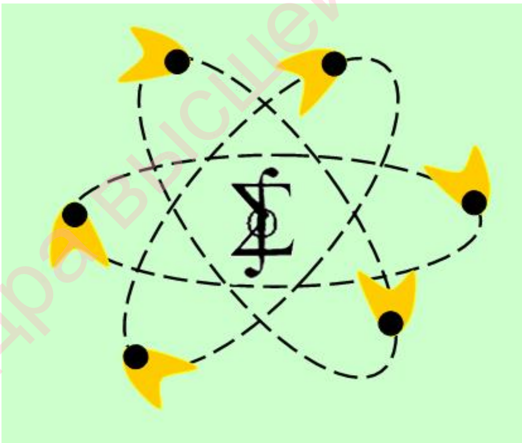
МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

РЯЗАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ РАДИОТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Г.С. ЛУКЬЯНОВА,

К.В. БУХЕНСКИЙ

ЭЛЕМЕНТАРНАЯ МАТЕМАТИКА



Рязань 2015

Министерство образования и науки Российской Федерации

Рязанский государственный радиотехнический университет

Г.С. ЛУКЬЯНОВА,

К.В. БУХЕНСКИЙ

ЭЛЕМЕНТАРНАЯ МАТЕМАТИКА

Учебное пособие

Рязань 2015

УДК 51(075.4)

Элементарная математика: учеб. пособие / Г.С. Лукьянова, К.В. Бухенский; Рязан. гос. радиотехн. ун-т. – Рязань, 2015. – 64 с.

Содержит краткое изложение теоретического материала по основным разделам школьного курса математики.

Предназначено студентам первого курса всех технических и экономических направлений и специальностей, может использоваться абитуриентами для систематизации школьных знаний.

Табл. 5. Ил. 24. Библиогр.: 3 назв.

Элементарная математика, числовые множества, функция, тригонометрические формулы

Печатается по решению редакционно-издательского совета Рязанского государственного радиотехнического университета.

Рецензент: кафедра высшей математики Рязанского государственного радиотехнического университета (доц., канд. экон. наук А.И. Новиков)

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Уважаемые первокурсники!

Прошла пора сдачи единых государственных экзаменов и томительного ожидания по зачислению в ВУЗ. И вот, когда это все позади, наступает время ставить перед собой новые задачи.

Как показывает практика, для студентов-первокурсников нашего вуза наиболее сложными и проблемными оказываются зачеты и экзамены по естественно-научным дисциплинам, в том числе и по математике.

Для того чтобы Вы как можно успешнее включились в учебный процесс по математике, написано данное учебное пособие, целью которого является систематизация знаний по школьному курсу математики.

Понятие числа является основополагающим в математике. В первых трех пунктах пособия кратко изложены основы теории натуральных, целых, рациональных, иррациональных и действительных чисел. Далее подобран материал по основным функциям, изучаемым в школе: линейной, квадратичной, степенной, показательной, логарифмической, тригонометрическим и обратным тригонометрическим. Дополнен он гиперболическими функциями. Рассмотрены основные тригонометрические формулы. Некоторые утверждения приведены с доказательством. Знаком ***** (звездочка) отмечен материал для дополнительного изучения.

Коллектив кафедры высшей математики желает вам успехов в учебе! И помните, что математика – это систематическая наука, и заниматься ею следует ежедневно, а не от случая к случаю!

1. НАТУРАЛЬНЫЕ И ЦЕЛЫЕ ЧИСЛА

1.1. Определения. Арифметические операции и их свойства

Числа $1, 2, 3, \ldots$ называются **натуральными числами.** **Множество натуральных чисел** обозначается буквой $\mathbf{N}$. Таким образом, по определению $\mathbf{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$.

Множество $\mathbf{N}$ натуральных чисел, записанных в их естественном порядке, называется также **натуральным рядом**.

Множество натуральных чисел **замкнуто** относительно операций сложения и умножения, так как при сложении и умножении натуральных чисел получается натуральное число, то есть для любых $m, n \in \mathbf{N}$ выполняется $(m+n) \in \mathbf{N}$ и $m \cdot n \in \mathbf{N}$.

Операция вычитания $m - n$ на множестве натуральных чисел определена только для таких чисел $m,\ n$, которые связаны неравенством $m > n$. В этом случае $(m-n) \in \mathbf{N}$, но противоположное число $(n-m) \notin \mathbf{N}$.

Разделить одно натуральное число на другое можно лишь при условии, что делимое m кратно делителю n. Например, если $m = 6$, а $n = 3$, то $\frac{m}{n} = \frac{6}{3} = 2$, но $\frac{n}{m} = \frac{3}{6} \notin \mathbf{N}$.

Операции сложения и умножения на множестве $\mathbf{N}$ удовлетворяют следующим свойствам.

Переместительное свойство (свойство коммутативности)

1. $m + n = n + m$ **1.** $m \cdot n = n \cdot m$

Сочетательное свойство (свойство ассоциативности)

2. $m + (n + k) = (m + n) + k$ **2.** $m \cdot (n \cdot k) = (m \cdot n) \cdot k$

Распределительное свойство (свойство дистрибутивности)

3. $(m + n) \cdot k = m \cdot k + n \cdot k$

Числа вида $-n$, где n – натуральное число, называются **целыми отрицательными числами**.

Множество $\{\ldots,-n,-n+1,\ldots,-2,-1\}$ целых отрицательных чисел обозначается буквой $\mathbf{Z}^-$. Числа n, $n\in\mathbf{N}$ и $-n$, $-n\in\mathbf{Z}^-$ называются **противоположными** числами**.**

Множество, состоящее из отрицательных целых чисел, нуля и натуральных чисел называется **множеством целых чисел** и обозначается буквой **Z**:

$$\mathbf{Z}=\mathbf{Z}^-\cup\{0\}\cup\mathbf{N}.$$

Элементы множества **Z** называются **целыми числами**.

Множество целых чисел **замкнуто** относительно трех операций: **сложения, умножения и вычитания**. Это означает, что сумма, произведение и разность любых двух целых чисел является целым числом.

В десятичной системе счисления запись натурального числа m осуществляется с помощью цифр $0,1,2,\ldots,9$ и имеет в сокращенной форме следующий вид:

$$m=\overline{a_n a_{n-1}\ldots a_1 a_0},$$

а в развернутой

$$m=a_n\cdot 10^n+a_{n-1}\cdot 10^{n-1}+\ldots+a_1\cdot 10+a_0.$$

Здесь $a_0,a_1,a_2,\ldots,a_n$ – цифры от 0 до 9, причем $a_n\neq 0$. В приведенной записи числа m цифра a_0 определяет число единиц, a_1 – число десятков, a_2 – число сотен и т.д. Это означает, что позиция цифры a_k в сокращенной записи $\overline{a_n a_{n-1}\ldots a_k\ldots a_1 a_0}$ определяет степень k числа 10 в развернутой записи, т.е.

$$\overline{a_n a_{n-1}\ldots a_k\ldots a_1 a_0}=$$
$$=a_n\cdot 10^n+a_{n-1}\cdot 10^{n-1}+\ldots+a_k\cdot 10^k+\ldots+a_1\cdot 10+a_0.$$

1.2. Признаки делимости на 2, 3, 4, 5, 8, 9, 11. Деление целых чисел с остатком

Натуральное число m **делится** на натуральное число n, если существует натуральное число k такое, что $m = n \cdot k$.

Запись $m \vdots n$ означает, что m делится на n (n делит m, n является делителем числа m).

Натуральное число m, большее единицы, называется **простым,** если оно имеет только два делителя: 1 и само число m. Если натуральное число m имеет три и более делителей, то оно называется **составным.**

Основная теорема арифметики. Всякое натуральное число m $(m > 1)$ можно единственным образом представить в виде произведения степеней простых чисел

$$m = p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdots p_r^{k_r},$$

где $p_1, p_2, \ldots, p_r$ – простые числа, $k_1, k_2, \ldots, k_r$ – натуральные числа. Число k_i определяет кратность вхождения простого числа p_i в разложение m. Например, $72 = 2^3 \cdot 3^2$.

Признаки делимости

Пусть m – натуральное число, большее 1 и

$$m = \overline{a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0} = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \cdots + a_1 \cdot 10 + a_0 .$$

	Признак	Пример
На 2	последняя цифра числа делится на 2, то есть $m \vdots 2 \Leftrightarrow a_0 \vdots 2$	$m = 642578$ делится на 2, так как 8 делится на 2
На 3	сумма цифр числа делится на 3, то есть $m \vdots 3 \Leftrightarrow (a_n + \cdots + a_1 + a_0) \vdots 3$	$m = 642576$ делится на 3, так как $6+4+2+5+7+6=30$ делится на 3
На 4	две последние цифры числа образуют число, которое делится на 4, то есть	$m = 98374516$ делится на 4, так как 16 делится на 4

	$m \vdots 4 \Leftrightarrow \overline{a_1 a_0} \vdots 4$	
На 5	последняя цифра числа делится на 5, то есть $m \vdots 5 \Leftrightarrow a_0 \vdots 5$	$m = 14265$ делится на 5, так как 5 делится на 5
На 8	три последние цифры числа образуют число, которое делится на 8, то есть $m \vdots 8 \Leftrightarrow \overline{a_2 a_1 a_0} \vdots 8$	$m = 3750816$ делится на 8, так как 816 делится на 8
На 9	сумма цифр числа делится на 9, то есть $m \vdots 9 \Leftrightarrow \left(a_n + \dots + a_1 + a_0\right) \vdots 9$	$m = 642573$ делится на 9, так как $6+4+2+5+7+3=27$ делится на 9
На 11	разность сумм цифр, стоящих на четных и на нечетных местах, делится на 11, то есть $m \vdots 11 \Leftrightarrow \left(\left(a_0 + a_2 + \ldots\right) - \left(a_1 + a_3 + \ldots\right)\right) \vdots 11$	$m = 1909237$ делится на 11, так как $\left(7+2+0+1\right) - \left(3+9+9\right) = -11$ делится на 11

Пусть m целое число, а n натуральное число. Если m не делится на n нацело, то возможно **деление** m **на** n **с остатком**. Для любого целого числа m и любого натурального n существуют единственное целое число k и единственное натуральное число r, причем $0 \le r < n$, такое, что

$$m = nk + r .$$

При этом целое число k называется **неполным частным** или просто **частным**, а натуральное число r – **остатком.**

Например, разделим 26 на 4 с остатком. Так как $26 = 4 \cdot 6 + 2$, то частное $k = 6$, а остаток – $r = 2$.

Разделим отрицательное число -37 на 8. Так как $-37 = 8\left(-5\right) + 3$, то частное $k = -5$, а остаток – $r = 3$.

1.3. Наибольший общий делитель (НОД) и наименьшее общее кратное (НОК)

Если натуральные числа $m_1, m_2, \ldots, m_k$ делятся на натуральное число n, то число n называется **общим делителем** чисел $m_1, m_2, \ldots, m_k$.

Наибольшее натуральное число, на которое делятся числа $m_1, m_2, \ldots, m_k$, называется **наибольшим общим делителем** (НОД) этих чисел.

Например, $m_1 = 72 = 2^3 \cdot 3^2$ и $m_2 = 42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$ имеют три общих делителя – числа 2, 3 и 6, наибольшим из них является число 6: $НОД(72, 42) = 6$.

Если известны разложения чисел $m_1, m_2, \ldots, m_k$ на простые множители, то для нахождения НОД ($m_1, m_2, \ldots, m_k$) необходимо:

1) выбрать одинаковые простые числа p_i, входящие одновременно в разложение каждого числа $m_1, m_2, \ldots, m_k$;
2) составить из выбранных простых чисел произведение, взяв каждое простое число p в **минимальной** из всех степеней, в которых оно входит в разложение чисел $m_1, m_2, \ldots, m_k$.

Например, $НОД(72;126) = НОД\left(2^3 \cdot 3^2;\, 2 \cdot 3^2 \cdot 7\right) = 2 \cdot 3^2 = 18$.

Наименьшим общим кратным (НОК) чисел $m_1, m_2, \ldots, m_k$ называется наименьшее натуральное число n, которое делится на каждое из чисел $m_1, m_2, \ldots, m_k$.

Для нахождения $НОК\left(m_1, m_2, \ldots, m_k\right)$ необходимо:

1) составить разложения чисел $m_1, m_2, \ldots, m_k$ на простые множители;
2) составить из всех простых чисел, вошедших в разложение хотя бы одного числа m_i, произведение, взяв каждое простое число p в **максимальной** степени из всех степеней, в которых это число p входит в разложение чисел $m_1, m_2, \ldots, m_k$.

Например, если $m_1 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^3 \cdot 7$, $m_2 = 3^3 \cdot 5 \cdot 11$, $m_3 = 7^2 \cdot 2^4$, то $НОК(m_1, m_2, \ldots, m_k) = 2^4 \cdot 3^3 \cdot 5^3 \cdot 7^2 \cdot 11$.

Из правил построения НОК и НОД двух натуральных чисел через их канонические разложения легко выводится следующее свойство НОД и НОК:

$$\boxed{НОД(m_1, m_2) \cdot НОК(m_1, m_2) = m_1 \cdot m_2}.$$

2. РАЦИОНАЛЬНЫЕ И ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЕ ЧИСЛА

2.1. Обыкновенные дроби, правильные и неправильные дроби. Разложение неправильной дроби на сумму целой части и правильной дроби

Дроби вида $\frac{m}{n}$, где $m \in \mathbf{Z}$, $n \in \mathbf{N}$, называются **обыкновенными дробями**. Обыкновенные дроби $\frac{m}{n}$, $m \in \mathbf{Z}$, $n \in \mathbf{N}$, подразделяют на правильные и неправильные.

