}dt \text{ и } \int_a^b \sqrt{f(t)}dt = \int_a^b \sqrt{g(t)}dt .$$

Доказать, что

$$\int_a^b \sqrt{1+f(t)}dt \ge \int_a^b \sqrt{1+g(t)}dt .$$

Решение

Пусть $F(x)=\int_a^x \sqrt{f(t)}dt$ и $G(x)=\int_a^x \sqrt{g(t)}dt$. Функции F,G выпуклы и $F(a)=G(a)=0$ и по условию $F(b)=G(b)$. Необходимо доказать, что

$$\int_a^b \sqrt{1+\left(F'(t)\right)^2}dt \ge \int_a^b \sqrt{1+\left(G'(t)\right)^2}dt ,$$

т.е. «длина» графика F больше «длины» графика G .

4.43. Доказать, что $\int\limits_0^1 \sqrt{\sin \pi x}dx < 0{,}8$.

Решение

$$\int\limits_0^1 \sqrt{\sin \pi x}dx \le \sqrt{\int\limits_0^1 \sin \pi x dx \int\limits_0^1 dx} < \sqrt{\frac{2}{4}} < 0{,}8 .$$

4.44. $\int\limits_0^\pi \frac{\sin 2001x}{\sin x}dx = ?$

Решение

$$\int\limits_0^\pi \frac{\sin(2n+3)x}{\sin x} = \int\limits_0^\pi \frac{\sin(2n+1)\cos 2x}{\sin x}dx +$$

$$+\int\limits_0^\pi \frac{\sin 2x \cos(2n+1)x}{\sin x}dx = \int\limits_0^\pi \frac{\sin(2n+1)x}{\sin x}dx -$$

$$-\int\limits_0^\pi \sin(2n+1)x \sin x dx + 2\int\limits_0^\pi \cos(2n+1)x \cos x dx =$$

$$= \int\limits_0^\pi \frac{\sin(2n+1)x}{\sin x}dx = \ldots = \int\limits_0^\pi \frac{\sin x}{\sin x}dx = \pi \text{ .}$$

4.45. $\int\limits_0^{2\pi} \sin(\sin x + nx)dx, n \in Z$.

Решение

$t = x - \pi, dx = dt$

$$\int\limits_0^{2\pi} \sin(\sin x + nx)dx = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin(-\sin t + nt + n\pi)dt =$$

$$= (-1)^n \int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin(-\sin t + nt)dt = 0 .$$

4.46. Вычислить $\int\limits_0^{2008} x(x-4)(x-8)...(x-2008)dx.$

$$\int\limits_0^{2008} x(x-4)(x-8)...(x-2008)dx = \begin{vmatrix} y = x-1004 \\ x = 1004+y \end{vmatrix} =$$

$$= \int\limits_{-1004}^{1004} (y+1004)(y+1000)(y+996)...(y+4)\times$$

$$\times y(y-4)(y-8)...(y-1004)dy == \int\limits_{-1004}^{1004} f(y)dy \,.$$

Покажем, что $f(y)$ – нечетная функция

$$f(-y) = (-1)^{503} f(y) = -f(y), т.е.$$

$$\int\limits_{-1004}^{1004} f(y)dy = 0\,.$$

ГЛАВА 5. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Простейшие типы уравнений, не разрешимых относительно производной

1. Дифференциальное уравнение первого порядка, не разрешенное относительно производной

$$F(x,y,y^{'})=0 \tag{5.1}$$

имеет вид

$$F(y')=0\,, \tag{5.2}$$

причем существует, по крайней мере, один единственный корень $y'=k_i$ этого уравнения.

Так как уравнение (5.2) не содержит x и y , то k_i - постоянное. Следовательно, интегрируя уравнение $y'=k_i$, получаем $y\ =k_i x+c$, или $k_i=\dfrac{y-c}{x}$, но k_i является корнем уравнения (5.2), следовательно, $F\left(\dfrac{y-c}{x}\right)=0$ является интегралом рассматриваемого уравнения.

Пример 1.

$$\left(y'\right)^7-\left(y'\right)^5+y'+3=0\,.$$

Интеграл уравнения $\left(\dfrac{y-c}{x}\right)^7-\left(\dfrac{y-c}{x}\right)^5+\dfrac{y-c}{x}+3=0$.

2. Уравнение $F(x,y,y')=0$ имеет вид

$$F(x,y')=0\,. \tag{5.3}$$

Если это уравнение трудно разрешить относительно y', то целесообразно ввести параметр t и заменить уравнение (5.3) двумя уравнениями: $x=\varphi(t)$ и $y'=\psi(t)$. Так как $dy=y'dx$, то в данном случае $dy=\psi(t)\varphi'(t)dt$, откуда $y=\int\psi(t)\varphi'(t)dt+c$ и, следовательно, интегральные кривые уравнения (5.3) определяются в параметрической форме следующими уравнениями:

$$x=\varphi(t),$$

$$y=\int\psi(t)\varphi'(t)dt+c.$$

Если уравнение (5.3) легко разрешимо относительно x, $x=\varphi(y')$, то почти всегда удобно в качестве параметра ввести $y'=t$. Тогда $x=\varphi(t)$, $dy=y'dx=t\varphi'(t)dt$, $y=\int t\varphi'(t)dt+c$.

Пример 2.

$$x=(y')^3-y'-1.$$

Положим $y'=t$, тогда

$$x=t^3-t-1, \qquad (*)$$

$$dy=y'dx=t\left(3t^2-1\right)dt,$$

$$y=\frac{3t^4}{4}-\frac{t^2}{2}+c_1. \qquad (**)$$

Уравнения (*) и (**) определяют в параметрической форме семейство искомых интегральных прямых.

Пример 3.

$$x\sqrt{1+y'^2} = y'.$$

Полагаем $y' = \operatorname{tg} t$, $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$; тогда

$$x = \sin t, \tag{*}$$

$$dy = y'dx = \operatorname{tg} t \cos t\, dt = \sin t\, dt,$$

$$y = -\cos t + c_1 \tag{**}$$

или, исключая t из уравнений (*) и (**), получаем $x^2 + \left(y - c_1\right)^2 = 1$ - семейство окружностей.

Уравнение $F(x, y, y') = 0$ имеет вид

$$F(y, y') = 0. \tag{5.4}$$

Если это уравнение трудно разрешить относительно y', то, как и в предыдущем случае, целесообразно ввести параметр t и заменить уравнение (5.4) двумя уравнениями: $y = \varphi(t)$ и $y' = \psi(t)$. Так как $dy = y'dx$, то $dx = \frac{dy}{y'} = \frac{\varphi'(t)dt}{\psi(t)}$, откуда $x = \int \frac{\varphi'(t)dt}{\psi(t)} + c$. Следовательно, искомые интегральные кривые в параметрической форме определяются уравнениями

$$x = \int \frac{\varphi'(t)dt}{\psi(t)} + c \text{ и } y = \varphi(t).$$

В частности, если уравнение (5.4) легко разрешимо относительно y, то обычно за параметр удобно взять y'.

Действительно, если $y = \varphi(y')$, то, полагая $y' = t$, получаем $y = \varphi(t)$, $dx = \dfrac{dy}{y'} = \dfrac{\varphi'(t)dt}{t}$, $x = \int \dfrac{\varphi'(t)dt}{t} + c$.

Пример 4.

$$y = \left(y'\right)^5 + \left(y'\right)^3 + y' + 5.$$

Полагаем , тогда

$$y = t^5 + t^3 + t + 5, \qquad (*)$$

$$dx = \frac{dy}{y'} = \frac{\left(5t^4 + 3t^2 + 1\right)dt}{t} = \left(5t^3 + 3t + \frac{1}{t}\right)dt,$$

$$x = \frac{5t^4}{4} + \frac{3t^2}{2} + \ln|t| + c. \qquad (**)$$

Уравнения (*) и (**) являются параметрическими уравнениями семейства интегральных кривых.

Пример 5.

$$\frac{y}{\sqrt{1 + y'^2}} = 1.$$

Полагаем $y' = \operatorname{sh} t$, тогда

$$y = \operatorname{ch} t, \qquad (*)$$

$$dx = \frac{dy}{y'} = \frac{\operatorname{sh} t\, td}{\operatorname{sh} t} = dt, \qquad (**)$$

или, исключая из (*) и (**) параметр t, получаем $y = \operatorname{ch}(x - c)$.

Рассмотрим теперь общий случай: левая часть уравнения

$$F(x,y,y')=0 \qquad (5.5)$$

зависит от всех трех аргументов x,y,y'. Заменим уравнение (5.5) его параметрическим представлением:

$$x=\varphi(u,\upsilon)\,,\ \ y=\psi(u,\upsilon)\,,\ \ y'=\chi(u,\upsilon)\,.$$

Пользуясь зависимостью $dy=y'dx$, будем иметь

$$\frac{\partial\psi}{\partial u}du+\frac{\partial\psi}{\partial\upsilon}d\upsilon=\chi(u,\upsilon)\left[\frac{\partial\varphi}{\partial u}du+\frac{\partial\varphi}{\partial\upsilon}d\upsilon\right],$$

откуда, разрешая относительно производной $\dfrac{d\upsilon}{du}$, получаем

$$\frac{d\upsilon}{du}=\frac{\chi(u,\upsilon)\dfrac{\partial\varphi}{\partial u}-\dfrac{\partial\psi}{\partial u}}{\dfrac{\partial\psi}{\partial\upsilon}-\chi(u,\upsilon)\dfrac{\partial\varphi}{\partial\upsilon}}\,. \qquad (5.6)$$

В результате получено уравнение первого порядка, уже *разрешенное относительно производной*, и тем самым (5.5) сведена к уже рассмотренным ранее, однако, конечно, полученное уравнение (5.6) далеко не всегда будет интегрироваться в квадратурах.

