МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

РЯЗАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ РАДИОТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

А.А. ДЯГИЛЕВ, С.А. КРУГЛОВ, А.А. СЕРЕЖИН

ЭЛЕКТРОТЕХНИКА

ЧАСТЬ 2

Рязань 2014

Министерство образования и науки Российской Федерации
Рязанский государственный радиотехнический университет

А.А. ДЯГИЛЕВ, С.А. КРУГЛОВ, А.А. СЕРЕЖИН

ЭЛЕКТРОТЕХНИКА

Часть 2

Учебное пособие

Рязань 2014

УДК 621.384.82

Электротехника. Часть 2: учеб. пособие/ А.А. Дягилев, С.А. Круглов, А.А. Сережин; Рязан. гос. радиотехн. ун-т. Рязань: РГРТУ, 2014. 80 с.

Содержит сведения по анализу и расчету резонансных контуров, трехфазных цепей, цепей с магнитосвязанными элементами, по исследованию переходных процессов и четырехполюсников. Приводятся краткие теоретические сведения, методические указания по выполнению лабораторных работ, задания к расчетно-графическим работам с примерами решений типовых задач.

Предназначено для студентов направлений 18.03.01 «Химическая технология», 27.03.01 «Стандартизация и метрология», 12.03.01 «Приборостроение», 12.03.04 «Биотехнические системы и технологии», 15.03.06 «Мехатроника и робототехника», изучающих дисциплины «Электротехника и промышленная электроника», «Электротехника и электроника», «Электротехника».

Табл. 4. Ил. 77. Библиогр.: 8 назв.

Резонанс токов, резонанс напряжений, трансформатор, трехфазная цепь, переходный процесс, законы коммутации, четырехполюсник, передаточная функция, амплитудочастотная характеристика

Печатается по решению редакционно-издательского совета Рязанского государственного радиотехнического университета.

Рецензент: кафедра промышленной электроники РГРТУ (зав. кафедрой проф. В.С. Гуров)

Д я г и л е в Александр Александрович
К р у г л о в Сергей Александрович
С е р е ж и н Андрей Александрович

Электротехника. Часть 2

Редактор Р.К. Мангутова
Корректор С.В. Макушина
Подписано в печать 30.12.14. Формат бумаги 60 × 84 1/16.
Бумага газетная. Печать трафаретная. Усл. печ. л. 5,0.
Тираж 50 экз. Заказ
Рязанский государственный радиотехнический университет.
390005, Рязань, ул. Гагарина, 59/1.
Редакционно-издательский центр РГРТУ.

© Рязанский государственный радиотехнический университет, 2014

ТЕМА 1
РЕЗОНАНСЫ В ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЯХ СИНУСОИДАЛЬНОГО ТОКА

Реактивные сопротивления и проводимости отдельных участков цепи могут быть как положительными, так и отрицательными величинами и, следовательно, могут взаимно компенсироваться. Поэтому возможны случаи, когда, несмотря на наличие в цепи катушек индуктивности и конденсаторов, входное реактивное сопротивление или входная реактивная проводимость всей цепи оказываются равными нулю. При этом ток и напряжение на входе цепи совпадают по фазе и эквивалентное сопротивление всей цепи будет активным. Такое явление называют резонансом.

Возможны два основных типа резонанса: при последовательном соединении катушки индуктивности и конденсатора – резонанс напряжений, при их параллельном соединении – резонанс токов.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 5
ИССЛЕДОВАНИЕ ЯВЛЕНИЯ РЕЗОНАНСА В ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЯХ

Цель работы изучение процессов, протекающих в электрических цепях при возникновении резонансных явлений.

Общие сведения

Резонансом называется такой режим работы электрической цепи, содержащей индуктивные и емкостные элементы, когда сдвиг фазы между током $\dot{I}$ и напряжением $\dot{E}$ на входе цепи будет равен нулю ($\varphi=0$). При этом эквивалентное сопротивление всей цепи (или проводимость) будет активным, хотя реактивные сопротивления (или проводимости) отдельных участков цепи будут иметь значения, отличные от 0.

Различают резонанс напряжений при последовательном и резонанс токов при параллельном соединении элементов R, L, C.

Резонанс напряжений. Резонанс напряжений возникает в электрической цепи с последовательным соединением индуктивности, емкости и сопротивления (рис. 5.1). Условие последовательного резонанса: мнимая часть входного сопротивления цепи равна 0 ($\mathrm{Jm}\{\dot{Z}\}=0$). Полное комплексное сопротивление цепи определяется как

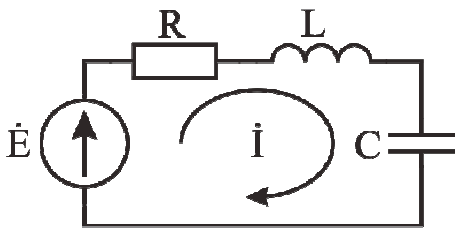


Рис. 5.1. Последовательный колебательный контур

$$\dot{Z} = R + jX = R + j(X_L - X_C) = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right).$$

Реактивная (мнимая) часть сопротивления цепи

$$X = \omega L - 1/\omega C$$

является функцией частоты. График зависимости X от ω показан на рис. 5.2. Как видно из данной зависимости, до точки резонанса реактивная часть сопротивления цепи носит емкостный характер, а после точки резонанса – индуктивный.

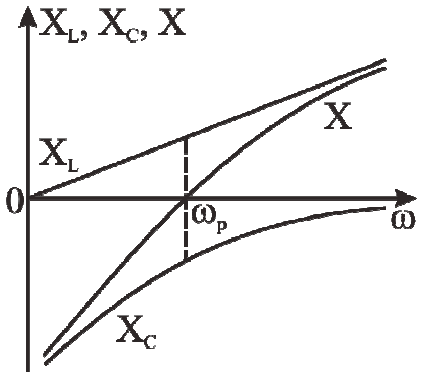


Рис. 5.2. Зависимость реактивных сопротивлений последовательного колебательного контура от частоты

На резонансной частоте ω_p мнимая часть сопротивления цепи будет равна нулю: $\mathrm{Jm}\{\dot{Z}(\omega_p)\} = 0$,

$$\omega_p L - 1/\omega_p C = 0.$$

Полное сопротивление цепи $\dot{Z} = R$ носит чисто активный характер и принимает минимальное значение, а ток в цепи $\dot{I} = \dot{E}/R$ – максимальное. При резонансе реактивное сопротивление индуктивности $X_L = \omega_p L$ оказывается равным реактивному сопротивлению емкости $X_C = 1/\omega_p C$. Из этого условия определяется резонансная частота колебательного контура $\omega_p = 1/\sqrt{LC}$.

Значение реактивных сопротивлений индуктивности и емкости на резонансной частоте называют характеристическим сопротивлением ρ:

$$\rho = \omega_p L = \frac{L}{\sqrt{LC}} = \sqrt{\frac{L}{C}}, \qquad \rho = 1/\omega_p C = \frac{\sqrt{LC}}{C} = \sqrt{\frac{L}{C}}.$$

При последовательном резонансе напряжения на индуктивности и емкости равны по величине и противоположны по знаку:

$$U_L = X_L I = \frac{\rho}{R} E, \qquad U_C = X_C I = \frac{\rho}{R} E.$$

Величина $Q = \rho/R$ называется добротностью контура. Она показывает, во сколько раз напряжение на реактивных элементах L и C превышает амплитуду источника ЭДС E. Превышение в Q раз напряжениями U_L и U_C напряжения источника ЭДС достигается за счет периодического обмена энергией между индуктивностью и емкостью. Превышение напряжения на реактивных элементах над напряжением питания имеет место при условии $R < \rho$.

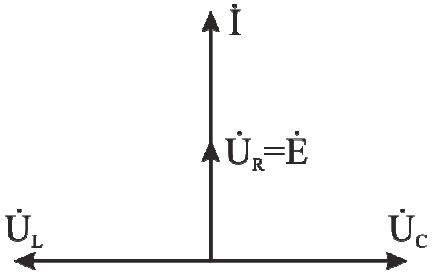


Рис. 5.3. Векторно-топографическая диаграмма последовательного колебательного контура для режима резонанса напряжений

Векторно-топографическая диаграмма последовательного резонансного контура для режима резонанса представлена на рис. 5.3.

Резонанса можно достичь, изменяя или частоту приложенного к электрической цепи напряжения, или индуктивность катушки, или емкость конденсатора.

Электрические цепи, в которых возникает периодический обмен энергией между реактивными элементами (колебательные системы), принято описывать частотной характеристикой (резонансной кривой). В случае последовательного колебательного контура под резонансной кривой понимают зависимость амплитуды тока, протекающего в контуре, от частоты (амплитудно-частотную характеристику – АЧХ):

$$\dot{I}(\omega) = \frac{\dot{E}}{R + j(\omega L - 1/\omega C)} = \frac{\dot{I}_p}{1 + jQ(\omega/\omega_0 - \omega_0/\omega)}.$$

Таким образом, АЧХ (резонансная кривая) последовательного колебательного контура описывается выражением

$$|\dot{I}(\omega)| = I(\omega) = \frac{I_p}{\sqrt{1 + Q^2(\omega/\omega_0 - \omega_0/\omega)^2}}.$$

Нормированные к максимальному току резонансные кривые для двух значений добротности показаны на рис. 5.4. Для резонансной характеристики вводят понятие ширины полосы пропускания $\Delta\omega$, под которой понимается расстояние между точками пересечения резонансной кривой с уровнем, составляющим величину $1/\sqrt{2} \approx 0.707$ от максимального значения.

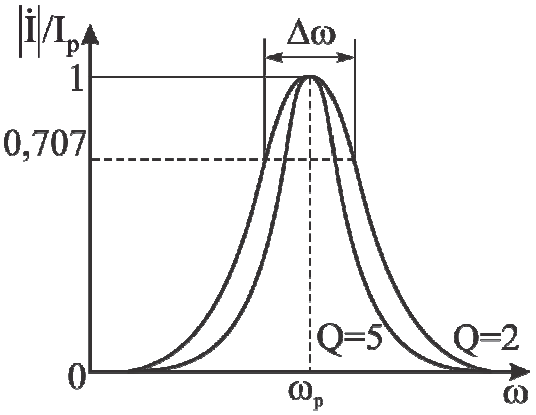


Рис. 5.4. Резонансные кривые последовательного колебательного контура

Полоса пропускания контура зависит от добротности контура $\Delta\omega = \omega_p/Q$: чем выше добротность, тем уже полоса пропускания, а резонансная характеристика становится более «острой».

Зависимость сдвига фазы между током $\dot{I}$ и напряжением $\dot{E}$ называют фазочастотной характеристикой (ФЧХ). ФЧХ последовательного контура является зависимость фазы входного сопротивления от частоты:

$$\varphi(\omega) = arctg(X/R) = arctg\left(\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}\right).$$

Форма ФЧХ для двух значений добротности показана на рис. 5.5, чем выше добротность, тем более «прямоугольной» становится фазочастотная характеристика.

Зависимости амплитуды напряжения на сопротивлении, индуктивности и емкости от частоты приведены на рис. 5.6. До точки резонанса напряжение на емкости больше, чем напряжение на индуктивности (сопротивление схемы

носит емкостный характер), а после точки резонанса напряжение на индуктивности больше, чем напряжение на емкости (сопротивление схемы носит индуктивный характер). Форма кривой напряжения на сопротивлении совпадает с резонансной кривой колебательного контура. В точке резонанса значения напряжений на емкости и индуктивности равны между собой, а напряжение на сопротивлении достигает максимума и равно E.

Резонанс токов. Резонанс токов возникает в схеме, содержащей две параллельные ветви с реактивными элементами различного характера. Условие параллельного резонанса: мнимая часть входной проводимости контура равна 0 ($Jm\{\dot{Y}_{вх}\}=0$).

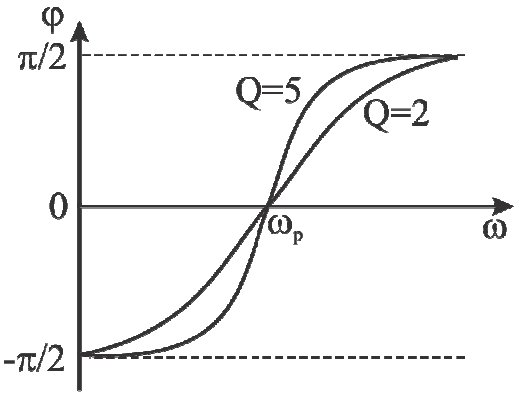


Рис. 5.5 Фазочастотная характеристика последовательного колебательного контура

При параллельном соединении проводимости $G = 1/R$, индуктивности L и емкости C (рис. 5.7) ток в цепи определяется выражением $\dot{I} = \dot{E} \cdot \dot{Y}$, где $\dot{Y}$ – полная комплексная проводимость цепи, которая определяется как

$$\dot{Y} = G - jB = G - j(B_L - B_C) = G - j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right).$$

Резонанс возникает, когда напряжение и ток на входе цепи совпадают по фазе ($\varphi = 0$), а эквивалентная проводимость всей цепи – чисто активная ($\dot{Y} = G$), то есть на резонансной частоте $\omega_р$ реактивная проводимость B = 0

$$B = \omega_р C - \frac{1}{\omega_р L} = 0,$$

откуда

$$\omega_р C = \frac{1}{\omega_р L},\ \omega_р^2 LC = 1,\quad \omega_р = 1/\sqrt{LC}.$$

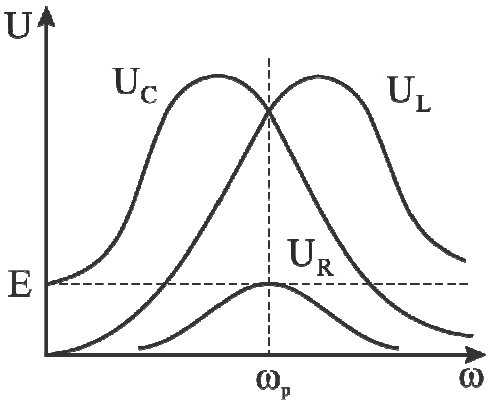


Рис. 5.6. Зависимости амплитуды напряжения на сопротивлении, индуктивности и емкости в последовательном колебательном контуре от частоты

Как видим, последнее уравнение, определяющее условие резонанса, аналогично уравнению для последовательного резонанса.

При резонансе реактивная проводимость $B = 0$, а полная проводимость цепи достигает минимального значения $\dot{Y} = G$. Поэтому ток в цепи $\dot{I} = \dot{E} \cdot G$ оказывается наименьшим в отличие от резонанса при последовательном соединении, когда ток, наоборот, имел максимальное значение. Векторная диаграмма при резонансе в рассматриваемой цепи приведена на рис. 5.8.

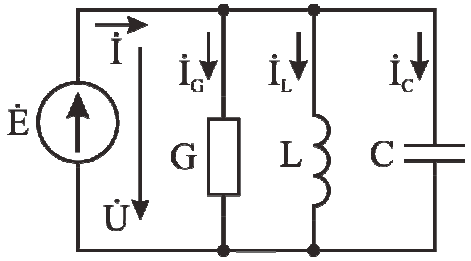


Рис. 5.7. Параллельный колебательный контур

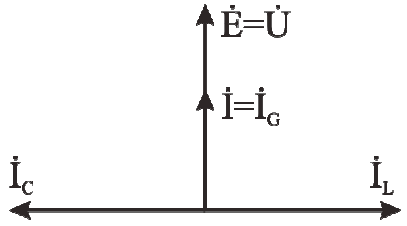


Рис. 5.8. Векторно-топографическая диаграмма параллельного резонансного контура для режима резонанса токов

Так как вектор тока в общей ветви оказывается геометрической суммой векторов трех токов, два из которых ($\dot{I}_L$ и $\dot{I}_C$) находятся в противофазе, то при резонансе возможны случаи, когда токи в индуктивности и в емкости могут превосходить, и иногда намного, суммарный ток в цепи $\dot{I}$. Поэтому резонанс при параллельном соединении называют резонансом токов.

Превышение токов в реактивных элементах цепи над суммарным током цепи имеет место при условии

$$G << \omega_p C = {}^{1}\!/_{\omega_p L} = \sqrt{{}^{C}\!/_{L}} = \gamma,$$

где $\gamma = 1/\rho$ – волновая проводимость контура. Величина $Q = \gamma/G = R/\rho$ является добротностью контура. Она определяет кратность превышения тока в индуктивности и в конденсаторе над суммарным током при резонансе. В случае параллельного соединения реактивных элементов при резонансе в любой момент времени $i_L(t) = -i_C(t)$, напряжение $\dot{U} = \dot{E}$ является общим для всех элементов. В цепи возникает периодический обмен энергией между индуктивностью и емкостью. Энергия переходит из конденсатора в катушку и обратно, не обмениваясь с источником ЭДС. Источник энергии расходует энергию только в ветви с проводимостью G. В схеме на рис. 5.7 процесс обмена энергией между индуктивностью и емкостью при резонансе ничем не ограничен (идеальный контур) и будет протекать бесконечно, даже при отключении источника энергии.

Рассмотрим схему параллельного колебательного контура, где сопротивление r отражает потери в индуктивности (рис. 5.9).

Найдем полную комплексную проводимость параллельного колебательного контура (рис. 5.9):

$$\dot{Y} = j\omega C + \frac{1}{r + j\omega L},$$

$$\dot{Y} = j\omega C + \frac{r - j\omega L}{(r + j\omega L)\cdot(r - j\omega L)},$$

$$\dot{Y} = \frac{r}{r^2 + (\omega L)^2} + j(\omega C - \frac{\omega L}{r^2 + (\omega L)^2}),$$

$$\dot{Y} = G - jB.$$

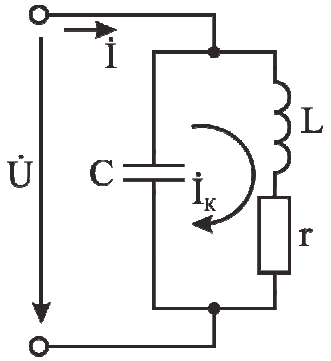


Рис. 5.9. Параллельный колебательный контур с потерями энергии

По условию резонанса мнимая часть полной комплексной проводимости цепи (реактивная проводимость) должна равняться нулю $B = 0$. Таким образом, получаем

$$\omega_p C = \frac{\omega_p L}{r^2 + \omega_p{}^2 L^2}.$$

При резонансе сопротивление реактивных элементов значительно больше активного сопротивления: исходя из этого условия, пренебрегаем активными потерями в формуле и получаем выражение для резонансной частоты параллельного колебательного контура $\omega_p = 1/\sqrt{LC}$. Оно имеет такой же вид, что и для последовательного контура. Характеристическое (волновое) сопротивление также имеет тот же вид: $\rho = \omega_p L = 1/\omega_p C = \sqrt{L/C} >> r$.

В качестве резонансной характеристики параллельного контура рассматривают амплитудно-частотную характеристику зависимости комплексного входного сопротивления контура от частоты. Определим сопротивление параллельного колебательного контура с учетом выражений для его резонансной частоты и характеристического сопротивления:

$$\dot{Z}(\omega) = \frac{(r + j\omega L)\cdot\dfrac{1}{j\omega C}}{r + j\omega L + \dfrac{1}{j\omega C}} = \frac{\rho^2 - j\rho r\dfrac{\omega_p}{\omega}}{r + j\rho\left(\dfrac{\omega}{\omega_p} - \dfrac{\omega_p}{\omega}\right)}.$$

На частотах, близких к резонансу $\rho >> r$, можно пренебречь мнимой частью числителя. Тогда

$$\dot{Z}(\omega) = \frac{\rho^2}{r + j\rho\left(\dfrac{\omega}{\omega_p} - \dfrac{\omega_p}{\omega}\right)},$$

учитывая, что добротность контура $Q=\rho/r$, получаем

$$\dot{Z}(\omega) = \frac{r_\alpha}{1 + jQ\left(\dfrac{\omega}{\omega_p} - \dfrac{\omega_p}{\omega}\right)},$$

где $r_\alpha = \rho^2/r = \rho Q$ – сопротивление контура на резонансной частоте.

Таким образом, выражение для полного сопротивления контура имеет вид

$$\dot{Z}(\omega) = \frac{r_\alpha}{1 + jQ\left(\dfrac{\omega}{\omega_p} - \dfrac{\omega_p}{\omega}\right)} = \frac{r_\alpha}{\sqrt{1 + Q^2\left(\dfrac{\omega}{\omega_p} - \dfrac{\omega_p}{\omega}\right)^2}} e^{-\operatorname{arctg}\left(Q\left(\frac{\omega}{\omega_p} - \frac{\omega_p}{\omega}\right)\right)}.$$

Резонансная кривая (рис. 5.10) параллельного контура описывается формулой для модуля, а фазочастотная характеристика (рис. 5.11) – формулой для фазы комплексного входного сопротивления контура. На резонансной

частоте сопротивление параллельного контура оказывается значительным, а ток в контуре $\dot{I}_K$ в Q раз превышает ток $\dot{I}$, поступающий в контур от генератора тока. Превышение контурного тока $\dot{I}_K$ над внешним током $\dot{I}$ объясняется периодическим обменом энергией между индуктивностью и емкостью. Энергия, приобретаемая от внешнего источника, расходуется только на компенсацию потерь в сопротивлении контура r.

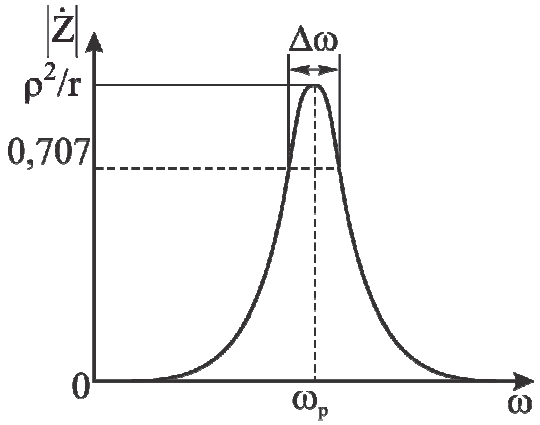


Рис. 5.10. Резонансная кривая параллельного колебательного контура

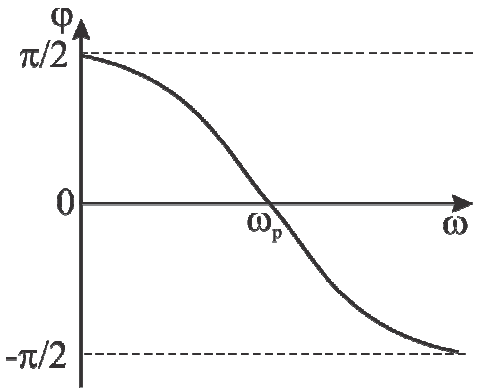


Рис. 5.11. Фазочастотная характеристика параллельного колебательного контура

Методика выполнения работы

В исследуемых электрических цепях действует напряжение вида $e(t)=E_m \sin\omega t$, т.е. начальная фаза источника ЭДС равна нулю.

Осциллограммы напряжения на исследуемых элементах необходимо снимать при одинаковых масштабах (по шкале напряжения – 2 В на обоих каналах, масштаб по шкале времени 500 мкс) в режиме постоянного и переменного напряжений (DC). Зарисовывая временные диаграммы напряжения на исследуемом элементе и напряжения на генераторе, учитывайте, что начальная фаза напряжения на генераторе равна нулю. Временные диаграммы следует наложить друг на друга путем совмещения их осей абсцисс (на экране осциллографа совместить положение первого и второго каналов). На осях временной диаграммы необходимо обозначить измеряемые величины, их размерность и масштаб.

Для получения временных диаграмм напряжения используется два канала осциллографа: канал 1 (клемма K I осциллографа на лабораторном стенде (см. приложение)) подключается к исследуемому элементу (точка 1 на схемах рис. 5.12), а канал 2 (клемма K II осциллографа на лабораторном стенде (см. приложение)) – к генератору (точка 2 на схемах рис. 5.12). Временные диаграммы напряжения на элементах зарисовывать, учитывая, что начальная фаза напряжения генератора равна нулю. На осциллографе необходимо выставить масштаб по оси времени – 500 мкс/дел, а по оси напряжения – 2 В/дел. На осях временных диаграмм необходимо обозначить измеряемые величины, их размерность и масштаб.

Для снятия АЧХ необходимо подключить канал 1 осциллографа к исследуемому элементу. Перевести курсоры в режим измерения «АВТО», в меню «Измерения» установить «Канал 1 напряжение» тип «V_{max}». С помощью органов управления поместить исследуемый сигнал в центральную часть экрана. Регулировкой чувствительности по напряжению добиться, чтобы размах сигнала составлял порядка 2/3 экрана. Регулировкой длительности развертки добиться отображения на экране 2÷3 периодов сигнала. Величина амплитудного значения напряжения будет отображаться в правой части экрана под пиктограммой типа измеряемой величины. При изменении частоты измеряемого сигнала корректировать с помощью чувствительности по напряжению и длительности развертки указанные выше пропорции сигнала на экране. Частоту менять на генераторе от 20 до 420 Гц с шагом 40 Гц.

Программа работы

Перед выполнением лабораторной работы необходимо:

- составить отчет, который должен содержать краткие элементы теории, все исследуемые схемы, таблицы и расчеты, указанные в программе работы. Схемы и таблицы должны быть выполнены карандашом и в соответствии с требованиями ЕСКД;
- изучить лабораторный стенд (см. приложение), порядок проведения измерений электрических величин с помощью мультиметра VC 9808^{+}, работу генератора GFG -3015 и осциллографа АКИП-4115/3А, а также методику выполнения работы.