Дробь $\frac{m}{n}$, $m \in \mathbf{Z}$, $n \in \mathbf{N}$, называется **правильной**, если $m < n$ при $m > 0$ или $(-m) < n$ при $m < 0$ и **неправильной** в противном случае, т.е. если $m \geq n$ или $(-m) \geq n$.

Всякую неправильную дробь можно представить в виде суммы целого числа k и правильной дроби $\frac{r}{n}$, где $0 \leq r < n$, причем такое разложение $\frac{m}{n} = k + \frac{r}{n}$ единственно.

Например, дробь $\frac{3}{7}$ – правильная.

Дробь $\frac{23}{6}$ – неправильная, а равенство $\frac{23}{6} = 3 + \frac{5}{6}$ даёт её разложение на сумму натурального числа 3 и правильной дроби

$\frac{5}{6}$. Для отрицательной дроби $-\frac{23}{6}$ разложение имеет следующий вид: $-\frac{23}{6}=-4+\frac{1}{6}$.

Множество всех обыкновенных дробей называется множеством **рациональных** чисел и обозначается $\mathbf{Q}$. Таким образом,

$$\mathbf{Q}=\left\{\frac{m}{n}\middle| m\in\mathbf{Z},\, n\in\mathbf{N}\right\}.$$

2.2. Десятичные дроби. Перевод обыкновенной дроби в десятичную и обратный перевод

Десятичной дробью называется запись обыкновенной дроби $\frac{m}{n}$, $m,n\in\mathbf{N}$, в виде $\alpha_0,\alpha_1\alpha_2...\alpha_n...$. Здесь α_0 – целая часть числа, $\alpha_1\alpha_2...\alpha_n...$ – дробная часть. При этом α_0 – натуральное число, а $\alpha_1,\alpha_2,...\alpha_n,...$ – цифры, т.е. для любого $n\in\mathbf{N}$ $\alpha_n\in\{0,1,2,...,9\}$.

Если дробь $\frac{m}{n}$ правильная, то $\alpha_0=0$. Если дробь $\frac{m}{n}$ неправильная, то $\alpha_0\neq 0$ и десятичная дробь называется **смешанной**.

Всякое рациональное число $\frac{m}{n}$ может быть представлено либо в виде конечной десятичной дроби, либо в виде бесконечной, но в этом случае периодической дроби. Например, $\frac{4}{5}=0,8$; $\frac{36}{8}=4,5$; $\frac{171}{8}=21,375$ – конечные десятичные дроби, а

$\frac{137}{333} = 0,411411411...$, $\frac{54287}{24975} = 2,17365365365...$ – бесконечные периодические дроби.

Бесконечные периодические дроби принято записывать в краткой форме:

$$0,(411) = 0,411411...;\ 2,17(365) = 2,17365365....$$

Группа цифр, стоящих в круглых скобках, называется **периодом** бесконечной десятичной периодической дроби. Если период начинается сразу после запятой, то дробь называется **чисто периодической:** $0,(411)$; $3,(1273)$; $0,(13)$. Если же между запятой и периодом есть ещё цифры, то дробь называется **смешанной периодической**: $2,17(365)$; $0,234(13)$; $0,317(8914)$.

В случае произвольной чистой периодической дроби $0,(\alpha_1\alpha_2...\alpha_k)$ справедливо представление

$$0,(\alpha_1\alpha_2...\alpha_k) = \frac{\overline{\alpha_1\alpha_2...\alpha_k}}{99...9}.$$

Для перевода чисто периодической дроби $0,(\alpha_1\alpha_2...\alpha_k)$ в обыкновенную $\frac{m}{n}$ необходимо в числителе обыкновенной дроби записать группу цифр $\alpha_1\alpha_2...\alpha_k$, образующих период десятичной дроби, а в знаменателе – число $\underset{k\ раз}{99...9}$. Например, $0,(411) = \frac{411}{999} = \frac{137}{333}$.

В случае произвольной смешанной бесконечной периодической дроби $0,\alpha_1\alpha_2...\alpha_m(\alpha_{m+1}...\alpha_k)$ справедливо представление

$$0,\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m\left(\alpha_{m+1}\ldots\alpha_k\right)=\frac{\overline{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m\alpha_{m+1}\ldots\alpha_k}-\overline{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m}}{\underbrace{99\ldots9}_{k-m}\underbrace{00\ldots0}_{m}}.$$

Например, $0{,}137\left(2943\right)=\dfrac{1372943-137}{9999000}=\dfrac{1372806}{9999000}=\dfrac{76267}{555500}$.

2.3. Иррациональные числа. Десятичная форма записи

Простейший пример об измерении длины диагонали квадрата со стороной, равной единице, показывает, что операция извлечения квадратного корня из рационального числа не всегда возможна на множестве $\mathbf{Q}$. Числа $\sqrt{2},\sqrt{3},\sqrt{5},\sqrt{7},\sqrt[3]{2},\sqrt[3]{3}$ и т.д. не являются рациональными, т.е. не могут быть представлены несократимыми дробями $\dfrac{m}{n}$, $m,n\in\mathbf{N}$.

Если все рациональные числа расположить на числовой прямой, то на ней останется бесконечное множество незаполненных «дырок». Эти дырки занимают числа, называемые **иррациональными числами**. Иррациональные числа не представимы конечными или бесконечными периодическими десятичными дробями. Их десятичное представление содержит бесконечное число цифр после запятой, не образующих периода какой-нибудь конечной длины.

Множество иррациональных чисел, естественно, не исчерпывается числами вида $\sqrt[n]{a}$, $n\geq 2$, для соответствующих значений $a\in\mathbf{Q}$. В это множество входят числа вида $\sin 1^\circ$, $\cos 1^\circ$, $\sin 2^\circ$, $\cos 2^\circ$, $\log_2 3$, $\log_3 5$ и т.д., а также числа, имеющие свои имена: $\pi\approx 3{,}14159$, число $e\approx 2{,}71828$.

Множество бесконечных непериодических десятичных дробей называется **множеством иррациональных чисел.** Обозначим это множество буквой $\mathbf{I}$:

$$\mathbf{I}=\left\{\alpha_0,\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots\right\}.$$

Здесь $\alpha_0\in\mathbf{Z}$ – целая часть иррационального числа, а

$\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n, ...$ – цифры, образующие дробную часть иррационального числа. При этом никакая группа последовательных цифр $\alpha_{i+1}\alpha_{i+2}...\alpha_{i+m}$ для любых $i, m \in \mathbf{N}$ не повторяется, т.е. десятичная дробь непериодическая.

2.4. Действительные числа. Арифметические операции и их свойства

Множество всех десятичных дробей (конечных и бесконечных) называется **множеством действительных чисел** и обозначается буквой $\mathbf{R}$. Множество $\mathbf{R}$ – это объединение всех рациональных и иррациональных чисел: $\mathbf{R} = \mathbf{Q} \cup \mathbf{I}$.

Множество действительных чисел замкнуто относительно операций сложения, вычитания, умножения, деления, возведения в степень и извлечения корня n-й степени (за исключением корня четной степени из отрицательного числа).

Арифметические операции на множестве $\mathbf{R}$ обладают следующими **свойствами**:

$a+b=b+a$ (коммутативность сложения);

$a+(b+c)=(a+b)+c$ (ассоциативность сложения);

$a+0=0+a=a$ (существование нуля);

$a+(-a)=0$ (существование противоположного числа);

$a \cdot b = b \cdot a$ (коммутативность умножения);

$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ (ассоциативность умножения);

$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$ (существование единицы);

$a \neq 0 \quad \Rightarrow \quad a \cdot \dfrac{1}{a} = 1$ (существование обратного числа);

$(a+b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ (дистрибутивность умножения относительно сложения).

Для любых двух действительных чисел $a, b \in \mathbf{R}$ имеет место одно и только одно из отношений: $a > b$, $a = b$, $a < b$.

Основные свойства числовых неравенств

1. Если $a > b$ и $b > c$, то $a > c$ (свойство транзитивности).

2. Если $a > b$, то для любого $c \in \mathbf{R}$: $a + c > b + c$.

3. Если $a > b$ и $c > 0$, то $ac > bc$; если же $c < 0$, то $ac < bc$.
4. Если $a > b$ и $c > d$, то $a + c > b + d$, т.е. верные неравенства одного знака можно складывать.
5. Если $a > b > 0$ и $c > d > 0$, то $ac > bd$, т.е. верные неравенства одного знака с положительными числами можно почленно перемножать.
6. Если $a > b$ и $c < d$, то $a - c > b - d$.
7. Если $a > b > 0$, то $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$.

3. СТЕПЕНЬ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОГО ЧИСЛА

3.1. Степень действительного числа с целым показателем. Свойства степени

Пусть $a \in \mathbf{R}$, $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 2$. Тогда по определению полагают

$$\boxed{a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n\ \text{множителей}}, \qquad a^{-n} = \frac{1}{a^n},\ a \neq 0.}$$

Таким образом, n-я степень числа a равна произведению n множителей, каждый из которых равен a. Если $n = 1$, то полагают $a^1 = a$. Также по определению полагают, что для любого $a \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$: $a^0 = 1$. В записи a^n число a называют **основанием степени**, а число n – **показателем степени**.

Свойства степеней ($a \in \mathbf{R}$, $n, m \in \mathbf{N}$)

1) $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$;
2) $a^n : a^m = a^{n-m}$;
3) $a^n b^n = (ab)^n$;
4) $a^{nm} = \left(a^n\right)^m$;
5) $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$;
6) $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$.

3.2. Арифметический корень. Корень нечетной степени. Свойства корней

Пусть a – неотрицательное действительное число, $n \in \mathbf{N}$ и $n \geq 2$. **Арифметическим корнем** n-й степени из неотрицательного числа a называется такое **неотрицательное число** b, что $b^n = a$. Такое число b, и при этом единственное, существует для каждого неотрицательного числа a. Обозначают арифметический корень символом $\sqrt[n]{a}$; число a называют **подкоренным числом**, а n – **показателем корня**.

Из определения арифметического корня $\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a$ следует равенство $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$ для любого $a \geq 0$.

Корнем степени $2n+1$, $n \in \mathbf{N}$, из отрицательного числа a называется такое отрицательное число b, что $b^{2n+1} = a$, т.е. $\sqrt[2n+1]{a} = b \quad \Leftrightarrow \quad b^{2n+1} = a$. Например, $\sqrt[3]{-64} = -4$, так как $(-4)^3 = -64$.

Свойства арифметических корней $\left(a \geq 0, b \geq 0, n, m \in \mathbf{N}\right)$

1) $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$;

2) $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$;

3) $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$;

4) $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a}$;

5) $\sqrt{a^2} = |a|$, ($a \in \mathbf{R}$);

6) $\sqrt[2n]{a^{2n}} = |a|$, ($a \in \mathbf{R}$).

3.3. Степень с дробным показателем. Степень с иррациональным показателем

Если показатель t степени числа a^t является дробным, т.е. $t = \dfrac{m}{n}$, $m, n \in \mathbf{N}$, $n \geq 2$, то для неотрицательных значений a

$(a \ge 0)$ по определению полагают $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$. Для отрицательных чисел a $(a < 0)$ операция возведения в дробную степень не определена. В частности, это означает, что $\sqrt[3]{-8} = -2$, но выражение $(-8)^{\frac{1}{3}}$ не определено, тогда как для положительного числа $a = 8$: $\sqrt[3]{8} = 2$ и $8^{1/3} = \sqrt[3]{8} = 2$. В соответствии с определением степени с дробным показателем $0^t = 0$ для любого $t \in \mathbf{Q}^+$.

По определению полагают, что операция возведения в отрицательную дробную степень $\left(-\dfrac{m}{n}\right)$ определена только для положительных чисел a $(a > 0)$ и $a^{-\frac{m}{n}} = \dfrac{1}{a^{\frac{m}{n}}} = \dfrac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$. Например, $8^{-1/3} = \dfrac{1}{8^{1/3}} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{8}} = \dfrac{1}{2}$. Операция $0^{-\frac{m}{n}}$ не определена.

Степень положительного числа a $(a > 0)$ с иррациональным показателем β $(\beta \in \mathbf{I})$ в виде конечной формулы, содержащей радикалы (корни) и степени, определить невозможно. Обусловлено это невозможностью представления иррационального числа в виде обыкновенной дроби. Для определения степени $a^\beta, a \in \mathbf{R}^+$, $\beta \in \mathbf{I}$, используют оценку этого числа снизу и сверху степенями с рациональными показателями того же числа a.

Степенью a^β положительного числа a **с иррациональным показателем** β называют такое действительное число, которое обозначается a^β и удовлетворяет следующим условиям:

а) если $a > 1$, то для любых рациональных чисел b_1, b_2 таких, что $b_1 < \beta < b_2$, выполняется неравенство $a^{b_1} < a^{\beta} < a^{b_2}$;

б) если $0 < a < 1$, то для любых $b_1, b_2 \in \mathbf{Q}$ и удовлетворяющих условию $b_1 < \beta < b_2$, выполняется неравенство $a^{b_2} < a^{\beta} < a^{b_1}$.

Такое число a^{β} существует и оно единственное для каждой пары чисел $a \in \mathbf{R}^{+}$ и $\beta \in \mathbf{I}$.

Определение степени с рациональным показателем и с иррациональным показателем при положительном основании a позволяет говорить о степени действительного числа a $(a > 0)$ с действительным показателем x, т.е. a^{x}.