Если уравнение

$$F(x,y,y')=0$$

легко разрешимо относительно y, то за параметры u и υ часто удобно брать x и y'. Действительно, если уравнение (5.1) приводится к виду

$$y=f(x,y')\,, \qquad (5.7)$$

то, считая x и $y'=p$ параметрами, получаем

$$y = f(x, p), \; dy = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial p}dp$$

или

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial p}\frac{dp}{dx},$$

$$p = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial p}\frac{dp}{dx}. \tag{5.8}$$

Интегрируя уравнение (5.8) (конечно, оно далеко не всегда интегрируется в квадратурах), получаем $\Phi(x,\, p,\, c) = 0$. Совокупность уравнений $\Phi(x,\, p,\, c) = 0$ и $y = f(x, p)$, где p - параметр, определяющий семейство интегральных кривых.

Заметим, что уравнение (5.8) может быть получено дифференцированием уравнения (5.7) по x. Действительно, дифференцируя (5.7) по x и полагая $y' = p$, получаем $p = \dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial p}\dfrac{dp}{dx}$, что совпадает с (5.8). Поэтому этот метод часто называют интегрированием дифференциальных уравнений с помощью дифференцирования.

Совершенно часто интегрируется уравнение

$$F(x, y, y') = 0,$$

если оно легко разрешимо относительно x:

$$x = f(y, y'). \tag{5.9}$$

В этом случае, взяв за параметры y и $y' = p$ и пользуясь зависимостью $dy = y'dx$, получим

$$dy = p\left[\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial p}dp\right]$$

или

$$\frac{1}{p} = \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial p}\frac{dp}{dy}. \tag{5.10}$$

Интегрируя уравнение (5.10), получим $\Phi(x, p, c) = 0$. Это уравнение совместно с $x = f(y, p)$ определяет интегральные кривые исходного уравнения. Уравнение (5.10) может быть получено из уравнения (5.9) дифференцированием по y.

В качестве примера применения этого метода рассмотрим линейное относительно x и y уравнение

$$y = x\varphi\left(y'\right) + \psi\left(y'\right),$$

называемое *уравнением Лагранжа*. Дифференцируя по x и полагая $y' = p$, получаем

$$p = \varphi(p) + x\varphi'(p)\frac{dp}{dx} + \psi'(p)\frac{dp}{dx} \tag{5.11}$$

или

$$\left[p - \varphi(p)\right]\frac{dx}{dp} = x\varphi'(p) + \psi'(p). \tag{5.12}$$

Это уравнение линейно относительно x и $\frac{dx}{dp}$ и, следовательно, легко интегрируется, например, методом вариации постоянной. Получив интеграл $\Phi(x, p, c) = 0$ уравнения (5.12) и присоединяя к нему $y = x\varphi\left(p\right) + \psi\left(p\right)$, получаем уравнения, определяющие искомые интегральные кривые.

При переходе от уравнения (5.11) к уравнению (5.12) пришлось делить на $\frac{dp}{dx}$. Но при этом мы потеряем решения, если они существуют, для которых p постоянно, а значит $\frac{dp}{dx} \equiv 0$. Считая p постоянным, замечаем, что уравнение (5.11) удовлетворяет лишь в том случае, если p является корнем уравнения $p - \varphi(p) = 0$.

Итак, если уравнение $p - \varphi(p) = 0$ имеет действительные корни $p = p_i$, ток найденным выше решениям уравнения Лагранжа надо еще добавить $y = x\varphi(p) + \psi(p)$, $p = p_i$, или, исключая p, $y = x\varphi(p_i) + \psi(p_i)$ - прямые линии.

Пример 6.

$$y = xy' - y'^2 \text{ - уравнение Клеро.}$$

Однопараметрическое семейство интегральных прямых имеет вид $y = cx - c^2$. Кроме того, интегральной кривой является огибающая этого семейства, определяемая уравнениями $y = cx - c^2$ и $x - 2c = 0$. Исключая c, получаем $y = \frac{x^2}{4}$.

Пример 7.

$$y = 2xy' - y'^3 \text{ - уравнение Лагранжа.}$$

$$y' = p,$$

$$y = 2xp - p^3. \qquad (*)$$

Дифференцируя, получаем

$$p = 2p + 2x\frac{dp}{dx} - 3p^2\frac{dp}{dx} \qquad (**)$$

и после деления на $\frac{dp}{dx}$ приходим к уравнению

$$p\frac{dx}{dp} = -2x + 3p^2 .$$

Интегрируя это линейное уравнение, получаем $x = \frac{c_1}{p^2} + \frac{3}{4}p^2$. Следовательно, интегральные кривые определяются уравнениями $y = 2xp - p^3$, $x = \frac{c_1}{p^2} + \frac{3p^2}{4}$.

При делении на $\frac{dp}{dx}$, как указывалось выше, теряются решения $p = p_i$, где p_i - корни уравнения $p - \varphi(p) = 0$. В данном случае теряется решение $p = 0$ уравнения (**), которому в силу уравнения (*), соответствует решение исходного уравнения $y = 0$.

5.1. Найти все непрерывные функции $y(x)$, удовлетворяющие уравнению $\int_{-x}^{x} ty(t)dt = y(x) + 1$.

Решение

Так как $y(x)$ непрерывна, то функция $\int_{-x}^{x} ty(t)dt$ дифференцируема, $y(x)$ дифференцируема.

Продифференцируем обе части уравнения, получаем:

$y'(x) = xy(x) - (-x)y(-x)$. $y(-x)+1 = \int\limits_{x}^{-x} ty(t)dt = -\int\limits_{-x}^{x} ty(t)dt = -y(x) - 1$.

Следовательно, $y(x) + y(-x) = -2$. Получили систему дифференциальных уравнений:

$$xy(x) - xy(-x) = y'(x),$$
$$y(x) + y(-x) = 2.$$

Исключая из этой системы $y(-x)$, получаем $2xy(x) = -2x + y'(x)$ - уравнение с разделяющимися переменными.

$$2xy(x) = -2x + \frac{dy}{dx}; \frac{dy}{y+1} = 2xdx;$$

$$\ln|y+1| = x^2 + C; \, y(x) = -1 + C_1 e^{x^2}.$$

Подставив в исходное уравнение $x = 0$, получим: $y(0) + 1 = 0$, т.е. $y(0) = -1$.Следовательно, $C_1 = 0, y(x) = -1$.

5.2. Функция $y(x)$ удовлетворяет уравнению $y' = 4\sqrt{y - x^2}$. Известно, что $y(1) = 2$. Вычислить $y(3)$.

Решение

Функцию естественно подобрать так, чтобы квадратный корень извлекался. Пусть $y = kx^2$. Тогда $y(1) = k = 2$. $y = 2x^2$, тогда $y' = 4x = 4\sqrt{2x^2 - x^2} = 4\sqrt{y - x^2}$. $y = 2x^2$ -одно решение, по теореме единственности других решений нет. Тогда $y(3) = 2 \cdot 3^2 = 18$.

5.3. Решить систему дифференциальных уравнений

$$y' = y^2 + z,$$
$$z' = z^2 + y$$

с начальным условием $y(0) = z(0) = 1$.

Решение

Предположим $y(x) = z(x)$, получим уравнение $y' = y^2 + y$ с начальным условием $y(0) = 1$. Решим его. $\dfrac{dy}{dx} = y(y+1)$;

$\displaystyle\int \frac{dy}{y(y+1)} = x + C$; $\quad \ln|y| - \ln|y+1| = x + C$; $\quad \ln\left|\dfrac{y}{y+1}\right| = x + C$;

$y = \dfrac{C_1 e^x}{1 + C_1 e^x}$. Подставив $x = 0$, получим $y(0) = 1 = \dfrac{C_1}{1 - C_1}$, откуда

$C_1 = \dfrac{1}{2}$. Следовательно, $y(x) = \dfrac{\frac{1}{2}e^x}{1 - \frac{1}{2}e^x} = \dfrac{e^x}{2 - e^x}$. Пара функций

$y(x) = z(x) = \dfrac{e^x}{2 - e^x}$ удовлетворяет системе дифференциальных уравнений и начальным условиям, поэтому по теореме единственности это и будет решением системы.

Ответ: $y(x) = z(x) = \dfrac{e^x}{2 - e^x}$.

5.4. Найти общее решение $x^2 \dfrac{d^2 y}{dx^2} + 3x \dfrac{dy}{dx} + y = 0$.

Решение

Уравнение перепишем так: $\left(x^2 \dfrac{dy}{dx} + xy\right)' = 0$.

Отсюда $x^2 \dfrac{dy}{dx} + xy = C$, где C-постоянная. Сделав замену $\dfrac{y}{x} = z$, приведем уравнение к виду $z'x + 2z = \dfrac{C}{x^2}$, решение которого получаем методом вариации произвольной постоянной $z=\frac{C}{x}+\frac{C}{x^2}.C,C-$постоянные.

Решение исходного уравнения $y=z\cdot x=C+\frac{C}{x}$.

5.5. Найти решение дифференциального уравнения бесконечного порядка $y+\frac{x}{1!}y'+\frac{x^2}{2!}y''+\frac{x^3}{3!}y'''+...=e^x$.

Решение

По смыслу задачи ряд в формулировке задачи должен сходиться при всех действительных x. Если предположить, например, что $y^n(x)\le A^n, A>0, \forall x\in\mathbb{R}$, то вместе со сходимостью указанного ряда мы получим, что функция $y(x)$ при всех действительных x равна сумме своего ряда Тейлора. Дифференцируя исходное уравнение по x, получаем $2\left(y'+\frac{x}{1!}y''+\frac{x^2}{2!}y'''+\frac{x^3}{3!}y^{IV}+...\right)=e^x$.

Дифференцируя данное соотношение, получаем $4\left(y''+\frac{x}{1!}y'''+\frac{x^2}{2!}y^{IV}+...\right)=e^x$ и т.д. Из полученных равенств при $x=0$ следует

$$y(0)=1, y'(0)=\frac{1}{2}, y''(0)=\frac{1}{4},..., y^{(n)}(0)=2^{-n},... \quad .$$

Подставляя эти значения в ряд Тейлора для $y(x)$, выводим $y(x)=e^{\frac{1}{2}}$.