СТУДЕНТ, НЕ ПОДГОТОВИВШИЙ ОТЧЕТ, К ВЫПОЛНЕНИЮ ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЫ НЕ ДОПУСКАЕТСЯ.

Исследование последовательного колебательного контура

Для двух исследуемых вариантов схем (см. таблицу) рассчитать резонансную частоту контура (ω_p, f_p), волновое сопротивление ρ и добротность Q. Расчет привести в отчете, а полученные данные занести в соответствующие графы таблицы.

При проведении исследований в качестве сопротивления R использовать резистор R_1 номиналом 750 Ом (см. приложение), в качестве емкости C – конденсатор C_1 номиналом 1 мкФ, в качестве индуктивности L – индуктивность L_1 номиналом 1 Гн.

1. На лабораторном стенде собрать схему последовательного колебательного контура согласно рис. 5.12,а.

1.1. Выставить на генераторе синусоидальное напряжение с амплитудой $U_m = 5$ В (напряжение смещения – 0 В, асимметрия – 50 %) и частотой $f = f_p$. Подключить первый канал осциллографа к резистору R (точка 1), а второй – к генератору (точка 2). Зарисовать временные диаграммы напряжения на сопротивлении и генераторе.

1.2. Установить на генераторе частоту $f = 0.5\ f_p$. Зарисовать временные диаграммы напряжения на сопротивлении и генераторе на отдельной осциллограмме.

1.3. Установить на генераторе частоту $f = 1.5\ f_p$. Зарисовать временные диаграммы напряжения на сопротивлении и генераторе на отдельной осциллограмме.

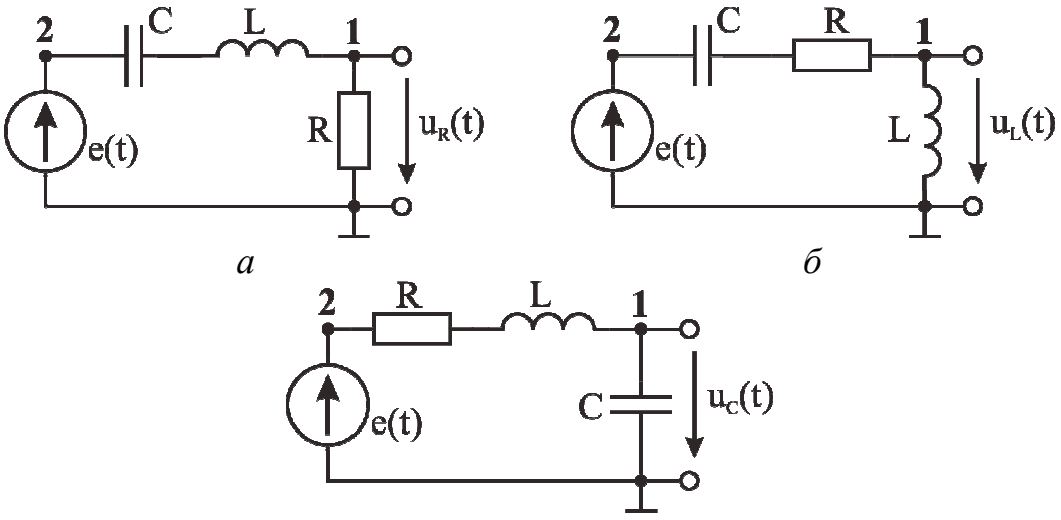


Рис. 5. 12. Схемы для наблюдения временных диаграмм на элементах последовательного колебательного контура: а – на сопротивлении, б – на индуктивности, в – на емкости

2. На лабораторном стенде собрать схему последовательного колебательного контура согласно рис. 5.12,б.

2.1. Подключить первый канал осциллографа к индуктивности L (точка 1), а второй – к генератору (точка 2). Установить на генераторе частоту $f = f_p$. Зарисовать временные диаграммы напряжения на индуктивности и генераторе на отдельной осциллограмме.

2.2. Установить на генераторе частоту $f = 0.5\ f_p$. Зарисовать временные диаграммы напряжения на индуктивности и генераторе на отдельной осциллограмме.

2.3. Установить на генераторе частоту $f = 1.5\ f_p$. Зарисовать временные диаграммы напряжения на индуктивности и генераторе на отдельной осциллограмме.

3. На лабораторном макете собрать схему последовательного колебательного контура согласно рис. 5.12,в.

3.1. Подключить первый канал осциллографа к емкости С (точка 1), а второй – к генератору (точка 2). Установить на генераторе частоту $f = f_p$. Зарисовать временные диаграммы напряжения на емкости и генераторе на отдельной осциллограмме.

3.2. Установить на генераторе частоту $f = 0.5\ f_p$. Зарисовать временные диаграммы напряжения на емкости и генераторе на отдельной осциллограмме.

3.3. Установить на генераторе частоту $f = 1.5\ f_p$. Зарисовать временные диаграммы напряжения на емкости и генераторе на отдельной осциллограмме.

4. Исследование амплитудно-частотных характеристик последовательного колебательного контура.

4.1. В схеме последовательного колебательного контура, собранной согласно рис. 5.12,в, при сопротивлении $R = R_1 = 750$ Ом снять зависимость амплитудного значения напряжения на емкости U_{mC} от частоты изменения напряжения источника питания (АЧХ). Полученные результаты занести в соответствующие графы таблицы.

4.2. Установить в схеме рис. 5.12,в сопротивление $R = 500$ Ом (для этого сопротивления R_1 и R_2 на лабораторном стенде необходимо соединить параллельно). Снять АЧХ U_{mC}. Полученные результаты занести в соответствующие графы таблицы.

4.3. На лабораторном макете собрать схему последовательного колебательного контура согласно рис. 5.12,а при $R = R_1 = 750$ Ом. Снять АЧХ U_{mR}. Полученные результаты занести в соответствующие графы таблицы.

4.4. Установить в схеме рис. 5.12,а сопротивление $R = 500$ Ом. Снять АЧХ U_{mR}. Полученные результаты занести в соответствующие графы таблицы.

Последовательный колебательный контур

	R=750 Ом, L=1 Гн, C=1 мкФ, Rг=100 Ом				R=500 Ом, L=1 Гн, C=1 мкФ, Rг=100 Ом			
Расчетные параметры резонанса								
ω_p, рад/с								
f_p, Гц								
ρ, Ом								
Q								
Построение амплитудно-частотных характеристик								
f, Гц	U_{mR}, В	U_{mL}, В	U_{mC}, В	I, мА	U_{mR}, В	U_{mL}, В	U_{mC}, В	I, мА
20								
60								
100								
140								
180								
220								
260								
300								
340								
380								
420								
Графическое определение параметров резонанса								
f_p, Гц								
Δf_p, Гц								
Q								

4.5. На лабораторном макете собрать схему последовательного колебательного контура согласно рис. 5.12,б при $R = R_1 = 750$ Ом. Снять АЧХ U_{mL}. Полученные результаты занести в соответствующие графы таблицы 5.1.

4.6. Установить в схеме рис. 5.12,б сопротивление $R = 500$ Ом. Снять АЧХ U_{mL}. Полученные результаты занести в соответствующие графы таблицы.

4.7. Рассчитать значения токов для всех точек АЧХ: $I = U_{mR}/R$. Полученные результаты занести в соответствующие графы таблицы.

4.8. По полученным данным построить АЧХ $U_{mR}(f)$, $U_{mL}(f)$ и $U_{mC}(f)$. Все три зависимости для каждой добротности построить на одном графике.

5. Построить резонансные кривые для двух значений добротности на одном графике. В качестве резонансной характеристики использовать АЧХ тока в контуре. Графически определить резонансную частоту f_p, полосу пропускания Δf и добротность Q. Полученные результаты занести в соответствующие графы таблицы.

6. Провести анализ полученных результатов.

Контрольные вопросы

1. Что такое резонанс?
2. Сформулируйте условие резонанса токов.
3. Сформулируйте условие резонанса напряжений.
4. Что такое резонансная частота? Как она определяется?
5. Что такое характеристическое (волновое) сопротивление (проводимость)? Как оно определяется?
6. Что такое добротность контура? Как она определяется?
7. Что такое АЧХ?
8. Что такое ФЧХ?
9. Что является резонансной кривой последовательного и параллельного колебательного контура?
10. Как с помощью АЧХ определить резонансную частоту?
11. Как с помощью АЧХ определить полосу пропускания?

ТЕМА 2
ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ С МАГНИТНО-СВЯЗАННЫМИ ЭЛЕМЕНТАМИ

Магнитно-связанные катушки в цепи переменного тока

Простейшей катушкой индуктивности является провод, намотанный на цилиндрическую поверхность (соленоид). При протекании через соленоид тока вокруг витков обмотки создается магнитное поле, вектор магнитной индукции $\vec{B}$ которого направлен по часовой стрелке относительно направления протекания тока. Внутри катушки линии магнитной индукции от каждого витка обмотки суммируются и направлены параллельно оси соленоида. В случае соленоида без магнитопровода (рис. 2.1,а) линии магнитной индукции начинают отклоняться от оси на границах начала и конца обмотки. При помещении внутрь обмотки сердечника из ферромагнитного материала линии магнитной индукции, вызываемые протекающим через обмотку током, концентрируются внутри магнитопровода на всем его протяжении (рис. 2.1,б). В случае намотки двух (или нескольких) обмоток на один сердечник при протекании через каждую из них переменного тока будет возникать магнитный поток (самоиндукция), вызывающий в остальных обмотках ЭДС взаимной индукции. Такие катушки называются магнитно-связанными и характеризуются взаимной магнитной индукцией. Взаимная магнитная индукция обозначается М, измеряется в генри [Гн] и имеет свойства индуктивности $\dot{X}_M = j\omega M$. На схемах магнитная связь между элементами обозначается дугой, с обеих сторон оканчивающейся стрелками.

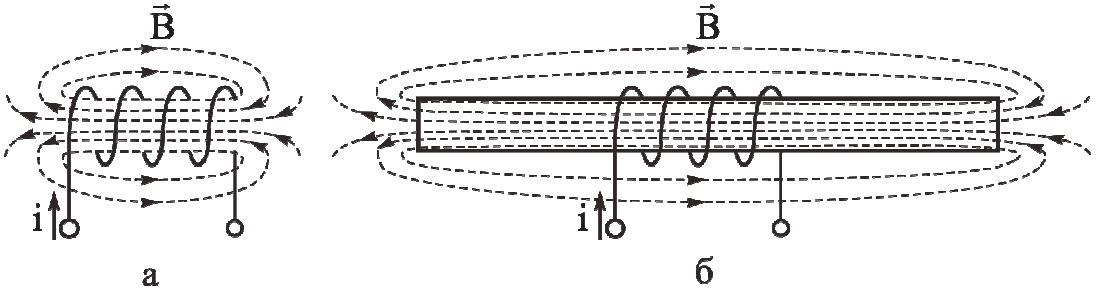


Рис. 2.1. Распределение линий магнитной индукции в соленоиде без магнитопровода (а) и в соленоиде с магнитопроводом (б)

Существует согласное (рис. 2.2,а) и встречное (рис. 2.3,а) включение магнитно-связанных катушек. При согласном включении токи в катушках втекают в одноименные зажимы, рис. 2.2,б (на схемах обозначаются точками либо звездочками), и создают магнитные потоки самоиндукции и взаимной индукции, направленные в одну сторону (согласованные). При встречном включении токи в катушках втекают в разноименные зажимы (рис. 2.3,б) и создают магнитные потоки самоиндукции и взаимной индукции, направленные в противоположные стороны (встречные).

Рис. 2.2. Согласное включение магнитно-связанных катушек (а) и его изображение на схеме (б)

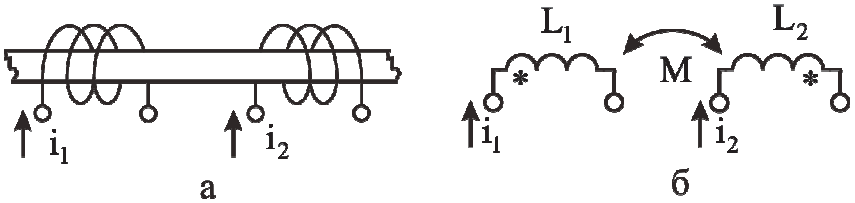


Рис. 2.3. Встречное включение магнитно-связанных катушек (а) и его изображение на схеме (б)

При согласном последовательном соединении двух магнитно-связанных катушек (рис. 2.4) ЭДС взаимной индукции складывается с ЭДС самоиндукции,

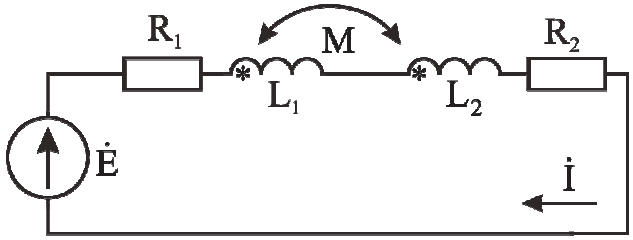


Рис. 2.4. Согласное последовательное соединение двух магнитно-связанных катушек

а реактивное сопротивление схемы увеличивается:

$$\dot{E} = \dot{I} \cdot R_1 + \dot{I} \cdot j\omega L_1 + \dot{I} \cdot j\omega M + \dot{I} \cdot j\omega L_2 + \dot{I} \cdot j\omega M + \dot{I} \cdot R_2,$$

$$\dot{E} = \dot{I} \cdot (R_1 + R_2 + j(\omega L_1 + \omega L_2 + 2\omega M)),$$

$$\dot{Z} = \dot{E} / \dot{I} = (R_1 + R_2 + j(\omega L_1 + \omega L_2 + 2\omega M)).$$

При встречном последовательном соединении двух магнитно-связанных катушек (рис. 2.5) ЭДС взаимной индукции вычитается из ЭДС самоиндукции,

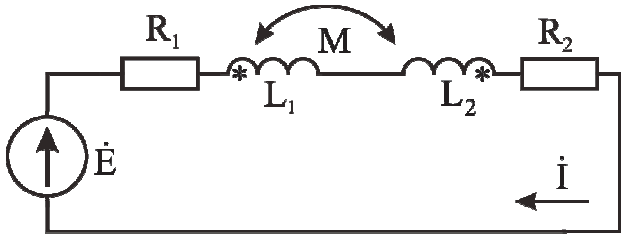


Рис. 2.5. Встречное последовательное соединение двух магнитно-связанных катушек

а реактивное сопротивление схемы уменьшается:

$$\dot{E} = \dot{I} \cdot R_1 + \dot{I} \cdot j\omega L_1 - \dot{I} \cdot j\omega M + \dot{I} \cdot j\omega L_2 - \dot{I} \cdot j\omega M + \dot{I} \cdot R_2,$$

$$\dot{E} = \dot{I} \cdot (R_1 + R_2 + j(\omega L_1 + \omega L_2 - 2\omega M)),$$

$$\dot{Z} = \dot{E} / \dot{I} = (R_1 + R_2 + j(\omega L_1 + \omega L_2 - 2\omega M)).$$

Расчет цепей с магнитно-связанными элементами осуществляется символическим методом. Для этого применим любой из способов, описанных выше.

Трансформатор в цепи переменного тока

Трансформатором называют статическое электромагнитное устройство, имеющее две или более индуктивно-связанных обмоток и предназначенное для преобразования переменного тока (или напряжения) одной обмотки (первичной) в переменный ток (или напряжение) другой обмотки (вторичной) посредством электромагнитной индукции.

Наибольшее применение в электротехнических установках, а также в энергетических системах передачи и распределения электроэнергии имеют силовые трансформаторы, которыми изменяют величину переменного напряжения и тока. При этом число фаз, форма кривой напряжения (тока) и частота остаются неизменными. Простейший силовой трансформатор состоит из магнитопровода – сердечника, выполненного из ферромагнитного материала, и двух обмоток, расположенных на стержнях магнитопровода (рис. 2.6). На схемах магнитную связь между обмотками трансформатора обозначать не принято, показывают только начала обмоток. Линия между обмотками обозначает наличие магнитопровода. Одна из обмоток присоединена к источнику переменного напряжения $e_1(t)$, эту обмотку называют первичной. К другой обмотке подключен потребитель $\dot{Z}_н$ – ее называют вторичной (рис. 2.7). Здесь L_1 и L_2 – индуктивность, а r_1 и r_2 – активное сопротивление первичной и вторичной обмоток. Взаимная магнитная индукция между первичной и вторичной обмотками равна M.

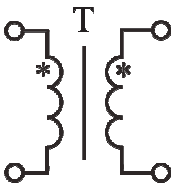


Рис. 2.6. Условное обозначение трансформатора

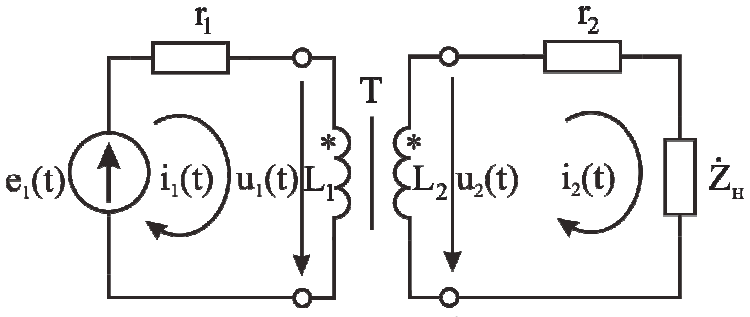


Рис. 2.7. Включение трансформатора в цепь

Принцип действия трансформатора основан на явлении электромагнитной индукции. При подключении первичной обмотки к источнику переменного тока в витках этой обмотки протекает переменный ток $i_1(t)$, который создает в магнитопроводе переменный магнитный поток Ф. Замыкаясь на магнитопроводе, этот поток сцепляется с обеими обмотками (первичной и вторичной) и индуцирует в них ЭДС:

$$u_1(t) = -w_1 \frac{d\Phi}{dt},$$

$$u_2(t) = -w_2 \frac{d\Phi}{dt},$$

где w_1 и w_2 – число витков в первичной и вторичной обмотке трансформатора.

Соотношение между $u_1(t)$ и $u_2(t)$ определяется соотношением числа витков первичной и вторичной обмоток:

$$u_2(t)/u_1(t) = w_2/w_1 = n,$$

где n – коэффициент трансформации. Если $n > 1$ – трансформатор повышающий (напряжение на вторичной обмотке больше, чем напряжение на первичной обмотке), а если $n < 1$ – трансформатор понижающий (напряжение на вторичной обмотке меньше, чем напряжение на первичной обмотке). Данное соотношение справедливо для действующих и амплитудных значений напряжения

$$U_2/U_1 = U_{2m}/U_{1m} = w_2/w_1 = n.$$

В случае использования идеального трансформатора (у которого отсутствует активное сопротивление обмоток и рассеивание магнитного потока) мощность в цепи первичной обмотки равна мощности в цепи вторичной обмотки:

$$p_1(t) = p_2(t),$$

$$u_1(t) \cdot i_1(t) = u_2(t) \cdot i_2(t),$$

где $p_1(t)$ и $p_2(t)$ – значение мгновенной мощности в первичной и вторичной обмотках, $i_1(t)$ и $i_2(t)$ – значение мгновенных токов в первичной и вторичной обмотках.

Следовательно, можно записать:

$$i_1(t) = \frac{u_2(t)}{u_1(t)} \cdot i_2(t) = n \cdot i_2(t),$$

$$i_1(t)/i_2(t) = n.$$

Таким образом, в случае повышающего трансформатора ток во вторичной обмотке меньше тока в первичной обмотке, а в случае понижающего трансформатора ток во вторичной обмотке больше тока в первичной обмотке.

В идеальном трансформаторе вся мощность вторичной обмотки рассеивается в нагрузке. С учетом этого можно определить эквивалентное значение сопротивления нагрузки $\dot{Z}'_н$, пересчитанное в цепь первичной обмотки:

$$i_1^2(t) \cdot \dot{Z}'_н = i_2^2(t) \cdot \dot{Z}_н,$$

$$\dot{Z}'_н = \frac{i_2^2(t)}{i_1^2(t)} \cdot \dot{Z}_н = \frac{\dot{Z}_н}{n^2}.$$

Используя аналогичные преобразования, можно получить следующие соотношения:

$$R'_2 = R_2/n^2,\ L'_2 = L_2/n^2,\ C'_2 = n^2 \cdot C_2,$$

где R_2, L_2 и C_2 – сопротивление, индуктивность и емкость, включенные в цепь вторичной обмотки, а R'_2, L'_2 и C'_2 – их эквивалентные значения, пересчитанные в цепь первичной обмотки.

В трансформаторе с равным числом витков первичной и вторичной обмоток (коэффициентом трансформации n=1) воздействие тока первичной обмотки на вторичную эквивалентно воздействию тока вторичной обмотки на первичную. Так как трансформатор является устройством переменного тока, то к схемам с его использованием применим символический метод расчета. С учетом этого для схемы на рис. 2.8 в случае, когда нагрузка носит только активный характер, можно записать систему уравнений:

$$\begin{cases} \dot{I}_1 \cdot r_1 + \dot{I}_1 \cdot j\omega L_1 - \dot{I}_2 \cdot j\omega M = \dot{E} \\ \dot{I}_2 \cdot r_2 + \dot{I}_2 \cdot R_н + \dot{I}_2 \cdot j\omega L_2 - \dot{I}_1 \cdot j\omega M = 0 \end{cases}.$$

Определим входное сопротивление трансформатора с коэффициентом трансформации n = 1:

$$\begin{cases} \dot{I}_2 = \dot{I}_1 \cdot \dfrac{j\omega M}{r_2 + R_н + j\omega L_2} \\ \dot{I}_1 \cdot r_1 + \dot{I}_1 \cdot j\omega L_1 + \dot{I}_1 \cdot \dfrac{j\omega^2 M^2}{r_2 + R_н + j\omega L_2} = \dot{E} \end{cases};$$

$$\dot{Z}_{вх} = \frac{\dot{E}}{\dot{I}_1} = r_1 + j\omega L_1 + \frac{j\omega^2 M^2}{r_2 + R_н + j\omega L_2}.$$

Если в первое уравнение системы одновременно добавить и вычесть произведение $\dot{I}_1 \cdot j\omega M$, а во второе уравнение – произведение $\dot{I}_2 \cdot j\omega M$, то состояние системы не изменится:

$$\begin{cases} \dot{I}_1 \cdot r_1 + \dot{I}_1 \cdot j\omega L_1 - \dot{I}_1 \cdot j\omega M + \dot{I}_1 \cdot j\omega M - \dot{I}_2 \cdot j\omega M = \dot{E} \\ \dot{I}_2 \cdot r_2 + \dot{I}_2 \cdot R_н + \dot{I}_2 \cdot j\omega L_2 - \dot{I}_2 \cdot j\omega M + \dot{I}_2 \cdot j\omega M - \dot{I}_1 \cdot j\omega M = 0 \end{cases}.$$

Преобразовав полученные выражения, получим систему уравнений:

$$\begin{cases} \dot{I}_1 \cdot r_1 + \dot{I}_1 \cdot j\omega \cdot (L_1 - M) + j\omega M \cdot (\dot{I}_1 - \dot{I}_2) = \dot{E} \\ \dot{I}_2 \cdot r_2 + \dot{I}_2 \cdot R_н + \dot{I}_2 \cdot j\omega \cdot (L_2 - M) + j\omega M \cdot (\dot{I}_2 - \dot{I}_1) = 0 \end{cases},$$

которая описывает эквивалентную схему замещения трансформатора с коэффициентом трансформации n=1 (рис. 2.8). В этой схеме L_1-M=L_{S1} и L_2-M=L_{S2} – индуктивности рассеивания первичной и вторичной обмоток соответственно. Индуктивность рассеивания обусловлена рассеиванием части магнитного потока трансформатора вне витков вторичной и первичной обмоток и является паразитным параметром трансформатора.

Если коэффициент трансформации $n \neq 1$, то элементы, входящие в цепь вторичной обмотки, необходимо пересчитать в цепь первичной обмотки. В этом случае эквивалентная схема замещения трансформатора будет иметь вид рис. 2.9. У идеального трансформатора активные сопротивления обмоток r_1, r_2 и индуктивности рассеивания обмоток L_{S1}, L_{S2} равны нулю.