Пусть $a > 0$, $b > 0$ и x, y – произвольные действительные числа. Тогда справедливы следующие **свойства степеней с действительными показателями.**

1) $a^{x} \cdot a^{y} = a^{x+y}$;

2) $a^{x} : a^{y} = a^{x-y}$;

3) $\left(a^{x}\right)^{y} = \left(a^{y}\right)^{x} = a^{xy}$;

4) $a^{x} b^{x} = (ab)^{x}$;

5) $\dfrac{a^{x}}{b^{x}} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^{x}$;

6) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{x} = \left(\dfrac{b}{a}\right)^{-x}$.

4. ЧИСЛОВЫЕ ПРОМЕЖУТКИ (ОТРЕЗОК, ИНТЕРВАЛ, ПОЛУИНТЕРВАЛ; КОНЕЧНЫЕ И БЕСКОНЕЧНЫЕ ПРОМЕЖУТКИ)

Числовые промежутки делятся: на конечные, или ограниченные и бесконечные, или неограниченные.

Конечные (ограниченные) промежутки

$[a; b] = \{x \in \mathbf{R} \mid a \le x \le b\}$ – отрезок (или сегмент);

$(a;b)=\{x\in\mathbf{R}\mid a<x<b\}$ – интервал;

$[a;b)=\{x\in\mathbf{R}\mid a\le x<b\}$ и $(a;b]=\{x\in\mathbf{R}\mid a<x\le b\}$ – полуинтервалы (полусегменты).

Бесконечные (неограниченные) промежутки

$(-\infty;b]=\{x\in\mathbf{R}\mid x\le b\}$; $[a;+\infty)=\{x\in\mathbf{R}\mid x\ge a\}$ – замкнутые лучи;

$(-\infty;b)=\{x\in\mathbf{R}\mid x<b\}$; $(a;+\infty)=\{x\in\mathbf{R}\mid x>a\}$ – открытые лучи;

$(-\infty;\infty)=\{x\in\mathbf{R}\mid -\infty<x<+\infty\}=\mathbf{R}$ – множество действительных чисел.

5. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ФУНКЦИИ. ОБЛАСТЬ ОПРЕДЕЛЕНИЯ, ОБЛАСТЬ ЗНАЧЕНИЙ. ЧЕТНЫЕ И НЕЧЕТНЫЕ ФУНКЦИИ. ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

Пусть задано числовое множество X. Правило f, по которому каждому $x\in X$ ставится в соответствие единственное число y называется **функцией** и обозначается $y=f(x)$. При этом число x называется **независимой переменной** или **аргументом** функции, число y – **зависимой переменной** или **значением** функции. Множество X называется **областью определения** функции и обозначается $D(f)$, множество всех возможных значений y называется **областью значений** функции и обозначается $E(f)$.

Например, пусть $y=\sin x$, тогда $D(\sin x)=\mathbf{R}$, $E(\sin x)=[-1,1]$.

Графиком функции $y=f(x)$ называется множество точек плоскости с координатами $(x,\ f(x))$, где $x\in D(f(x))$.

Различные функции можно задавать несколькими способами: 1) аналитическим способом (с помощью формулы); 2) графическим способом (с помощью графика); 3) словесным способом (с помощью описания).

Например: 1) $y = x^3 + x - 5$, где $x \in \mathbf{R}$ – аналитический способ; 2) на практике экспериментальные данные, как правило, собираются в таблицы и представляются на графиках, а аналитический вид функциональной зависимости между исследуемыми величинами определяется уже по графику; 3) каждому рациональному числу поставим в соответствие число 1, а каждому иррациональному – число 0, полученная функция $d(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbf{Q} \\ 0, & x \in \mathbf{I} \end{cases}$ называется функцией **Дирихле**.

Функция $y = f(x)$ называется **четной** (**нечетной**), если

1) для всех $x \in D(f)$ выполняется $(-x) \in D(f)$, т.е. ее область определения симметрична относительно нуля;
2) для всех $x \in D(f)$ выполняется $f(-x) = f(x)$ для четной функции ($f(-x) = -f(x)$ для нечетной функции).

Например, $y = x^4 + 3x^2 + 5$, $y = \cos x$, $y = 2^{|x|}$ – четные функции, $y = x^5 + 7x^3 - x$, $y = \sin x$, $y = x^2 \cdot \operatorname{tg} x$ – нечетные.

График четной функции симметричен относительно оси ординат, график нечетной функции симметричен относительно начала координат.

Теорема 1. Если область определения функции симметрична относительно нуля, то ее можно представить в виде суммы четной и нечетной функций.

Например, $e^x = f_1(x) + f_2(x)$, где $f_1(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ – четная, а $f_2(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ – нечетная функции.

Функция $y = f(x)$ называется **периодической**, если существует число $T \neq 0$ такое, что

1) для всех $x \in D(f)$ выполняется $(x+T) \in D(f)$;

2) для всех $x \in D(f)$ выполняется $f(x+T) = f(x)$.

Основным (главным) периодом (или просто **периодом**) принято называть наименьшее положительное число T, являющееся периодом функции.

Теорема 2. Если T – период функции $y = f(x)$, то $\frac{T}{|a|}$ – период функции $y = f(ax+b)$, где $a \neq 0$.

Так как $T(\cos x) = 2\pi$, то $T(\cos(2-3x)) = \frac{2\pi}{|-3|} = \frac{2\pi}{3}$.

6. МОДУЛЬ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОГО ЧИСЛА
6.1. Модуль числа и его свойства

Модулем числа x называется число $|x| = \begin{cases} x, \text{ если } x \geq 0, \\ -x, \text{ если } x < 0. \end{cases}$

Геометрический смысл модуля. Модуль числа есть расстояние от начала отсчета до точки, которой соответствует это число. $|x-a|$ – расстояние от точки x до точки a на числовой оси.

Модуль числа обладает следующими свойствами:

1) $|x| \geq x$;

2) $|-x| = |x|$ ($|x-y| = |y-x|$);

3) $|x| \geq 0$, причем $|x| = 0$ только при $x = 0$;

4) $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$;

5) $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$;

6) $|x \pm y| \leq |x| + |y|$ – неравенство треугольника;

7) $\big||x| - |y|\big| \leq |x-y|$.

6.2. График функции $y=|x-x_0|$. Уравнения и неравенства с модулем: $|x-x_0|=r$, $|x-x_0|\le r$, $|x-x_0|\ge r$, $|x-x_0|<r$, $|x-x_0|>r$.

Рассмотрим свойства функции $y=|x-x_0|$.

1. **Областью определения** является множество всех действительных чисел: $D(f)=\mathbf{R}$.

2. **Область значений.** $E(f)=[0,+\infty)$.

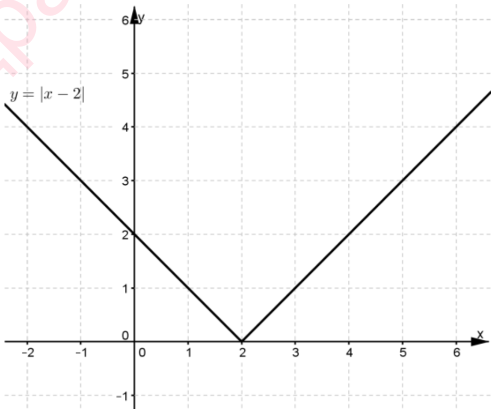
3. **Четность и нечетность.** При $x_0=0$ функция $y=|x-x_0|=|x|$ является четной; при $x_0\ne 0$ функция $y=|x-x_0|$ ни четная, ни нечетная.

4. **Периодичность.** Функция непериодическая.

5. **Интервалы монотонности.** Функция $y=|x-x_0|$ убывает на промежутке $(-\infty,0]$ и возрастает на $[0,+\infty)$.

6. **Точки экстремума.** Точка $x=x_0$ – точка минимума функции $y=|x-x_0|$. Наименьшее значение – $y(x_0)=0$.

7. **График функции.** График функции симметричен относительно вертикальной прямой $x=x_0$.



Уравнения с модулем

$\lvert x-x_0\rvert=r$	$\lvert f(x)\rvert=\lvert g(x)\rvert$	$\lvert f(x)\rvert=g(x)$
$r<0$ – решений нет	равносильно совокупности $\left[\begin{array}{l} f(x)=g(x), \\ f(x)=-g(x) \end{array}\right.$	равносильно системе $\left\{\begin{array}{l} g(x)\ge 0, \\ \left[\begin{array}{l} f(x)=g(x), \\ f(x)=-g(x) \end{array}\right. \end{array}\right.$
$r=0 \;\Rightarrow\; x=x_0$		
$r>0 \;\Rightarrow$ $\left[\begin{array}{l} x-x_0=r, \\ x-x_0=-r \end{array}\right.$		

Неравенства с модулем

	$r<0$	$r=0$	$r>0$
$\lvert x-x_0\rvert\le r$	решений нет	$x=x_0$	$x_0-r\le x\le x_0+r$
$\lvert x-x_0\rvert< r$	решений нет	решений нет	$x_0-r< x< x_0+r$
$\lvert x-x_0\rvert\ge r$	$x\in\mathbf{R}$	$x\in\mathbf{R}$	$\left[\begin{array}{l} x\le x_0-r \\ x\ge x_0+r \end{array}\right.$
$\lvert x-x_0\rvert> r$	$x\in\mathbf{R}$	$x\ne x_0$	$\left[\begin{array}{l} x< x_0-r \\ x> x_0+r \end{array}\right.$

7. ЛИНЕЙНАЯ ФУНКЦИЯ, ЕЕ СВОЙСТВА И ГРАФИК

Линейной функцией называется функция вида $y=ax+b$, где $a,b\in\mathbf{R}$. Рассмотрим свойства линейной функции.

1. **Областью определения** является множество всех действительных чисел, так как выражение $ax+b$ определено при любых значениях $x: D(ax+b)=\mathbf{R}$.

2. **Область значений.** $E(ax+b)=\mathbf{R}$, если $a\ne 0$ и $E(f)=\{b\}$, если $a=0$.

3. **Четность и нечетность.** При $b=0$ функция $y=ax$ является нечетной; при $a=0$ функция $y=b$ является четной; при $a\ne 0$ и $b\ne 0$ линейная функция ни четная, ни нечетная.

4. **Периодичность.** При $a \neq 0$ функция непериодическая; при $a = 0$ функция $y = b$ периодическая с любым периодом $T > 0$.

5. **Интервалы монотонности.** Если $a > 0$, то функция $y = ax + b$ монотонно возрастает на $\mathbf{R}$; если $a < 0$, то монотонно убывает.

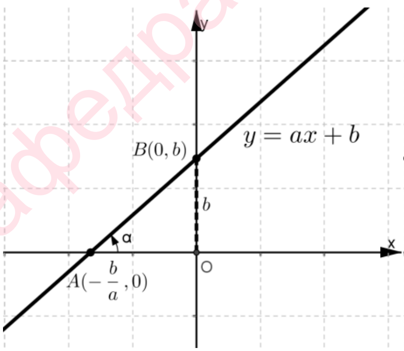
6. **Точки экстремума.** При $a \neq 0$ локальных точек экстремума линейная функция не имеет, так как $y'(x) = a \neq 0$. Не имеет она в этом случае и наибольшего и наименьшего значений. Если $a = 0$, то наибольшее и наименьшее значения совпадают и равны b.

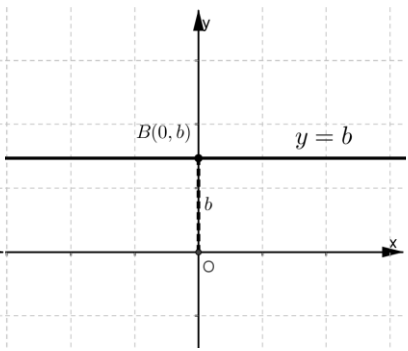
7. **График функции.** Графиком функции $y = ax + b$ является прямая. Коэффициент a равен тангенсу угла наклона прямой к положительному направлению оси OX.

Если $a > 0$, то угол наклона α острый; если $a < 0$, то угол наклона α тупой (угол α отсчитывается против хода часовой стрелки от положительного направления оси OX).

График функции $y = ax + b$ пересекает ось OX в точке $\mathrm{A}\left(-\frac{b}{a};0\right)$, а ось ординат – в точке $\mathrm{B}(0;b)$.

Если $a = 0$, то графиком функции $y = b$ является прямая, параллельная оси OX.





8. ВЫДЕЛЕНИЕ ПОЛНОГО КВАДРАТА ИЗ КВАДРАТНОГО ТРЕХЧЛЕНА. РАЗЛОЖЕНИЕ КВАДРАТНОГО ТРЕХЧЛЕНА НА ЛИНЕЙНЫЕ МНОЖИТЕЛИ. ФОРМУЛЫ ВИЕТА

Квадратным трехчленом называется многочлен второй степени ax^2+bx+c, где x – переменная; $a,b,c\in\mathbf{R}$, причем $a\neq 0$.

Квадратный трехчлен $x^2\pm 2dx+d^2=\left(x\pm d\right)^2$, $d\in\mathbf{R}$ называется **полным квадратом**.

Выделить полный квадрат из квадратного трехчлена ax^2+bx+c означает представить его в виде $a\left(x\pm d\right)^2+p$, где коэффициенты d и p определяются через коэффициенты a, b, c квадратного трехчлена.

Для любых a, b, c $\left(a\neq 0\right)$ справедливо тождество

$$ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{D}{4a},$$

где $D=b^2-4ac$.

□ Действительно,

$$ax^2+bx+c=$$

$$=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)=a\left(x^2+2\frac{b}{2a}x+\frac{b^2}{4a^2}-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right)=$$

$$=a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right)=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{D}{4a}.\blacksquare$$

Таким образом, $d=\dfrac{b}{2a}$; $\quad \mathrm{p}=-\dfrac{\mathrm{D}}{4\mathrm{a}}=-\dfrac{b^2-4ac}{4a}$.