5.6. Снегопад начался до полудня и продолжался далее с постоянной интенсивностью. Ровно в полдень бригада вышла на уборку снега на шоссе постоянной ширины. За первые 2 часа рабочие расчистили 2 км, а за следующие 2 часа им удалось продвинуться лишь 1 км. Скорость уборки снега постоянна. Определить время начала снегопада.

Решение

Пусть b - скорость выпадения снега (увеличение толщины снежного покрова за единицу времени, $см/час$), c - производительность уборки снега (уменьшение толщины снега за единицу времени на единицу длины шоссе, $см \cdot км/час$). Пусть снег начался за t_0 часов до полудня. Тогда в момент времени t перед бригадой находится участок шоссе, покрытый слоем снега толщиной $b(t+t_0)\,см$. Скорость v передвижения бригады по шоссе равна

$$v = \frac{c}{b(t+t_0)} \frac{км}{час}.$$

За время T бригада удалится от начальной точки на расстояние

$$x = \int_0^T v\,dt = \int_0^T \frac{c}{b(t+t_0)}dt = \frac{c}{b}\left(\ln(t_0+T) - \ln t_0\right).$$

По условию задачи: $x(2)=2$, $x(4)=3$, получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{c}{b}\ln\dfrac{t_0+2}{t_0} = 2 \\ \dfrac{c}{b}\ln\dfrac{t_0+4}{t_0} = 3, \end{cases}$$

Откуда $t_0 = \sqrt{5}-1 = 1\,час, 14\,мин, 10\,сек$, т.е. снегопад начался в $10\,час, 45\,мин, 50\,сек$.

5.7. Найти все функции $y(x)$, $x \in R$, такие что $\forall x \in R$ $\dfrac{y'''(x)}{y''(x)} = \dfrac{y'(x)}{y(x)}$.

Решение

Пусть $y(x)$, $x \in R$ - искомая функция. Обозначим $a(x) = \dfrac{y'''(x)}{y''(x)} = \dfrac{y'(x)}{y(x)}$.

Тогда $y(x)$ и $y''(x)$, $x \in R$ - ненулевые решения.

Линейное однородное дифференциальное уравнение первого порядка $z' = a(x)z$. И поэтому $\forall x \in R$ $y''(x) = my(x)$, где $m \neq 0$ (m - постоянное число).

1) $m > 0$. Пусть $m = k^2$, тогда $y(x) = c_1 e^{kx} + c_2 e^{-kx}$.

Чтобы y не обращался в 0, исключим случаи $c_1 = c_2 = 0$ и $c_1 c_2 < 0$.

$y(x) = c_1 e^{kx} + c_2 e^{-kx}$ при рассматриваемых k, c_1 и c_2 действительно искомые функции.

2) $m < 0$. Пусть $m = -k^2$, тогда $y(x) = c_1 \cos kx + c_1 \sin kx$.

Такая функция не годится, так как имеет нули.

Ответ: $y = c_1 e^{kx} + c_2 e^{-kx}$.

5.8. Пусть функция $y = y(x)$ удовлетворяет уравнению $\dfrac{d}{dx}\left(y(x) - x\int\limits_0^3 y(x)dx \right) = y(x)$

и условию $y(0)=3$. Тогда значение выражения $y(3)+\dfrac{47-19e^3}{5-e^3}$ равно …

Решение

Обозначим $b=\int\limits_0^3 y(x)\,dx$. Тогда решение уравнения примет вид $\dfrac{d}{dx}\big(y(x)-xb\big)=y(x)$ или $\dfrac{dy}{dx}-bx=y$. Следовательно, $\int\dfrac{dy}{y+b}=\int dx$; $\ln|y+b|=x+c$; $y=c_1e^x-b$.

Подставим получившееся выражение для y в интеграл $b=\int\limits_0^3\left(c_1e^x-b\right)dx$; получим $\left(c_1e^x-b\right)\Big|_0^3=b$; $c_1e^3-3b-c_1=b$; $b=\dfrac{c_1\left(e^3-1\right)}{4}$.

Из равенств $y(0)=3$ и $y=c_1e^x-b$ имеем $c_1-b=3$ и $b=c_1-3$. Из двух выражений для b получим $c_1-3=\dfrac{c_1\left(e^3-1\right)}{4}$; $c_1=\dfrac{12}{5-e^3}$. Тогда $b=c_1-3=\dfrac{12}{5-e^3}-3=\dfrac{3e^3-3}{5-e^3}$. Следовательно, $y=c_1e^x-b=\dfrac{12}{5-e^3}e^x-\dfrac{3e^3-3}{5-e^3}=\dfrac{12e^x-3e^3+3}{5-e^3}$.

В итоге получаем

$$y(3)+\frac{47-19e^3}{5-e^3}=\frac{12e^x-3e^3+3}{5-e^3}+\frac{47-19e^3}{5-e^3}=$$

$$=\frac{50-10e^3}{5-e^3}=10\ .$$

Ответ: 10.

5.9. Составить однородное линейное дифференциальное уравнение и начальные условия, чтобы решением задачи Коши была сумма ряда $y=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{(n!)^3}$.

Решение

Данный ряд сходится при любом $x \in R$. Продифференцируем его почленно и умножим на x. Получим:

$$x\left(xy'\right)'=x^2y''+xy'=x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx^{n-1}}{(n!)^2(n-1)!}=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{(n!)\left((n-1)!\right)^2}\ .$$

Продифференцируем ещё раз:

$$\left(x^2y''+xy'\right)'=x^2y'''+3xy''+y'=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{\left((n-1)!\right)^3}=y\ .$$

Начальные значения для y, y' и y'' получаем из слагаемых ряда Тейлора.

Ответ: $x^2y'''+3xy''+y'=y$; $y(0)=y'(0)=1$; $y''(0)=\frac{1}{4}$.

5.10. Решить задачу Коши: $y^{(17)}=y$; $y(0)=1$; $y'(0)=y''(0)=...=y^{(16)}(0)=0$.

Решение

Известно, что при простом $n \in N$, для любого $k = 1,2,...,n-1$ $\sum_{j=0}^{n-1} \exp \frac{2\pi i}{n} = 0$.

Эта сумма не меняется при домножении на число $\exp \frac{2\pi i}{n} \neq 1$. Геометрически это означает, что если поместить равные массы в вершинах правильного n - угольника, то центр тяжести будет находиться в его центре. Характеристический многочлен $\chi(t) = t^{17} - 1$ имеет 17 корней $\exp \frac{2\pi ij}{17}$, $j = -8, -7, -6, ..., 8$.

Тогда $y(x) = \sum_{j=-8}^{8} c_j \exp\left(x \exp \frac{2\pi ij}{17} \right)$. Следовательно, $y^k(0) = \sum_{j=-8}^{8} c_j \left(\exp \frac{2\pi ij}{17} \right)^k$. Из $\sum_{j=0}^{n-1} \exp \frac{2\pi i}{n} = 0$ следует, что если взять $c_{-8} = c_{-7} = ... = c_8 = c$, то получится $y'(0) = y''(0) = ... = y^{(16)}(0) = 0$.

Чтобы получить $y(0) = 1$, берём $c = \frac{1}{17}$. Запишем ответ с комплексными экспонентами. Затем перепишем его, пользуясь тождеством $e^{it} + e^{-it} = 2\cos t$:

$$y = \frac{1}{17} \sum_{j=-8}^{8} \exp\left(x \exp \frac{2\pi ij}{17} \right) =$$

$$= \frac{1}{17} \sum_{j=-8}^{8} \exp\left(x \left(\cos \frac{2\pi ij}{17} + i \sin \frac{2\pi ij}{17} \right) \right) =$$

$$= \frac{e^x}{17} + \frac{2}{17} \sum_{m=1}^{8} \exp\left(x \cos \frac{2\pi m}{17} \right) \cos\left(x \sin \frac{2\pi m}{17} \right).$$

5.11. Существует ли решение дифференциального уравнения $y'' = xy$, которое касается оси ox? (касается , но не совпадает, $y \equiv 0$ не годится).

Решение

Докажем методом от противного. Пусть есть решение $y(x) \neq 0$, график которого касается ox. Тогда в точке касания x_0 имеем $y(x_0) = y'(x_0) = 0$. Эти условия определяют единственное решение задачи Коши. Но и таким решением является также $y \equiv 0$. Следовательно, такого решения нет.

Ответ: нет.

5.12. Ночная температура лунной поверхности изменяется согласно дифференциальному уравнению:

$\frac{dy}{dt} = -ay^4$, $a > 0$. Сразу после захода Солнца температура была $250^\circ K$, в полночь $125^\circ K$. Какая температура будет перед восходом Солнца?

Решение

Решим дифференциальное уравнение разделением переменных: $-\frac{dy}{y^4} = adt$. Следовательно, $y^{-3} = 3at + c$. То есть $z(t) = \left(y(t)\right)^{-3}$ - линейная функция. Пусть $t = 0$ - время захода Солнца, $t = T$ - полночь, тогда $t = 2t$ - время восхода. Получаем: $z(0) = 250^{-3}$; $z(T) = 125^{-3} = 8 \cdot 250^{-3}$. Следовательно, $z(2T) = 15 \cdot 250^{-3}$. Тогда $y(2T) = \frac{250}{\sqrt[3]{15}}$.

Ответ: $\dfrac{250}{\sqrt[3]{15}} \approx 101^\circ K$.

5.13. Найти интегральную кривую уравнения $y'' + ky = 0$, проходящую через точку $M(x_0, y_0)$ и касающуюся в этой точке прямой l: $y - y_0 = a(x - x_0)$.

Решение

$y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = a$.