Трансформатор является устройством переменного тока. Если через его первичную обмотку пропускать постоянный ток, то магнитный поток в магнитопроводе трансформатора также будет постоянным как по величине, так и по

направлению ($d\Phi/dt = 0$), а в обмотках трансформатора не будет наводиться ЭДС. Поэтому трансформатор обеспечивает гальваническую развязку – постоянная составляющая напряжения и тока из цепи первичной обмотки не передается в цепь вторичной обмотки (рис. 2.10,а):

$$i_{1общ}(t) = i_1(t) + I_{const},\ I_{const} = E_2 / r_1,\ i_2(t) = i_1(t)/n,$$

а постоянная составляющая напряжения и тока из цепи вторичной обмотки не передается в цепь первичной обмотки (рис. 2.10, б):

$$i_{2общ}(t) = i_2(t) + I_{const},\ I_{const} = E_2 /(r_2 + R_н),\ i_1(t) = n \cdot i_2(t).$$

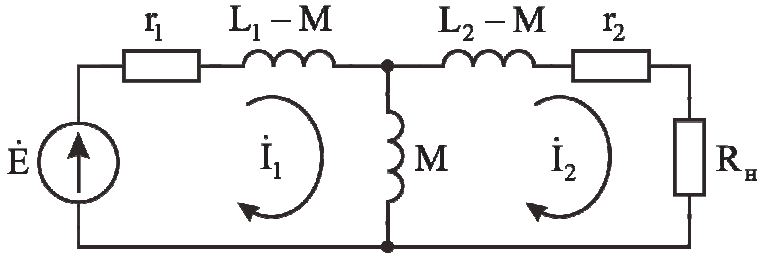


Рис. 2.8. Эквивалентная схема замещения трансформатора с коэффициентом трансформации n = 1

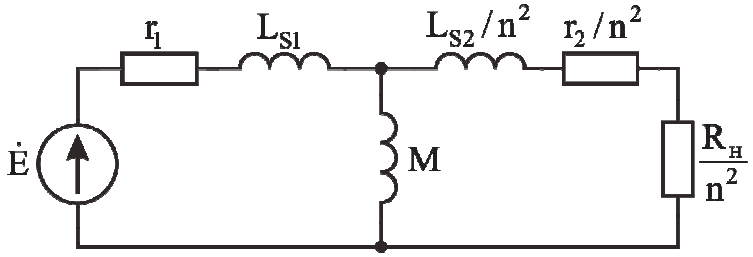


Рис. 2.9. Эквивалентная схема замещения трансформатора с коэффициентом трансформации n≠1

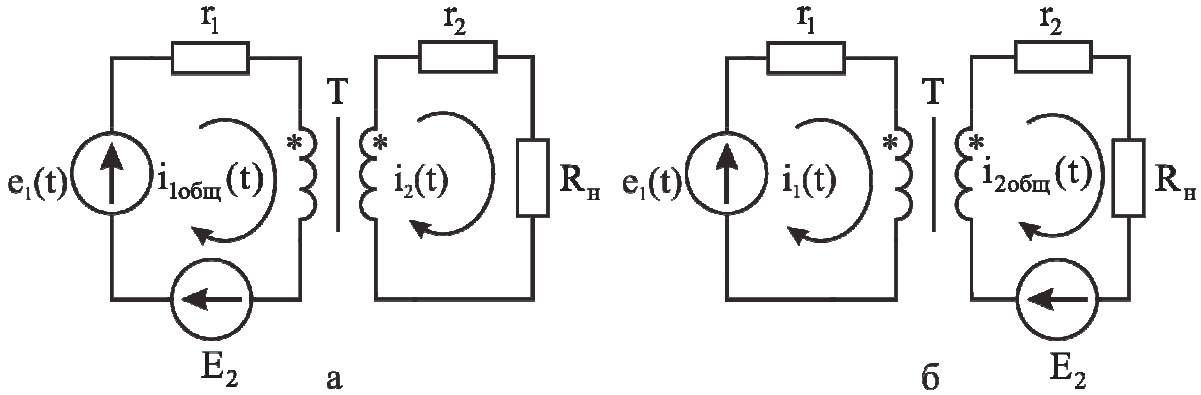


Рис. 2.10. Подключение постоянного источника ЭДС в цепь первичной обмотки трансформатора (а) и в цепь вторичной обмотки трансформатора (б)

ТЕМА 3
ТРЕХФАЗНЫЕ ЦЕПИ ПЕРЕМЕННОГО ТОКА

Основные понятия и определения

Трехфазной цепью называется совокупность трехфазной системы ЭДС, трехфазной нагрузки и соединительных проводов. Трехфазная цепь является частным случаем многофазных электрических систем, представляющих собой совокупность электрических цепей, в которых действуют ЭДС одинаковой частоты, сдвинутые по фазе относительно друг друга на определенный угол. Трехфазная симметричная система ЭДС – это совокупность трех синусоидальных ЭДС одинаковой частоты и амплитуды, сдвинутых по фазе на 120° относительно друг друга. ЭДС в симметричной трехфазной системе формируется с помощью генератора, на статоре которого размещается обмотка, состоящая из трех частей (фаз). Начала обмоток трехфазного генератора обозначают первыми буквами латинского алфавита (A, B, C), а их концы – последними (X, Y, Z). При вращении ротора с равномерной скоростью в обмотках фаз статора индуцируются периодически изменяющиеся синусоидальные ЭДС одинаковой частоты и амплитуды, но отличающиеся друг от друга по фазе на 120° вследствие их пространственного смещения. В электротехнике ЭДС каждой фазы принято обозначать по началу обмоток A, B и C. Если ЭДС одной фазы (обычно фазы A) принять за исходную и считать её начальную фазу равной нулю, то выражения мгновенных значений ЭДС всех трех фаз можно записать в виде:

$$\begin{aligned} e_A(t) &= E_m \cdot \sin \omega t, \\ e_B(t) &= E_m \cdot \sin(\omega t - 120°), \\ e_C(t) &= E_m \cdot \sin(\omega t - 240°) = E_m \cdot \sin(\omega t + 120°). \end{aligned} \qquad (3.1)$$

Временные диаграммы трехфазной симметричной системы ЭДС приведены на рис. 3.1. Здесь $T=2\pi/\omega$. Для удобства построения векторно-топографических диаграмм трехфазных цепей ось действительных чисел на комплексной плоскости направляют не слева направо, а снизу вверх. Ось мнимых чисел направляют не снизу вверх, а справа налево. Представление симметричной системы ЭДС на комплексной плоскости показано на рис. 3.2.

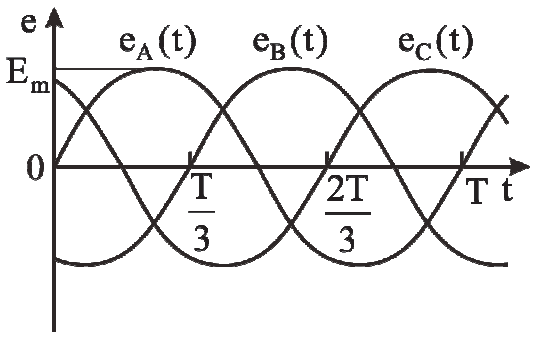


Рис. 3.1. Временные диаграммы трехфазной симметричной системы ЭДС

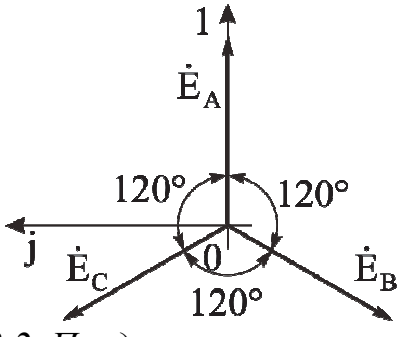


Рис. 3.2. Представление симметричной системы ЭДС на комплексной плоскости

Для трехфазной симметричной системы ЭДС в любой момент времени выполняется соотношение

$$e_A(t) + e_B(t) + e_C(t) = 0. \qquad (3.2)$$

Трехфазная симметричная система ЭДС является совокупностью синусоидальных источников, поэтому для нее применим символический метод расчета. Тогда выражение (3.2) можно записать в виде

$$\dot{E}_A + \dot{E}_B + \dot{E}_C = E_m + E_m \cdot e^{-j120^\circ} + E_m \cdot e^{j120^\circ} = E_m \cdot (1 + \cos 120^\circ -$$
$$- j\sin 120^\circ + \cos 120^\circ + j\sin 120^\circ) = E_m \cdot (1 - 0{,}5 - 0{,}5) = 0.$$

Трехфазную систему ЭДС, в которой ЭДС фазы В отстает от ЭДС фазы А на 120°, а ЭДС фазы С отстает от ЭДС фазы В на 120°, называют системой прямой последовательности фаз (рис. 3.2). Если изменить направление вращения ротора генератора, то ЭДС фазы С будет отставать от ЭДС фазы А на 120° и ЭДС фазы В будет отставать от ЭДС фазы С на 120°. Такая последовательность фаз будет называться обратной (рис. 3.3). Последовательность фаз определяет направление вращения трехфазных двигателей. Для определения последовательности фаз имеются специальные приборы – фазоуказатели.

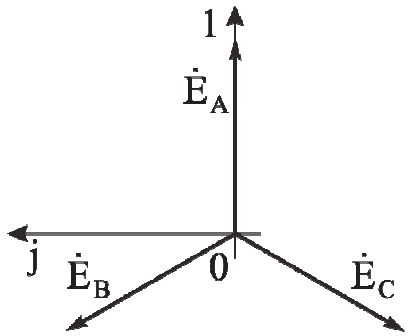


Рис. 3.3. Векторная диаграмма трехфазной симметричной системы ЭДС с обратной последовательностью фаз

Симметричная трехфазная система ЭДС является уравновешенной. Это означает, что даже если в отдельных фазах мгновенная мощность пульсирует (рис. 3.4,а), изменяя за время одного периода не только величину, но и знак, суммарная мгновенная мощность всех фаз остается величиной постоянной в течение всего периода синусоидальной ЭДС (рис. 3.4,б).

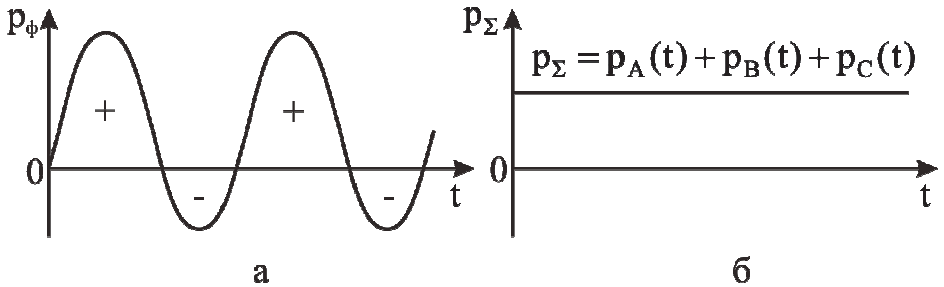


Рис. 3.4. Мощность фазы (а) и суммарная мощность (б) симметричной трехфазной системы ЭДС

При использовании несвязанной системы ЭДС, в которой фазы обмотки генератора электрически не соединены между собой и каждая фаза соединяется со своим приемником двумя проводами, для соединения генератора с приемником требуется шесть проводов. Такие системы неэкономичны. Более совершенными и экономичными являются связанные цепи, в которых фазы обмотки

электрически соединены между собой. Существуют различные способы соединения фаз трехфазных источников питания и трехфазных потребителей электроэнергии. Наиболее распространенными являются соединения «звезда» и «треугольник». При этом способы соединения фаз источников и фаз потребителей в трехфазных системах могут быть различными. Фазы источника обычно соединены «звездой», фазы потребителей соединяются либо «звездой», либо «треугольником».

Соединение фаз генератора и приемника «звездой»

В электротехнике симметричную трехфазную систему ЭДС на схемах принято обозначать в виде трех обмоток, соединенных между собой определенным образом. При соединении фаз обмоток генератора (или трансформатора) «звездой» их концы X, Y и Z соединяют в одну общую точку N, которую называют нейтральной точкой (или нейтралью). Концы фаз приемников ($\dot{Z}_a$, $\dot{Z}_b$, $\dot{Z}_c$) также соединяют в одну точку n (рис. 3.5). Нагрузка каждой фазы приемника последовательно соединена с соответствующей фазой генератора. Провода, соединяющие начала фаз генератора и приемника (A-a, B-b и C-c), называются линейными, провод, соединяющий точку N генератора с точкой n приемника – нейтральным. Трехфазная цепь, содержащая нейтральный провод, является четырехпроводной, а без нейтрального провода – трехпроводной.

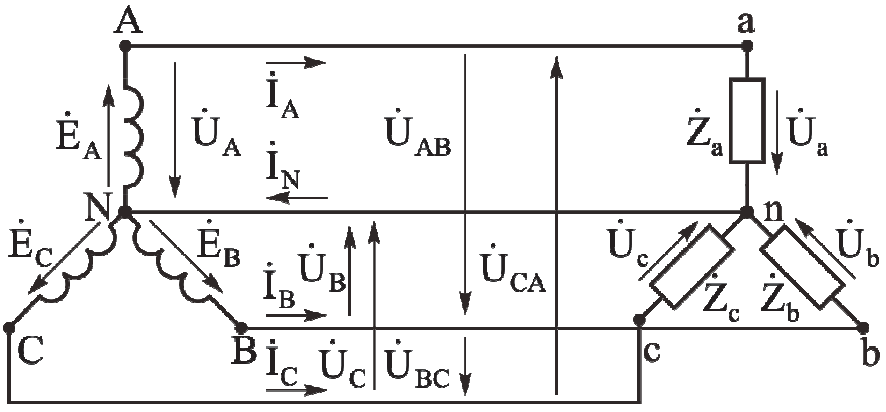


Рис 3.5. Схема четырехпроводного соединения фаз генератора и приемника «звездой»

Различают фазные и линейные напряжения. Фазное напряжение $\dot{U}_Ф$ – напряжение между началом и концом фазы или между линейным проводом и нейтралью ($\dot{U}_A$, $\dot{U}_B$, $\dot{U}_C$ у источника и $\dot{U}_a$, $\dot{U}_b$, $\dot{U}_c$ у приемника). Если сопротивлением проводов пренебречь, то фазное напряжение в приемнике считают таким же, как и в источнике ($\dot{U}_A = \dot{U}_a$, $\dot{U}_B = \dot{U}_b$, $\dot{U}_C = \dot{U}_c$). За условно положительные направления фазных напряжений принимают направления от начала к концу фаз.

Линейное напряжение $\dot{U}_Л$ – напряжение между линейными проводами или между одноименными выводами разных фаз ($\dot{U}_{AB}$, $\dot{U}_{BC}$, $\dot{U}_{CA}$). Условно

положительные направления линейных напряжений приняты от точек, соответствующих первому индексу, к точкам, соответствующим второму индексу. В соответствии с выбранными условными положительными направлениями фазных и линейных напряжений можно записать уравнения по второму закону Кирхгофа:

$$\dot{U}_{AB} = \dot{U}_A - \dot{U}_B,\ \dot{U}_{BC} = \dot{U}_B - \dot{U}_C,\ \dot{U}_{CA} = \dot{U}_C - \dot{U}_A.$$

Значение фазного напряжения равно значению ЭДС соответствующей фазы, тогда

$$\dot{U}_{AB} = \dot{E}_A - \dot{E}_B = E_m - E_m \cdot e^{-j120^\circ} = E_m - E_m \cdot \cos(-120^\circ) -$$

$$- E_m \cdot \sin(-120^\circ) = \frac{3}{2}E_m + j\frac{\sqrt{3}}{2}E_m.$$

Отсюда действующее значение линейного напряжения

$$U_{AB} = \left|\dot{U}_{AB}\right| = \sqrt{\frac{9}{4}E_m^2 + \frac{3}{4}E_m^2} = \sqrt{3}E_m = \sqrt{3}U_A = \sqrt{3}U_B,\ \varphi_{ФЛ} = \operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}} = 30^\circ.$$

Аналогичные вычисления можно провести для остальных линейных напряжений. Таким образом, линейное напряжение связано с фазным соотношением

$$U_Л = \sqrt{3}U_Ф. \qquad (3.3)$$

Для соединения «звезда» строят топографическую диаграмму (рис. 3.6). Вектор, проведенный между двумя точками топографической диаграммы, выражает по величине и фазе напряжения между одноименными точками цепи.

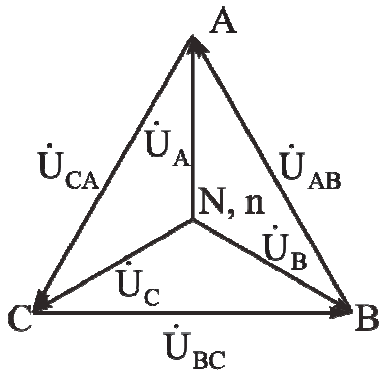


Рис. 3.6. Топографическая диаграмма фазных и линейных напряжений

По аналогии с фазными и линейными напряжениями различают также фазные и линейные токи. Фазные ($\dot{I}_Ф$) – токи в фазах генератора и приемников, линейные ($\dot{I}_Л$) – токи в линейных проводах. При соединении «звезда» фазные и линейные токи равны $\dot{I}_Ф = \dot{I}_Л$. Ток, протекающий в нейтральном проводе, обозначают $\dot{I}_N$.

В трехфазных цепях различают симметричные и несимметричные нагрузки. В случае симметричной нагрузки

$$\dot{Z}_a = \dot{Z}_b = \dot{Z}_c = \dot{Z}_Ф = Z_Ф \cdot e^{j\varphi},\ R_a = R_b = R_c = R_Ф,$$

$$X_a = X_b = X_c = X_Ф,\ \varphi_a = \varphi_b = \varphi_c = \varphi = \operatorname{arctg}(X_Ф / R_ф).$$

К симметричным нагрузкам относятся трехфазные приемники (трехфазные асинхронные двигатели, индукционные печи и др.).

В случае несимметричной нагрузки

$$\dot{Z}_a \neq \dot{Z}_b \neq \dot{Z}_c.$$

К несимметричным нагрузкам обычно относятся однофазные приемники (осветительные приборы, бытовые приборы, однофазные двигатели и др.).

Если в качестве несимметричной нагрузки выступает трехфазный приемник, у которого $Z_a = Z_b = Z_c$, то такой приемник называют равномерным, а если трехфазный приемник, у которого $\varphi_a = \varphi_b = \varphi_c$, то такой приемник называют однородным.

Расчет четырехпроводной цепи при соединении фаз генератора и приемника «звездой». Для расчета трехфазной цепи применимы все методы, используемые для расчета линейных цепей. Обычно сопротивления проводов и внутреннее сопротивление генератора меньше сопротивлений приемников, поэтому при расчете таких цепей сопротивления проводов можно не учитывать ($\dot{Z}_Л = 0$, $\dot{Z}_N = 0$). Если полные комплексные сопротивления фаз равны $\dot{Z}_a$, $\dot{Z}_b$, $\dot{Z}_c$, токи в каждой фазе определяются по закону Ома:

$$\dot{I}_a = \frac{\dot{U}_a}{\dot{Z}_a},\ \dot{I}_b = \frac{\dot{U}_b}{\dot{Z}_b},\ \dot{I}_c = \frac{\dot{U}_c}{\dot{Z}_c}. \qquad (3.4)$$

Записав уравнение по первому закону Кирхгофа для нейтральной точки N (n), получим

$$\dot{I}_N = \dot{I}_a + \dot{I}_b + \dot{I}_c = \dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C. \qquad (3.5)$$

При ***симметричной нагрузке*** полные комплексные сопротивления фаз приемника равны между собой

$$\dot{Z}_a = \dot{Z}_b = \dot{Z}_c = \dot{Z}_Ф = Z_Ф \cdot e^{j\varphi},$$

где $Z_Ф = \sqrt{X_Ф^2 + R_Ф^2}$, $\varphi = \operatorname{arctg}(X_Ф / R_ф)$. В случае симметричной системы ЭДС действующие значения фазных токов равны $I_a = I_b = I_c = I_Ф = E_m / Z_Ф$ и углы сдвига фаз между токами и напряжениями одинаковы: $\varphi_a = \varphi_b = \varphi_c = \varphi$ (рис. 3.7).

Из векторной диаграммы токов для симметричного приемника (рис. 3.8) видно, что сумма векторов фазных токов равна 0 ($\dot{I}_a + \dot{I}_b + \dot{I}_c = 0$). Соответственно и ток в нулевом проводе $\dot{I}_N = 0$. Из этого следует, что при подключении к симметричной системе ЭДС симметричной нагрузки по схеме «звезда» необходимости использования нулевого провода нет.

При подключении ***несимметричной нагрузки*** ($Z_a \neq Z_b \neq Z_c$, $\varphi_a \neq \varphi_b \neq \varphi_c$) к симметричной системе ЭДС токи в фазах нагрузки различны и определяются по закону Ома (3.4). Ток в нейтральном проводе будет равен сумме фазных токов (рис. 3.9)

$$\dot{I}_N = \dot{I}_a + \dot{I}_b + \dot{I}_c.$$

В случае идеального нулевого провода ($\dot{Z}_N = 0$) падение напряжения на нем равно 0 и фазные напряжения нагрузки равны фазным напряжениям генератора:

$$\dot{U}_a = \dot{U}_A,\ \dot{U}_b = \dot{U}_B,\ \dot{U}_c = \dot{U}_C,$$

а значение фазного напряжения $U_Ф = U_Л / \sqrt{3}$ (рис. 3.10). Таким образом, нейтральный провод обеспечивает симметрию фазных напряжений приемника при несимметричной нагрузке.

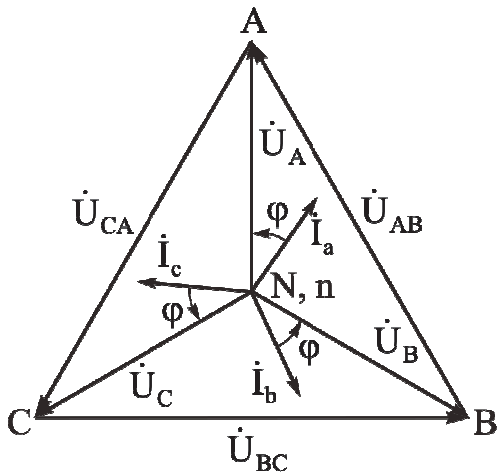


Рис. 3.7. Векторно-топографическая диаграмма соединения «звезда» при симметричной нагрузке

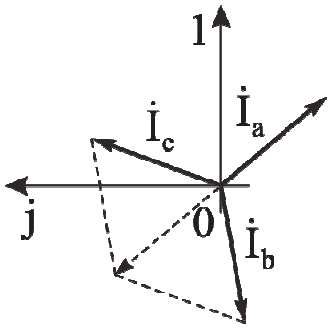


Рис. 3.8. Векторная диаграмма токов соединения «звезда» при симметричной нагрузке

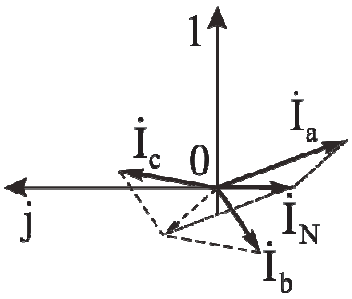


Рис. 3.9. Векторная диаграмма токов соединения «звезда» при несимметричной нагрузке

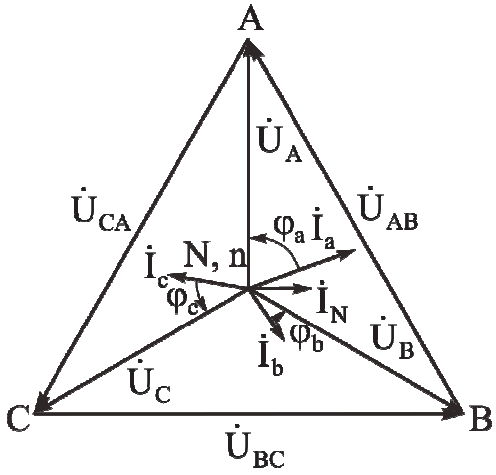


Рис. 3.10. Векторно-топографическая диаграмма соединения «звезда» при несимметричной нагрузке

Учитывая сказанное, в трехфазных электрических цепях однофазные несимметричные нагрузки подключают к симметричной системе ЭДС по четырехпроводной схеме. В этом случае режим работы каждой фазы нагрузки, находящейся под неизменным фазным напряжением генератора, не будет зависеть от режима работы других фаз.

Расчет трехпроводной цепи при соединении фаз генератора и приемника «звездой». Схема трехпроводного соединения «звезда» приведена на рис. 3.11. При таком соединении точки N и n не связаны между собой проводником и между ними может возникать разность потенциалов $\dot{U}_{nN}$, которую называют напряжением смещения нейтрали.

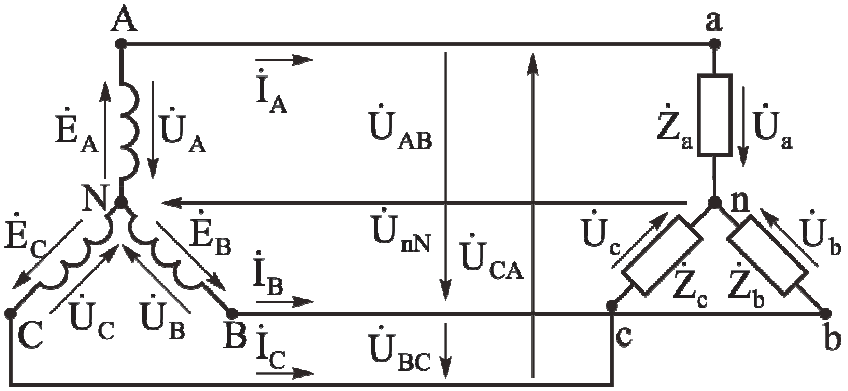


Рис. 3.11. Схема трехпроводного соединения фаз генератора и приемника «звездой»

Для трехпроводной цепи сумма фазных токов нагрузки в точке n равна 0 ($\dot{I}_a + \dot{I}_b + \dot{I}_c = 0$). В случае ***симметричной нагрузки*** приемника $\dot{U}_A = \dot{U}_a$, $\dot{U}_B = \dot{U}_b$, $\dot{U}_C = \dot{U}_c$, сумма фазных напряжений приемника $\dot{U}_a + \dot{U}_b + \dot{U}_c = 0$, напряжение смещения нейтрали $\dot{U}_{nN} = 0$ и расчет цепи проводится так же, как в случае симметричной нагрузки четырехпроводной цепи

В случае ***несимметричной нагрузки*** приемника ($\dot{Z}_a \neq \dot{Z}_b \neq \dot{Z}_c$) напряжение смещения нейтрали $\dot{U}_{nN} \neq 0$. Для его определения используют метод двух узлов, так как схема соединения «звезда» имеет только 2 узла: n и N. Уравнение для определения $\dot{U}_{nN}$ будет иметь вид

$$\dot{U}_{nN} = \frac{\dot{Y}_a \cdot \dot{U}_A + \dot{Y}_b \cdot \dot{U}_B + \dot{Y}_c \cdot \dot{U}_C}{\dot{Y}_a + \dot{Y}_b + \dot{Y}_c}, \qquad (3.6)$$

где $\dot{Y}_a = 1/\dot{Z}_a$, $\dot{Y}_b = 1/\dot{Z}_b$, $\dot{Y}_c = 1/\dot{Z}c$ – комплексные проводимости соответствующих фаз нагрузки приемника.