Преобразования, использованные при доказательстве утверждения, составляют содержание **процедуры выделения полного квадрата**.

<u>**Пример.**</u> Выделим полный квадрат из квадратного трехчлена $2x^2+3x+5$.

$$2x^2+3x+5=2\left(x^2+\frac{3}{2}x+\frac{5}{2}\right)=$$

$$=2\left(\left(x^2+2\cdot\frac{3}{4}x+\frac{9}{16}\right)-\frac{9}{16}+\frac{5}{2}\right)=2\left(x+\frac{3}{4}\right)^2+\frac{31}{8}\ .$$

<u>**Теорема**</u> **(о разложении квадратного трехчлена на линейные множители).** Если $D=b^2-4ac\geq 0$, то квадратный трехчлен можно представить в виде

$$\boxed{ax^2+bx+c=a\left(x-x_1\right)\cdot\left(x-x_2\right),\ \ x\in\mathbf{R},}$$

где $x_1=\dfrac{-b-\sqrt{D}}{2a}$, $x_2=\dfrac{-b+\sqrt{D}}{2a}$.

<u>**Замечание:**</u> 1) если $D=0$, то $x_1=x_2=-\dfrac{b}{2a}$ и

$ax^2+bx+c=a\left(x-x_1\right)^2$;

2) если $D<0$, то разложения квадратного трехчлена на линейные множители с действительными x_1 и x_2 не существует.

<u>**Теорема**</u> **(Формулы Виета).** Числа x_1 и x_2 являются корнями квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0$ при $a\neq 0$ тогда и только тогда, когда они удовлетворяют условиям:

$$\boxed{x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}\ \text{ и }\ x_1+x_2=-\frac{b}{a}.}$$

9. КВАДРАТИЧНАЯ ФУНКЦИЯ, ЕЕ СВОЙСТВА И ГРАФИК

Функция $y=ax^2+bx+c$, где a, b, c – действительные числа, причем $a\neq 0$, называется **квадратичной**.

1. **Область определения.** $D\left(y\right)=\mathbf{R}$, так как выражение ax^2+bx+c определено для любых x.

2. **Область значений.** Введем обозначения $x_B = -\dfrac{b}{2a}$, $y_B = -\dfrac{b^2-4ac}{4a^2}$ Тогда $y = a\left(x - x_B\right)^2 + y_B$.

Если $a>0$, то $E\left(y\right)=\left[y_B,+\infty\right)$. Если $a<0$, то $E\left(y\right)=\left(-\infty;y_B\right]$.

3. **Четность и нечетность.** Так как для любого $x\in\mathbf{R}$

$$y\left(x_B - x\right) = y\left(x_B + x\right) = ax^2 + y_B,$$

то график квадратичной функции симметричен относительно прямой $x = x_B$.

При $b=0$ получим $x_B=0$, и график квадратичной функции будет симметричен относительно прямой $x=0$, т.е. оси OY. Следовательно, при $b=0$ квадратичная функция $y=ax^2+c$ является четной. Если $b\neq 0$, то квадратичная функция ни четная, ни нечетная.

4. **Интервалы монотонности.** Если $a>0$, то на интервале $\left(-\infty;x_B\right)$ квадратичная функция монотонно убывает, а на интервале $\left(x_B;+\infty\right)$ – монотонно возрастает.

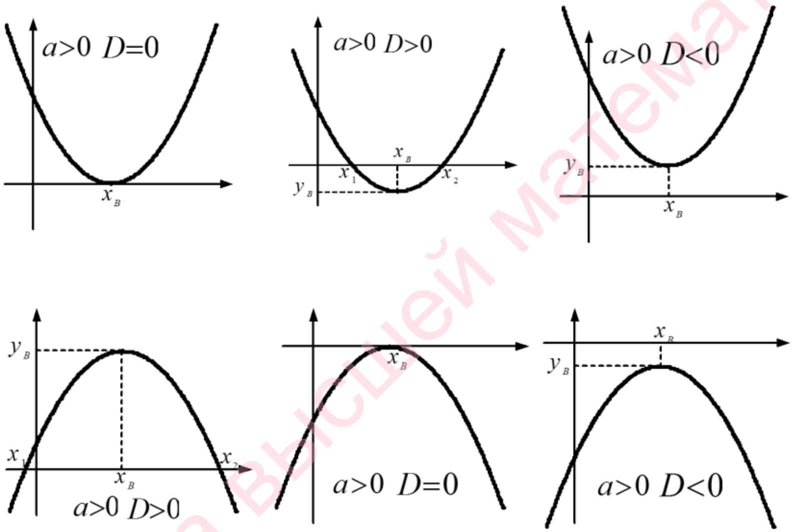
Если $a<0$, то $\left(-\infty;x_B\right)$ – интервал монотонного возрастания, а $\left(x_B;+\infty\right)$ – монотонного убывания.

5. **Периодичность.** Квадратичная функция не является периодической.

6. **Точки экстремума.** Квадратичная функция имеет единственную экстремальную точку $x=x_B$. В этой точке квадратичная функция принимает наименьшее значение $y\left(x_B\right)=y_B$ при $a>0$ и наибольшее значение $y\left(x_B\right)=y_B$ при $a<0$.

7. **График функции.** Кривая, являющаяся графиком квадратичной функции, называется **параболой**. Точка $A\left(x_B;y_B\right)$, т.е.

$A\left(-\frac{b}{2a};-\frac{D}{4a}\right)$ называется **вершиной параболы.** Часть параболы, отвечающая значениям $x \le x_B$, называется **левой ветвью параболы**; другая часть параболы, отвечающая значениям $x \ge x_B$ – **правой ветвью параболы**. При $a > 0$ ветви параболы направлены вверх; при $a < 0$ – вниз.

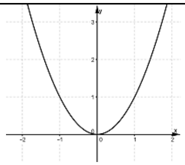
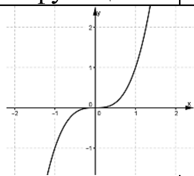
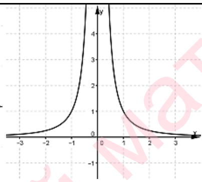
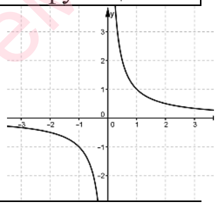


10. СТЕПЕННЫЕ ФУНКЦИИ

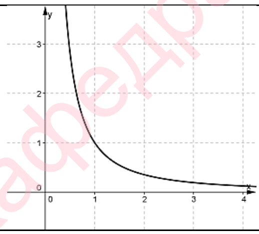
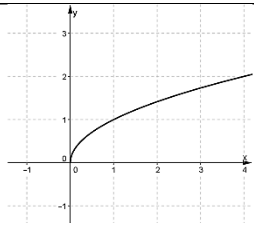
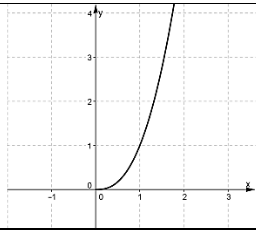
Степенной называется функция $y = x^{\alpha}$, где α – некоторое действительное число. Рассмотрим свойства степенной функции в зависимости от показателя α.

1 случай: $\alpha = 0$. Тогда функция принимает вид $y = x^0 = 1$.
$D(y) = \mathbf{R} \setminus \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, $E(y) = \{1\}$.

2 случай: $\alpha = m \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}$. Тогда $y = x^m$.

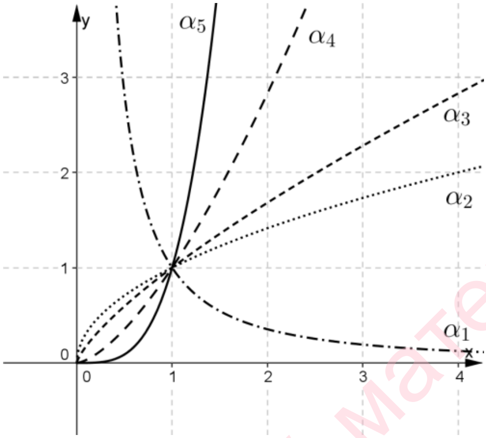
$m \in \mathbf{N}$		$-m \in \mathbf{N}$	
m – четное ($y = x^2$)	m – нечетное ($y = x^3$)	m – четное ($y = x^{-2}$)	m – нечетное ($y = x^{-1}$)
$D(y) = \mathbf{R}$ $E(y) = [0, +\infty)$	$D(y) = \mathbf{R}$ $E(y) = \mathbf{R}$	$D(y) = \mathbf{R} \setminus \{0\}$ $E(y) = (0, +\infty)$	$D(y) = \mathbf{R} \setminus \{0\}$ $E(y) = \mathbf{R} \setminus \{0\}$
четная функция	нечетная функция	четная функция	нечетная функция
			

3 случай: $\alpha \notin \mathbf{Z}$. Тогда $y = x^{\alpha}$.

$\alpha < 0$ ($y = x^{-1/2}$)	$0 < \alpha < 1$ ($y = x^{1/2}$)	$\alpha > 1$ ($y = x^{5/2}$)
$D(y) = (0, +\infty)$ $E(y) = (0, +\infty)$	$D(y) = [0, +\infty)$ $E(y) = [0, +\infty)$	$D(y) = [0, +\infty)$ $E(y) = [0, +\infty)$
		

Сравнение графиков степенных функций

$(\alpha_1 < 0 < \alpha_2 < \alpha_3 < 1 < \alpha_4 < \alpha_5)$



11. ПОКАЗАТЕЛЬНАЯ ФУНКЦИЯ: ОПРЕДЕЛЕНИЕ, СВОЙСТВА, ГРАФИК

Показательной функцией называется функция вида $y = a^x$, где $a > 0$, $a \neq 1$ – заданное положительное действительное число. Число a называется **основанием показательной функции**. При $a = 1$ функция $y = 1^x$ принимает значение 1 при всех $x \in \mathbf{R}$.

Поэтому в определении показательной функции $a \neq 1$.

Рассмотрим свойства показательной функции.

1. **Область определения.** $D\left(a^x\right) = \mathbf{R}$, так как a^x имеет смысл при любом значении x.

2. **Область значений.** $E\left(a^x\right) = \mathbf{R}^+ = (0, +\infty)$, так как $a^x > 0$ для любого $x \in \mathbf{R}$.

3. **Интервалы монотонности.** Функция $y = a^x$ является монотонно возрастающей на всей области определения, если $a > 1$ и монотонно убывающей на $D\left(a^x\right)$, если $0 < a < 1$.

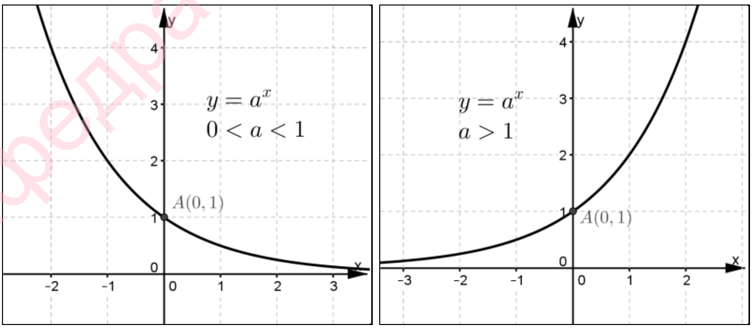
4. **Точки пересечения с координатными осями.** График показательной функции не пересекает ось OX, поскольку $a^x > 0$ при всех $x \in \mathbf{R}$; ось OY график функции пересекает в единственной точке $(0;1)$. Действительно, $y(0) = a^0 = 1$. Других точек пересечения нет, так как функция a^x в соответствии с п.3 является монотонной на $D(a^x)$.

5. **Четность и нечетность.** Показательная функция не является ни четной, ни нечетной. Четной она не может быть в силу монотонности функции на $D(a^x)$. Нечетной эта функция не является из-за того, что область значений функции несимметрична относительно нуля.

6. **Периодичность.** Показательная функция непериодическая. Это следует из ее монотонности на $D(a^x)$.

7. **Поведение функции на бесконечности.** Если $a > 0$, то при $x \to -\infty$ функция неограниченно приближается к оси OX (но не пересекает ее) $a^x \to 0$; при $x \to +\infty$ функция $a^x \to +\infty$. Если $0 < a < 1$, то при $x \to -\infty$ $a^x \to +\infty$; при $x \to +\infty$ $a^x \to 0$.

8. **График.** График показательной функции при $a > 1$ и при $0 < a < 1$ представлен на рисунке.



12. ЛОГАРИФМ ЧИСЛА И ЕГО СВОЙСТВА

Логарифмом положительного числа b **по основанию** a $(a>0, a\neq 0)$ называется число c (показатель степени), в которое нужно возвести число a, чтобы получить число b.

Обозначение: $\log_a b$. Таким образом, по определению

$$\boxed{\log_a b = c \quad \Leftrightarrow \quad a^c = b}.$$

Или кратко

$$\boxed{a^{\log_a b} = b}.$$

Данное равенство называется **основным логарифмическим тождеством.**

Из определения следует, что $\log_a a = 1$ и $\log_a 1 = 0$.

Логарифм числа обладает следующими **свойствами**: при любом $a>0$ и $a\neq 1$ для любых положительных чисел b и c выполнены равенства:

1. $\log_a bc = \log_a b + \log_a c$.

□В соответствии с основным логарифмическим тождеством имеем $a^{\log_a b} = b$, $a^{\log_a c} = c$. Перемножая почленно эти равенства, получаем

$$bc = a^{\log_a b + \log_a c}.$$

С другой стороны, по основному логарифмическому тождеству

$$bc = a^{\log_a bc}.$$

Из полученных равенств следует, что

$$a^{\log_a bc} = a^{\log_a b + \log_a c} \quad \Leftrightarrow \quad \log_a bc = \log_a b + \log_a c. \blacksquare$$

2. $\log_a \dfrac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$.