а) если $k = 0$, то $y'' \equiv 0$. Следовательно, интегральная кривая совпадёт с прямой l;

б) если $k > 0$, то $y = c_1 \cos\sqrt{k}x + c_2 \sin\sqrt{k}x$.

Из начальных условий получаем

$$y = \frac{a}{\sqrt{-k}} sh\sqrt{-k}\,(x - x_0) + y_0 ch\sqrt{-k}\,(x - x_0).$$

5.14. Решить (при $x \neq 0$) дифференциальное уравнение: $x^2 (y')^2 + 2x(y-1)y' + y^2 - 2y = 0$.

Решение

Заменой $z = xy$ уравнение приводится к виду:

$(z')^2 - 2z' = 0$. Получаются два семейства интегральных кривых: $z' = 2$. Тогда $xy = 2x + c$. Следовательно, $y = 2 + \dfrac{c}{x}$. $z' = 0$. Тогда $xy = c$. Следовательно, $y = \dfrac{c}{x}$.

5.15. По известному общему решению линейного дифференциального уравнения $y = c_1 x + c_2 chx + c_3 shx - \alpha\left(x^2 + 2\right)$, где c_1, c_2, c_3 - произвольные постоянные, а α - параметр, восстановить само уравнение.

Решение

$y = \bar{y} + y_0$, где y_0 - общее решение однородного уравнения, $\bar{y}$ - частное решение неоднородного уравнения.

Трижды дифференцируя y, получаем линейное однородное дифференциальное уравнение третьего порядка. Подставляя в него решение $\bar{y}$, получаем правую часть исходного уравнения.

$$\begin{cases} \bar{y} = c_1 x + c_2 \operatorname{ch} x + c_3 \operatorname{sh} x, \\ \bar{y}' = c_1 + c_2 \operatorname{sh} x + c_3 \operatorname{ch} x, \\ \bar{y}'' = c_2 \operatorname{ch} x + c_3 \operatorname{sh} x, \\ \bar{y}''' = c_2 \operatorname{sh} x + c_3 \operatorname{ch} x. \end{cases}$$

Домножив первое уравнение системы на единицу, второе – на $(-x)$, третье на -1 и четвёртое на x, получим: $x\bar{y}''' - \bar{y}'' - x\bar{y}' + \bar{y} = 0$.

Разделив обе части последнего равенства на x, получим: $\bar{y}''' - \frac{1}{x}\bar{y}'' - \bar{y}' + \frac{1}{x} y = 0$.

Исходным является уравнение: $\bar{y}''' - \frac{1}{x}\bar{y}'' - \bar{y}' + \frac{1}{x} y = f(x)$.
Подставим $\bar{y} = -\alpha\left(x^2 + 2\right)$;
$0 - \frac{1}{x}(-2x) - (-2\alpha x) - \frac{\alpha}{x}\left(x^2 + 2\right) = \alpha x = f(x)$.

Ответ: $y''' - \frac{1}{x} y'' - y' + \frac{1}{x} y = \alpha x$.

5.16. Доказать, что если $\frac{dy}{dx}=\varphi\left(x,y,c_1\right)$ - первый интеграл уравнения $\frac{d^2y}{dx^2}=f\left(x,y\right)$, то общий интеграл уравнения примет вид $\int\frac{\partial\varphi}{\partial c_1}\left(dy-\varphi dx\right)=c_2$, где c_1 и c_2 - постоянные.

Решение

$\frac{dy}{dx}=\varphi\left(x,y,c_1\right)$. Дифференцируем обе части этого равенства по x: $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\varphi\left(x,y,c_1\right)$. Следовательно,

$$f\left(x,y\right)=\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\varphi\left(x,y,c_1\right).$$

Последнее равенство продифференцируем по c_1: $\frac{\partial f}{\partial c_1}=0=\frac{\partial^2\varphi}{\partial c_1\partial x}+\frac{\partial\varphi}{\partial c_1}\frac{\partial\varphi}{\partial y}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial c_1\partial y}\varphi\left(x,y,c_1\right)$. Тогда

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial c_1}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial c_1}\right)=0.$$

Уравнение $P\left(x,y\right)dx+Q\left(x,y\right)dy=0$ - полный дифференциал, если $\frac{\partial p}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$.

Считаем: $\frac{\partial\varphi}{\partial c_1}=Q\left(x,y\right)$, $-\frac{\partial\varphi}{\partial c_1}\varphi=P\left(x,y\right)$. Тогда $\frac{\partial\varphi}{\partial c_1}dy-\frac{\partial\varphi}{\partial c_1}\varphi\left(x\right)dx=du$. Значит, $u=\int\frac{\partial\varphi}{\partial c_1}\left(dy-\varphi dx\right)=c_2$.

Что и требовалось доказать.

5.17. Пусть решение $y(x)$**,** $x \in \mathbb{R}$**,** дифференциального уравнения $y'' - 2 \cdot y' + y = 2 \cdot e^x$ принимает значения разных знаков. Показать, что $y(x)$ имеет одну точку минимума и одну точку максимума.

Решение

Решение уравнения имеет вид

$y(x) = \left(C_1 + C_2 \cdot x + x^2\right) \cdot e^x$, где C_1 и C_2 - некоторые постоянные. Так как $e^x > 0$, то квадратный трёхчлен $C_1 + C_2 \cdot x + x^2$ меняет знак. Поэтому $C_2^2 - 4 \cdot C_1 > 0$. Так как $y'(x) = \left((C_1 + C_2) + (C_2 + 2) \cdot x + x^2\right) \cdot e^x$, а $(C_2 + 2)^2 - 4 \cdot (C_1 + C_2) = C_2^2 - 4 \cdot C_1 + 4 > 0$, то $y'(x)$ дважды меняет знак и потому $y(x)$ имеет одну точку минимума и одну точку максимума.

5.18. Придумать дифференциальное уравнение, у которого общее решение имеет вид $y = C_1 + C_2 \cdot x^2$.

Решение

Уравнение должно быть однородным линейным второго порядка: $y'' + p(x) \cdot y' + q(x) \cdot y = 0$. Подставим нужные фундаментальные решения $y_1 = 1$, $y_2 = x^2$: $2 + 2 \cdot x \cdot p(x) + x^2 \cdot q(x) = 0$; $q(x) = 0 \Rightarrow p(x) = -\dfrac{1}{x}$.

Ответ: $y'' - \dfrac{y'}{x} = 0$, а ещё лучше: $x \cdot y'' - y' = 0$.

5.19. Решить (при $x \neq 0$) дифференциальное уравнение $x^2 \cdot (y')^2 + 2 \cdot x \cdot (y-1) \cdot y' + y^2 - 2 \cdot y = 0$.

Решение

Заменой $z = x \cdot y$ уравнение приводится к виду $(z')^2 - 2 \cdot z' = 0$. Получаются два семейства интегральных кривых: $z' = 2 \Rightarrow x \cdot y = 2 \cdot x + C \Rightarrow y = 2 + \dfrac{C}{x}$;

$z' = 0 \Rightarrow x \cdot y = C \Rightarrow y = \dfrac{C}{x}$.

5.20. Решить задачу Коши

$$\begin{cases} y'' \cdot \cos x - 2 \cdot y' \sin x + 8 \cdot y \cdot \cos x = 0 \\ y(0) = 1, y'(0) = 0 \end{cases}$$

Решение

Заменой $z = y \cdot \cos x$ уравнение приводится к виду $z'' + 9 \cdot z = 0$.

Отсюда $y = \dfrac{z}{\cos x} = \dfrac{C_1 \cdot \cos 3 \cdot x + C_2 \cdot \sin 3 \cdot x}{\cos x}$.

Подставляя начальные условия, получаем $y = \dfrac{\cos 3 \cdot x}{\cos x} = 4 \cdot \cos^2 x - 3$.

5.21. Известно, что дифференциальное уравнение

$y'' + p \cdot y + q \cdot y = 4 \cdot x + 8 + 5 \cdot e^{-x}$ имеет частное решение $y(x) = e^{-x} + x + 2$. Найти другое частное решение $z(x)$, которое при $x = 0$ имеет экстремум $z(0) = 1$.

Решение

Подставим $y(x)$ в уравнение:

$$e^{-x}+p\cdot\left(-e^{-x}+1\right)+q\cdot\left(e^{-x}+x+2\right)=4\cdot x+8+5\cdot e^{-x}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}1-p+q=5\\ q=4\\ p+2\cdot q=8\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}p=0,\\ q=4.\end{cases}$$

Общий вид решения уравнения $y''+4\cdot y=4\cdot x+8+5\cdot e^{-x}$ таков: $z(x)=e^{-x}+x+2+C_1\cdot\cos 2\cdot x+C_2\cdot\sin 2\cdot x$.

Условие «экстремум $z(0)=1$» означает

$$\begin{cases}z(0)=1\\ z'(0)=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}1+2+C_1=1\\ -1+1+2\cdot C_2=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}C_1=-2,\\ C_2=0.\end{cases}$$

Ответ: $z(x)=e^{-x}+x+2-2\cdot\cos 2\cdot x$.

5.22. Найти все функции, дифференцируемые на всей числовой прямой, для которых справедливо равенство $f'(x+y)=f(x)\cdot f(y)$ при любых x и y.

Решение

Положим $y=0$: $f'(x)=f(x)\cdot f(0)=A\cdot f(x)$. Решение этого обыкновенного дифференциального уравнения имеет вид: $f(x)=C\cdot e^{A\cdot x}$. Таким образом, решение исходного уравнения принадлежит семейству функций $C\cdot e^{A\cdot x}$. Проверим подстановкой: $C\cdot e^{A\cdot(x+y)}=C\cdot e^{A\cdot x}\cdot C\cdot e^{A\cdot y}$, отсюда $C\cdot A=C^2$, т.е. $C=A$.

Ответ: $f(x)=e^{A\cdot x}$

5.23. Решить задачу Коши: $x\cdot y''-y'-x^2\cdot y\cdot y'=0$, $y(1)=0$, $y'(1)=2$.