Очевидно, что при $\dot{U}_{nN} \neq 0$ напряжения на фазах приемника будут отличаться от напряжений фаз генератора и друг от друга. По второму закону Кирхгофа

$$\dot{U}_a = \dot{U}_A - \dot{U}_N,\ \dot{U}_b = \dot{U}_B - \dot{U}_N,\ \dot{U}_c = \dot{U}_C - \dot{U}_N. \qquad (3.7)$$

Зная фазные напряжения приемника, определяют фазные токи

$$\dot{I}_a = \frac{\dot{U}_a}{\dot{Z}_a} = \dot{Y}_a \cdot \dot{U}_a,\ \dot{I}_b = \frac{\dot{U}_b}{\dot{Z}_b} = \dot{Y}_b \cdot \dot{U}_b,\ \dot{I}_c = \frac{\dot{U}_c}{\dot{Z}_c} = \dot{Y}_c \cdot \dot{U}_c. \qquad (3.8)$$

Векторно-топографическая диаграмма при подключении несимметричной нагрузки к трехфазной симметричной системе ЭДС по трехпроводной схеме «звезда» показана на рис. 3.12.

При изменении величины (или характера) фазных сопротивлений напряжение смещений нейтрали $\dot{U}_{nN}$ может значительно изменяться. При этом нейтральная точка приемника n на диаграмме может занимать разные положения, а

фазные напряжения приемника $\dot{U}_a$, $\dot{U}_b$ и $\dot{U}_c$ могут существенно отличаться друг от друга.

Таким образом, при несимметричной нагрузке и отсутствии нейтрального провода фазные напряжения нагрузки не равны фазным напряжениям генератора, так как на нагрузку воздействуют только линейные напряжения генератора. Несимметричная нагрузка в таких условиях вызывает несимметрию ее фазных напряжений $\dot{U}_a$, $\dot{U}_b$, $\dot{U}_c$ и смещение ее нейтральной точки n из центра треугольника напряжений (смещение нейтрали). Из вышеперечисленного следует, что использование нейтрального провода позволяет:

- выравнивать фазные напряжения приемника при несимметричной нагрузке;
- подключать к трехфазной цепи однофазные приемники с номинальным напряжением в $\sqrt{3}$ раз меньше номинального линейного напряжения сети.

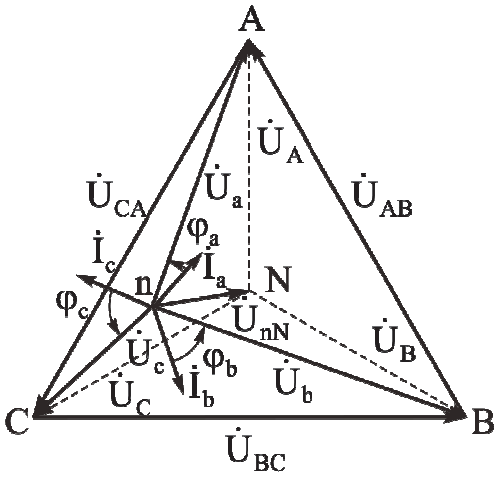


Рис. 3.12. Векторно-топографическая диаграмма трехпроводного соединения «звезда» при несимметричной нагрузке

В цепь нейтрального провода нельзя ставить предохранитель, так как перегорание предохранителя приведет к разрыву нейтрального провода и появлению значительных перенапряжений на фазах нагрузки.

Соединение фаз генератора и приемника «треугольником»

При симметричной системе ЭДС возможно соединение фаз источника в замкнутый «треугольник», так как $\dot{E}_A + \dot{E}_B + \dot{E}_C = 0$. При соединении фаз симметричной системы ЭДС «треугольником» конец X одной фазы соединяется с началом B второй фазы, конец Y второй фазы – с началом C третьей фазы, конец третьей фазы Z – с началом первой фазы A. Если соединение обмоток «треугольником» выполнено неправильно, т.е. в одну точку соединены концы или начала двух фаз, то суммарная ЭДС в контуре «треугольника» отличается от нуля и по обмоткам протекает большой ток. Такой режим является аварийным для источников питания, и его возникновение недопустимо. Начала фаз A, B и C подключаются с помощью трех проводов к фазам приемника, соединенным в «треугольник» (рис. 3.13).

При соединении «треугольником» напряжение между концом и началом фазы равно напряжению между линейными проводами, то есть фазное напряжение равно линейному:

$$\dot{U}_{AB} = \dot{U}_A,\ \dot{U}_{BC} = \dot{U}_B,\ \dot{U}_{CA} = \dot{U}_C,\ \dot{U}_Л = \dot{U}_Ф,$$

а фаза нагрузки подключается параллельно соответствующей фазе генератора. Пренебрегая сопротивлением линейных проводов, линейные напряжения потребителя можем приравнять к линейным напряжениям источника питания:

$$\dot{U}_{ab} = \dot{U}_{AB},\ \dot{U}_{bc} = \dot{U}_{BC},\ \dot{U}_{ca} = \dot{U}_{CA}.$$

По фазам $\dot{Z}_{ab}$, $\dot{Z}_{bc}$, $\dot{Z}_{ca}$ приемника протекают фазные токи $\dot{I}_{ab}$, $\dot{I}_{bc}$, I_{ca}. Условное положительное направление фазных напряжений $\dot{U}_{ab}$, $\dot{U}_{bc}$, $\dot{U}_{ca}$ совпадает с положительным направлением фазных токов. Условное положительное направление линейных токов $\dot{I}_A$, $\dot{I}_B$ и $\dot{I}_C$ принято обозначать от источников питания к приемнику. Токи в фазах приемника определяют по закону Ома:

$$\dot{I}_{ab} = \frac{\dot{U}_{AB}}{\dot{Z}_{ab}},\ \dot{I}_{bc} = \frac{\dot{U}_{BC}}{\dot{Z}_{bc}},\ I_{ca} = \frac{\dot{U}_{CA}}{\dot{Z}_{ca}}. \qquad (3.9)$$

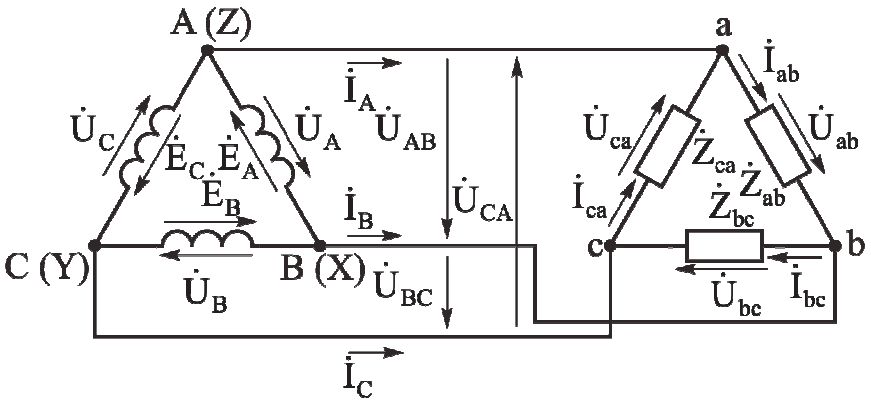


Рис. 3.13. Схема соединения фаз генератора и приемника «треугольником»

В отличие от соединения «звездой» при соединении «треугольником» фазные токи не равны линейным. Линейные токи определяют, составив уравнения по первому закону Кирхгофа для узлов a, b и c:

$$\dot{I}_A = \dot{I}_{ab} - \dot{I}_{ca},\ \dot{I}_B = \dot{I}_{bc} - \dot{I}_{ab},\ \dot{I}_C = \dot{I}_{ca} - \dot{I}_{bc}. \qquad (3.10)$$

Сложив левые и правые части уравнений (3.10), получим

$$\dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C = 0. \qquad (3.11)$$

Таким образом, при соединении «треугольником» сумма комплексных значений линейных токов равна нулю как при симметричной, так и при несимметричной нагрузке.

При ***симметричной нагрузке*** полные комплексные сопротивления фаз приемника равны между собой:

$$\dot{Z}_a = \dot{Z}_b = \dot{Z}_c = \dot{Z}_\Phi = Z_\Phi \cdot e^{j\varphi},$$

где $Z_\Phi = \sqrt{X_\Phi^2 + R_\Phi^2}$, $\varphi = \operatorname{arctg}(X_\Phi / R_\phi)$. Так как система линейных (фазных) напряжений $\dot{U}_{AB}$, $\dot{U}_{BC}$ и $\dot{U}_{CA}$ симметричная, то и фазные токи образуют симметричную систему:

$$\dot{I}_{ab} = \frac{\dot{U}_{AB}}{\dot{Z}_\Phi},\ \dot{I}_{bc} = \frac{\dot{U}_{BC}}{\dot{Z}_\Phi},\ I_{ca} = \frac{\dot{U}_{CA}}{\dot{Z}_\Phi}.$$

Значения фазных токов равны между собой ($I_{ab} = I_{bc} = I_{ca} = I_\Phi$), а сдвиги по фазе относительно друг друга составляют 120°. Если условно принять на-

чальную фазу тока $\dot{I}_{ab}$ равной нулю, то $\dot{I}_{ab} = I_Ф$, $\dot{I}_{bc} = I_Ф \cdot e^{-j120°}$, $\dot{I}_{ca} = I_Ф \cdot e^{j120°}$. Линейные токи определяются по уравнениям (3.10) и также образуют симметричную систему:

$$\dot{I}_A = \dot{I}_{ab} - \dot{I}_{ca} = I_Ф - I_Ф \cdot \cos(-120°) - I_Ф \cdot \sin(-120°) = \frac{3}{2} I_Ф + j\frac{\sqrt{3}}{2} I_Ф .$$

$$I_A = \left|\dot{I}_A\right| = \sqrt{\frac{9}{4} I_Ф^2 + \frac{3}{4} I_Ф^2} = \sqrt{3} I_Ф = \sqrt{3} I_{ab} = \sqrt{3} I_{bc},\ \varphi_{ФЛ} = \operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}} = 30° .$$

Аналогичные вычисления можно провести для остальных линейных токов. Таким образом, при соединении «треугольником» и симметричной нагрузке приемника линейный ток связан с фазным соотношением

$$I_Л = \sqrt{3} I_Ф . \qquad (3.12)$$

На векторной диаграмме (рис. 3.14) фазные токи отстают от фазных напряжений на угол φ>0 (в данном примере фазы приемника носят индуктивный характер). Также принято, что напряжение $\dot{U}_{AB}$ имеет нулевую фазу.

Таким образом, при симметричной нагрузке фаз приемника расчет трехфазной цепи, соединенной «треугольником», можно свести к расчету одной фазы. Фазное напряжение $\dot{U}_Ф = \dot{U}_Л$, фазный ток $I_Ф = \frac{U_Ф}{Z_Ф}$, линейный ток $I_Л = \sqrt{3} I_Ф$, угол сдвига тока фазы от напряжения фазы $\varphi = \operatorname{arctg}(X_Ф / R_ф)$.

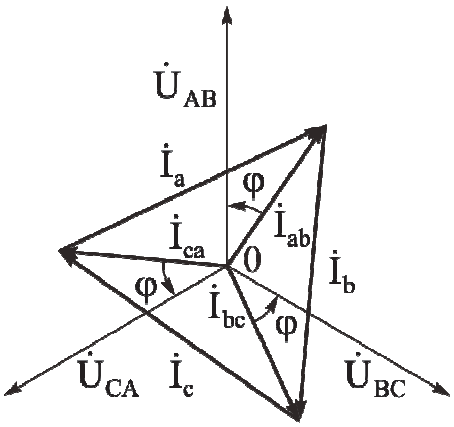


Рис. 3.14. Векторная диаграмма соединения «треугольником» при симметричной нагрузке приемника

В общем случае при ***несимметричной нагрузке*** фаз приемника $\dot{Z}_{ab} \neq \dot{Z}_{bc} \neq \dot{Z}_{ca}$.Обычно такой случай возникает при питании от трехфазной сети однофазных приемников. В схеме, приведенной на рис. 3.15, фазные токи, углы сдвига фаз и фазные мощности будут различными. В фазе ab ток совпадает с напряжением, в фазе bc ток отстает от напряжения, а в фазе ca ток опережает напряжение (рис. 3.16). Таким образом, при несимметричной нагрузке нарушается симметрия фазных токов, их значения определяются из уравнений (3.9) и линейные токи можно определить только расчетом по уравнениям (3.10) или графическим путем из векторной диаграммы.

Важной особенностью соединения фаз приемника «треугольником» является то, что при изменении сопротивления одной из фаз режим работы других фаз остается неизменным, так как линейные напряжения генератора являются постоянными. Будут изменяться только ток данной фазы и линейные токи в проводах линии, соединенных с этой фазой. Поэтому схема соединения «треугольником» широко используется для включения несимметричной нагрузки.

Возможно подключение нагрузки фаз приемника, соединенной «треугольником», к симметричной системе ЭДС, соединенной «звездой». В этом случае

расчет проводится аналогично с учетом того, что линейное напряжение больше фазного напряжения генератора в $\sqrt{3}$ раз ($U_{ab} = \sqrt{3}U_A$).

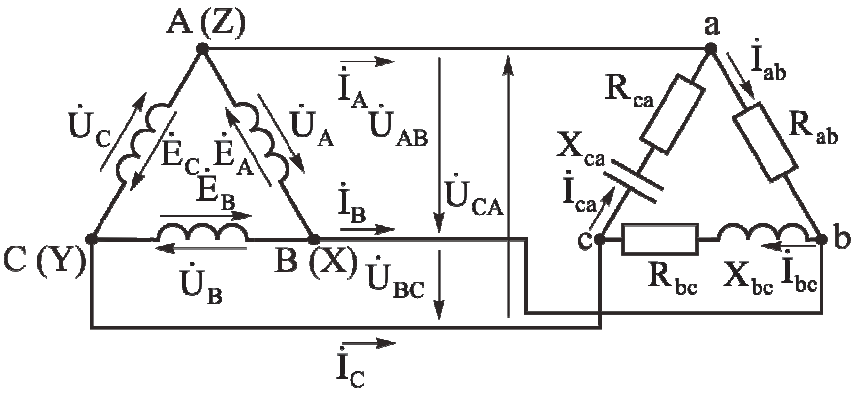


Рис. 3.15. Пример соединения фаз генератора и приемника «треугольником» при несимметричной нагрузке

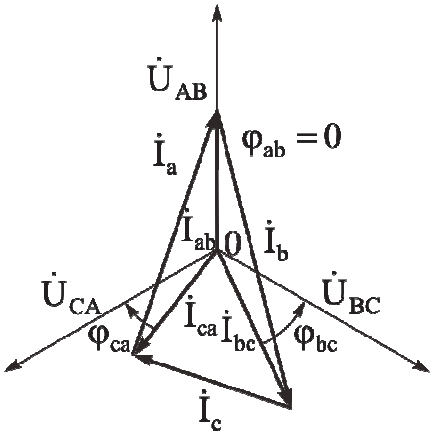


Рис. 3.16. Векторная диаграмма соединения «треугольником» при несимметричной нагрузке приемника

Мощность в трехфазной цепи (основные соотношения)

Соединение потребителей «звездой»	Соединение потребителей «треугольником»
Полная мощность трехфазного приемника $S = \sqrt{P^2 + Q^2}$.	
Симметричная система напряжений $U_a = U_b = U_c = U_Ф$ Симметричная нагрузка приемников $I_a = I_b = I_c = I_Ф$, $\varphi_a = \varphi_b = \varphi_c = \varphi$	Симметричная система напряжений $U_{ab} = U_{bc} = U_{ca} = U_Ф$ Симметричная нагрузка приемников $I_{ab} = I_{bc} = I_{ca} = I_Ф$, $\varphi_{ab} = \varphi_{bc} = \varphi_{ca} = \varphi$
Активная мощность $P = 3 \cdot U_Ф \cdot I_Ф \cdot \cos\varphi$ Реактивная мощность $Q = 3 \cdot U_Ф \cdot I_Ф \cdot \sin\varphi$ Полная мощность $S = 3 \cdot U_Ф \cdot I_Ф$	
при соединении «звездой» $U_Ф = U_Л / \sqrt{3}$ и $I_Ф = I_Л$	при соединении «треугольником» $U_Ф = U_Л$ и $I_Ф = I_Л / \sqrt{3}$
Активная мощность $P = \sqrt{3} \cdot U_Л \cdot I_Л \cdot \cos\varphi$ Реактивная мощность $Q = \sqrt{3} \cdot U_Л \cdot I_Л \cdot \sin\varphi$ Полная мощность $S = \sqrt{3} \cdot U_Л \cdot I_Л$ φ – угол сдвига между напряжением и током фазы приемника	

Таким образом, в случае симметричной системы напряжений и симметричной нагрузки приемников для расчета мощности при соединении потребителей «треугольником» справедливы те же соотношении, что и при соединении потребителей «звездой».

ТЕМА 4
ПЕРЕХОДНЫЕ ПРОЦЕССЫ В ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЯХ

Процессы, протекающие в электрических цепях при переходе из одного установившегося режима в другой, называются переходными. Переход от одного режима работы к другому может быть вызван изменением параметров цепи (подключением или отключением элементов электрической цепи) и называется коммутацией.

Известно, что реактивные элементы L и C способны запасать и отдавать энергию. При протекании через L тока i в магнитном поле индуктивности запасается энергия $W_L = \frac{L \cdot i^2}{2}$, а энергия электрического поля, заряженного до напряжения и конденсатора, составляет $W_C = \frac{C \cdot u^2}{2}$. Из принципа непрерывности изменения энергии вытекает непрерывность изменения во времени потокосцепления индуктивности и электрического заряда емкости, на которой основаны законы коммутации.

Первый закон коммутации: ток через индуктивность до коммутации равен току после коммутации $i(0_-) = i(0_+)$ и затем плавно изменяется.

Второй закон коммутации: напряжение на емкости до коммутации равно напряжению после коммутации $u(0_-) = u(0_+)$ и затем плавно изменяется.

Напряжение на индуктивности U_L и ток через конденсатор i_C могут изменяться скачкообразно, так как с ними непосредственно не связаны энергия магнитного поля индуктивности и энергия электрического поля конденсатора.

Задача расчета переходных процессов заключается в определении мгновенных значений токов в ветвях и напряжений на элементах электрической цепи после коммутации при $t > 0$.

При составлении уравнений по законам Ома и Кирхгофа используются соотношения, связывающие мгновенные значения напряжений на пассивных элементах R, L, C электрических цепей с мгновенными значениями токов, протекающих через них (описывающих вольт-амперные характеристики элементов):

а) сопротивление

$$u_R = R \cdot i_R \text{ – закон Ома;}$$

б) индуктивность

$$u_L = L\frac{di}{dt} \text{ – закон Фарадея;}$$

в) емкость

$$u_C = \frac{1}{C}\int i\,dt .$$

РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКАЯ РАБОТА № 4
РАСЧЕТ ПЕРЕХОДНОГО ПРОЦЕССА ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Переходный процесс возникает при коммутации (подключении или отключении) какой-либо части электрической цепи. Он обусловлен наличием в электрической цепи реактивных элементов (индуктивностей и емкостей), которые способны накапливать энергию от источников питания, а затем передавать ее в электрическую цепь.

Необходимо:

- рассчитать переходный процесс, протекающий в электрической цепи с одним реактивным элементом;
- рассчитать напряжение на реактивном элементе и ток через него после коммутации;
- построить зависимости от времени напряжения и тока реактивного элемента после коммутации.

Исходные данные:

- номер группы $N_{гр} = \frac{624}{abc}$, номер студента по журналу $N_{ст} = \frac{12}{km}$;
- номер схемы для расчета равен номеру студента по журналу $N_{ст}$ (рис. 4.1);
- напряжение источника питания E = 10(c+k+1), [В];
- сопротивление R_1 = m+k, [Ом];
- сопротивление R_2 = m+b, [Ом];
- сопротивление R_3 = k+a+1, [Ом];
- индуктивность L = m+1, [мГн];
- емкость C = 10-m, [мкФ].

Порядок расчета переходного процесса в электрической цепи I порядка

1. Определяется независимая переменная. В соответствии с законами коммутации напряжение на емкости и ток через индуктивность не могут измениться скачком. Поэтому, если электрическая цепь содержит индуктивность, в качестве независимой переменной принимается ток через индуктивность, а если емкость, то – напряжение на ней.

2. Составляется дифференциальное уравнение для переходного процесса в электрической цепи и записывается его общее решение

$$u_C(t) = u_{св}(t) + u_{пр} \quad \text{или} \quad i_L(t) = i_{св}(t) + i_{пр},$$

где $u_{св}(t)$ и $i_{св}(t)$ – свободные составляющие напряжения и тока, $u_{пр}$ и $i_{пр}$ – принужденные составляющие напряжения и тока (значения в установившемся режиме).

3. Определяются начальные условия, по которым рассчитывается постоянная интегрирования в решении дифференциального уравнения. Начальными условиями являются напряжение на емкости и ток через индуктивность до

коммутации. Напряжение на емкости и ток через индуктивность не могут изменяться скачкообразно, поэтому напряжение на емкости и ток через индуктивность после коммутации останутся теми же, что и до коммутации:

$$u_C(-0) = u_C(+0) = u_C(0) \quad \text{и} \quad i_L(-0) = i_L(+0) = i_L(0).$$

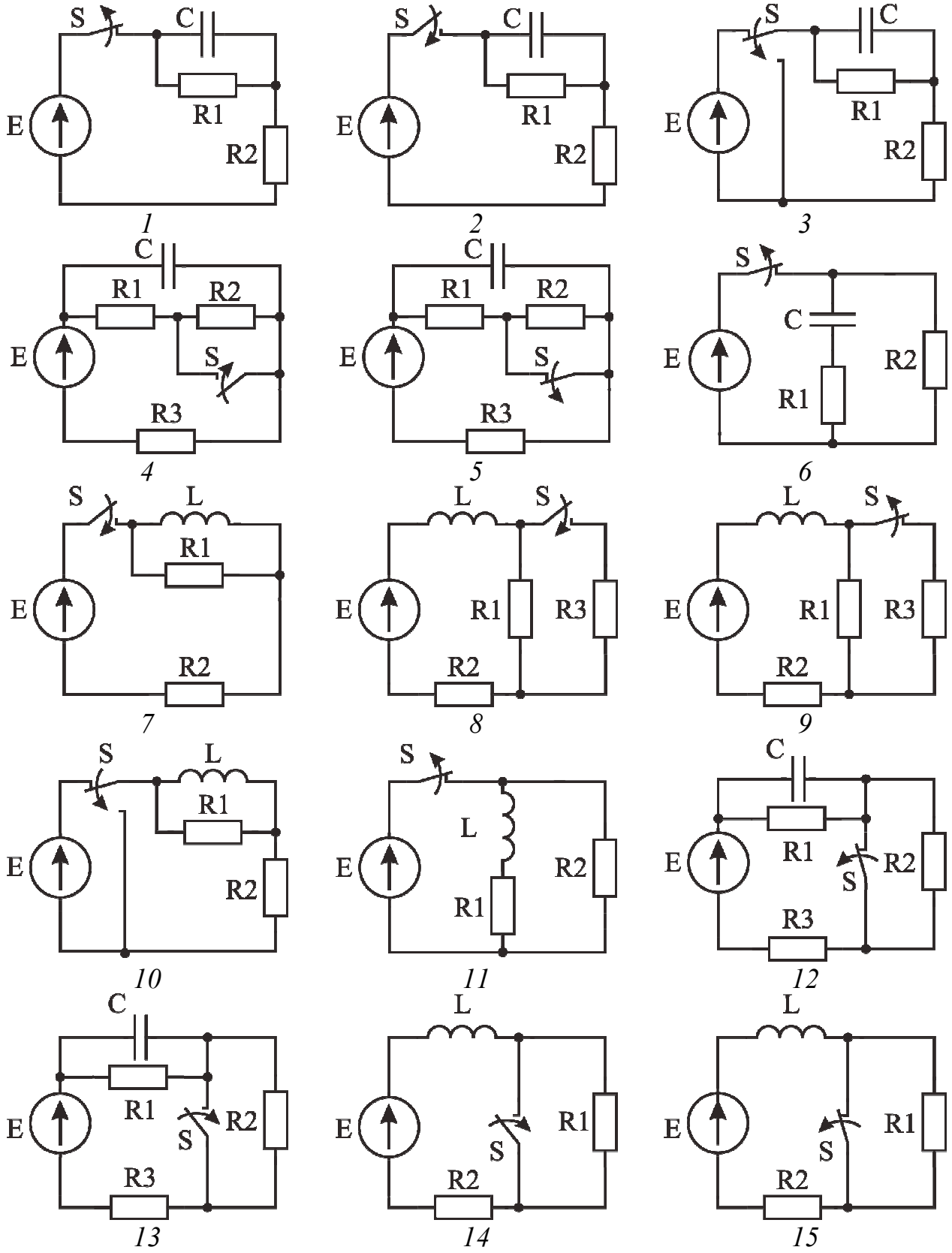


Рис. 4.1. Схемы для расчета в соответствии с номером варианта (начало)