3. $\log_a b^m = m \cdot \log_a b, \quad m \in \mathbf{R}$

4. $\log_{a^m} b = \dfrac{1}{m} \cdot \log_a b, \quad m \in \mathbf{R}$

5. $\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}, \quad b \neq 1$

6. $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$, $c > 0, c \neq 1$ – формула перехода к новому основанию

7. $c^{\log_a b} = b^{\log_a c}$

13. ЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ: ОПРЕДЕЛЕНИЕ, СВОЙСТВА, ГРАФИК

Допустим, что требуется решить уравнение $a^x = b$ при $b > 0$, а > 0 и $a \neq 1$. Поскольку функция a^x является монотонной и принимает значения на $\mathbf{R}^+$ $\left(E\left(a^x\right) = \mathbf{R}^+\right)$, то такое уравнение имеет единственное решение для любого $b \in \mathbf{R}^+$.

Искомое число x является **логарифмом числа** b **по основанию** a, т.е. $x = \log_a b$.

Пусть теперь требуется решить уравнение $a^y = x$, где $a > 0$ и $a \neq 1$, а x – произвольное положительное число. Его решением будет отображение $y = \log_a x$, которое ставит в соответствие каждому $x_0 \in \mathbf{R}^+$ единственное значение $y_0 \in \mathbf{R}$.

Функция вида $y = \log_a x$, где $a > 0$, $a \neq 1$ называется **логарифмической функцией**. Число a называется основанием логарифмической функции.

Свойства логарифмической функции

1. **Область определения.** $D\left(\log_a x\right) = \mathbf{R}^+$. Это утверждение следует из определения логарифма действительного числа: выражение $\log_a x$ определено при $x > 0$.

2. **Область значений.** $E\left(\log_a x\right) = \mathbf{R}$.

3. **Четность и нечетность. Периодичность.** Логарифмическая функция не является ни четной, ни нечетной, так как определена на несимметричном относительно нуля множестве $\mathbf{R}^+$. По той же причине она не является и периодической.

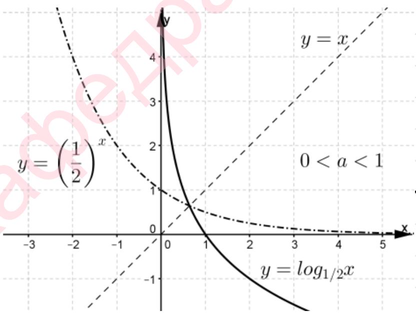
4. **Интервалы монотонности.** Если $a>1$, то логарифмическая функция является монотонно возрастающей на $D(\log_a x)$; если $0<a<1$, то монотонно убывающей.

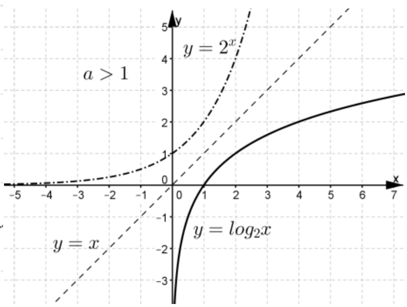
5. **Точки пересечения с координатными осями.** Ось OY график логарифмической функции не пересекает, поскольку выражение $\log_a x$ определено для $x>0$. Ось OX график функции пересекает в единственной точке $A(1;0)$. Действительно, $\log_a 1=0$ при любом $a>0$, $a\neq 1$.

Других точек пересечения графика с осью OX нет в силу монотонности функции.

6. **Интервалы знакопостоянства.** Так как логарифмическая функция является монотонной и $y(1)=\log_a 1=0$ при любом $a>0$, $a\neq 1$, то если $a>1$ имеем $\log_a x<0$ при $0<x<1$ и $\log_a x>0$ при $x>1$; если $0<a<1$, то $\log_a x>0$ при $0<x<1$ и $\log_a x<0$ при $x>1$.

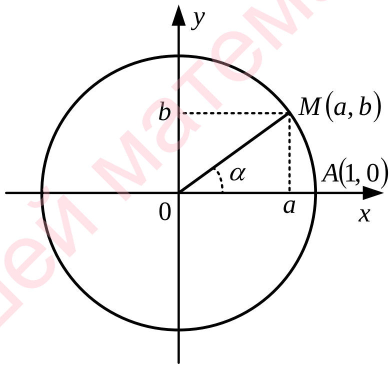
7. **График функции.** Функция $y=\log_a x$ является обратной по отношению к функции $y=a^x$. График функции $y=\log_a x$ симметричен графику показательной функции $y=a^x$ при том же основании относительно прямой $y=x$.





14. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКАЯ ОКРУЖНОСТЬ. ОПРЕДЕЛЕНИЯ ФУНКЦИЙ СИНУС, КОСИНУС, ТАНГЕНС И КОТАНГЕНС. ГРАФИКИ ФУНКЦИЙ $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$. ОСНОВНОЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОЕ ТОЖДЕСТВО

На координатной плоскости OXY построим окружность единичного радиуса с центром в точке O. Радиус OA, где точка A имеет координаты $(1, 0)$, будет называться начальным радиусом. Для любого действительного числа α можно провести луч OM, образующий с осью OX угол, радианная мера которого равна α. Угол α отсчитывается от начального радиуса OA (на рисунке угол α - положительный, так как отсчет угла происходит от OA против хода стрелки часов).



Синусом угла α называется число, равное ординате конца единичного радиуса, соответствующего углу α, и обозначается $\sin\alpha$. Таким образом, по определению $\sin\alpha = b$ (см. рисунок). Так как каждому углу α соответствует на единичной окружности единственная точка M с ординатой y, то соответствие $y = \sin\alpha$ является функцией. В дальнейшем будем писать $y = \sin x$.

Рассмотрим свойства функции $y = \sin x$.

1. **Область определения.** Множество действительных чисел $D(\sin x) = \mathbf{R}$. Свойство следует из определения функции.

2. **Область значений.** $E(\sin x) = [-1;1]$, так как ордината точки M, являющаяся концом радиуса OM, может принимать значения на отрезке $[-1;1]$.

3. **Периодичность.** Функция является периодической с наименьшим положительным периодом 2π.

4. **Четность и нечетность.** Функция $y=\sin x$ является нечетной, так как $\boxed{\sin(-x)=\sin x}$.

5. **Знаки функции.** Непосредственно из определения функции $y=\sin x$ следует, что она положительна в I и II четвертях, т.е. при $x\in(2\pi k;\pi+2\pi k)$, $k\in\mathbf{Z}$ и отрицательна в III и IV четвертях, т.е. при $x\in(\pi+2\pi k;2\pi+2\pi k)$, $k\in\mathbf{Z}$.

6. **Точки экстремума.** Наибольшее значение, равное 1, достигается в точках $x=\dfrac{\pi}{2}+2\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$; наименьшее значение, равное -1, достигается в точках $x=-\dfrac{\pi}{2}+2\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$.

7. **Промежутки возрастания и убывания.** Функция $y=\sin x$

а) **возрастает** при $x\in\left[-\dfrac{\pi}{2}+2\pi n;\dfrac{\pi}{2}+2\pi n\right]$, $n\in\mathbf{Z}$;

б) **убывает** при $x\in\left[\dfrac{\pi}{2}+2\pi n;\dfrac{3}{2}\pi+2\pi n\right]$, $n\in\mathbf{Z}$.

8. **График функции** $y=\sin x$ приведен на рисунке.

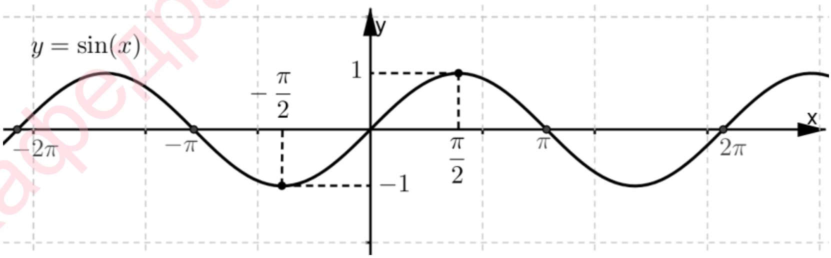


График функции $y=\sin x$ называется **синусоидой**.

Косинусом угла α называется число, равное абсциссе конца единичного радиуса, соответствующего углу α, и обозначается $\cos\alpha$. Таким образом, по определению $\cos\alpha = a$. Рассмотрим свойства функции $y = \cos x$.

1. $D(\cos x) = \mathbf{R}$. 2. $E(\cos x) = [-1;1]$.

3. Наименьший положительный период функции 2π.

4. Функция $\cos x$ является четной, так как $\boxed{\cos(-x) = \cos x}$.

5. **Знаки функции.**

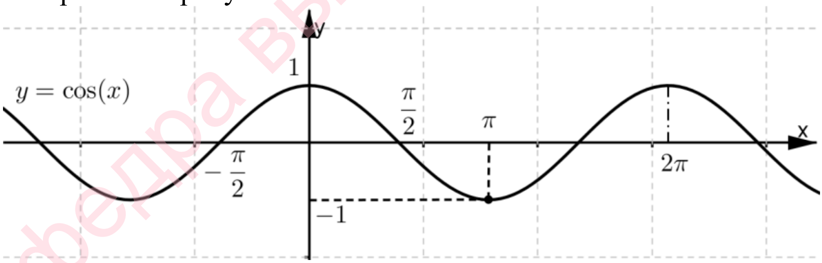
$$\cos x > 0 \text{ при } x \in \left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right), \quad k \in \mathbf{Z};$$

$$\cos x < 0 \text{ при } x \in \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \frac{3}{2}\pi + 2\pi k\right), \quad k \in \mathbf{Z}.$$

6. **Точки экстремума.** Наибольшее значение 1 достигается при $x = 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$, наименьшее значение -1 при $x = \pi + 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

7. **Функция возрастает** при $x \in [\pi + 2\pi n; 2\pi + 2\pi n]$, $n \in \mathbf{Z}$ и **убывает** при $x \in [2\pi n; \pi + 2\pi n]$, $n \in \mathbf{Z}$.

8. **График** функции $y = \cos x$, называемой **косинусоидой**, изображен на рисунке.



Тангенсом угла x называется отношение ординаты b точки M к абсциссе a и обозначается $\operatorname{tg} x$. Поскольку $b = \sin x$, $a = \cos x$, то

$$\boxed{\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbf{Z}}.$$

Котангенсом угла x называется отношение абсциссы a точки M к ординате b и обозначается $\operatorname{ctg} x$. Поскольку $b=\sin x,\quad a=\cos x$, то

$$\boxed{\operatorname{ctg} x=\frac{\cos x}{\sin x},\qquad x\neq \pi n,\, n\in \mathbf{Z}}.$$

Для всех допустимых x

$$\boxed{\operatorname{tg} x\cdot \operatorname{ctg} x=1}.$$

Рассмотрим свойства функций $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$.

1. **Область определения.**

$$D(\operatorname{tg} x)=\left\{x \,\middle|\, x\in \mathbf{R},\, x\neq \frac{\pi}{2}+\pi n,\, n\in \mathbf{Z}\right\};$$

$$D(\operatorname{ctg} x)=\left\{x \,|\, x\in \mathbf{R},\, x\neq \pi n,\, n\in \mathbf{Z}\right\}.$$

2. **Область значений.** $E(\operatorname{tg} x)=\mathbf{R}$, $E(\operatorname{ctg} x)=\mathbf{R}$.

3. **Периодичность.** Периодические с основным периодом π.

4. **Четность и нечетность.** Функции нечетные, так как

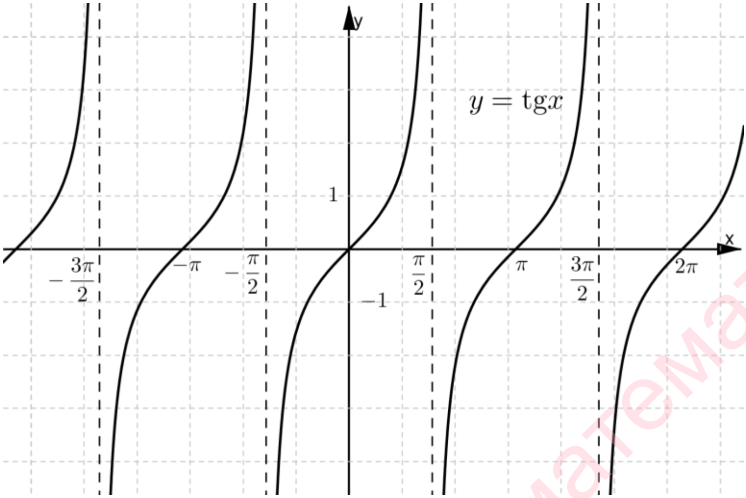
$$\boxed{\operatorname{tg}(-x)=-\operatorname{tg} x,\ \operatorname{ctg}(-x)=-\operatorname{ctg} x}.$$

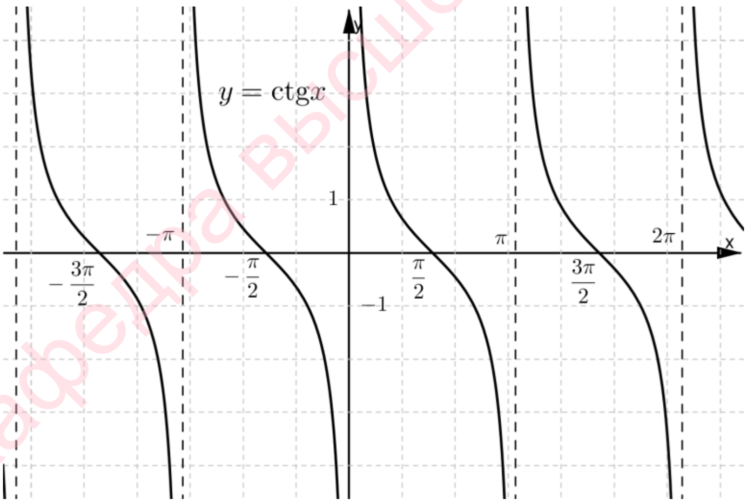
5. **Интервалы монотонности.** $\operatorname{tg} x$ строго возрастает на каждом интервале $x\in\left(-\frac{\pi}{2}+\pi n;\ \frac{\pi}{2}+\pi n\right),\quad n\in \mathbf{Z};$

$\operatorname{ctg} x$ строго убывает на каждом интервале $(\pi n,\ \pi+\pi n),\quad n\in \mathbf{Z}.$

6. **Точек экстремума нет**.