Решение

Разделив на x^2, приведем уравнение к виду $\left(\frac{y'}{x}-\frac{1}{2}\cdot y^2\right)'=0 \Rightarrow \frac{y'}{x}-\frac{1}{2}\cdot y^2=C_1$.

Из начальных условий следует $C_1=\frac{2}{1}-\frac{1}{2}\cdot 0^2=2$. Получаем $\frac{y'}{x}=\frac{1}{2}\cdot y^2+2 \Rightarrow \frac{dy}{y^2+4}=\frac{1}{2}\cdot xdx \Rightarrow arctg\,\frac{y}{2}=\frac{1}{2}\cdot x^2+C_2$.

$C_2=arctg\,\frac{0}{2}-\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}$.

Ответ: $y=2\cdot tg\left(\frac{1}{2}\cdot x^2-\frac{1}{2}\right)$.

5.24. Решить систему дифференциальных уравнений $\begin{cases} y'=y^2+z \\ z'=z^2+y \end{cases}$ с начальным условием $y(0)=z(0)=1$.

Решение

Пусть $y(x)=z(x)$ (позже это предположение будет обосновано). Тогда получим уравнение $y'=y^2+y$ с начальным условием $y(0)=1$. Решим его:

$$\frac{dy}{dx}=y\cdot(y+1);\ \frac{dy}{y\cdot(y+1)}=dx;\ \ln\left|\frac{y}{y+1}\right|=x+C;\ y=\frac{C_1\cdot e^x}{1-C_1\cdot e^x}.$$

Подставим $x=0$, получим $C_1=\frac{1}{2}$. Следовательно, $y(x)=\frac{e^x}{2-e^x}$.

Пара функций $y(x)=z(x)=\frac{e^x}{2-e^x}$ удовлетворяет системе дифференциальных уравнений и начальным условиям, поэтому по теореме единственности это и будет решением системы.

5.25. Решить дифференциальное уравнение

$$\left(3\cdot y'-y''\right)\cdot\sin y+\left(2-\left(y'\right)^2\right)\cdot\cos y=0 .$$

Решение

Сделаем замену переменной, положим $z=\cos y$ и найдем выражения для z' и z'':

$$z'=-y'\cdot\sin y,\ z''=-y''\cdot\sin y-\left(y'\right)^2\cdot\cos y .$$

Исходное уравнение можно переписать в таком виде: $z''-3\cdot z'+2\cdot z=0$ - это линейное однородное уравнение второго порядка, его характеристическое уравнение: $k^2-3\cdot k+2=0$, имеет два вещественных простых корня: $k=1$ и $k=2$, значит $z=C_1\cdot e^x+C_2\cdot e^{2\cdot x}$, откуда получим, что $\cos y=C_1\cdot e^x+C_2\cdot e^{2\cdot x}$.

5.26. Получить дифференциальное уравнение квадратичных парабол, пересекающих ось абсцисс только однажды.

Решение

Очевидно, что алгебраическое уравнение этих парабол имеет вид: $x-c_1\cdot y^2-c_2\cdot y-c_3=0$, откуда

$$1-2\cdot c_1\cdot y\cdot y'-c_2\cdot y'=0,\qquad\Rightarrow y'\neq 0 \tag{1}$$

$$2\cdot\left(y'^2+y\cdot y''\right)\cdot c_1+c_2\cdot y''=0, \tag{2}$$

$$2\cdot\left(3\cdot y'\cdot y''+y\cdot y'''\right)\cdot c_1+c_2\cdot y'''=0,$$

$$\Rightarrow c_1=-\frac{c_2\cdot y'''}{2\cdot\left(3\cdot y'\cdot y''+y\cdot y'''\right)} \tag{3}$$

$$(3)\to(2)\Rightarrow y'^2\cdot y'''-3\cdot y'\cdot y''^2=0 \qquad (4)$$

Ответ: $3\cdot y''^2=y'\cdot y'''$.

5.27. Решить уравнение

$\left(1-x^3\right)\cdot y''-6\cdot x^2\cdot y'-6\cdot x\cdot y=0$ при условии $y(0)=1$, $y'(0)=0$.

Решение

Находим решение в виде

$$y(x)=a_0+a_1\cdot x+a_2\cdot x^2+\ldots+a_n\cdot x^n+\ldots,$$

$$a_0=f(0)=y(0)=1,\ a_1=f'(0)=y'(0)=0,$$

$$y''(0)=6\cdot 0^2\cdot y'(0)+6\cdot 0\cdot y(0)=0,\ \Rightarrow a_2=0,$$

$$y'''\cdot\left(1-x^3\right)-3\cdot x^2\cdot y''-12\cdot x\cdot y'-6\cdot x^2\cdot y''-6\cdot y-6\cdot x\cdot y'=0.$$

$$y'''(0)=6,\ \Rightarrow a_3=\frac{y'''(0)}{3!}=1,$$

$$y^{IV}\left(1-x^3\right)-3\cdot x^2\cdot y'''-6\cdot x\cdot y''-3\cdot x^2\cdot y'''-$$

$$-12\cdot y'-12\cdot x\cdot y'-12\cdot x\cdot y''-6\cdot x^2\cdot y'''-$$

$$-6\cdot y'-6\cdot y'-6\cdot x\cdot y''=0,$$

$$y^{IV}(0)=0,\ldots,y^{V}(0)=0,\ldots,y^{VI}(0)=720.$$

$$a_6=1,\ldots,a_9=1,\ y(x)=1+x^3+x^6+x^9+\ldots.$$

$y(x)=\dfrac{1}{1-x^3}$, при этом область сходимости ряда $|x|<1$. За доказательство, что все $a_{3\cdot n}=1$, а остальные равны нулю.

Ответ: $y=\dfrac{1}{1-x^3}$ при $|x|<1$.

5.28. Найти решение уравнения

$e^x\cdot y''-e^y=0$, $y(0)=0$, $y'(0)=1-\sqrt{2}$. (1)

Решение

Уравнение (1) переписывается в виде $y''=e^{(y-x)}$.

После замены $z=y-x$ получаем $z''_{xx}=e^z$, (3)

$z(0)=0$, $z'(0)=-\sqrt{2}$. (4)

Далее решаем стандартной подстановкой:

$p(z)=z'_x$, $\Rightarrow z''_{xx}=p'_z\cdot p$, $p'_z\cdot p=e^z$, $\int pdp=\int e^z dz$,

$p=\pm\sqrt{2}\cdot\sqrt{e^z+C}$, $\dfrac{dz}{dx}=\pm\sqrt{2}\cdot\sqrt{e^z+C}$.

Из второго начального условия (4) получаем, что $C=0$ и знак нужно выбрать $\dfrac{dz}{dx}=-\sqrt{2}\cdot e^{\frac{z}{2}}$.

Отсюда $2\cdot e^{-\frac{z}{2}}=\sqrt{2}\cdot x+K$, где согласно первому начальному условию (4) $K=2$.

Ответ: $\sqrt{2}\cdot x+2$.

5.29. Пусть непрерывно дифференцируемые на полуоси $x\ge 0$ функции y и H связаны соотношением $y''+e^{-H}y=0$. Показать, что из интегрируемости на полуоси $H'_+=\max\{0,H'\}$ следует непрерывность функции y.

Решение

Из тождества $\left(e^{-ay^2}+e^{-b}\left(y'\right)^2\right)'=-\left(a'e^{-a}y^2+b'e^{-b}\left(y'\right)^2\right)$, где $a(x)=\int\limits_0^x H'_+(s)ds$ и $b(x)=a(x)-H(x)$ - две неубывающие функции, видно, что стоящая в левой части тождества под знаком производной положительная функция $p(x)$ не возрастает. Следовательно, $y^2(x)\le p(x)e^{a(x)}\le p(0)e^{\int_0^\infty H'_+(s)ds}$, т.е. функция $y(x)$ ограничена.

5.30. Решить уравнение: $\int\limits_0^1 \varphi(\alpha x)d\alpha=n\varphi(x)$.

Решение

Пусть $F(x)=\int\limits_0^x \varphi(z)dz, F=nxF', F=c\left|x\right|^{1/n}$. Дифференцируем: $\varphi=c\left|x\right|^{(1-n)/n}$.

5.31. Пусть $y''\le -a^2y(x), y(0)=0, z(0)=0, z'(0)=1$. Доказать: а) на $\left[0;x_0\right]y(x)\le z(x)$;

б) на $\left[0;\frac{x_0}{2}\right]y'(x)\le z'(x)$.

Решение

$z=\frac{1}{a}\sin ax; x_0=\frac{\pi}{a}; a>0$. Рассмотрим $y''+a^2y=f(x)\le 0$. Решение, удовлетворяющее начальным условиям:

$y=a^{-1}\sin ax+a^{-1}\int\limits_0^x f(t)\sin a(x-t)dt$. Если $f(x)\le 0$, то при $0<x<\pi(2a)^{-1}; y'(x)\le\cos ax$, так как $\cos\left(a(x-t)\right)>0;\quad f(t)\le 0$ (т.е. интеграл не превосходит нуля).

5.32. Доказать, что если $q(x)\ne 0$ и ДУ $y''+q(x)y=0$ имеет не обращающееся в нуль ω- периодическое решение $y(x)$, то ...

Решение

$$y''+q(x)y=0\underset{y\ne 0}{\Rightarrow}q(x)=-\frac{y''}{y}\Rightarrow\int\limits_0^{\omega}q(x)dx=\int\limits_0^{\omega}\left(-\frac{y''}{y}\right)dx=$$

$$=-\int\limits_0^{\omega}\frac{1}{y}dy'=-\frac{y'}{y}\bigg|_0^{\omega}-\int\limits_0^{\omega}\left(\frac{y'}{y}\right)^2dx<0$$

ибо внеинтегральный член равен нулю, поскольку ω - период.