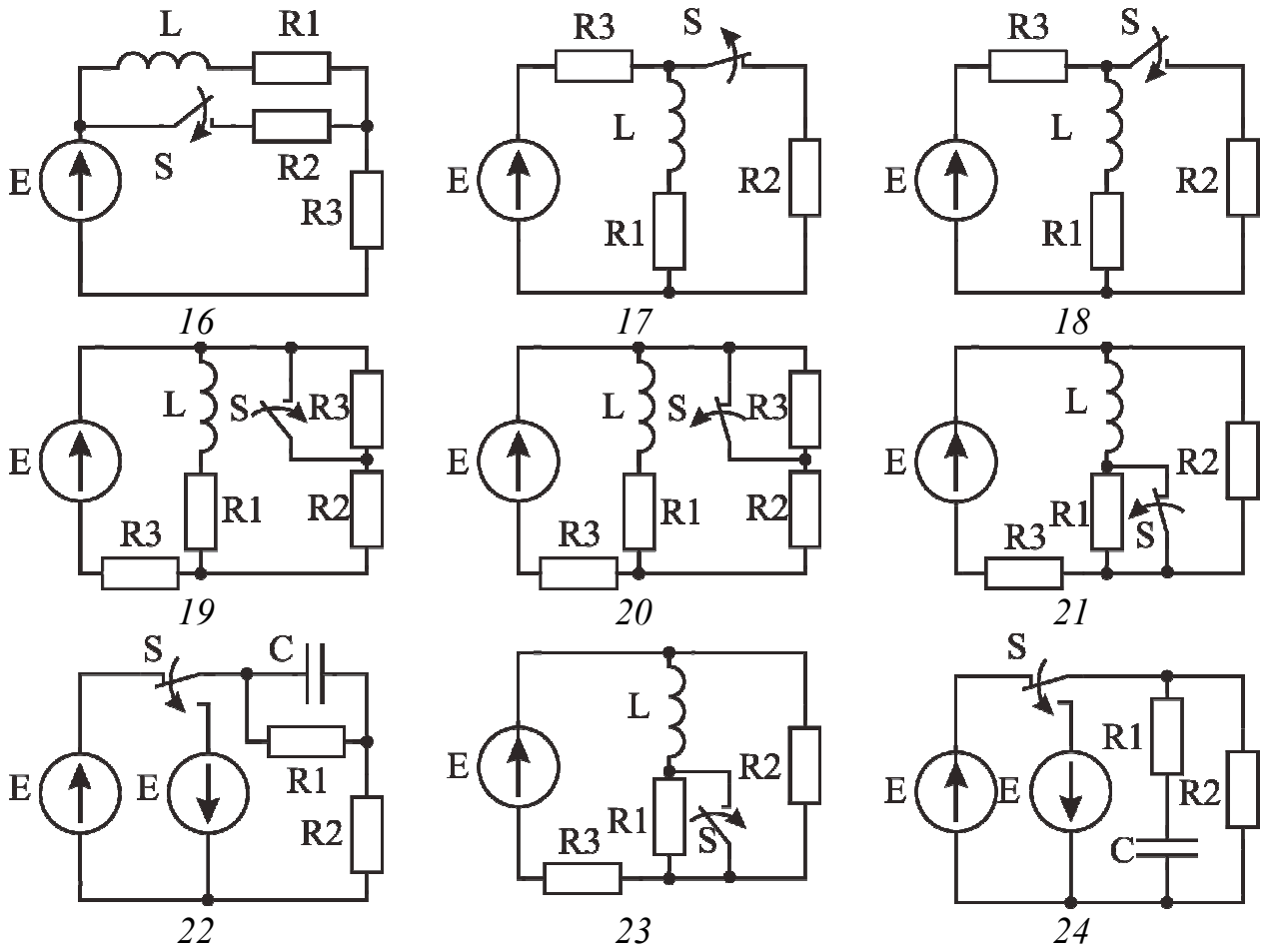


Рис. 4.1. Схемы для расчета в соответствии с номером варианта (окончание)

Моменту коммутации ключа соответствует $t = 0$. Величины $u_C(0)$ и $i_L(0)$ находятся из эквивалентной схемы электрической цепи для установившегося режима до коммутации, когда индуктивность представляет собой короткое замыкание, а емкость – разрыв цепи. Используя правила последовательного и параллельного соединений сопротивлений и законы Ома и Кирхгофа, рассчитывают в эквивалентной схеме ток $i_L(0)$ или напряжение $u_C(0)$.

4. Записывается решение дифференциального уравнения для свободной составляющей в виде

$$u_{св}(t) = A \cdot e^{p_1 t} \quad \text{или} \quad i_{св}(t) = A \cdot e^{p_1 t},$$

где A – постоянная интегрирования в решении дифференциального уравнения, p_1 – корень характеристического уравнения. Для составления характеристического уравнения рассчитывается комплексное входное сопротивление электрической цепи, в которой все источники питания заменяются их внутренним сопротивлением, а все разомкнутые ветви отбрасываются. Далее одна из ветвей полученной электрической цепи разрывается (рекомендуется делать разрыв на месте источника ЭДС) и относительно точек разрыва вычисляется комплексное входное сопротивление. При этом учитывается, что комплексное сопротивление индуктивности $\dot{Z}_L = j\omega L$, а комплексное сопротивление емкости $\dot{Z}_C = 1/j\omega C$. Выражение для входного сопротивления цепи приравнивается к

нулю, а переменная jω заменяется на оператор p. Полученное алгебраическое уравнение называется характеристическим. Находится корень характеристического уравнения p_1 и подставляется в решение дифференциального уравнения для свободной составляющей. Корень характеристического уравнения p_1 определяет постоянную времени электрической цепи

$$\tau = 1/|p_1|, [c].$$

5. Определяется принужденная составляющая напряжения или тока в установившемся режиме при $t = \infty$. Для этого следует составить эквивалентную схему электрической цепи для периода после коммутации, заменив в исходной схеме индуктивность коротким замыканием, а емкость – разрывом цепи. Используя правила последовательного и параллельного соединений сопротивлений и законы Ома Кирхгофа, рассчитывают величину $u_{пр}$ или $i_{пр}$.

6. Определяется постоянная интегрирования A. Для этого записывается общее решение дифференциального уравнения в виде

$$u_C(t) = A \cdot e^{p_1 t} + u_{пр} \quad \text{или} \quad i_L(t) = A \cdot e^{p_1 t} + i_{пр}.$$

Подставив в полученное уравнение момент времени $t = 0$, получим

$$u_C(0)=A+u_{пр} \quad \text{или} \quad i_L(0)=A+i_{пр}.$$

Далее, используя начальные условия $u_C(0)$ или $i_L(0)$, найденные в п. 3, определяют постоянную интегрирования A. Записывается общее решение дифференциального уравнения.

7. По найденным $u_C(t)$ или $i_L(t)$ рассчитываются ток через емкость или напряжение на индуктивности по формулам:

$$i_C = C\frac{du_C}{dt} \quad \text{или} \quad u_L = L\frac{di_L}{dt}.$$

8. Строятся временные диаграммы токов и напряжений реактивного элемента на интервале времени от $t = 0$ до $t = 5\tau$, расчетные точки берутся через интервал $\Delta t = 0{,}5\tau$. Пример временной диаграммы переходного процесса показан на рис. 4.2.

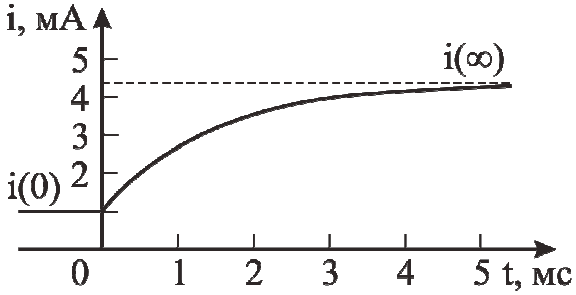
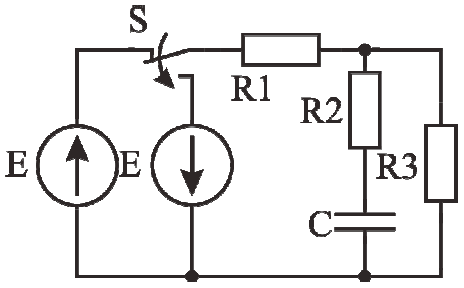


Рис. 4.2. Пример временной диаграммы переходного процесса в цепи I порядка

ПРИМЕР РАСЧЕТА ПЕРЕХОДНОГО ПРОЦЕССА ПЕРВОГО ПОРЯДКА



E = 10 В;
R_1 = 10 Ом;
R_2 = 20 Ом;
R_3 = 30 Ом;
C = 10 мкФ.

Необходимо:

- рассчитать переходный процесс, протекающий в электрической цепи с одним реактивным элементом;

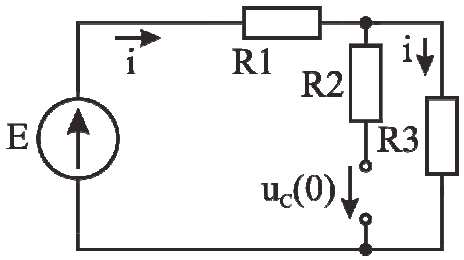
- рассчитать напряжение на реактивном элементе и ток через него после коммутации;
- построить зависимости от времени напряжения и тока реактивного элемента после коммутации.

1. Определяем независимую переменную. Электрическая цепь содержит емкость, значит, независимая переменная – напряжение на емкости $u_C(t)$.

2. Записываем общее решение дифференциального уравнения:

$$u_C(t) = u_{св}(t) + u_{пр}.$$

3. Определяем начальные условия $u_C(-0) = u_C(+0) = u_C(0)$. Для этого составляем эквивалентную схему электрической цепи для установившегося режима до коммутации и рассчитываем $u_C(0)$:



$$i = \frac{E}{R_1 + R_3} = \frac{10}{10 + 30} = 0.25 \text{ A},$$

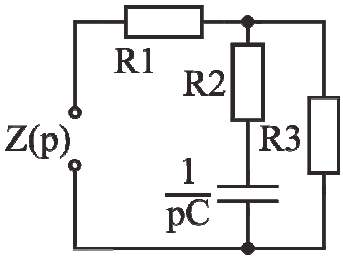
$$u_C(0) = u_{R3} = i \cdot R_3 = 0.25 \cdot 30 = 7.5 \text{ В}.$$

4. Записываем решение дифференциального уравнения для свободной составляющей

$$u_{св}(t) = A \cdot e^{p_1 t},$$

где A – постоянная интегрирования в решении дифференциального уравнения (определяется из начальных условий), p_1 – корень характеристического уравнения.

Для составления характеристического уравнения используем схему после коммутации, отбрасываем разомкнутые ветви, заменяем источники питания их внутренним сопротивлением, делаем разрыв в любой ветви (согласно рекомендациям – в месте источника ЭДС) и вычисляем входное сопротивление Z(p):



$$Z(p) = R_1 + \frac{\left(R_2 + \frac{1}{pC}\right)R_3}{R_2 + \frac{1}{pC} + R_3}.$$

Приравниваем $Z(p) = 0$:

$$10 + \frac{\left(20 + \frac{10^5}{p}\right)30}{20 + \frac{10^5}{p} + 30} = 0; \qquad 10 + \frac{600p + 3 \cdot 10^6}{50p + 10^5} = 0;$$

$$10\left(50p + 10^5\right) + 600p + 3 \cdot 10^6 = 0;$$

$$500p + 10^6 + 600p + 3 \cdot 10^6 = 0;$$

$$1.1\cdot10^{3}p+4\cdot10^{6}=0;$$

$$p_1=\frac{-4\cdot10^{6}}{1.1\cdot10^{3}};\qquad p_1=-3.636\cdot10^{3}.$$

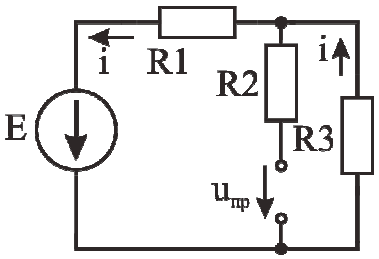
Записываем решение дифференциального уравнения для свободной составляющей:

$$u_{св}(t)=A\cdot e^{-3.636\cdot10^{3}t}.$$

Корень характеристического уравнения p_1 определяет постоянную времени электрической цепи:

$$\tau=\frac{1}{|p_1|}=\frac{1}{3.636\cdot10^{3}}=0.2750\cdot10^{-3}=0.275\ \text{мс}.$$

5. Определяем принужденную составляющую $u_{пр}$. Для этого составляем эквивалентную схему электрической цепи после коммутации в установившемся режиме и определяем $u_{пр}$:



$$i=\frac{E}{R_1+R_3}=\frac{10}{10+30}=0.25\ \text{A},$$

$$u_{пр}=-u_{R3}=-i\cdot R_3=-0.25\cdot30=-7.5\ \text{В}.$$

6. Определяем постоянную интегрирования A. Записываем общее решение дифференциального уравнения $u_C(t)=A\cdot e^{p_1t}+u_{пр}$:

$$u_C(t)=A\cdot e^{-3.636\cdot10^{3}t}-7.5.$$

Подставим в полученное уравнение момент времени t = 0 и получим

$$u_C(0)=A-7.5,$$

$$u_C(0)=7.5\ \text{(из начальных условий (п.3))},$$

$$7.5=A-7.5,$$

$$A=15,$$

Записываем общее решение дифференциального уравнения:

$$u_C(t)=15\cdot e^{-3.636\cdot10^{3}t}-7.5\ \text{В}.$$

7. Рассчитываем ток через емкость $i_C(t)$:

$$i_C=C\frac{du_C}{dt}.$$

$$i_C(t)=10^{-5}\left(-3.636\cdot10^{3}\right)\cdot15\cdot e^{-3.636\cdot10^{3}t},$$

$$i_C(t)=-54.54\cdot10^{-2}\cdot e^{-3.636\cdot10^{3}t},$$

$$i_C(t)=-0.5454\cdot e^{-3.636\cdot10^{3}t}\ \text{A}.$$

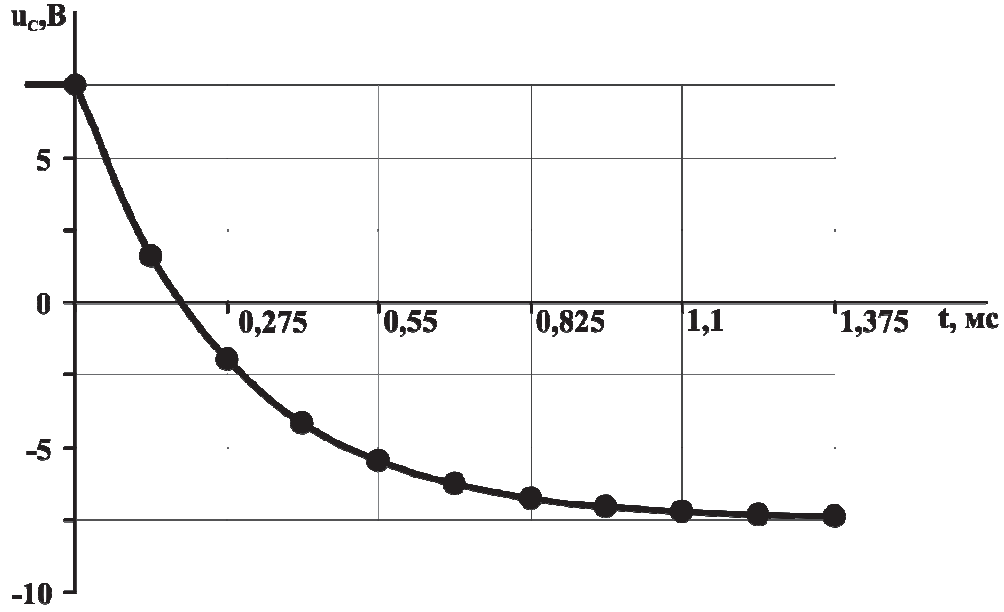
8. Строим временные диаграммы тока и напряжения на емкости:

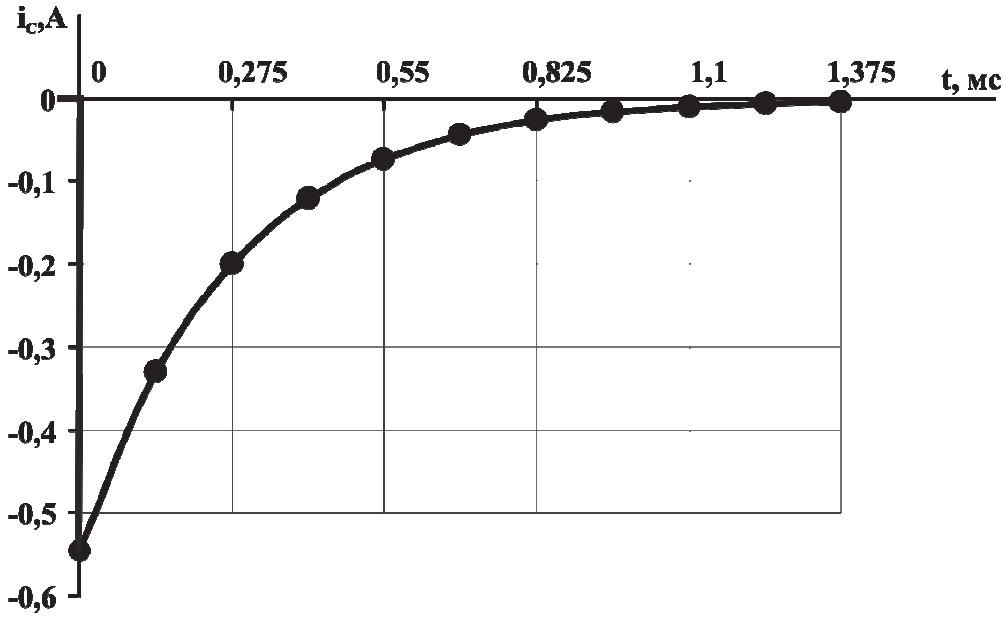
$$u_C(t)=15\cdot e^{-3.636\cdot10^{3}t}-7.5,$$

$$i_C(t)=-0.5454\cdot e^{-3.636\cdot10^{3}t}.$$

Для этого составляем таблицу значений тока и напряжения на емкости на интервале времени от 0 до 5τ с шагом 0.5τ:

τ	t, мс	u_C, В	ic, А
0	0,0000	7,500	-0,5454
0.5 τ	0,1375	1,598	-0,3308
1.0 τ	0,2750	-1,982	-0,2006
1.5 τ	0,4125	-4,153	-0,1217
2.0 τ	0,5501	-5,470	-0,0738
2.5 τ	0,6876	-6,269	-0,0448
3.0 τ	0,8251	-6,753	-0,0272
3.5 τ	0,9626	-7,047	-0,0165
4.0 τ	1,1001	-7,225	-0,0100
4.5 τ	1,2376	-7,333	-0,0061
5.0 τ	1,3751	-7,399	-0,0037





РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКАЯ РАБОТА № 5
РАСЧЕТ ПЕРЕХОДНОГО ПРОЦЕССА ВТОРОГО ПОРЯДКА

Электрическая цепь II порядка содержит два противоположных реактивных элемента – L и C. При последовательном соединении элементов L и C электрическую цепь называют последовательным колебательным контуром, а при параллельном соединении элементов L и C – параллельным колебательным контуром.

Характер переходного процесса в электрической цепи II порядка зависит от добротности контура Q. При добротности $Q < 0{,}5$ переходный процесс в электрической цепи II порядка носит апериодический характер, при $Q > 0{,}5$ – колебательный.

Необходимо

- рассчитать переходный процесс, протекающий в электрической цепи с двумя реактивными элементами;
- рассчитать напряжение на емкости и ток через индуктивность после коммутации;
- построить временные диаграммы тока через индуктивность и напряжения на емкости после коммутации.

Исходные данные:

- номер группы $N_{гр} = \frac{624}{abc}$, номер студента по журналу $N_{ст} = \frac{12}{km}$;
- номер схемы для расчета равен номеру студента по журналу $N_{ст}$ (рис. 5.1);
- напряжение источника питания E = 10(c+k+1), [В];
- индуктивность L = m+1, [мГн];
- емкость C = 10+k-m, [мкФ];
- для схем № 1…10 задается добротность Q = 3+k, с учетом добротности и характеристического сопротивления ($\rho = \sqrt{L/C}$) рассчитывается сопротивление $R = Q \cdot \rho$;
- для схем № 11…24 сопротивление R определяется по формуле $R = \rho / (3 + k)$.

Порядок расчета переходного процесса в электрической цепи II порядка

1. Определяется независимая переменная. В соответствии с законами коммутации напряжение на емкости и ток через индуктивность не могут измениться скачком. В качестве независимой переменной в последовательном контуре выбирается напряжение на емкости $u_C(t)$, а в параллельном контуре – ток через индуктивность $i_L(t)$.

2. Составляется дифференциальное уравнение для переходного процесса в электрической цепи и записывается его общее решение

$$u_C(t) = u_{св}(t) + u_{пр} \quad \text{или} \quad i_L(t) = i_{св}(t) + i_{пр},$$

где $u_{св}(t)$ и $i_{св}(t)$ – свободные составляющие напряжения или тока, $u_{пр}$ и $i_{пр}$ – принужденные составляющие напряжения или тока (значения в установившемся режиме).

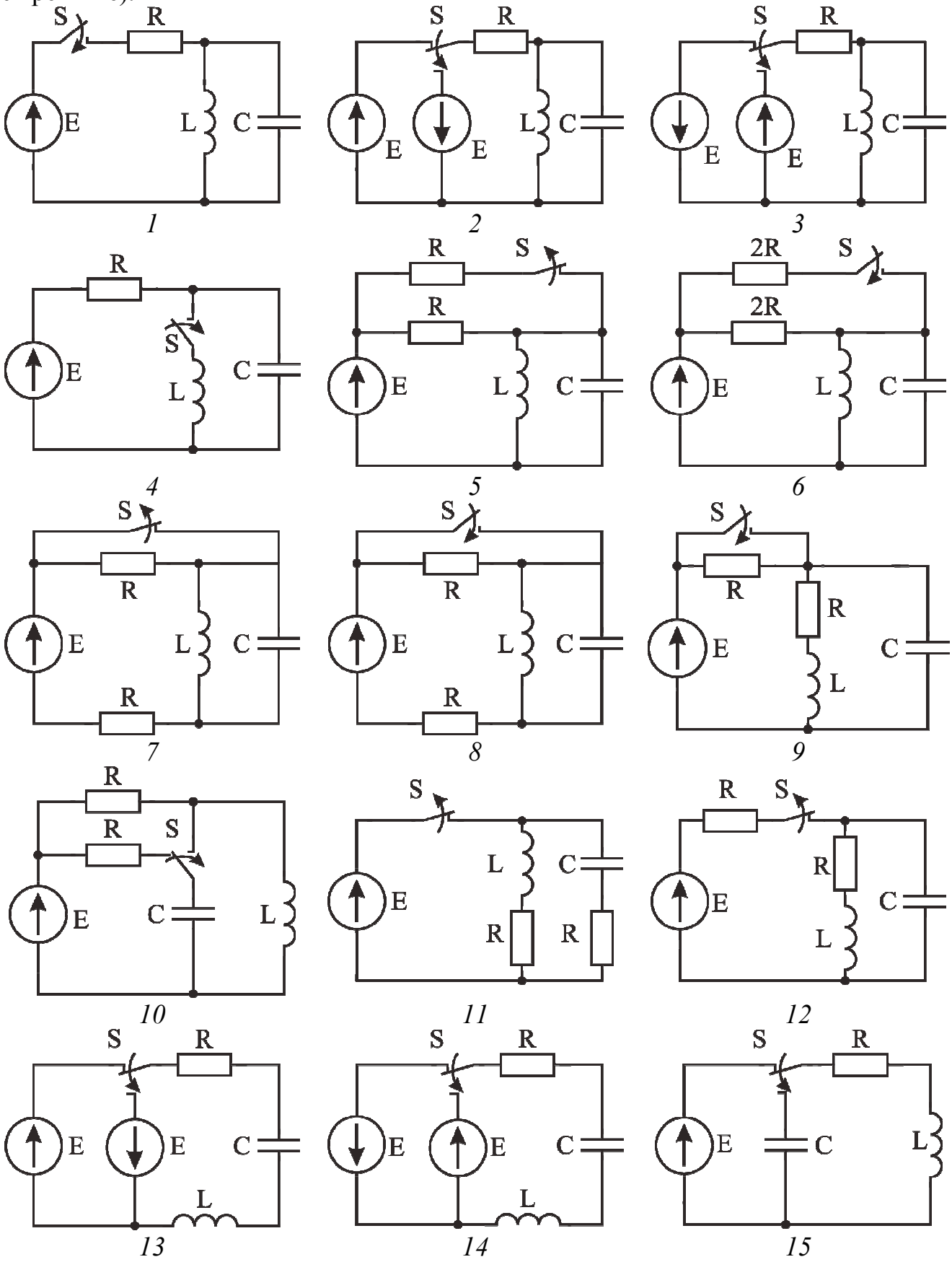


Рис. 5.1. Схемы для расчета в соответствии с номером варианта (начало)