7. **Графики** функций $y=\operatorname{tg} x$ и $y=\operatorname{ctg} x$ приведены на рисунках ниже.


y
x
$y = \mathrm{tg}x$
1
-1
$-\frac{3\pi}{2}$
$-\pi$
$-\frac{\pi}{2}$
$\frac{\pi}{2}$
π
$\frac{3\pi}{2}$
2π


y
x
$y = \mathrm{ctg}x$
1
-1
$-\frac{3\pi}{2}$
$-\pi$
$-\frac{\pi}{2}$
$\frac{\pi}{2}$
π
$\frac{3\pi}{2}$
2π

<u>Основное тригонометрическое тождество.</u> Для любого угла α справедливо равенство:

$$\boxed{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1}.$$

□ На единичной окружности углу α соответствует точка $M(\cos\ \alpha;\ \sin\alpha)$. Квадрат расстояния между точками $O\ (0;0)$ и $M(\cos\ \alpha;\ \sin\alpha)$ равен единице:

$$(\cos\alpha-0)^2+(\sin\alpha-0)^2=1,$$

откуда следует $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$. ■

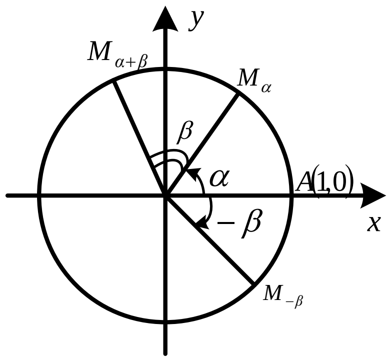
15. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФОРМУЛЫ

15.1. Формулы суммы и разности углов $\sin(\alpha\pm\beta)$, $\cos(\alpha\pm\beta)$, $\mathrm{tg}(\alpha\pm\beta)$

Теорема. Для любых двух углов α и β справедливо тождество

$$\boxed{\cos\ (\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}.$$

*****□ На единичной окружности возьмем точки M_α, $M_{\alpha+\beta}$, A и $M_{-\beta}$, соответствующие углам α, $\alpha+\beta$, 0 и $-\beta$.



Найдем координаты данных точек, пользуясь определениями синуса и косинуса:

$M_\alpha(\cos\alpha;\sin\alpha)$,

$M_{-\beta}(\cos\ \beta;-\sin\beta)$,

$M_{\alpha+\beta}(\cos\ (\alpha+\beta);\sin\ (\alpha+\beta))$, $A(1;0)$.

Отрезки $AM_{\alpha+\beta}$ и $M_{\alpha}\ M_{-\beta}$ равны как хорды, стягивающие равные дуги. Выразим длины этих отрезков через координаты точек A, $M_{\alpha+\beta}$, M_{α} и $M_{-\beta}$.

$$AM_{\alpha+\beta}=\sqrt{\left(\cos\ (\alpha+\beta)-1\right)^2+\sin^2(\alpha+\beta)};$$

$$M_{\alpha}M_{-\beta}=\sqrt{\left(\cos\beta-\cos\alpha\right)^2+\left(-\sin\beta-\sin\alpha\right)^2}\ .$$

Так как $AM_{\alpha+\beta}=M_{\alpha}M_{-\beta}$, то, возводя обе части этого равенства в квадрат и выполняя преобразования, получаем цепочку эквивалентных равенств

$$\cos^2(\alpha+\beta)-2\cos(\alpha+\beta)+1+\sin^2(\alpha+\beta)=$$

$$=\cos^2\beta-2\cos\alpha\cos\beta+\cos^2\alpha+\sin^2\beta+2\sin\alpha\sin\beta+\sin^2\alpha;$$

$$\left(\cos^2(\alpha+\beta)+\sin^2(\alpha+\beta)\right)+1-2\ cos(\alpha+\beta)=$$

$$=\left(\sin^2\beta+\cos^2\beta\right)+\left(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha\right)-2\cos\alpha\cos\beta+2\sin\alpha\sin\beta;$$

$$2-2\ cos(\alpha+\beta)=2-2\cos\alpha\cos\beta+2\sin\alpha\sin\beta;$$

$$-2\cos(\alpha+\beta)=-2\cos\alpha\cos\beta+2\sin\alpha\sin\beta;$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta\ .\ \blacksquare$$

Справедливы также следующие формулы.

$$\boxed{\begin{gathered}
\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta\\
\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta\\
\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta\\
\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}\\
\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}
\end{gathered}}$$

15.2. Тригонометрические формулы двойного аргумента

<u>Теорема 1.</u> Для любого угла α справедливы тождества:

$$\boxed{\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha;\ \cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha},$$

которые называются **формулами двойного угла**.

□ В формулах

$$\sin\left(\alpha+\beta\right) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

и

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

положим β равным α. Получим тождества:

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\ \alpha,\ \cos 2\alpha = \ \cos^2\alpha - \sin^2\alpha.\ ■$$

<u>Следствие.</u> Из формулы $\cos\ 2\alpha = \ \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$ следуют формулы:

$$\boxed{\cos\ 2\alpha = 1 - \ 2\sin^2\alpha,\ \cos\ 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1}.$$

<u>Теорема 2.</u> Формулы двойного угла для тангенса и котангенса имеют вид:

$$\boxed{\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}},$$

где $\alpha \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi n,\ \alpha \neq \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi n}{2},\ \ n \in \mathbf{Z}$;

$$\boxed{\operatorname{ctg} 2\ \alpha = \frac{\operatorname{ctg}^2\alpha - 1}{2\operatorname{ctg}\alpha}},$$

где $\alpha \neq \dfrac{\pi n}{2},\ \ n \in \mathbf{Z}$.

15.3. Формулы понижения степени. Тригонометрические функции половинного аргумента

Используя формулы двойных углов, можно получить формулы понижения степени и половинного угла для тригонометрических функций.

Из формулы $\cos 2\alpha = 1 - \ 2\sin^2\alpha$ найдем $\sin^2\alpha$

$$\boxed{\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}}.$$

Из формулы $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$ найдем $cos^2\alpha$:

$$\boxed{\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}}.$$

Полученные формулы называются **формулами понижения степени**.

В данных формулах α заменим на $\dfrac{\alpha}{2}$:

$$\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{2}, \ \cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{2},$$

откуда следует

$$\boxed{\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}, \ \cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}}.$$

Знаки перед корнями соответствуют знакам $\sin\dfrac{\alpha}{2}$ и $\cos\dfrac{\alpha}{2}$.

15.4. Формулы преобразования произведения тригонометрических функций в сумму

$$\boxed{\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left(\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)\right)}$$

□ Сложив левые и правые чисти формул синуса суммы и синуса разности

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha$$

$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \sin\beta\cos\alpha,$$

получим $\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta) = 2\sin\alpha\cos\beta$, откуда

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left(\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)\right).\blacksquare$$

Аналогично получаются формулы

$$\boxed{\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\right),}$$

$$\boxed{\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right).}$$

15.5. Формулы преобразования суммы тригонометрических функций в произведение

$$\boxed{\sin\alpha+\sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}$$

□ Положим в формуле

$$\sin x\cos y = \frac{1}{2}\left(\sin(x+y)+\sin(x-y)\right)$$

$x = \dfrac{\alpha+\beta}{2}$, а $y = \dfrac{\alpha-\beta}{2}$, получим

$$\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}+\frac{\alpha-\beta}{2}\right)+\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sin\alpha+\sin\beta\right).$$

Откуда $\sin\alpha+\sin\beta = 2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$.■

Аналогично получаются формулы

$$\boxed{\sin\alpha-\sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2},}$$

$$\boxed{\cos\alpha+\cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},}$$

$$\boxed{\cos\alpha-\cos\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\beta-\alpha}{2} = -2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\sin\frac{\alpha+\beta}{2},}$$

$$\boxed{\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\cos\alpha\cos\beta}}.$$

15.6. Формулы, выражающие $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ через $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ (универсальная подстановка)

Докажем справедливость следующей формулы

$$\boxed{\sin\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}}.$$

□ $\sin\alpha = \dfrac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{1} = \dfrac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}+\sin^2\frac{\alpha}{2}} = \dfrac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$. ■

Аналогично получаются формулы

$$\boxed{\cos\alpha = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}},$$

$$\boxed{\operatorname{tg}\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}}.$$

16. ОБРАТНЫЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

16.1. Функция арксинус: определение, свойства, график

Арксинусом числа a $\left(|a| \le 1\right)$ называется такой угол α, принадлежащий отрезку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, синус которого равен a.

Обозначается этот угол $\alpha = \arcsin a$. Читается так: **угол, синус которого равен** a $(arc$ - угол, $\sin$ - синус, которого...$)$.

На отрезке $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ функция $y = \sin x$ непрерывна и строго возрастает, поэтому существует обратная функция $y = f^{-1}(x) = \arcsin x$, $x \in [-1;1]$, которая также будет непрерывной и строго возрастающей.

1. **Область определения.** $D(\arcsin x) = [-1,1]$.

2. **Область значений.** $E(\arcsin x) = \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$.

3. **Четность и нечетность**. $\arcsin x$ – нечетная функция. Для любого $x \in [-1;1]$

$$\boxed{\arcsin(-x) = -\arcsin x}.$$

4. **Периодичность**. Непериодическая, так как каждое свое значение она принимает один раз.

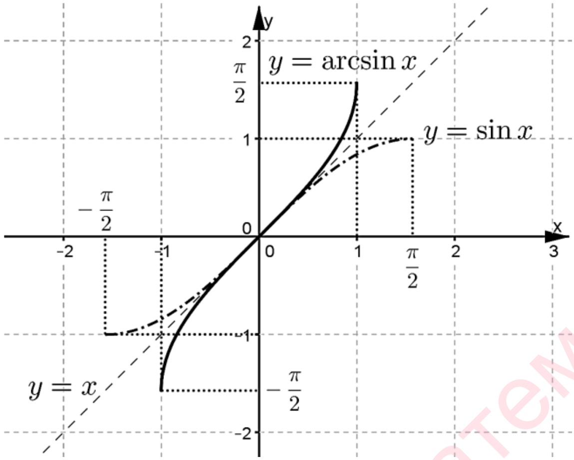
5. **Монотонность.** Функция $y = \arcsin x$ строго возрастает на всей области определения.

6. **Экстремумы.** Локальных экстремумов нет.

Наименьшее значение – $\min\limits_{x\in[-1;1]}(\arcsin x) = -\frac{\pi}{2}$.

Наибольшее – $\max\limits_{x\in[-1;1]}(\arcsin x) = \frac{\pi}{2}$.

7. **График.** График функции $y = \arcsin x$ симметричен графику функции $y = \sin x$, $x \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ относительно прямой $y = x$.



16.2. Функция арккосинус: определение, свойства, график

Арккосинусом числа a $\left(|a| \le 1\right)$ называется такой угол α, принадлежащий отрезку $\left[0;\pi\right]$, косинус которого равен a. Обозначение: $\alpha = \arccos a$.

Свойства функции $y = \arccos x$

1. **Область определения.** $D\left(\arccos x\right) = \left[-1;\ 1\right]$.

2. **Область значений.** $E\left(\arccos x\right) = \left[0;\pi\right]$.

3. **Четность и нечетность.** $\arccos x$ – ни четная, ни нечетная функция. Для всех $x \in \left[-1;1\right]$ справедливо тождество

$$\boxed{\arccos\left(-x\right) = \pi - \arccos x}.$$

4. **Периодичность.** Непериодическая функция.

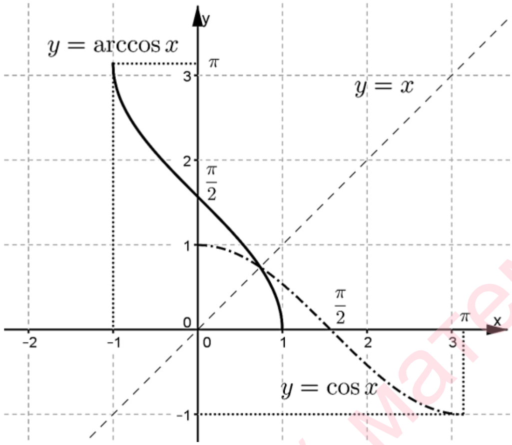
5. **Интервалы монотонности.** Функция $y = \arccos x$ строго убывает на всей области определения.

6. **Экстремумы.** Локальных экстремумов нет.

Наименьшее значение – $\min\limits_{x\in\left[-1;1\right]}\left(\arccos x\right) = 0$,

Наибольшее – $\max\limits_{x\in\left[-1;1\right]}\left(\arccos x\right) = \pi$.