5.33. Найти площадь, ограниченную отрезком $(c;d)$ оси абсцисс и кривой, являющейся графиком решения ДУ $yy''=-1$, если известно, что на $(c;d)$: $\text{y(x)}>0,\ \lim\limits_{x\to c+0}y(x)=\lim\limits_{x\to d-0}y(x)=0;$ $\max\limits_{x\in(c;d)}y(x)=m$.

Решение

$$\left.\begin{aligned} yy''&=-1\\ y&>0\end{aligned}\right\}\Rightarrow y''<0,\ \text{следовательно, график выпуклый вверх.}$$

$y' = p(y);\ yp\dfrac{dp}{dy} = -1 \Rightarrow (y')^2 = -2\ln(C_1 y);\ y' = \pm\sqrt{-2\ln\dfrac{y}{m}}.$ При $y = m;\ y' = 0(\max) \Rightarrow C_1 = \dfrac{1}{m};\ y' > 0$ при $x \in (c;a);$ $y' < 0$ при $x \in (a;d);\ y(a) = m.$

Решения: $x_1 = \displaystyle\int_0^y \frac{dy}{\sqrt{-2\ln\frac{y}{m}}} + c,$ так как $x_1 \underset{y \to 0}{\to} c;$

$$x_2 = -\int_0^y \frac{dy}{\sqrt{-2\ln\frac{y}{m}}} + d,\ \text{так как}\ x_2 \underset{y \to 0}{\to} d;$$

$$x_2 - x_1 = -2\int_0^y \frac{dy}{\sqrt{-2\ln\frac{y}{m}}} + d - c,$$

$$x_2(m) - x_1(m) = 0 \Rightarrow d - c = 2\int_0^m \frac{dy}{\sqrt{-2\ln\frac{y}{m}}} \qquad (1),$$

$$\Rightarrow x_2 - x_1 = 2\int_y^m \frac{dy}{\sqrt{-2\ln\frac{y}{m}}};$$

$$S = \int_0^m (x_2(y) - x_1(y))dy = 2\int_0^m dy \int_y^m \frac{dz}{\sqrt{-2\ln\frac{z}{m}}} = \int_0^m dz \int_0^z \frac{dy}{\sqrt{-2\ln\frac{z}{m}}} =$$

$$= \int_0^m \frac{dy}{\sqrt{-2\ln\frac{z}{m}}} \underset{\sqrt{-2\ln\frac{z}{m}} = t}{=} \int_0^\infty m^2 e^{-t2} dt = m^2\sqrt{\pi}.$$

Параметр m находится из соотношения (1): $m = \dfrac{d-c}{2\sqrt{2\pi}}$. Значит,

$S = \dfrac{(d-c)^2}{8\sqrt{\pi}}$.

5.34. Может ли функция $y = 1 - \cos x$ быть на интервале $(-a;a)$ решением ДУ $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$, где $p(x)$ - непрерывная функция на $(-a;a)$.

Решение

Не может, так как

$$y'' + py' + qy = \cos x + p(\mathrm{x})\,\mathrm{sinx} + \mathrm{q(x)}\left(1 - \cos x\right)\Big|_{x=0} = 1 \neq 0 .$$

5.35. Динамика противоборства двух армий описывается системой $\begin{cases} x' = -\mathrm{ay}, \\ y' = -bx \end{cases} \left(a > 0, b > 0\right)$. При каких начальных данных $x(0) = x_0 > 0, y(0) = y_0 > 0$ победит первая армия (т.е. численность у второй армии обратится в 0 при некотором $t > 0$)? При каких условиях победит вторая армия?

Решение

$$y'' = -bx' = bay, y = C_1 e^{\sqrt{abt}} + C_2 e^{-\sqrt{abt}}, x = -C_1\sqrt{\frac{a}{b}} e^{\sqrt{abt}},$$

$$x = -C_1\sqrt{\frac{a}{b}} e^{\sqrt{abt}} + C_1\sqrt{\frac{a}{b}} e^{-\sqrt{abt}} .$$

Из начальных условий

$$y=\frac{1}{2}\left(y_0-\sqrt{\frac{b}{a}}x_0\right)e^{\sqrt{abt}}+\frac{1}{2}\left(y_0+\sqrt{\frac{b}{a}}x_0\right)e^{-\sqrt{abt}}=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow e^{2\sqrt{abt}}=\frac{y_0+\frac{b}{a}x_0}{\sqrt{\frac{b}{a}}x_0-y_0}.$$

Если дробь больше нуля, то существует такое t, то есть условие: $\sqrt{b}x_0>\sqrt{a}y_0$.

5.36. Найти все интегральные кривые ДУ $y'''=y'\left(3(y'')^2-y'y'''\right)$.

Решение

$$0=y'(y'')^2+2y'(y'')^2-\left(1+(y')^2\right)y'''\Rightarrow 0=$$

$$=y'+\frac{2y'(y'')^2-\left(1+(y')^2\right)y'''}{(y'')^2}=y'+\left(\frac{1+(y')^2}{y''}\right)'\Rightarrow C_1-y=$$

$$=\frac{1+(y')^2}{y''}\Rightarrow C_1y-1=yy''+(y')^2=(yy')'\Rightarrow C_1y'-x+C_2=$$

$=yy'=\frac{1}{2}(y^2)'\Rightarrow C_1y-\frac{1}{2}x^2+C_2x=\frac{1}{2}y^2+C_3$ - окружность. Еще решение: $y''=0\Rightarrow y=C_1x+C_2$.

5.37. Доказать, что существует решение $y=f(x)$ ДУ $y'=y^{10}-1$, удовлетворяющее при всех вещественных x неравенству $|f(x)|<1$.

Решение

Выполнены условия теоремы существования и единственности решения задачи Коши. $y=1; y=-1$ являются решениями. Значит, для начальных данных $-1<y_0=1$ существует решение, которое будет заключено между этими решениями. Оно задано на всей оси. Действительно, если существует максимальное значение $x=x_0$ для интегральной кривой, то имеем решение задачи Коши с условием в этой точке и получаем решение в точке, правее x_0, что противоречит предположению.

5.38. Дано ДУ: $y''+k(x)y=0$ и два его уравнения $y(x)$ и $z(x)$, определенные на $[0;1]$ и удовлетворяющие условиям $y(0)=0, y'(0)=1, z(1)=0, z'(1)=-1$. Доказать, что $y(1)=z(0)$.

Решение

$y'=-y^2-k(x)$. Допустим, что y неограничена.

1) пусть $y>a \Rightarrow y'<0 \Rightarrow y$ убывает, следовательно, противоречие.
2) пусть $y<-a$. Сравнить с $y_b'=-y_b^2+a^2$ - его решение $y_b=cth(-ax+b)$ имеет особенность в точке $x=\dfrac{b}{a}$; $y_b \underset{x\to\infty}{\to} 1$; $y_b' \underset{x\to\infty}{\to} 0$.

5.39. Решить ДУ бесконечного порядка: $y+\dfrac{x^2}{2!}y''+\dfrac{x^4}{4!}y''''+\ldots+\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}y^{(2n))}+\ldots=\cos x$. Можно считать, что все производные ограничены одной и той же константой на любом конечном интервале.

Решение

Полагая $x=0$, находим $y(0)=1$. Последовательно дифференцируя уравнения и полагая $x=0$, получаем $y'(0)=0, 2y''(0)=-1, y'''(0)=0,$

$$\left(1+C_{2k}^{2}+C_{2k}^{4}+...+C_{2k}^{2k}\right)y^{(2k)}(0)=2^{2k-1}y^{(2k)}(0)=(-1)^{k},$$

$$y^{(2k)}(0)=\frac{(-1)^{k}}{2^{2k-1}},\; y^{(2k+1)}(0)=0.$$

Теперь легко увидеть, что

$$y(x)=1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k}x^{2k}}{2^{2k-1}(2k)!}=2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k}}{(2k)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}-1=2\cos\frac{x}{2}-1.$$

Найденное решение можно найти и другим путем. Наложенное на $y(x)$ условие означает, что ряд Тейлора

$$y\left(x+t\right)=y(x)+y'(\mathrm{x})\,\mathrm{t}+...+\frac{y^{(n)}(x)}{n!}t^{n}+...$$

сходится к $y(x+t)$ для всех вещественных x,t. Подставляя $t=\pm x$ и складывая ряды, получаем удвоенную левую часть уравнения. Значит, $y(x+x)+y(x-x)=2\cos x$, то есть $y(2x)-y(0)=2\cos x$, откуда $y(x)=\cos\frac{x}{2}-1$. Проверка показывает, что эта функция удовлетворяет уравнению.

5.40. Найти функцию f, удовлетворяющую соотношению $\int\limits_{0}^{x}e^{u}f(x-u)du=\sin x, x\in R$.

Решение

1) $x-u=v; \int\limits_0^x e^u f\left(x-u\right)du = -\int\limits_x^0 e^{x-v} f(v)dv = e^x \int\limits_0^x e^{-v} f(v)dv =$

$= \sin x;\ \int\limits_0^x e^{-v} f(v)dv = e^{-x}\sin x$.

Продифференцируем
$e^{-x} f(x) = -e^{-x}\sin x + e^{-x}\cos x;\ f(x) = \cos x - \sin x$.

2) Делаем преобразование Лапласа: $\dfrac{F(p)}{p-1} = \dfrac{1}{1+p^2}$,

$F(\mathrm{p}) = \dfrac{p-1}{1+p^2},\ f(x) = \mathrm{cosx} - \mathrm{sinx}$.

5.41. Найти множество всех точек плоскости таких, что через каждую проходит ровно одна из кривых $y = y(x)$, подчиненных условиям: $y''(x) + y(x) = \left(y'(0)\right)^2, y''(0) = 0, x \in R$.