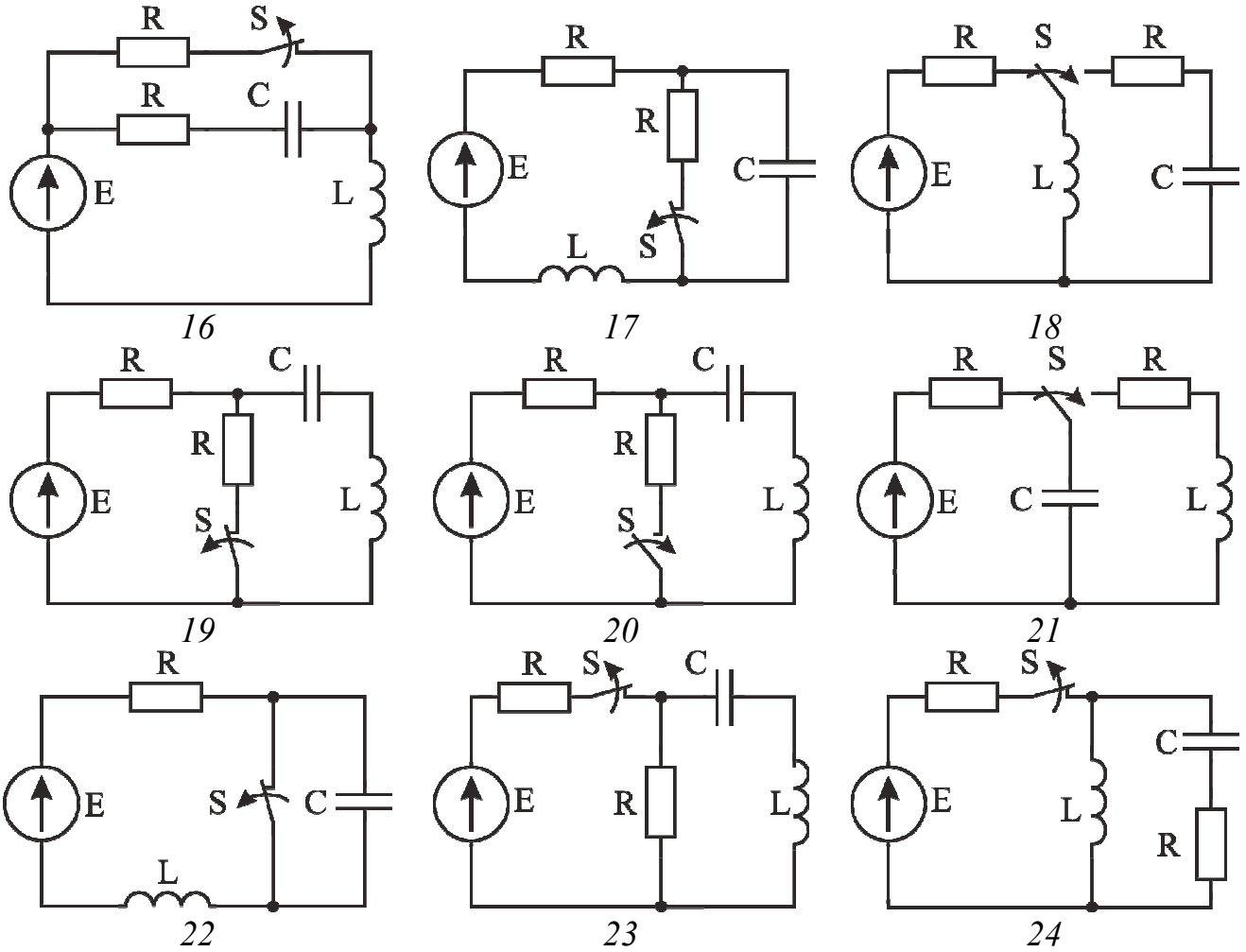


Рис. 5.1. Схемы для расчета в соответствии с номером варианта (окончание)

3. Определяются начальные условия, по которым рассчитываются постоянные интегрирования в решении дифференциальных уравнений. Начальными условиями являются напряжение на емкости и ток через индуктивность до коммутации. Моменту коммутации ключа соответствует $t = 0$. Величины $u_C(0)$ и $i_L(0)$ находятся из эквивалентной схемы электрической цепи для установившегося режима до коммутации, когда индуктивность представляет собой короткое замыкание, а емкость – разрыв цепи. Используя правила последовательного и параллельного соединений сопротивлений и законы Ома и Кирхгофа, рассчитывают в эквивалентной схеме ток $i_L(0)$ и напряжение $u_C(0)$.

4. Записывается решение дифференциального уравнения для свободной составляющей в виде

$$u_{св}(t) = A \cdot e^{\alpha t} \cdot \sin(\omega_c t + \Theta) \text{ или } i_{св}(t) = A \cdot e^{\alpha t} \cdot \sin(\omega_c t + \Theta),$$

где A и Θ – постоянные интегрирования в решении дифференциального уравнения, α и ω_c – действительная и мнимая части корней характеристического уравнения. Для составления характеристического уравнения рассчитывается комплексное входное сопротивление электрической цепи, в которой все источники питания заменяются их внутренним сопротивлением, а все разомкнутые ветви отбрасываются. Далее одна из ветвей полученной электрической цепи

разрывается (рекомендуется делать разрыв на месте источника ЭДС), и относительно точек разрыва вычисляется комплексное входное сопротивление. При этом учитывается, что комплексное сопротивление индуктивности $\dot{Z}_L = j\omega L$, а комплексное сопротивление емкости $\dot{Z}_C = 1/j\omega C$. Выражение для входного сопротивления цепи приравнивается к нулю, а переменная $j\omega$ заменяется на оператор p. Полученное алгебраическое уравнение называется характеристическим. Находятся корни характеристического уравнения

$$p_{1,2} = \alpha \pm j\omega_c,$$

и подставляются в решение дифференциального уравнения для свободной составляющей. Действительная часть корней характеристического уравнения α определяет постоянную времени затухания колебаний контура

$$\tau = 1/|\alpha|,$$

а мнимая часть корней характеристического уравнения – период этих колебаний $T = 2\pi / \omega_c$.

5. Определяются принужденные составляющие напряжения на емкости и тока через индуктивность в установившемся режиме при $t = \infty$. Для этого следует составить эквивалентную схему электрической цепи для периода после коммутации, заменив в исходной схеме индуктивность коротким замыканием, а емкость – разрывом цепи. Используя правила последовательного и параллельного соединений сопротивлений и законы Ома Кирхгофа, рассчитывают величину $u_{пр}$ и $i_{пр}$.

6. Определяются постоянные интегрирования A и Θ. Для этого, используя выражение для независимой переменной $u_C(t)$ или $i_L(t)$, находят выражения для тока через конденсатор или напряжение на индуктивности по формулам

$$i_C(t) = C\frac{du_C}{dt} \quad \text{или} \quad u_L(t) = L\frac{di_L}{dt}.$$

Подставляя в выражение для токов и напряжений значение $t = 0$ и используя начальные условия $u_C(0)$ и $i_L(0)$, найденные в п.3, составляют систему из двух алгебраических уравнений, из решения которой определяют постоянные интегрирования A и Θ. Записывается общее решение дифференциального уравнения.

7. Строятся временные диаграммы тока через индуктивность и напряжения на емкости на интервале времени от $t = 0$ до $t = 3\tau$ с использованием следующих правил:

- построить затухающую экспоненту $x(t) = Ae^{\alpha t}$ и симметричную ей относительно оси времени экспоненту $x(t) = -Ae^{\alpha t}$. Эти кривые являются огибающими колебательного процесса изменения во времени напряжения или тока;

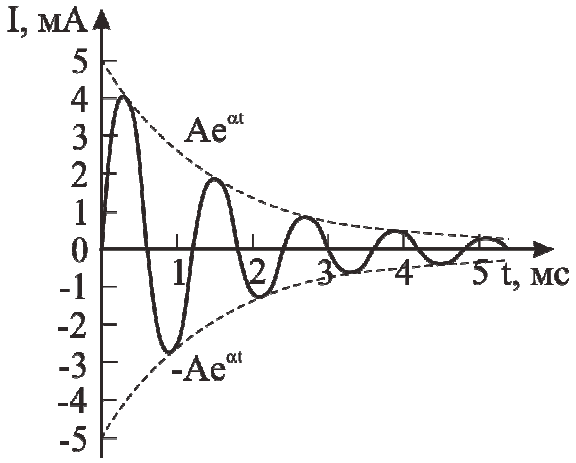
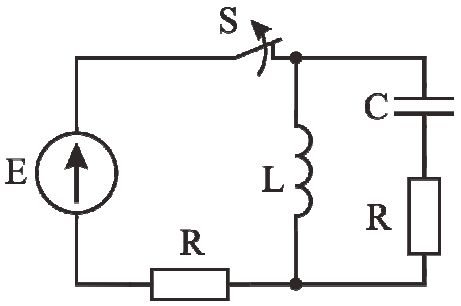


Рис. 5.2. Пример временной диаграммы переходного процесса в цепи II порядка

- рассчитать период колебаний и отложить на оси времени характерные точки (T/4, T/2, 3T/4, T и т. д.);
- используя значения гармонического колебания в характерных точках и экспоненциальную огибающую, построить временные диаграммы изменения токов и напряжений во время переходного процесса.

Пример временной диаграммы переходного процесса приведен на рис. 5.2.

ПРИМЕР РАСЧЕТА ПЕРЕХОДНОГО ПРОЦЕССА ВТОРОГО ПОРЯДКА



$$E = 10 \text{ В};$$
$$L = 1 \text{ мГн};$$
$$C = 10 \text{ мкФ};$$
$$R = \rho / 5;$$
$$\rho = \sqrt{L/C} = \sqrt{\frac{10^{-3}}{10^{-5}}} = 10 \text{ Ом};$$
$$R = 10 / 5 = 2 \text{ Ом}$$

Необходимо:

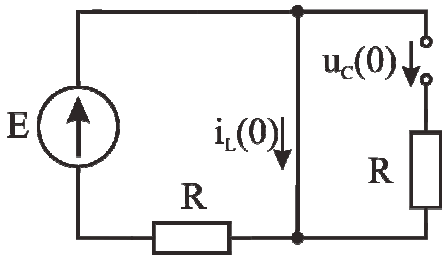
- рассчитать переходный процесс, протекающий в электрической цепи с двумя реактивными элементами;
- рассчитать напряжение на емкости и ток через индуктивность после коммутации;
- построить временные диаграммы тока через индуктивность и напряжения на емкости после коммутации.

1. Определяем независимую переменную. В качестве независимой переменной в последовательном контуре выбирается напряжение на емкости $u_C(t)$.

2. Записываем общее решение дифференциального уравнения

$$u_C(t) = u_{св}(t) + u_{пр}.$$

3. Определяем начальные условия $u_C(0)$ и $i_L(0)$. Для этого составляем эквивалентную схему электрической цепи для установившегося режима до коммутации и рассчитываем $u_C(0)$ и $i_L(0)$:



$$i_L(0) = \frac{E}{R} = \frac{10}{2} = 5 \text{ А},$$
$$u_C(0) = 0 \text{ В}.$$

4. Записываем решение дифференциального уравнения для свободной составляющей

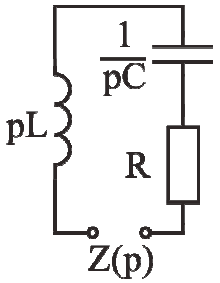
$$u_{св}(t) = A \cdot e^{\alpha t} \cdot \sin(\omega_c t + \Theta),$$

где A и Θ – постоянные интегрирования в решении дифференциального уравнения (определяются из начальных условий), α и ω_c – действительная и мнимая части корней характеристического уравнения ($p_{1,2} = \alpha \pm j\omega_c$).

Для составления характеристического уравнения используем схему после коммутации, отбрасываем разомкнутые ветви, заменяем источники питания их

внутренним сопротивлением, делаем разрыв в любой ветви (согласно рекомендациям – в месте источника ЭДС) и вычисляем входное сопротивление Z(p):

$$Z(p) = pL + \frac{1}{pC} + R\,.$$



Приравниваем $Z(p) = 0$:

$$p \cdot 10^{-3} + \frac{10^5}{p} + 2 = 0\,.$$

Умножим левую и правую части уравнения на p, $p \neq 0$:

$$p^2 \cdot 10^{-3} + 10^5 + 2p = 0, \qquad p^2 + 2 \cdot 10^3 p + 10^8 = 0\,.$$

Решаем полученное квадратное уравнение

$$D = b^2 - 4ac = 4 \cdot 10^6 - 4 \cdot 10^8 = -3.96 \cdot 10^8\,,$$

$$p_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}, \qquad p_{1,2} = -10^3 \pm j \cdot 9.95 \cdot 10^3\,,$$

$\alpha = -10^3$ – коэффициент затухания колебаний контура,

$\omega_c = 9.95 \cdot 10^3$ – частота собственных колебаний контура.

Записываем решение дифференциального уравнения для свободной составляющей:

$$u_{св}(t) = A \cdot e^{-10^3 t} \cdot \sin(9.95 \cdot 10^3 t + \Theta)\,.$$

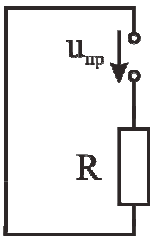
Постоянная времени затухания колебаний контура τ определяется по формуле

$$\tau = \frac{1}{|\alpha|} = 10^{-3} = 1 \text{ мс}.$$

Период затухающих колебаний контура T определяется по формуле:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_c} = \frac{6.28}{9.95 \cdot 10^3} = 6.312 \cdot 10^{-4} = 0.6312 \text{ мс}.$$

5. Определяем принужденную составляющую напряжения на емкости $u_{пр}$.



Для этого составляем эквивалентную схему электрической цепи после коммутации в установившемся режиме и определяем $u_{пр}$:

$$u_{пр} = 0 \text{ В}$$

6. Определяем постоянные интегрирования A и Θ.

$$u_C(t) = u_{св}(t) + u_{пр}$$

$$u_C(t) = A \cdot e^{-10^3 t} \cdot \sin(9.95 \cdot 10^3 t + \Theta)\,.$$

Определяем ток через емкость, используя формулу:

$$i_C(t) = C\frac{du_C}{dt},$$

$$i_C(t) = -10^3 A \cdot e^{-10^3 t} \cdot \sin(9.95 \cdot 10^3 t + \Theta) + 9.95 \cdot 10^3 A \cdot e^{-10^3 t} \cdot \cos(9.95 \cdot 10^3 t + \Theta)\,.$$

Таким образом, учитывая $i_C(t) = i_L(t)$ в схеме после коммутации, получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} u_C(t) = A \cdot e^{-10^3 t} \cdot \sin(9.95 \cdot 10^3 t + \Theta) \\ i_L(t) = -10^3 A \cdot e^{-10^3 t} \cdot \sin(9.95 \cdot 10^3 t + \Theta) + 9.95 \cdot 10^3 A \cdot e^{-10^3 t} \cdot \cos(9.95 \cdot 10^3 t + \Theta) \end{cases}.$$

Записываем выражение для токов и напряжений на реактивных элементах для момента коммутации t = 0 и используем начальные условия $u_C(0)$ и $i_L(0)$, найденные в п. 3:

$$\begin{cases} u_C(0) = A \cdot \sin(\Theta) \\ i_L(0) = -10^3 A \cdot \sin(\Theta) + 9.95 \cdot 10^3 A \cdot \cos(\Theta) \end{cases}, \qquad \begin{cases} u_C(0) = 0 \\ i_L(0) = 5 \end{cases},$$

составляем систему из двух алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} 0 = A \cdot \sin(\Theta) \\ 5 = -10^3 A \cdot \sin(\Theta) + 9.95 \cdot 10^3 A \cdot \cos(\Theta) \end{cases},$$

из решения которой определяем постоянные интегрирования A и Θ:

$$\begin{cases} \sin(\Theta) = 0 \Leftrightarrow \Theta = 0 \\ -10^3 A \cdot \sin(0) + 9.95 \cdot 10^3 A \cdot \cos(0) = 5 \Leftrightarrow 9.95 \cdot 10^3 A = 5 \end{cases}, \qquad \begin{cases} \Theta = 0 \\ A = 5.025 \cdot 10^{-4} \end{cases}.$$

Записываем общее решение дифференциального уравнения:

$$u_C(t) = 5.025 \cdot 10^{-4} e^{-10^3 t} \cdot \sin(9.95 \cdot 10^3 t).$$

Записываем выражение для тока через индуктивность:

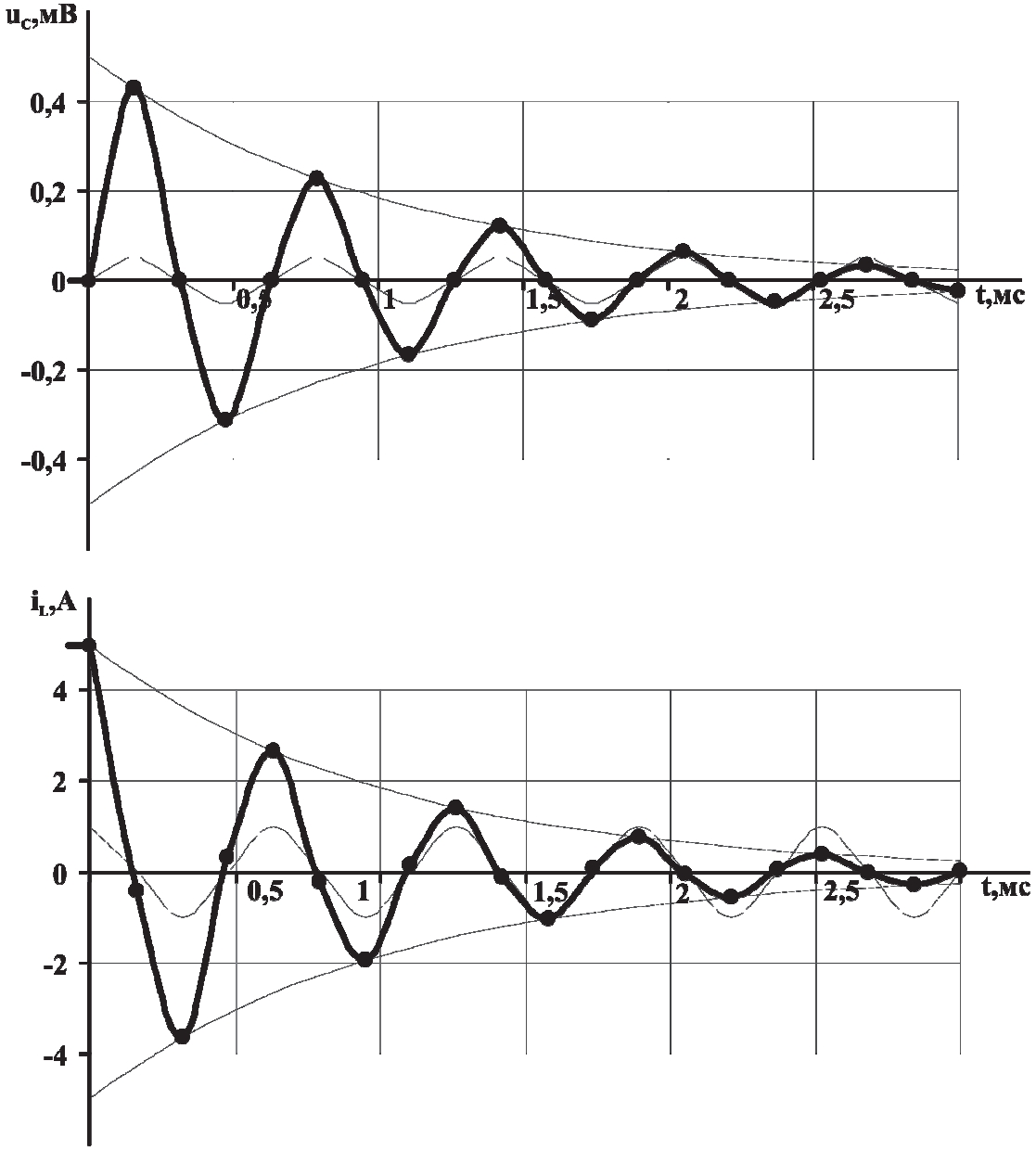
$$i_L(t) = -0.5025 \cdot e^{-10^3 t} \cdot \sin(9.95 \cdot 10^3 t) + 5 \cdot e^{-10^3 t} \cdot \cos(9.95 \cdot 10^3 t).$$

7. Строим временные диаграммы тока через индуктивность и напряжения на емкости на интервале времени от t = 0 до t = 3τ.

T	**0**	**0,25**	**0,5**	**0,75**	**1**	**1,25**	**1,5**
t, мс	0	0,1578	0,3156	0,4734	0,6312	0,7889	0,9467
u_C, мВ	0	0,429	0,001	-0,313	-0,001	0,228	0,001
i_L, А	5	-0,4257	-3,6474	0,3056	2,6607	-0,2193	-1,9409

T	**1,75**	**2**	**2,25**	**2,5**	**2,75**	**3**	**3,25**
t, мс	1,1045	1,2623	1,4201	1,5779	1,7357	1,8935	2,0513
u_C, мВ	-0,167	-0,001	0,121	0,001	-0,089	-0,001	0,065
i_L, А	0,1573	1,4159	-0,1128	-1,0328	0,0809	0,7534	-0,0579

T	**3,5**	**3,75**	**4**	**4,25**	**4,5**	**4,75**
t, мс	2,209	2,3668	2,5246	2,6824	2,8402	2,998
u_C, мВ	0,001	-0,047	-0,001	0,034	0	-0,025
i_L, А	-0,5496	0,0415	0,4009	-0,0297	-0,2925	0,0213



ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 6
ИССЛЕДОВАНИЕ ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ В ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЯХ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Цель работы – исследование переходных процессов в линейных электрических цепях первого порядка

Общие сведения

В установившемся режиме работы электрических цепей напряжения и токи либо не изменяются во времени (цепи постоянного тока), либо являются периодическими функциями времени (цепи переменного тока). Процессы, протекающие в электрических цепях при переходе из одного установившегося режима в другой, называются переходными. Переход от одного режима работы к другому может быть вызван изменением параметров цепи (подключением или

отключением элементов электрической цепи) и называется коммутацией. В электротехнике коммутации осуществляются с помощью идеализированных ключей, переключение которых происходит мгновенно, сопротивление в положении «замкнуто» равно нулю, а в положении «разомкнуто» равно бесконечности. Бывает несколько вариантов изменения положения ключа: подключение участка цепи – рис. 6.1,а; отключение – рис. 6.1,б; переключение – рис 6.1.в. Для удобства полагают, что коммутации в электрических цепях происходят в момент времени t = 0.

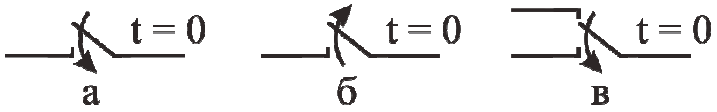


Рис. 6.1. Варианты ключей, используемых для коммутаций в электрических цепях

В электрических цепях с активными нагрузками переходные процессы протекают мгновенно из-за отсутствия накопителей энергии. При наличии в электрической цепи реактивных элементов – индуктивностей или емкостей или одновременно и индуктивностей и емкостей – переходные процессы протекают в течение некоторого интервала времени, так как магнитная $W_L = L\, i^2/2$ и электрическая $W_E = C\, u^2/2$ энергии индуктивности и емкости не могут изменяться мгновенно. Из непрерывности изменения магнитного поля катушки индуктивности и электрического поля конденсатора вытекают законы коммутации:

Ток через индуктивность в момент времени $t = 0_-$ до коммутации равен току в момент времени $t = 0_+$ после коммутации: $i_L(0_-) = i_L(0_+)$.

Напряжения на емкости до коммутации и после коммутации равны: $u_C(0_-) = u_C(0_+)$.

Можно сформулировать оба закона коммутации следующим образом: ток через индуктивность $i_L(t)$ и напряжение на емкости $u_C(t)$ не могут изменяться скачком.

Теоретически переходные процессы протекают бесконечное время, практически их длительность ограничивают интервалом, в течение которого токи и напряжения в электрической цепи достигают некоторого уровня от установившегося значения.

До начала коммутации при $t < 0$ электрическая цепь находилась в установившемся режиме, который характеризуется начальными условиями – значениями токов и напряжений реактивных элементов. Значение тока через индуктивность $i_L(0_-)$ и напряжение на емкости $u_C(0_-)$ до коммутации образуют независимые начальные условия, которые используются при решении задач расчета переходных процессов. Начальные условия могут быть нулевыми:

$$i_L(0) = 0, \quad u_C(0) = 0 \tag{6.1}$$

или не нулевыми:

$$\text{а)}\ i_L(0) \neq 0, \quad u_C(0) \neq 0; \tag{6.2}$$

$$\text{б)}\ i_L(0) \neq 0, \quad u_C(0) = 0; \tag{6.3}$$

$$\text{в)}\ i_L(0)=0,\quad u_C(0)\neq 0. \qquad (6.4)$$

При нулевых начальных условиях в момент $t=0$ коммутации индуктивность можно рассматривать как разрыв, а емкость как короткое замыкание. В случае не нулевых начальных условий индуктивность представляет собой источник тока величиной $J=i_L(0)$, а емкость – источник ЭДС величиной $E=u_C(0)$. Значения $i_L(0)$ и $u_C(0)$ определяются в установившемся режиме до коммутации с использованием законов Ома и Кирхгофа. При этом в случае электрических цепей постоянного тока индуктивность заменяется короткозамкнутым участком, а емкость – разрывом, а для нахождения начальных условий в электрических цепях синусоидального тока применяется символический метод расчета.