7. **График.** График функции $y = \arccos x$ симметричен графику функции $y = \cos x$, $x \in [0;\pi]$ относительно прямой $y = x$



16.3. Функция арктангенс: определение, свойства, график

Арктангенсом числа $a\,(a \in R)$ называется такой угол α, принадлежащий интервалу $\left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$, тангенс которого равен а.

Обозначение: $\alpha = \operatorname{arctg} a$.

Свойства функции $y = \operatorname{arctg} x$

1. **Область определения.** $D(\operatorname{arctg} x) = \mathbf{R}$.

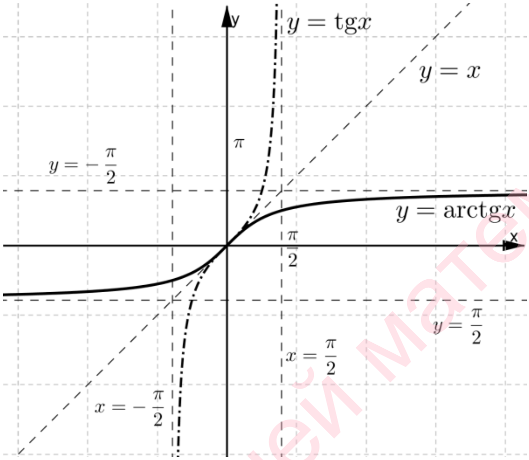
2. **Область значений.** $E(\operatorname{arctg} x) = \left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$.

3. **Четность и нечетность**. $y = \operatorname{arctg} x$ – нечетная функция. Для любого $x \in \mathbf{R}$

$$\boxed{\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x}.$$

4. **Периодичность**. Непериодическая, так как каждое свое значение она принимает один раз.
5. **Монотонность.** Функция $y = \operatorname{arctg} x$ строго возрастает на всей области определения.

6. **Экстремумы.** Локальных и глобальных экстремумов нет.
7. **График.** График функции $y = \operatorname{arctg} x$ симметричен графику функции $y = \operatorname{tg} x$, $x \in \left(-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right)$ относительно прямой $y = x$.



16.4. Функция арккотангенс: определение, свойства, график

Арккотангенсом числа a $(a \in \mathbf{R})$ называется такой угол α, принадлежащий интервалу $(0;\pi)$, котангенс которого равен a. Обозначается этот угол: $\alpha = \operatorname{arcctg} a$. Читается так: ***угол, котангенс которого равен а***.

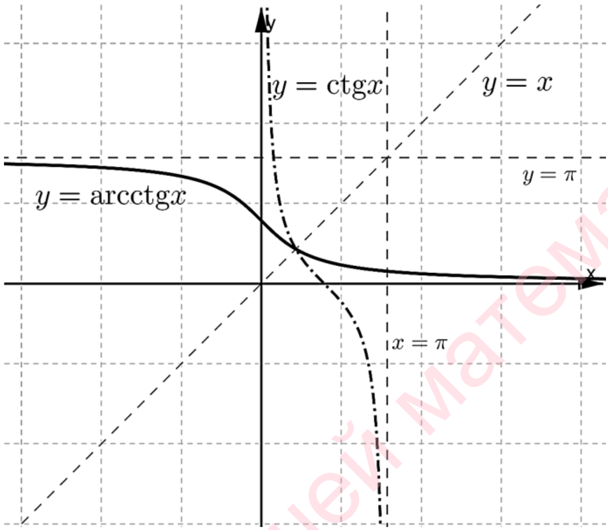
Свойства функции $y = \operatorname{arcctg} x$

1. **Область определения.** $D(\operatorname{arcctg} x) = \mathbf{R}$.
2. **Область значений.** Интервал $E(\operatorname{arcctg} x) = (0;\pi)$.
3. **Четность и нечетность.** $\operatorname{arcctg} x$ – ни четная, ни нечетная функция. Для всех $x \in \mathbf{R}$ справедливо тождество

$$\boxed{\operatorname{arcctg}(-x) = \pi - \operatorname{arcctg} x}.$$

4. **Периодичность.** Непериодическая функция.
5. **Интервалы монотонности.** Строго убывает на всей области определения.

6. **Экстремумы.** Локальных и глобальных экстремумов нет.
7. **График.** График функции $y = \operatorname{arcctg} x$ симметричен графику функции $y = \operatorname{ctg} x$ относительно прямой $y = x$.



17. ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ. ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ СИНУС, КОСИНУС, ТАНГЕНС И КОТАНГЕНС: ОПРЕДЕЛЕНИЯ, СВОЙСТВА, ГРАФИКИ

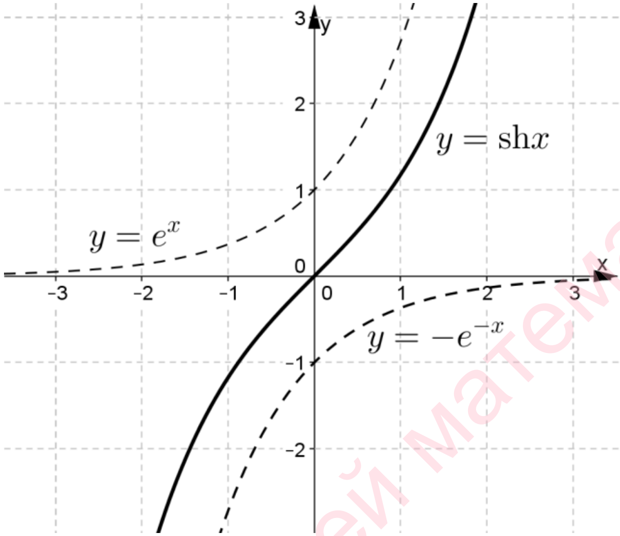
Функция $y = \operatorname{sh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ называется **гиперболическим синусом**. Рассмотрим ее свойства.

1. **Область определения.** $D(\operatorname{sh} x) = \mathbf{R}$.
2. **Область значений.** $E(\operatorname{sh} x) = \mathbf{R}$.
3. **Четность и нечетность.** $\operatorname{sh} x$ – нечетная функция. Для всех $x \in \mathbf{R}$ справедливо тождество

$$\boxed{\operatorname{sh}(-x) = -\operatorname{sh} x}.$$

4. **Периодичность.** Непериодическая функция.
5. **Интервалы монотонности.** Строго возрастает на всей области определения.

6. **Экстремумы.** Локальных и глобальных экстремумов нет.
7. **График.** График функции $y = \operatorname{sh} x$ представлен на рисунке.



Функция $y = \operatorname{sh} x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ называется **гиперболическим косинусом**. Рассмотрим ее свойства.

1. **Область определения.** $D(\operatorname{ch} x) = \mathbf{R}$.

2. **Область значений.** Промежуток $E(\operatorname{ch} x) = [1, +\infty)$.

3. **Четность и нечетность.** $\operatorname{ch} x$ – четная функция. Для всех $x \in \mathbf{R}$ справедливо тождество

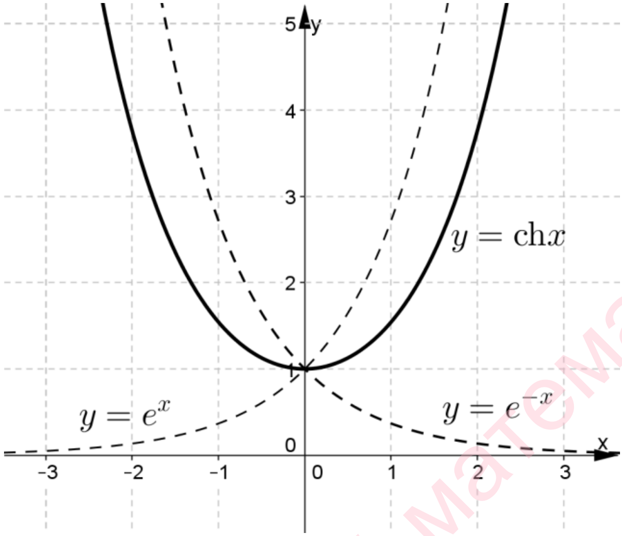
$$\boxed{\operatorname{ch}(-x) = \operatorname{ch} x}.$$

4. **Периодичность.** Непериодическая функция.

5. **Интервалы монотонности.** Убывает на промежутке $(-\infty, 0]$ и возрастает на промежутке $[0, +\infty)$.

6. **Экстремумы.** 1 – наименьшее значение, достигается при $x = 0$.

7. **График.** График функции $y = \operatorname{ch} x$ представлен на рисунке.



Функция $y = \operatorname{th} x = \dfrac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$ **называется гиперболическим тангенсом**. Рассмотрим ее свойства.

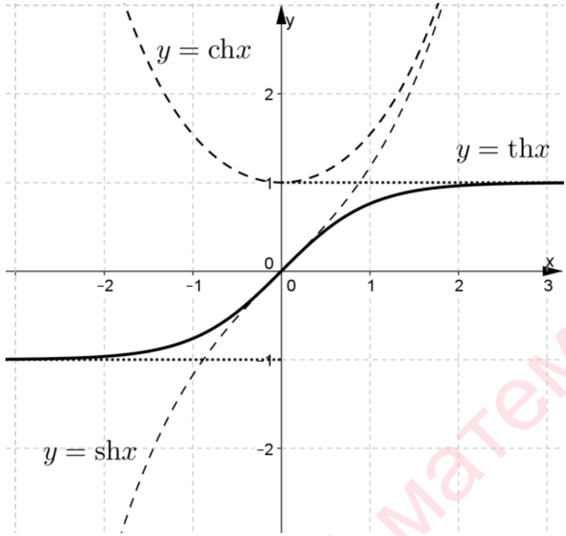
1. **Область определения.** $D(\operatorname{th} x) = \mathbf{R}$.

2. **Область значений.** Интервал $E(\operatorname{th} x) = (-1, 1)$.

3. **Четность и нечетность.** $\operatorname{th} x$ – нечетная функция. Для всех $x \in \mathbf{R}$ справедливо тождество

$$\boxed{\operatorname{th}(-x) = -\operatorname{th} x}.$$

4. **Периодичность.** Непериодическая функция.
5. **Интервалы монотонности.** Строго возрастает на всей области определения, причем $\lim\limits_{x\to+\infty} \operatorname{th} x = 1$, $\lim\limits_{x\to-\infty} \operatorname{th} x = -1$.
6. **Экстремумы.** Локальных и глобальных экстремумов нет.
7. **График.** График функции $y = \operatorname{th} x$ представлен на рисунке.



Функция $y = \operatorname{cth} x = \dfrac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}$ называется гиперболическим синусом. Рассмотрим ее свойства.

1. **Область определения.**

$$D(\operatorname{cth} x) = \mathbf{R} \setminus \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty).$$

2. **Область значений.** $E(\operatorname{cth} x) = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$.

3. **Четность и нечетность.** $\operatorname{cth} x$ - нечетная функция. Для всех $x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ справедливо тождество

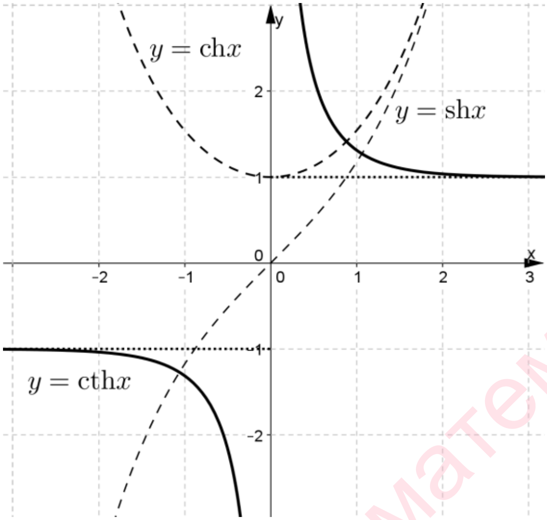
$$\boxed{\operatorname{cth}(-x) = -\operatorname{cth} x}.$$

4. **Периодичность.** Непериодическая функция.

5. **Интервалы монотонности.** Строго убывает на интервале $(-\infty, 0)$ и на интервале $(0, +\infty)$, причем $\lim\limits_{x \to -\infty} \operatorname{cth} x = -1$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \operatorname{cth} x = 1$.

6. **Экстремумы.** Локальных и глобальных экстремумов нет.

7. **График.** График функции $y = \operatorname{sh} x$ представлен на рисунке.



Приведем некоторые формулы, связанные с гиперболическими функциями.

1. $\mathrm{sh}\,x + \mathrm{ch}\,x = e^x$
2. $\mathrm{ch}^2 x - \mathrm{sh}^2 x = 1$ – основное гиперболическое тождество
3. $\mathrm{ch}\,2x = \mathrm{ch}^2 x + \mathrm{sh}^2 x$
4. $\mathrm{sh}\,2x = 2\,\mathrm{sh}\,x\,\mathrm{ch}\,x$
5. $\mathrm{ch}(x+y) = \mathrm{ch}\,x\,\mathrm{ch}\,y + \mathrm{sh}\,x\,\mathrm{sh}\,y$
6. $\mathrm{sh}(x+y) = \mathrm{sh}\,x\,\mathrm{ch}\,y + \mathrm{ch}\,x\,\mathrm{sh}\,y$

18. ФОРМУЛЫ СОКРАЩЕННОГО УМНОЖЕНИЯ. БИНОМ НЬЮТОНА. БИНОМИАЛЬНЫЕ КОЭФФИЦИЕНТЫ. ТРЕУГОЛЬНИК ПАСКАЛЯ

Формулы сокращённого умножения используются для разложения многочленов на множители и упрощения выражений.