Решение

Очевидно, что при $t \in R$ кривая $y = t\sin x + t^2$ отвечает поставленным условиям. Обратно, пусть функция удовлетворяет указанным ограничениям. Тогда функция $z'' + z = 0;\ z(0) = -z''(0) = 0$ имеет вид

$$z(x) = t\sin x \Rightarrow t = z'(0) = y'(0) \Rightarrow \Rightarrow y(x) = z(x) + t^2 = t\sin x + t^2 .$$

Теперь условие переформулируется так: через какие точки $\left(x; y\right)$ проходит единственная кривая вида $y = t\sin x + t^2$? Т.е. вопрос сводится к однозначной разрешимости квадратного уравнения $t^2 + t\sin x - y = 0$, равносильной условию $\sin^2 x + 4y = 0$.

Ответ: $y=-\left(\frac{1}{2}\sin x\right)^2$.

5.42. Пусть $y_1(x)$ и $y_2(x)$ - линейно независимые на интервале I решения ДУ $y''=f(x)y$, где $f(x)$ непрерывна на I. Пусть на I $y_1(x)y_2(x)>0$. Доказать, что существует положительная постоянная c, такая, что функция $z(x)=c\sqrt{y_1(x)y_2(x)}$ удовлетворяет ДУ $z''+z^{-3}=f(z)z$.

Решение

$$z=c\sqrt{y_1y_2}\Rightarrow z^{-1}\left(z''+z^{-3}\right)=\left(c\left(y_1y_2\right)^{1/2}\right)^{-1}\times$$

$$\times\left(c\cdot 4^{-1}\left[\left(f(x)y_1y_2\cdot 2+2y_1'y_2'\right)2y_1y_2-\left(y_1'y_2-y_1y_2'\right)^2+c^{-3}\right]\right)=$$

$$=f(x)+\left(y_1y_2\right)^{-2}\left(-4^{-1}\left(y_1'y_2-y_1y_2'\right)^2+c^{-4}\right)=$$

$$=f(x)+\left(y_1y_2\right)^{-2}\left(-4^{-1}\left(W\left(y_1;y_2\right)\right)^2+c^{-4}\right).$$

Вронскиан решений y_1 и $y_2: W\left(y_1;y_2\right)=const\neq 0$, поэтому существует c, при котором второе слагаемое обращается в нуль, т.е. все выражение равно $f(x)$.

5.43. Функция $y(x)$ ограничена на $(0;+\infty)$ и является решением ДУ $x^2y''+2xy'-2y=f(\mathrm{x})$, где $f(x)$ непрерывна на $(0;+\infty)$ и при $x>0$ удовлетворяет неравенству $0\leq f(x)\leq m$. Найти оценки сверху и снизу значений функции $y(x)$ на $(0;+\infty)$.

Решение

Подстановка $x=e^t$ сводит уравнение к линейному. Методом вариации произвольных постоянных находится решение, которое с учетом ограниченности имеет вид $y=\frac{x}{3}\int\limits_0^x f(s)ds-\frac{1}{3x^2}\int\limits_0^x s^3 f(s)ds$.

Ответ: $-\frac{m}{2}\le y\le 0$.

5.44. $u(x)$ - решение ДУ $y''+q(x)y=0$. ($q:R\to R,q$ - непрерывна) и пусть α,β - нули $u(x)$ $(\alpha<\beta)$, причем $u(x)$ решение $v(x)$ того же уравнения имеет единственный нуль в $(\alpha;\beta)$.

Решение

Если u,v - линейно зависимы, то утверждение очевидно. Пусть u,v - линейно зависимы. Тогда $W(x)=uv'+u'\text{v}=\text{c}\ne 0$. Заметим, что $u'(\alpha)u'(\beta)<0$. Действительно, при $u(x)<0\ \forall x\in(\alpha;\beta)$ имеем $u'(\alpha)>0;u'(\beta)<0$, так как если $u'(\alpha)<0$, то $u'(x)<0$ в некоторой окрестности точки α, и тогда $u(x)$ строго убывает в этой окрестности, в частности, $u(x)<u(\alpha)=0$, противоречие [аналогично $u'(\beta)<0$]. Так как $c=W(\alpha)=-v(\alpha)u'(\alpha)$, $c=W(\beta)=-v(\beta)u'(\beta)$, то $v(\alpha)v(\beta)<0$, следовательно, по теореме Больцано существует $\gamma\in(\alpha;\beta):v(\gamma)=0$. Если $v(\gamma_1)=0=v(\gamma_2);\gamma_1\gamma_2\in(\alpha;\beta)$; $\gamma_1<\gamma_2$, то, применяя доказанное выше (с перестановкой u,v), находим $\delta\in(\gamma_1;\gamma_2)$ такое, что $u(\delta)=0$, что противоречит предположению.

5.45. Решить уравнение: $y'\cos y=x-\text{siny}$.

Решение

$\sin y=z\Rightarrow z'=x-z\Rightarrow z=x-1+ce^{-x}=\sin y$.

5.46. Нарисовать на плоскости $(x;y)$ интегральные кривые ДУ $\dfrac{dy}{dx} = y^{-1}x(x^2-1)$.

Решение

$$ydy = x\left(x^2-1\right)dx \Rightarrow y^2 = \left(x^2-1\right)^2 + c - 1.$$

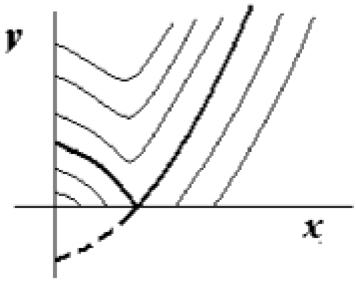


Рисунок симметричен относительно *OX* и *OY*. Жирная линия: $y^2 = \left(x^2-1\right)^2 - 1$.

5.47. Пусть $\Phi(x)$ - решение ДУ $y''-2y'+y=2e^x$. Известно, что для всех x $\Phi'(x)>0$. Следует ли из этого, что $\Phi(x)>0$?

Решение

$$\Phi(x) = \left(C_1 + C_2x + x^2\right)e^x;\ \Phi'(\text{x}) = \left(x^2 + \left(2+C_2\right)x + C_1 + C_2\right)e^x > 0;$$

$\forall x \Rightarrow D = \left(2+C_2\right)^2 - 4\left(C_1+C_2\right) < 0 \Rightarrow C_1 > 1 + 4^{-1}C_2^2$. Найдем дискриминант для $C_1 + C_2x + x^2 : D = C_2^2 - 4C_1 < C_2^2 - 4 - C_2^2 = -4 < 0 \Rightarrow \Phi(x) > 0.$

5.48. Доказать, что любое решение ДУ $\dfrac{dx}{dt} = \left(2+t^4+\cos x\right)^{-1}$ ограничено.

Решение

$$\left|x\left(t_2\right)-x\left(t_1\right)\right|=\left|\int\limits_{t_1}^{t_2}\frac{dx}{dt}\right|\le\int\limits_{t_1}^{t_2}\left|\frac{dx}{dt}\right|dt\le\int\limits_{t_1}^{t_2}\frac{dt}{1+t^4}\le\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dt}{1+t^4}=M$$ - сходится,

то есть решение ограничено (отклонение в любой точке от фиксированного значения не превосходит M).

5.49. Решить уравнение: $\int\limits_0^x\left(x^2-t^2\right)\varphi(t)dt=\frac{x^3}{3}$.

Решение

$$x^2-t^2=\left(x-t\right)^2+2t\left(x-t\right)\Rightarrow\frac{x^3}{3}=\int\limits_0^x\left(x-t\right)^2\varphi(t)dt+$$

$+2\int\limits_0^x\left(x-t\right)t\varphi(t)dt$. Делаем преобразование Лапласа: $\frac{2}{p^4}=\frac{2}{p^3}\Phi(p)-\frac{2}{p^2}\Phi'(p)\Rightarrow\Phi(p)=cp+\frac{1}{2p}$, так как $\Phi(p)$ - изображение, то $\Phi(p)\underset{p\to\infty}{\to}0\Rightarrow c=0$, то есть

$$\Phi(p)=\frac{1}{2p}\Rightarrow\varphi(x)=\frac{1}{2}.$$

5.50. Решить уравнение $\frac{du}{dt}=u(t)+\int\limits_0^1u(s)ds,\ u\in C^2\left[0;\infty\right),t\ge0$.

Решение $u\in C^2\Rightarrow u''=\mathrm{u}'\Rightarrow\mathrm{u}=\mathrm{C}_1\,C_2e^t;\int\limits_0^1u(s)ds=C_1+C_2(e-1)\Rightarrow$

$$\Rightarrow C_2e^t=C_1+C_2e^t+C_1+C_2(e-1)\Rightarrow\mathrm{C}_1=C_2\frac{1-e}{2}.$$

Ответ: $u(t)=C_2\left(\frac{1-e}{2}+e^t\right)$.

5.51. Рассмотрим задачу Коши: $y' = -z^3, z' = y^3,\ y(0) = 1, z(0) = 0$. Пусть $y(x) = f(x), z(x) = g(x)$ -ее решение, определенное на всей вещественной оси. Доказать, что функции $f(x)$ и $g(x)$ периодичны.

Решение

$y' y^3 + z' z^3 = 0 \Rightarrow \dfrac{1}{4}\dfrac{d}{dx}\left(y^4 + z^4\right) = 0 \Rightarrow y^4 + z^4 = c;$

$y(0) = 1; z(0) = 0 \Rightarrow y^4 + z^4 = 1$ - задает замкнутую кривую на плоскости $(y;z)$. Пусть $(f(x);g(x))$- решение. Найдем скорость v движения точки по кривой: $v = \left(f'(x); g;(x)\right) = \left(-g^3(x); f^3(x)\right) \Rightarrow |v|^2 = f^6(x) + g^6(x) = y^6 + z^6$, эта функция рассматривается на замкнутой ограниченной кривой $y^4 + z^4 = 1$. Она достигает там наименьшего значения. Но $y^6 + z^6 > 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow y^6 + z^6 \geq c > 0$ поскольку, если такого c не существует, то $y^6 + z^6$ достигает значения 0 в некоторой точке x_1, но тогда $y = 0$ и $z = 0$, чего не может быть из-за $y^4 + z^4 = 1$. Рассматриваемая кривая ограничена. Раз скорость больше или равна $\sqrt{c} > 0,$ то при некотором $x = x_0$ мы придем в начальную точку $(y;z) = (1;0)$, но это означает, что мы получим ту же самую задачу Коши, следовательно, период равен x_0 .