Задача анализа переходных процессов заключается в нахождении функций, описывающих изменения токов и напряжений во всех или некоторых ветвях электрической цепи, наступающих после коммутации (при $t>0$). Существует несколько методов расчета переходных процессов в линейных электрических цепях. Наиболее фундаментальным и наглядным является классический метод, заключающийся в составлении и решении интегро-дифференциальных уравнений на основе соотношений для мгновенных значений токов и напряжений в R, L, C элементах:

$$U_R=R\cdot i_R,\quad U_L=L\frac{di_L}{dt},\quad U_c=\frac{1}{C}\int i_c dt.$$

Порядок дифференциального уравнения n определяется количеством независимых реактивных элементов. Дифференциальные уравнения I порядка (n = 1) описывают переходные процессы в электрических цепях с одним реактивным элементом (RL- и RC-цепи). Примеры RL- и RC-цепей первого порядка показаны на рис. 6.2. При n = 2 электрическая цепь содержит L и C элементы и переходные процессы описываются дифференциальными уравнениями II порядка.

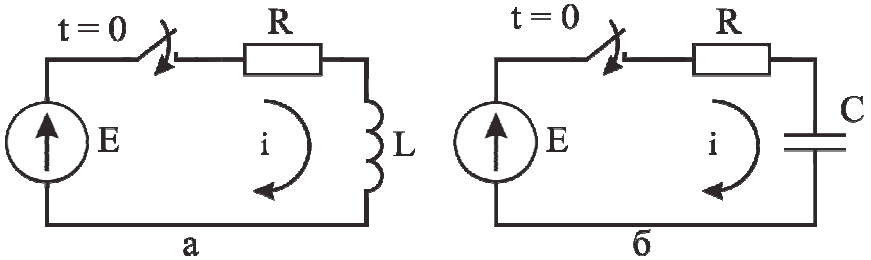


Рис. 6.2. Схемы RL- (а) и RC- (б) цепей I порядка

Переходные процессы в RL-цепях. Рассмотрим подключение источника постоянной ЭДС к RL-цепи (рис. 6.2,а). В качестве независимой переменной принимаем ток через индуктивность $i_L(t)=i(t)$.

Начальные условия находятся из эквивалентной схемы электрической цепи для установившегося режима до коммутации, когда индуктивность представляет собой короткое замыкание, а емкость – разрыв цепи.

Для RL-цепи схема для определения начальных условий приведена на рис. 6.3. Используя правила последовательного и параллельного соединения сопротивлений и законы Ома и Кирхгофа, находим $i_L(0) = 0$.

Составим дифференциальное уравнение:

$$u_R + u_L = E, \qquad (6.5)$$

$$R \cdot i + L\frac{di}{dt} = E. \qquad (6.6)$$

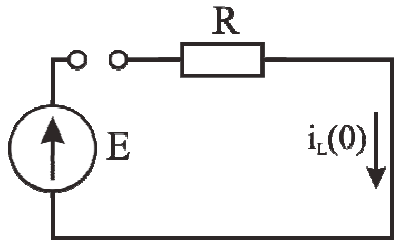


Рис. 6.3. Схема для расчета нулевых начальных условий в RL-цепи с источником ЭДС

Решение дифференциального уравнения находится в виде суммы свободной и принужденной составляющих:

$$i(t) = i_{св}(t) + i_{пр}(t). \qquad (6.7)$$

Свободная составляющая $i_{св}(t)$ является общим решением однородного дифференциального уравнения:

$$L\frac{di_{св}}{dt} + Ri_{св} = 0. \qquad (6.8)$$

Для дифференциальных уравнений I порядка это решение имеет вид

$$i_{св}(t) = A \cdot e^{pt}, \qquad (6.9)$$

где A – постоянная интегрирования в решении дифференциального уравнения, p – корень характеристического уравнения:

$$pL + R = 0, \qquad (6.10).$$

Данное выражение называется характеристическим уравнением и получается путем замены каждого дифференциала функции $i_{св}(t)$ на оператор p. При этом степень дифференцирования равна степени оператора p, следовательно $i_{св}$ соответствует $p_0 = 1$.

Также данное уравнение можно получить следующим способом. Составляется схема после коммутации, в которой все источники ЭДС заменяются коротким замыканием, а все разомкнутые ветви отбрасываются. Далее одна из ветвей полученной электрической цепи разрывается (рекомендуется делать разрыв на месте источника ЭДС) и относительно точек разрыва вычисляется комплексное входное сопротивление. При этом учитывается, что комплексное сопротивление индуктивности $\dot{Z}_L = j\omega L$, а комплексное сопротивление емкости $\dot{Z}_C = 1/j\omega C$.

Полученное выражение для входного сопротивления цепи приравнивается к нулю, а произведение jω заменяется на оператор p. Для RL-цепи схема для расчета входного сопротивления приведена на рис. 6.4. Из нее

$$Z_{вх}(j\omega) = R + j\omega L,\ j\omega \to p,$$

$$Z_{вх}(p) = R + pL,$$

$$Z_{вх} = 0, \text{ соответственно } R + pL = 0.$$

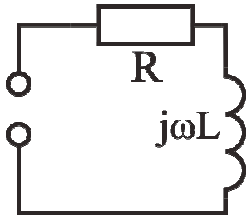


Рис. 6.4. Схема для расчета входного сопротивления

Последнее уравнение, аналогичное (6.10), определяет корень характеристического уравнения:

$$p = -\frac{R}{L},\ [1/c]. \tag{6.11}$$

Вводят новый параметр τ – постоянную времени цепи (в данном случае – постоянную времени RL-цепи):

$$\tau = \left|\frac{1}{p}\right| = \frac{L}{R}\ [c]. \tag{6.12}$$

При подключении к цепи источника постоянного напряжения E принужденная составляющая решения уравнения (6.7) находится в установившемся режиме из схемы после коммутации, представленной на рис. 6.5, в которой индуктивность заменяется коротким замыканием, а емкость – разрывом цепи. Из нее

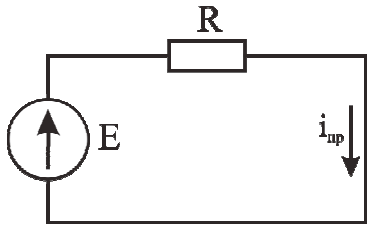


Рис. 6.5. Схема для определения принужденной составляющей в электрической цепи с источником ЭДС

$$i_{пр} = \frac{E}{R}. \tag{6.13}$$

Запишем решение уравнения (6.7) в виде суммы свободной и принужденной составляющих:

$$i(t) = A \cdot e^{-t/\tau} + E/R. \tag{6.14}$$

Для нахождения постоянной интегрирования A используем начальное условие $i_L(0) = 0$. Из уравнения (6.14) при $t = 0$ имеем

$$0 = A + E/R, \tag{6.15}$$

откуда

$$A = -\frac{E}{R}. \tag{6.16}$$

Тогда для тока в цепи во время переходных процессов окончательно запишем

$$i(t) = \frac{E}{R}\left(1 - e^{-t/\tau}\right). \tag{6.17}$$

Для нахождения напряжения на индуктивности используем закон Фарадея:

$$u_L = L\frac{di}{dt} = E \cdot e^{-t/\tau}. \tag{6.18}$$

Напряжение на сопротивление находится по закону Ома:

$$u_R = R \cdot i = E(1 - e^{-t/\tau}). \tag{6.19}$$

Из выражений (6.17), (6.18), (6.19) следует, что переходные процессы в RL-цепи протекают по экспоненциальному закону с постоянной времени $\tau = L/R$. Скорость переходных процессов определяется величиной постоянной времени τ. При увеличении τ скорость изменения токов и напряжений снижается. За время $t = 3\tau$ экспоненциальный переходный процесс достигает уровня 0,95 от установившегося значения, а за $t = 5\tau$ – уровня 0,99. На практике за дли-

тельность переходных процессов, протекающих по экспоненциальному закону, принимают величину (3 – 5)τ. Временные диаграммы напряжений и токов в цепи приведены на рис. 6.6.

До момента коммутации $t = 0$ индуктивность разряжена, так как ток $i_L(0) = 0$. При подключении источника ЭДС начинается процесс заряда индуктивности, ток $i_L(t)$ возрастает по экспоненциальному закону, стремясь при $t = \infty$ к установившемуся значению $i_{пр} = i_L(\infty) = E/R$. В момент коммутации напряжение на индуктивности скачком изменяется до величины E и по мере заряда индуктивности спадает по экспоненциальному закону. Напряжение на сопротивлении по форме совпадает с током $i(t)$, так как $u_R = R \cdot i$. Когда переходные процессы завершаются, ток в цепи достигает наибольшего значения $i_L(\infty) = E/R$.

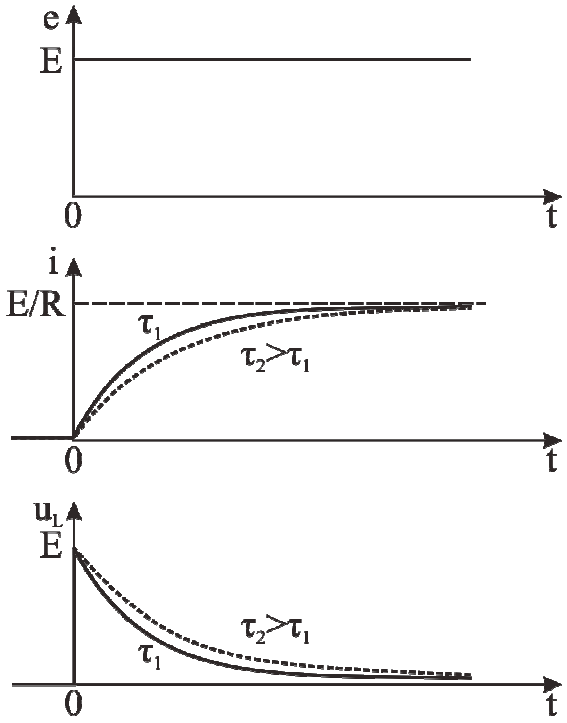


Рис. 6.6. Временные диаграммы переходного процесса в RL цепи при подключении источника постоянного ЭДС

В схеме, представленной на рис. 6.7, переходный процесс протекает при ненулевых начальных условиях:

$$i(0_-) = \frac{E}{R_1 + R_2}. \qquad (6.20)$$

Общее решение для тока i(t) имеет вид (6.7), где свободная составляющая $i_{св}(t)$ описывается соотношением (6.9), а принужденная составляющая $i_{пр} = 0$:

$$i(t) = i_{пр}(t) + i_{св}(t) = Ae^{-t/\tau}. \qquad (6.21)$$

Постоянную интегрирования A найдем как

$$A = E/(R_1 + R_2). \qquad (6.22)$$

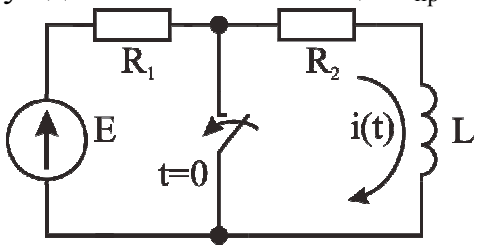


Рис. 6.7. Схема RL-цепи с ненулевыми начальными условиями

Тогда выражения для тока и напряжения на индуктивности во время переходных процессов примут вид:

$$i(t) = \frac{E}{R_1 + R_2} e^{-t/\tau}, \qquad u_L(t) = \frac{-E \cdot R_2}{R_1 + R_2} e^{-t/\tau}. \qquad (6.23)$$

Временные диаграммы i(t) и $u_L(t)$ показаны на рис. 6.8.

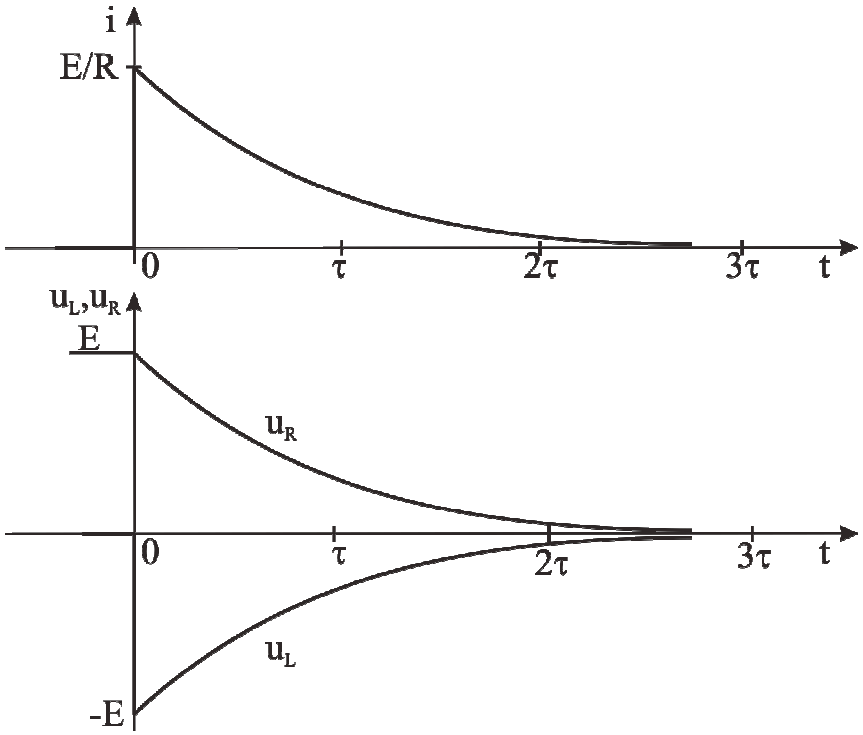


Рис. 6.8. Временные диаграммы переходного процесса в RL-цепи при ненулевых начальных условиях

Переходные процессы в RC-цепях. Схема подключения источника постоянного ЭДС к RC-цепи показана на рис. 6.2,б. Источник ЭДС в исходном состоянии при $t < 0$ отключен от цепи, начальные условия нулевые: $u_C(0) = 0$ В качестве независимой переменной берем напряжение на емкости $u_C(t) = u(t)$. Составим дифференциальное уравнение для нахождения $u_C(t)$:

$$u_R + u_C = E, \tag{6.24}$$

$$RC\frac{du_C}{dt} + u_C = E. \tag{6.25}$$

Решение дифференциального уравнения находится в виде суммы свободной и принужденной составляющих:

$$u_C(t) = u_{св}(t) + u_{пр}. \tag{6.26}$$

Из решения однородного уравнения находим

$$u_{св}(t) = A \cdot e^{pt}, \tag{6.27}$$

где p – корень характеристического уравнения

$$RCp + 1 = 0, \tag{6.28}$$

откуда

$$p = -1/RC \ [1/c]. \tag{6.29}$$

Постоянная времени RC-цепи τ определяется следующим образом:

$$\tau = |1/p| = RC \ [c]. \tag{6.30}$$

При подключении источника постоянной ЭДС E принужденная составляющая $U_{пр} = E$, так как после завершения переходных процессов конденсатор заряжается до напряжения источника ЭДС.

Запишем решение уравнения (6.26) в виде суммы свободной и принужденной составляющих:

$$u_C(t) = A \cdot e^{-t/\tau} + E. \qquad (6.31)$$

Используя начальное условие $u_C(0) = 0$, определяем значение постоянной интегрирования $A = -E$ и окончательно записываем решение дифференциального уравнения:

$$u_C(t) = E\left(1 - e^{-t/\tau}\right). \qquad (6.32)$$

Найдем ток в цепи во время переходного процесса:

$$i(t) = i_C(t) = C\frac{du_C}{dt} = \frac{E}{R}e^{-t/\tau}. \qquad (6.33)$$

Временные диаграммы переходного процесса в RC цепи при подключении постоянной ЭДС показаны рис. 6.9. Во время переходного процесса происходит заряд емкости C от источника ЭДС через сопротивление R. В емкости запасается энергия $W = CU^2/2$. Такая же энергия расходуется при протекании зарядного тока через сопротивление. Скорость заряда зависит от постоянной времени τ. С увеличением τ инерционность цепи увеличивается и заряд конденсатора происходит медленнее.

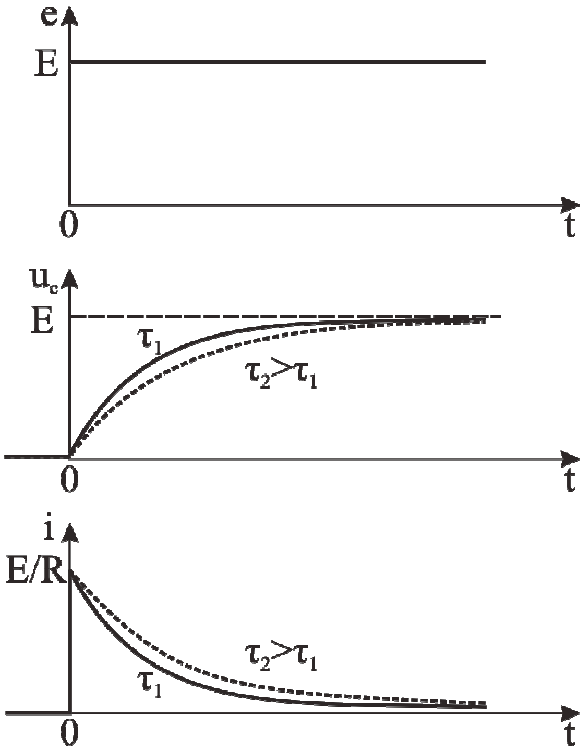


Рис. 6.9. Переходные процессы в RC-цепи при подключении источника постоянной ЭДС

Подача последовательности импульсов, описываемых выражением

$$U(t) = \begin{cases} E, & \text{при } 0 \le t < t_и \\ 0, & \text{при } t_и \le t < T \end{cases}, \qquad (6.34)$$

и представленных на рис 6.10, на вход электрической цепи имитирует подключение постоянного источника ЭДС амплитудой E с частотой f (частота повторения импульсов генератора). Если длительность импульса много больше постоянной времени цепи, то за время действия импульса переходный процесс успевает завершиться. Временные диаграммы, наблюдаемые на элементах электрической цепи, описывают переходный процесс при подключении и отключении источника ЭДС.

На рис. 6.11 приведена нормированная экспоненциальная функция вида $e^{-t/\tau}$. Из нее видно, что за интервал времени 3τ функция принимает значение 0.05 от максимального, поэтому в электротехнике принято считать, что переходный процесс завершается за время равное $(3–5)\tau$.

Для определения постоянной времени переходного процесса цепи I порядка функции вида $u(t) = U_m\ e^{-t/\tau}$ на экспериментальных временных диаграммах

необходимо отложить уровень $0{,}37U_m$ по оси напряжения и в месте пересечения данного уровня с графиком напряжения опустить перпендикуляр к оси времени. Полученный временной интервал будет соответствовать постоянной времени переходного процесса. Для функции вида $u(t) = U_m(1 - e^{-t/\tau})$ необходимо откладывать уровень $(1\text{-}0{,}37)U_m = 0{,}63U_m$.

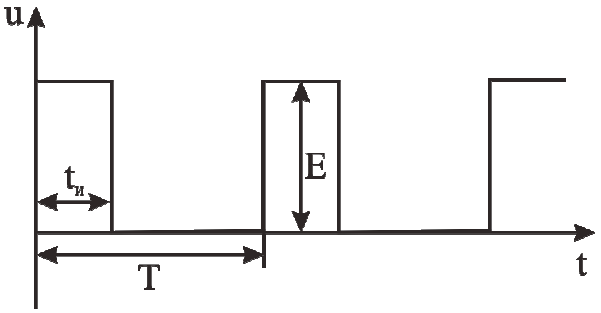


Рис. 6.10. Последовательность прямоугольных импульсов

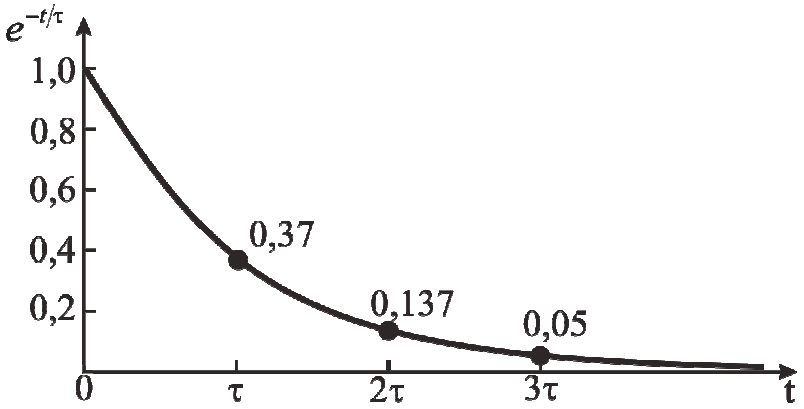


Рис. 6.11. Нормированная экспоненциальная функция

Методика выполнения работы

Для получения временных диаграмм напряжения используется первый канал осциллографа, который подсоединяется к элементу, подключенному к заземляющему контакту (точка 1 для каждой схемы рис. 6.12–6.15). На осциллографе необходимо выставить масштаб по оси времени – 1 мс/дел, а по оси напряжения – 2 В/дел. С помощью регуляторов смещения осциллографа временные диаграммы располагать таким образом, чтобы на экране наблюдался весь переходный процесс. На рисунке начало координат должно соответствовать началу переходного процесса. На осях временных диаграмм, зарисованных в отчете, необходимо обозначить измеряемые величины, их размерность и масштаб.

При проведении исследований влияния параметров цепи на скорость переходных процессов временные диаграммы (два переходных процесса) необходимо изображать в отчете на одном рисунке.

Программа работы

Перед выполнением лабораторной работы необходимо:

- составить отчет, который должен содержать краткие элементы теории, все исследуемые схемы, таблицы и расчеты, указанные в программе работы. Схемы и таблицы должны быть выполнены карандашом и в соответствии с требованиями ЕСКД;
- изучить лабораторный стенд (см. приложение), порядок проведения измерений электрических величин с помощью мультиметра VC 9808^{+}, работу генератора GFG -3015 и осциллографа АКИП-4115/3А, а также методику выполнения работы.

СТУДЕНТ, НЕ ПОДГОТОВИВШИЙ ОТЧЕТ, К ВЫПОЛНЕНИЮ ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЫ НЕ ДОПУСКАЕТСЯ.

Для исследуемых вариантов схем рассчитать постоянные времени τ , учитывая, что внутреннее сопротивление источника ЭДС составляет 100 Ом. Расчет привести в отчете, полученные данные занести в таблицу.

При выполнении работы на генераторе сигналов специальной формы необходимо установить импульсное напряжение прямоугольной формы с частотой f = 50 Гц, амплитудой U_m = 5 В, напряжением смещения 2,5 В и скважностью 2 (асимметрия 50 %).

1. Исследование переходных процессов в RC-цепи.

1.1. Собрать схему RC-цепи, согласно рис. 6.12, в качестве сопротивления R использовать резистор R_2 номиналом 1,5 кОм (см. приложение), а в качестве емкости С – конденсатор C_1 номиналом 1 мкФ. Зарисовать временную диаграмму напряжения на резисторе R_2.

1.2. Исследовать влияние параметров цепи на скорость переходных процессов: в собранной схеме (п.1.1) заменить резистор R_2 на резистор R_1 номиналом 750 Ом. Зарисовать временную диаграмму напряжения на резисторе R_1.

1.3. Собрать схему RC цепи, согласно рис. 6.13, в качестве сопротивления R использовать резистор R_2 номиналом 1,5 кОм, а в качестве емкости С – конденсатор C_1 номиналом 1 мкФ. Зарисовать временную диаграмму напряжения на конденсаторе C_1.

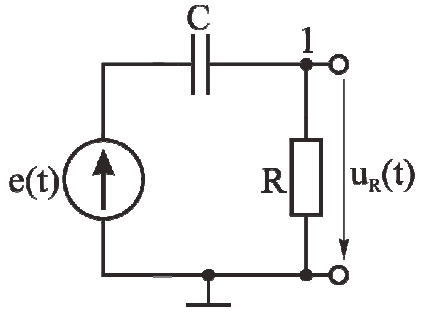


Рис. 6.12. Схема RC-цепи для наблюдения напряжения на резисторе

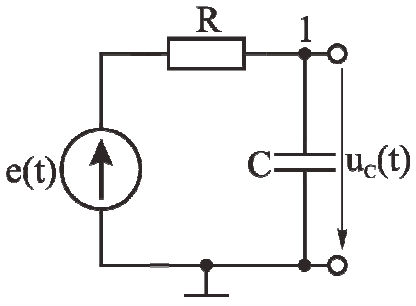


Рис. 6.13. Схема RC-цепи для наблюдения напряжения на конденсаторе

1.4. Исследовать влияние параметров цепи на скорость переходных процессов: в собранной схеме (п.1.3) заменить резистор R_2 на резистор R_1 номиналом 750 Ом. Зарисовать временную диаграмму напряжения на конденсаторе C_1.

2. Исследование переходных процессов в RL-цепи.

2.1. Собрать схему RL-цепи, согласно рис. 6.14, в качестве сопротивления R использовать резистор R_2 номиналом 1,5 кОм, а в качестве индуктивности L – индуктивность L_1 номиналом 1 Гн. Зарисовать временную диаграмму напряжения на индуктивности L_1.

2.2. Исследовать влияние параметров цепи на скорость переходных процессов: в собранной схеме заменить резистор R_2 на резистор R_1 номиналом 750 Ом. Зарисовать временную диаграмму напряжения на индуктивности L_1.