1. $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ – квадрат суммы
2. $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ – квадрат разности
3. $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ – куб суммы

$$\boxed{4.\quad (a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 \text{ – куб разности}}$$

Справедлива общая формула при любом $n \in \mathbf{N}$, которая называется формулой **бинома Ньютона**.

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \ldots + C_n^k a^{n-k} b^k + \ldots +$$
$$+ C_n^{n-1} a b^{n-1} + C_n^n b^n.$$

Коэффициенты $C_n^0, C_n^1, \ldots, C_n^k, \ldots, C_n^{n-1}, C_n^n$ называются **биномиальными коэффициентами** и вычисляются по формуле

$$\boxed{C_n^k = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}}, \text{ где } n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n, \; 0! = 1.$$

Например, $C_7^2 = \dfrac{7!}{2! \cdot 5!} = \dfrac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = \dfrac{6 \cdot 7}{2} = 21$.

Биномиальные коэффициенты при различных n удобно представлять в виде таблицы, которая называется **треугольником Паскаля**.

Треугольник Паскаля имеет следующий вид.

Показатель степени	Биномиальные коэффициенты										
0						C_0^0					
1					C_1^0		C_1^1				
2				C_2^0		C_2^1		C_2^2			
3			C_3^0		C_3^1		C_3^2		C_3^3		
$\vdots$		…	…	…	…	…	…	…	…	…	
n	C_n^0	…	C_n^1	…	…	…	…	…	C_n^{n-1}	…	C_n^n

Если вычислить биномиальные коэффициенты, то получим таблицу.

Показатель степени	Биномиальные коэффициенты										
0						1					
1					1		1				
2				1		2		1			
3			1		3		3		1		
4		1		**4**		**6**		4		1	
5	1		5		**10**		10		5		1

Боковые стороны треугольника Паскаля состоят из единиц. Внутри треугольника Паскаля стоят числа, получающиеся сложением двух соответствующих чисел над ним. Например, значение 10 (*выделено жирным*) получено как сумма чисел 4 и 6 (*выделены жирным*).

Используя треугольник Паскаля легко найти, например

$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5.$$

5. $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ – разность квадратов

6. $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$ – разность кубов

Справедлива общая формула при любом $n \in \mathbf{N}$

$$a^n - b^n = (a-b)\left(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1}\right).$$

7. $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$ – сумма кубов

$$a^5 + b^5 = (a+b)\left(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4\right).$$

Справедлива общая формула при любом $n \in \mathbf{N}$

$$\boxed{a^{2n+1} + b^{2n+1} = (a+b)\left(a^{2n} - a^{2n-1}b + a^{2n-2}b^2 - \ldots - ab^{2n-1} + b^{2n}\right)}.$$

19. МНОГОЧЛЕНЫ И ДРОБНО-РАЦИОНАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ. ПРАВИЛЬНЫЕ И НЕПРАВИЛЬНЫЕ ДРОБИ. РАЗЛОЖЕНИЕ НЕПРАВИЛЬНОЙ ДРОБНО-РАЦИОНАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ НА СУММУ ЦЕЛОЙ ЧАСТИ (МНОГОЧЛЕНА) И ПРАВИЛЬНОЙ ДРОБИ (ДЕЛЕНИЕ УГОЛКОМ)

Выражения, составленные из чисел и переменных с помощью конечного числа знаков арифметических операций, называют **рациональными выражениями**. Если их запись не содержит деления на переменные, то такие выражения являются **целыми**. Алгебраические выражения, содержащие деление на переменные, являются **дробными** (дробно-рациональными).

Одночленом называют выражение, которое содержит числа, натуральные степени переменных и их произведения, например, $3x^2$, $-7x^2y^5$. Если одночлен представлен в виде произведения числового множителя, стоящего на первом месте, и степеней различных переменных, записанных в алфавитном порядке, то говорят, что одночлен записан в **стандартном виде**. При этом сумму показателей степеней всех переменных называют **степенью одночлена**.

Многочленом называют сумму одночленов. Если все члены многочлена записать в стандартном виде и выполнить приведение подобных членов, то получится **многочлен стандартного вида**. Например, $P_m(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$, где $a_0 \neq 0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbf{R}$, – многочлен степени n.

Дробно-рациональной называется функция вида $f(x) = \dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)}$, где $P_m(x)$ и $Q_n(x)$ – многочлены степеней m и n соответственно, причем $m \geq 0$ и $n > 0$. Если $m < n$, то дробь называется **правильной**. Если $m \geq n$, то эта дробь называется **неправильной**.

Любую неправильную дробь можно представить в виде суммы многочлена (степени $m-n$) и правильной дроби (выделить целую часть). Для этого достаточно разделить многочлен $P_m(x)$ на многочлен $Q_n(x)$ с остатком:

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = q(x) + \frac{r(x)}{Q_n(x)},$$

где $q(x)$ – неполное частное, $r(x)$ – остаток.

Например, выделим целую часть функции

$$f(x) = \frac{2x^4 + x^3 - 7x^2 + 19x - 18}{x^2 + 2x - 3}.$$

□ Так как степень многочлена в числителе $m = 4$ больше степени многочлена в знаменателе $n = 2$, то дробь является неправильной и можно выделить целую часть. Для этого разделим $2x^4 + x^3 - 7x^2 + 19x - 18$ на $x^2 + 2x - 3$ уголком.

$$\begin{array}{r|l}
-\,2x^4 + x^3 - 7x^2 + 19x - 18 & x^2 + 2x - 3 \\
\underline{2x^4 + 4x^3 - 6x^2 \qquad\qquad\quad} & 2x^2 - 3x + 5 \\
-\,-3x^3 - x^2 + 19x - 18 & \\
\underline{-3x^3 - 6x^2 + 9x \qquad\;\;} & \\
-\,5x^2 + 10x - 18 & \\
\underline{5x^2 + 10x - 15} & \\
-3 &
\end{array}$$

Неполное частное (или целая часть дроби) равно $2x^2 - 3x + 5$, а остаток -3. Следовательно, функцию $f(x)$ можно представить в виде $f(x) = 2x^2 - 3x + 5 - \dfrac{3}{x^2 + 2x - 3}$. ■

Число x_0 называется **корнем многочлена** $Q_n(x)$, если $Q_n(x_0) = 0$.

Теорема 1. Если x_0 – корень многочлена $Q_n(x)$, то существует такой многочлен $Q_{n-1}(x)$ (степени $n-1$), что $Q_n(x)=(x-x_0)Q_{n-1}(x)$.

Из теоремы следует, что если x_0 является корнем многочлена $Q_n(x)$ кратности k, то его можно представить в виде: $Q_n(x)=(x-x_0)^k Q_{n-k}(x)$.

Также можно доказать следующую теорему.

Теорема 2 (о разложении многочлена над множеством действительных чисел). Любой многочлен $Q_n(x)$ единственным образом с точностью до порядка множителей представляется в виде:

$$Q_n(x)=a_0(x-x_1)^{k_1}\cdot(x-x_2)^{k_2}\cdot\ldots\cdot(x-x_r)^{k_r}\cdot\left(x^2+p_1x+q_1\right)^{s_1}\cdot$$
$$\cdot\left(x^2+p_2x+q_2\right)^{s_2}\cdot\ldots\cdot\left(x^2+p_tx+q_t\right)^{s_t},$$

где x_1, $x_2,\ldots,$ x_r – корни многочлена $Q_n(x)$ кратности k_1, k_2 ,…, k_r соответственно, $p_1^2-4q_1<0$, $p_2^2-4q_2<0$,…, $p_t^2-4q_t<0$ и $k_1+k_2+\ldots+k_r+2(s_1+s_2+\ldots+s_t)=n$.

Таким образом, любой многочлен $Q_n(x)$ можно представить в виде произведения линейных двучленов [им соответствуют действительные корни многочлена $Q_n(x)$] и квадратных трехчленов [им соответствуют комплексные корни $Q_n(x)$].

Теорема 3* **(о разложении правильной дроби).** Любую правильную дробь $\dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ можно единственным образом с точностью до порядка слагаемых представить в виде:

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{A_{1,1}}{x-x_1} + \frac{A_{1,2}}{(x-x_1)^2} + \frac{A_{1,3}}{(x-x_1)^3} + \ldots + \frac{A_{1,k_1}}{(x-x_1)^{k_1}} +$$

$$+ \frac{A_{2,1}}{x-x_2} + \frac{A_{2,2}}{(x-x_2)^2} + \ldots + \frac{A_{2,k_2}}{(x-x_2)^{k_2}} + \ldots + \frac{A_{r,1}}{x-x_r} + \ldots + \frac{A_{r,k_r}}{(x-x_r)^{k_r}} +$$

$$+ \frac{B_{1,1}x + C_{1,1}}{x^2 + p_1 x + q_1} + \frac{B_{1,2}x + C_{1,2}}{(x^2 + p_1 x + q_1)^2} + \ldots + \frac{B_{1,s_1}x + C_{1,s_1}}{(x^2 + p_1 x + q_1)^{s_1}} +$$

$$+ \frac{B_{2,1}x + C_{2,1}}{x^2 + p_2 x + q_2} + \ldots + \frac{B_{t,s_t}x + C_{t,s_t}}{(x^2 + p_t x + q_t)^{s_t}},$$

где $Q_n(x) = a_0 (x-x_1)^{k_1} \cdot (x-x_2)^{k_2} \cdot \ldots \cdot (x-x_r)^{k_r} \cdot$ $\cdot (x^2 + p_1 x + q_1)^{s_1} \cdot (x^2 + p_2 x + q_2)^{s_2} \cdot \ldots \cdot (x^2 + p_t x + q_t)^{s_t}$ – разложение знаменателя над множеством действительных чисел, а $A_{1,1}$, $A_{1,2}, \ldots,$ A_{r,k_r}, $B_{1,1}, \ldots,$ B_{t,s_t}, $C_{1,1}, \ldots,$ C_{t,s_t} – некоторые числа.

Например, разложим дробь $\dfrac{3x^2 - x + 1}{2x^3 - 5x^2 + 3x}$ на простейшие дроби.

□ Разложим знаменатель дроби на множители:

$$2x^3 - 5x^2 + 3x = x(2x^2 - 5x + 3) = \begin{vmatrix} D = 5^2 - 4\cdot 2\cdot 3 = 1 \\ x_1 = \frac{5+1}{4} = \frac{3}{2},\ x_2 = \frac{5-1}{4} = 1 \end{vmatrix} =$$

$$= x\cdot 2\left(x - \frac{3}{2}\right)(x-1).$$

$$\frac{3x^2 - x + 1}{2x^3 - 5x^2 + 3x} = \frac{3x^2 - x + 1}{2x\left(x - \frac{3}{2}\right)(x-1)} = \frac{1}{2}\cdot\frac{3x^2 - x + 1}{x\left(x - \frac{3}{2}\right)(x-1)} =$$

$$= \begin{vmatrix} \text{применим} \\ \text{теорему } 3 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\left(\frac{A}{x} + \frac{B}{x - \frac{3}{2}} + \frac{C}{x-1}\right).$$

Остается найти числа A, B и C. Для этого приведем дроби к общему знаменателю.

$$\frac{3x^2-x+1}{2x^3-5x^2+3x}=\frac{1}{2}\cdot\frac{A\left(x-\tfrac{3}{2}\right)(x-1)+Bx(x-1)+Cx\left(x-\tfrac{3}{2}\right)}{x\left(x-\tfrac{3}{2}\right)(x-1)}.$$

Так как знаменатели одинаковые, то дроби будут равны при равных числителях:

$$3x^2-x+1=A\left(x-\tfrac{3}{2}\right)(x-1)+Bx(x-1)+Cx\left(x-\tfrac{3}{2}\right),$$

причем данное равенство должно выполняться при всех значениях переменной x.

При $x=0$ получим: $1=A\cdot\left(-\tfrac{3}{2}\right)(-1)$. Отсюда $A=\dfrac{2}{3}$.

При $x=\dfrac{3}{2}$: $3\cdot\left(\dfrac{3}{2}\right)^2-\dfrac{3}{2}+1=B\cdot\dfrac{3}{2}\left(\dfrac{3}{2}-1\right)\Rightarrow B=\dfrac{25}{3}$.

При $x=1$: $3-1+1=C\cdot\left(1-\dfrac{3}{2}\right)$, а значит, $C=-6$.

Таким образом, получили разложение:

$$\frac{3x^2-x+1}{2x^3-5x^2+3x}=\frac{1}{2}\left(\frac{2/3}{x}+\frac{25/3}{x-3/2}-\frac{6}{x-1}\right)=\frac{1}{3x}+\frac{25}{6\left(x-\tfrac{3}{2}\right)}-\frac{3}{x-1}\ \blacksquare$$

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Лукьянова Г.С., Новиков А.И. Рациональные и иррациональные уравнения и неравенства: учеб. пособие. – Рязань: РГРТА, 2004.

2. Новиков А.И. Тригонометрические функции, уравнения и неравенства. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2010.

3. Новиков А.И. Элементарная математика и начала теории вероятностей. Теория чисел, комбинаторика, начала теории вероятностей, неравенства: учеб. пособие. – Рязань: РГРТУ, 2012.

Л у к ь я н о в а Галина Сергеевна
Б у х е н с к и й Кирилл Валентинович
Элементарная математика

Редактор Н.А. Орлова
Корректор С.В. Макушина
Подписано в печать 31.08.15. Формат бумаги 60×84 1/16.
Бумага писчая. Печать трафаретная. Усл. печ. л. 4,0
Тираж 60 экз. Заказ
Рязанский государственный радиотехнический университет.
390005, Рязань, ул. Гагарина, 59/1.
Редакционно-издательский центр РГРТУ.