Зная одно нетривиальное решение y_1 линейного однородного уравнения

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + ... + p_n(x)y = 0,$$

можно подстановкой $y = y_1\int u dx$ понизить порядок уравнения, сохранив его линейность и однородность.

5.52. Решить дифференциальное уравнение

$$xy'' - xy' + y = 0.$$

Решение

Уравнение имеет очевидное решение $y_1 = x$. Понизим порядок подстановкой

$$y = x\int u dx, \qquad y' = xu + \int u dx, \qquad y'' = xu' + 2u,$$

приведём уравнение к виду

$$x^2 y' + xu(2 - x) = 0,$$

откуда

$$\frac{du}{u} = \frac{x-2}{x} dx, \qquad u = c_1 \frac{e^x}{x^2},$$

$$y = x\int u dx = x\left[\int c_1 \frac{e^x}{x^2} dx + c_2\right].$$

Два уравнения вида

$$y^{(n)} + p_1(x) y^{(n-1)} + ... + p_n(x) y = 0,$$

$$y^{(n)} + q_1(x) y^{(n-1)} + ... + q_n(x) y = 0,$$

где функции $p_i(x)$ и $q_i(x)$ ($i = 1, 2, ..., n$) непрерывны на отрезке $[a, b]$, имеющие общую фундаментальную систему решений $y_1, y_2, ..., y_n$, совпадают, то есть $p_i(x) \equiv q_i(x)$ на отрезке $[a, b]$.

То есть фундаментальная система решений $y_1, y_2, ..., y_n$ вполне определяет линейное однородное уравнение

$$y^{(n)} + p_1(x) y^{(n-1)} + ... + p_n(x) y = 0,$$

и, следовательно, можно поставить задачу о нахождении уравнения, имеющего заданную фундаментальную систему решений

$$y_1, y_2, ..., y_n.$$

Так как всякое решение y искомого уравнения должно быть линейно зависимо от решений $y_1, y_2, ..., y_n$, то определитель Вронского

$$W[y_1, y_2, ..., y_n] = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & ... & y_n & y \\ y_1' & y_2' & ... & y_n' & y' \\ y_1'' & y_2'' & ... & y_n'' & y'' \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & ... & y_n^{(n-1)} & y^{(n-1)} \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & ... & y_n^{(n)} & y^{(n)} \end{vmatrix} = 0 \cdot$$

Откуда можно непосредственно получить формулу Остроградского – Лиувилля

$$W(x) = W(x_0) e^{-\int p_1(x)dx},$$

и

$$p_1(x) = -\frac{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & ... & y_n & y_n \\ y_1' & y_2' & ... & y_n' & y_n' \\ y_1'' & y_2'' & ... & y_n'' & y_n'' \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ y_1^{(n-2)} & y_2^{(n-2)} & ... & y_{n-1}^{(n-2)} & y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & ... & y_{n-1}^{(n)} & y_n^{(n)} \end{vmatrix}}{W[y_1, y_2, ..., y_n]},$$

$$p_2(x) = -\frac{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' & y_n' \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-3)} & y_2^{(n-3)} & \dots & y_{n-1}^{(n-3)} & y_n^{(n-3)} \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_{n-1}^{(n-1)} & y_n^{(n-1)} \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & \dots & y_{n-1}^{(n)} & y_n^{(n)} \end{vmatrix}}{W[y_1, y_2, \dots, y_n]}.$$

Формула Остроградского – Лиувилля может быть использована для интегрирования линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка

$$y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0,$$

если известно одно нетривиальное решение этого уравнения y_1. Согласно формуле Остроградского – Лиувилля любое решение уравнения должно быть также решением уравнения

$$\begin{vmatrix} y_1 & y \\ y_1' & y' \end{vmatrix} = c_1 e^{-\int p_1(x)dx}$$

или

$$y_1 y' - y y_1' = c_1 e^{-\int p_1(x)dx}.$$

Для интегрирования этого дифференциального уравнения первого порядка можно воспользоваться методом интегрирующего множителя.

Умножая на $\mu = \dfrac{1}{y_1^2}$, получаем

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{y}{y_1}\right) = \frac{c_1}{y_1^2} e^{-\int p_1(x)dx},$$

откуда

$$\frac{y}{y_1} = \int \frac{c_1}{y_1^2} e^{-\int p_1(x)dx} dx + c_2 ,$$

или

$$y = y_1 \int \frac{c_1}{y_1^2} e^{-\int p_1(x)dx} dx + c_2 y_1 .$$

5.53. Проинтегрировать уравнение

$$x^3 y'' - xy' + y = 0 ,$$

если $y_1 = x$ является частным решением.

Решение

Понизим порядок подстановкой

$$y = x\int u dx , \qquad y' = xu + \int u dx , \qquad y'' = xu' + 2u ,$$

приведём уравнение к виду

$$x^2 y' + u(2x - 1) = 0 ,$$

откуда

$$\frac{du}{u} = -\frac{2x-1}{x} dx , \qquad u = c_1 \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^2} ,$$

$$y = x\int u dx = x\left[\int c_1 \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^2} dx + c_2\right] = c_1 x e^{-\frac{1}{x}} + c_2 x .$$

5.54. Найти линейное однородное уравнение, имеющее следующую фундаментальную систему решений: $y_1 = x$, $y_2 = \dfrac{1}{x}$.

Решение

Для дифференциального уравнения второго порядка

$$y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0,$$

имеем

$$p_1(x) = -\frac{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1'' & y_2'' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}} \qquad p_2(x) = \frac{\begin{vmatrix} y_1' & y_2' \\ y_1'' & y_2'' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}}.$$

То есть

$$p_1(x) = -\frac{\begin{vmatrix} x & \frac{1}{x} \\ 0 & \frac{2}{x^3} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x & \frac{1}{x} \\ 1 & -\frac{1}{x^2} \end{vmatrix}} = \frac{1}{x},\ p_2(x) = -\frac{\begin{vmatrix} 1 & -\frac{1}{x^2} \\ 0 & \frac{2}{x^3} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x & \frac{1}{x} \\ 1 & -\frac{1}{x^2} \end{vmatrix}} = -\frac{1}{x^2}.$$

Таким образом, искомым уравнением будет

$$y'' + \frac{1}{x}y' - \frac{1}{x^2}y = 0 \qquad \text{или} \qquad x^2y'' + xy' - y = 0.$$

Библиографический список

1. Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006.
2. Беркович Ф.Д., Федий В.С., Шлыков В.И. Задачи студенческих математических олимпиад с указаниями и решениями. – Ростов н/Д.: Феникс, 2008.
3. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа. – М.: Наука, 2001.
4. Бортаковский А.С., Пантелеев А.В. Линейная алгебра в примерах и задачах. – М.: Высшая школа, 2005.
5. Бутузов В.Ф., Крутицкая Н.Ч., Шишкин А.А. Линейная алгебра в вопросах и задачах. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002.
6. Веретенников Б.М., Мохрачева Л.П., Соболев А.Б., Ходак Г.Л. Студенческие олимпиады по математике УГТУ-УПИ. – М.:ФИЗМАТЛИТ, 2009.
7. Виноградова И.А., Олехник С.Н., Садовничий В.А. Задачи и упражнения по математическому анализу. – М.: Высшая школа, 2000.
8. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004.
9. Гельфанд И.М. Лекции по линейной алгебре. – М.: Наука, 1971.
10. Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1997.
11. Дюбуа А.Б. Линейная алгебра и аналитическая геометрия. – Рязань: Рязанский филиал МЭСИ, 2007.
12. Зорич В.А. Математический анализ.– М.: МЦНМО, 2012.
13. Ильин В.А., Куркина А.В. Высшая математика. – М.: Изд. МГУ, 2005.
14. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа.– М.: Высшая школа, 1981.
15. Попов Ю.И. Задачи повышенной трудности в курсе высшей математики. – СПб.: СПбГУ ИТМО, 2008.
16. Ройтенберг В.Ш., Оленикова Ю.К., Сидорова Л.А. Задачи студенческих олимпиад ЯГТУ. – Ярославль: Типография ЯГТУ, 2012.
17. Садовничий В.А., Подколзин А.С. Задачи студенческих олимпиад по математике. – М.: Наука, 1978.

18.Виноградова И.А., С.Н. Олехник, В.А. Садовничий Задачи и упражнения по математическому анализу. – М.: Высшая школа, 2000.

19.Тер-Крикоров А.М., Шабунин М.И. Курс математического анализа. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2009.

20.Федорчук В.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. – М.: Изд. НЦ ЭНАС, 2003.

21.Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002.

22.Чехлов В.И. Лекции по аналитической геометрии и линейной алгебре. – М.: МФТИ, 2005.

23.Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 1965.

24.Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов. – М.: Лань, 2009.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ДЛЯ ЗАМЕТОК

ДЛЯ ЗАМЕТОК

А м б а р ц у м я н Вазген Арсенович
А н д р ю щ е н к о Екатерина Андреевна
Б у х е н с к и й Кирилл Валентинович
Д в о р е ц к о в а Екатерина Александровна
Д ю б у а Александр Борисович
М а ш н и н а Светлана Николаевна
С а ф о ш к и н Алексей Сергеевич

Студенческие математические олимпиады. Часть 2

Редактор Н.А. Орлова
Корректор С.В. Макушина
Подписано в печать 20.03.2015. Формат бумаги 60×84 1/16.
Бумага писчая. Печать трафаретная. Усл. печ. л. 6,0.
Тираж 50 экз. Заказ
Рязанский государственный радиотехнический университет.
390005, Рязань, ул. Гагарина, 59/1.
Редакционно-издательский центр РГРТУ.