2.3. Собрать схему RL цепи, согласно рис. 6.15, в качестве сопротивления R использовать резистор R_2 номиналом 1,5 кОм, а в качестве индуктивности L – индуктивность L_1 номиналом 1 Гн. Зарисовать временную диаграмму напряжения на резисторе R_2.

2.4. Исследовать влияние параметров цепи на скорость переходных процессов: в собранной схеме заменить резистор R_2 на резистор R_1 номиналом 750 Ом. Зарисовать временную диаграмму напряжения на резисторе R_1

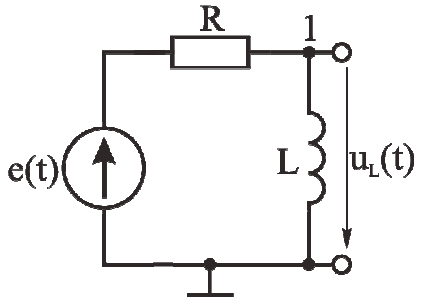


Рис. 6.14. Схема RL-цепи для наблюдения напряжения на индуктивности

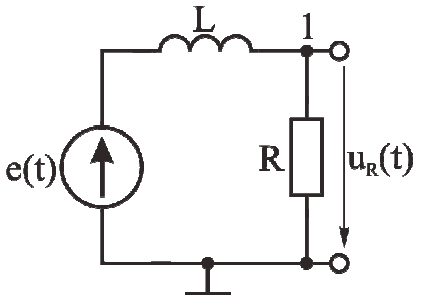


Рис. 6.15. Рис. 6.14. Схема RL-цепи для наблюдения напряжения на резисторе

3. На всех зарисованных временных диаграммах напряжения определить постоянные времени переходных процессов. Процесс определения постоянных времени переходных процессов отобразить на графиках. Данные занести в таблицу.

Постоянные времени переходных процессов

Исследуемая схема	$\tau_{рассч.}$		$\tau_{изм.}$	
	$R = R_1$	$R = R_2$	$R = R_1$	$R = R_2$
RC-цепь, рис. 6.12				
RC-цепь, рис. 6.13				
RL-цепь, рис. 6.14				
RL-цепь, рис. 6.15				

Контрольные вопросы

1. Что такое переходные процессы в электрических цепях?

2. В каких случаях возникают переходные процессы в электрических цепях?

3. Каким соотношением связаны мгновенные значения токов и напряжений для R, L, C элементов?

4. Сформулируйте закон коммутации для L и C элементов.

5. Как выглядит общее решение дифференциального уравнения первого порядка?

6. Чем определяется вынужденная и свободная составляющие общего решения для RL и RC цепей первого порядка?

7. Приведите примеры RL и RC цепей с нулевыми и не нулевыми начальными условиями.

8. Что такое постоянная времени цепи и как она влияет на скорость переходных процессов?

9. По какому закону протекают переходные процессы в электрических цепях первого порядка?

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 7
ИССЛЕДОВАНИЕ ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ В ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЯХ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Цель работы – исследование переходных процессов в линейных электрических цепях второго порядка

Общие сведения

Линейные цепи II порядка содержат два реактивных элемента. Наибольший интерес представляют схемы, содержащие разнородные реактивные элементы L и C. При последовательном соединении элементов L и C (рис. 7.1) электрическую цепь называют последовательным колебательным контуром, а при параллельном соединении (рис. 7.2,а) - параллельным колебательным контуром.

Характер переходного процесса в электрической цепи II порядка зависит от добротности контура, определяемой формулой

$$Q = \rho / r_{пот}, \qquad (7.1)$$

где $\rho = \sqrt{L/C}$ – характеристическое сопротивление контура, $r_{пот}$ – сопротивление потерь. Для последовательного контура $r_{пот} = R$, тогда из формулы (7.1) $Q = \rho/R$. Для параллельного контура $r_{пот} = r + r_{вн}$, где $r_{вн}$ – сопротивление, вносимое в контур внешними цепями.

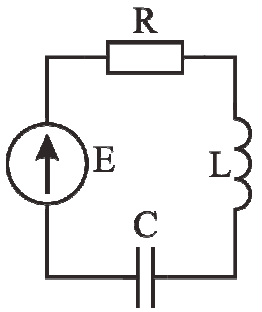


Рис. 7.1. Последовательный колебательный контур

Для схемы рис. 7.2,а оно вычисляется по формуле $r_{вн} = \rho^2 / R$. При этом рассчитывается эквивалентная добротность контура с учетом вносимого сопротивления:

$$Q_{экв} = \frac{\rho}{r + \rho^2 / R}. \qquad (7.2)$$

В случае если активное сопротивление контура r равно нулю, эквивалентная добротность параллельного колебательного контура будет определяться формулой

$$Q_{экв}=R/\rho. \qquad (7.3)$$

Переходные процессы в последовательном колебательном контуре. Рассмотрим подключение источника постоянной ЭДС к последовательной RLC-цепи (рис. 7.3). В качестве независимой переменной в последовательном контуре выбираем напряжение на емкости $u_C(t)$, а в параллельном контуре – ток через индуктивность $i_L(t)$, так как в этом случае упрощается определение постоянной интегрирования. В линейных цепях II порядка начальными условиями являются напряжение на емкости и ток через индуктивность до коммутации. Моменту коммутации ключа соответствует t = 0. Величины $u_C(0)$ и $i_L(0)$ находятся из эквивалентной схемы электрической цепи для установившегося режима до коммутации, когда индуктивность представляет собой короткое замыкание, а емкость – разрыв цепи. Используя правила последовательного и параллельного соединения сопротивлений и законы Ома и Кирхгофа, находим начальные условия: $i_L(0) = 0$, $u_C(0) = E$.

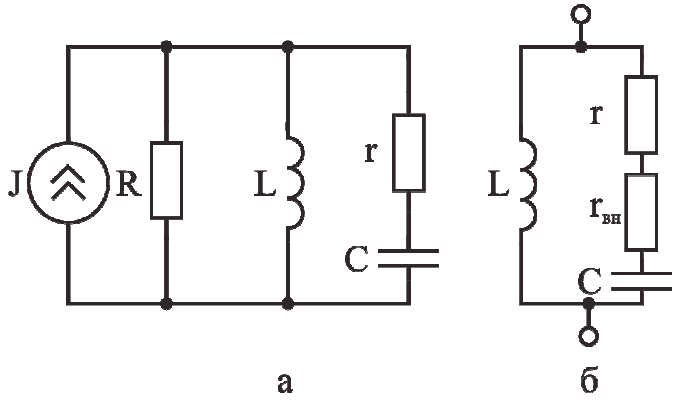


Рис. 7.2. Параллельный колебательный контур

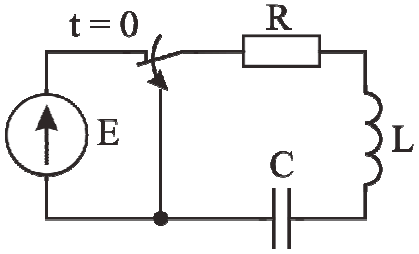


Рис. 7.3. Схема подключения постоянного источника ЭДС к последовательной RLC-цепи

Составляем дифференциальное уравнение:

$$u_R + u_L + u_C = E, \qquad (7.4)$$

$$R \cdot i + L\frac{di}{dt} + u_C = E. \qquad (7.5)$$

Учитывая, что $i = C\frac{du_C}{dt}$, записываем

$$LC\frac{d^2u_C}{dt^2} + RC\frac{du_C}{dt} + u_C = E. \qquad (7.6)$$

Выражение (7.6) является дифференциальным уравнением II порядка. Его решение состоит из суммы свободной и принужденной составляющих:

$$u_C(t) = u_{св} + u_{пр}. \qquad (7.7)$$

Свободная составляющая $u_{св}(t)$ является решением однородного дифференциального уравнения:

$$LC\frac{d^2u_C}{dt^2} + RC\frac{du_C}{dt} + U_C = 0. \qquad (7.8)$$

Для определения $u_{св}(t)$ составляется характеристическое уравнение, соответствующее дифференциальному уравнению (7.8):

$$LCp^2 + RCp + 1 = 0, \qquad (7.9)$$

$$p^2 + \frac{R}{L}p + \frac{1}{LC} = 0.$$

Данное выражение получается путем замены каждого дифференциала функции $u_c(t)$ на оператор p. При этом степень дифференцирования равна степени оператора p, следовательно, u_c соответствует $p_0 = 1$.

Также данное уравнение можно получить следующим способом. Составляется схема после коммутации, в которой все источники ЭДС заменяются коротким замыканием, а все разомкнутые ветви отбрасываются. Далее одна из ветвей полученной электрической цепи разрывается (рекомендуется делать разрыв на месте источника ЭДС) и относительно точек разрыва вычисляется комплексное входное сопротивление. При этом учитывается, что комплексное сопротивление индуктивности $\dot{Z}_L = j\omega L$, а комплексное сопротивление емкости $\dot{Z}_C = 1/j\omega C$. Полученное выражение для входного сопротивления цепи приравнивается к нулю, а произведение $j\omega$ заменяется на оператор p. Находятся корни характеристического уравнения (7.9):

$$p_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}. \qquad (7.10)$$

Вводятся обозначения $\alpha = R/2L$ – коэффициент затухания, $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ – резонансная частота контура, $\omega_c = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$ – частота собственных колебаний контура.

Тогда корни характеристического уравнения выглядят следующим образом:

$$p_{1,2} = \alpha \pm j\omega_c. \qquad (7.11)$$

Действительная часть корней характеристического уравнения α определяет постоянную времени затухания колебаний контура

$$\tau = 1/\alpha, \qquad (7.12)$$

а мнимая часть корней характеристического уравнения – период этих колебаний $T = 2\pi/\omega_c$.

Важным параметром, определяющим характер переходного процесса в колебательных контурах, является добротность

$$Q = \frac{\rho}{R} = \frac{\omega_0}{2\alpha}, \qquad (7.13)$$

где $\rho = \sqrt{L/C}$ – характеристическое сопротивление контура. Используя выражение (7.10), корни характеристического уравнения можно представить в виде

$$p_{1,2} = \alpha\left(-1 \pm \sqrt{1-2Q}\right). \qquad (7.14)$$

В зависимости от величины добротности может быть три варианта корней характеристического уравнения и соответственно три вида свободной составляющей переходного процесса:

- $Q < 0{,}5$, корни действительные и различные, переходный процесс носит апериодический характер: $u_{св}(t) = A_1 e^{p_1 t} + A_2 {}^{p_2 t}$;
- $Q = 0{,}5$, корни действительные, равные, переходный процесс носит промежуточный характер: $u_{св}(t) = (A_1 + A_2 t)e^{pt}$;
- $Q > 0{,}5$, корни комплексно-сопряженные, переходный процесс носит колебательный затухающий характер: $u_{св}(t) = Ae^{-\alpha t}\sin(\omega_c t + \Theta)$, где A_1, A_2, A, Θ – постоянные интегрирования, находятся из начальных условий.

Принужденная составляющая решения уравнения (7.7) находится в установившемся режиме из схемы после коммутации, в которой индуктивность заменяется коротким замыканием, а емкость – разрывом цепи.

Так как для схемы, представленной на рис 7.3, после коммутации при $t > 0$ источник ЭДС отключается от контура, принужденная составляющая $U_{пр} = 0$, решение дифференциального уравнения (7.7) состоит только из свободной составляющей:

$$u_C(t) = u_{св}(t). \qquad (7.15)$$

Рассмотрим случай, когда $Q < 0.5$, тогда корни характеристического уравнения (7.9) вещественные и различные, $p_1 < 0$, $p_2 < 0$

$$p_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}, \quad \alpha > \omega_0. \qquad (7.16)$$

Свободная составляющая для этого случая состоит из двух компонент:

$$u_{св}(t) = A_1 e^{p_1 t} + A_2 {}^{p_2 t}. \qquad (7.17)$$

Постоянные интегрирования A_1 и A_2 находим из начальных условий. Для использования начального условия для индуктивности $i_L(0) = 0$ необходимо определить выражение для тока в электрической цепи:

$$i_L(t) = i_C(t) = C\frac{du_C}{dt} = C\left(p_1 A_1 e^{p_1 t} + p_2 A_2 {}^{p_2 t}\right). \qquad (7.18)$$

Подставляя при t = 0 начальные условия для $u_C(0) = E$ и $i_L(0) = 0$, получаем

$$\begin{cases} E = A_1 + A_2, \\ 0 = p_1 A_1 + p_2 A_2. \end{cases} \qquad (7.19)$$

Решая полученную систему уравнений, определяем значения постоянных интегрирования:

$$A_1 = -\frac{p_2 E}{p_1 - p_2}, \quad A_2 = \frac{p_1 E}{p_1 - p_2}. \qquad (7.20)$$

Тогда напряжение на емкости во время переходного процесса будет описываться выражением

$$U_C(t) = \frac{E}{p_1 - p_2}\left(p_1 e^{p_2 t} - p_2 e^{p_1 t}\right), \qquad (7.21)$$

а ток в контуре

$$i(t) = CE\left(\frac{p_1 \cdot p_2}{p_1 - p_2} e^{p_2 t} - \frac{p_1 \cdot p_2}{p_1 - p_2} e^{p_1 t} \right). \qquad (7.22)$$

Учитывая, что

$$p_1 \cdot p_2 = \alpha^2 - (\sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2})^2 = \omega_0^2 = 1/LC, \qquad (7.23)$$

получаем

$$i(t) = \frac{E}{L(p_1 - p_2)} \left(e^{p_2 t} - e^{p_1 t} \right). \qquad (7.24)$$

Используя выражение для тока $i(t)$, можно рассчитать u_L:

$$u_L(t) = L \frac{di}{dt} = \frac{E}{p_1 - p_2} \left(p_2 e^{p_2 t} - p_1 e^{p_1 t} \right). \qquad (7.25)$$

Временные диаграммы напряжений и тока в контуре во время переходных процессов для апериодического режима приведены на рис. 7.4.

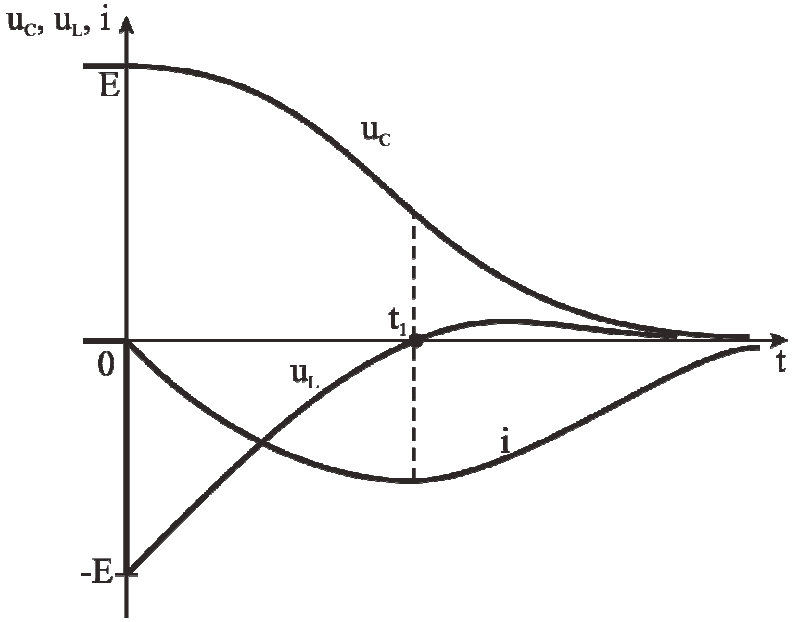


Рис. 7.4. Переходные процессы в RLC контуре для апериодического режима

На интервале $0 - t_1$ происходит разряд конденсатора и заряд индуктивности, далее при $t > t_1$ конденсатор и индуктивность разряжаются. В течение всего интервала $t > 0$ через резистор R протекает ток и запасенная в реактивных элементах энергия постепенно расходуется до нуля. Так как напряжение на конденсаторе при его разряде изменяется монотонно (без колебаний), переходный процесс называют апериодическим.

Рассмотрим случай, когда $Q > 0.5$, тогда корни характеристического уравнения (7.9) – комплексно-сопряженные:

$$p_{1,2} = -\alpha \pm j\omega_c. \qquad (7.26)$$

Следовательно, решение однородного дифференциального уравнения для этого случая записывается в виде

$$u_{св}(t) = Ae^{-\alpha t} \cdot \sin(\omega_c t + \Theta), \tag{7.27}$$

где A и Θ – постоянные интегрирования, для нахождения которых используются начальные условия $u_C(0) = E$ и $i_L(0) = 0$.

Для использования начального условия для индуктивности $i_L(0) = 0$ необходимо определить выражение для тока в электрической цепи:

$$\begin{aligned} i_L(t) &= i_C(t) = C\frac{du_C}{dt} = \\ &= -\alpha \cdot C \cdot A \cdot e^{-\alpha t} \cdot \sin(\omega_c t + \Theta) + \omega_c C \cdot A \cdot e^{-\alpha t} \cdot \cos(\omega_c t + \Theta). \end{aligned} \tag{7.28}$$

Подставляя при t = 0 начальные условия для $u_C(0) = E$ и $i_L(0) = 0$, получаем:

$$\begin{cases} E = A \cdot \sin\Theta, \\ 0 = -\alpha \cdot A \sin\Theta + \omega_c A \cos\Theta. \end{cases} \tag{7.29}$$

Решая полученную систему уравнений, определяем значения постоянных интегрирования:

$$A = \frac{\omega_0}{\omega_c} E, \quad \Theta = \operatorname{arctg}\frac{\omega_c}{\alpha}. \tag{7.30}$$

При больших добротностях $Q >> 0.5$ постоянная интегрирования $\Theta \approx 90^\circ$ и приближенно выражения для напряжений и токов во время переходного процесса можно записать в виде:

$$\begin{aligned} &u_C(t) \cong E\frac{\omega_0}{\omega_c} e^{-\alpha t} \cos\omega_c t,\ u_L(t) \cong -E\frac{\omega_0}{\omega_c} e^{-\alpha t} \cos\omega_c t,\ i_L(t) \cong \\ &\cong -\frac{E}{\omega_c L} e^{-\alpha t} \sin\omega_c t. \end{aligned} \tag{7.31}$$

Временные диаграммы напряжений на реактивных элементах C и L и тока в контуре показаны на рис. 7.5

В контуре во время переходных процессов имеет место колебательный процесс обмена энергией между емкостью и индуктивностью с частотой $\omega_c = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$. Интервал $T = 2\pi/\omega_c$ называют квазипериодом колебаний. Перезарядный ток i(t) протекает через сопротивление R и часть энергии, сосредоточенная в реактивных элементах, расходуется, поэтому переходный процесс имеет затухающий характер. Затухание происходит по экспоненциальному закону с коэффициентом затухания $\alpha = R/2L$. Чем больше сопротивление R, тем больше коэффициент затухания и тем быстрее завершается переходный процесс.

Для оценки скорости затухания используют декремент затухания:

$$\Delta = \frac{U_c(t)}{U_c(t+T)} = e^{-\alpha T_c}, \quad T_c = 2\pi/\omega_c$$

При $Q < 0.5$ переходный процесс из колебательного превращается в апериодический. Случай, когда $Q < 0.5$, является пограничным между колебательным и апериодическим. Теоретически можно представить себе контур без потерь с $R = 0$, в котором существуют незатухающие колебания с частотой

$\omega_c = \omega_0$. В контуре без потерь имеет место переменный обмен энергией между C и L, при котором энергия электрического поля конденсатора преобразуется в энергию магнитного поля индуктивности и наоборот. В реальных электрических цепях R > 0, поэтому переходный процесс имеет затухающий характер.

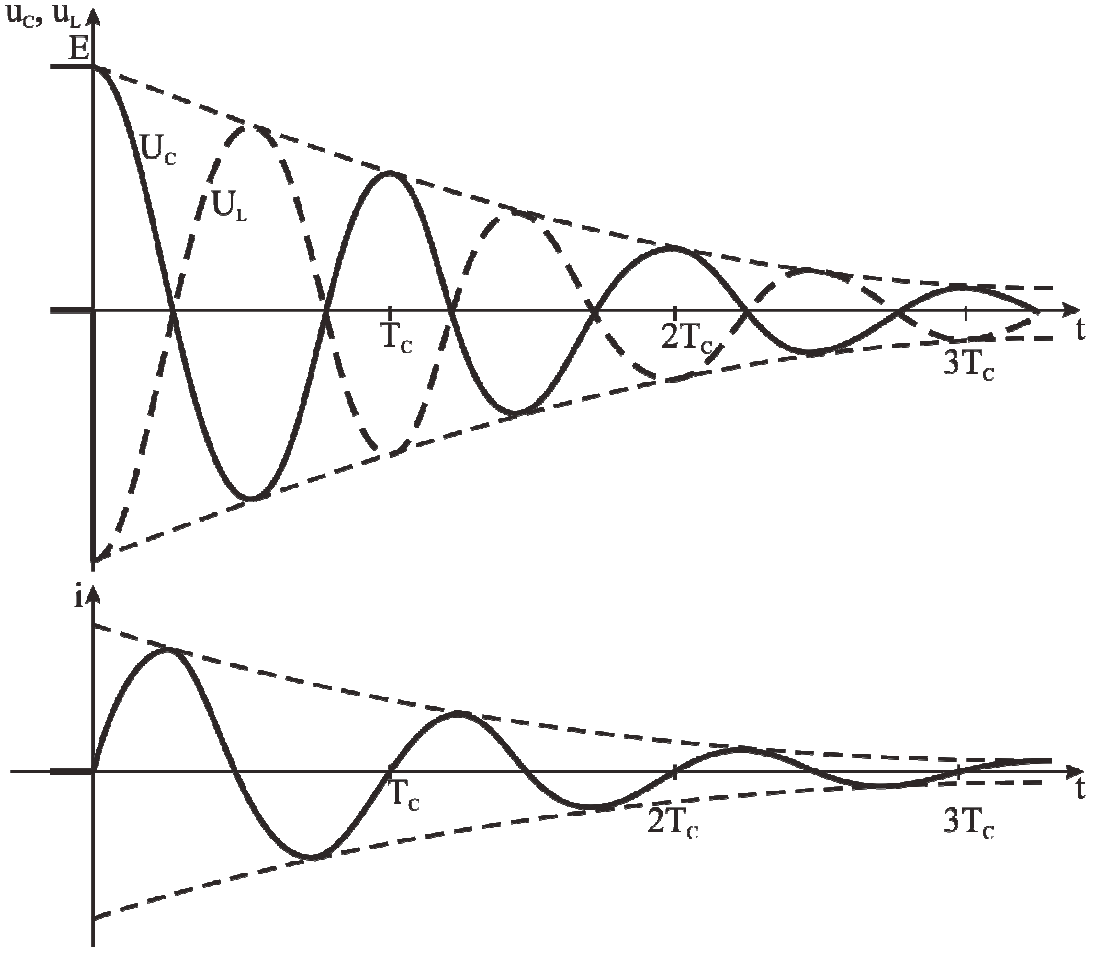


Рис. 7.5. Переходные процессы в RLC контуре для колебательного режима

Переходные процессы в параллельном колебательном контуре. Рассмотрим переходные процессы при подключении источника постоянной ЭДС к параллельному колебательному контуру (рис. 7.6).

В параллельном контуре в качестве независимой переменной выбирается ток через индуктивность $i_L(t)$, так как в этом случае упрощается определение постоянной интегрирования.

В исходном состоянии при $t<0$ источник ЭДС отключен от контура, $i_L(0)=0$, $U_C(0)=0$, начальные условия нулевые.

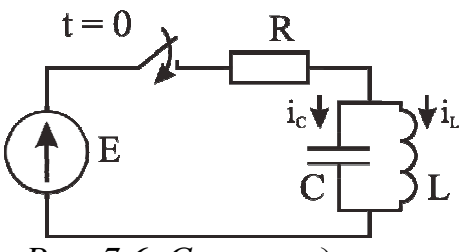


Рис. 7.6. Схема подключения постоянного источника ЭДС к параллельному RLC контуру

Решение дифференциального уравнения выглядит следующим образом:

$$i_L(t) = i_{св} + i_{пр}. \qquad (7.32)$$

Для составления характеристического уравнения найдем входное сопротивление цепи после коммутации

$$\dot{Z}_{вх} = R + \frac{j\omega L \cdot \frac{1}{j\omega C}}{j\omega L + 1/j\omega C}. \qquad (7.33)$$

После введения параметра $p = j\omega$ и преобразований получим характеристическое уравнение вида

$$p^2 + \frac{1}{RC}p + \frac{1}{LC} = 0. \qquad (7.34)$$

Корни характеристического уравнения имеют вид

$$p_{1,2} = -\frac{1}{2RC} \pm \sqrt{\frac{1}{4R^2C^2} - \frac{1}{LC}}. \qquad (7.35)$$

Добротность параллельного контура определяется выражением

$$Q = R/\rho,$$

где $\rho = \sqrt{L/C}$ – характеристическое сопротивление контура. При $Q > 0.5$ корни уравнения (7.34) комплексно сопряженные:

$$p_{1,2} = -\alpha \pm j\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}, \qquad (7.36)$$

где $\alpha = 1/2RC$ – коэффициент затухания.

Тогда решение однородного дифференциального уравнения записывается в виде

$$i_{св}(t) = Ae^{-\alpha t} \cdot \sin(\omega_c t + \Theta), \qquad (7.37)$$

Следует заметить, что в параллельном контуре, по схеме рис. 7.6, в отличие от последовательного контура (рис. 7.3), при увеличении сопротивления R затухание уменьшается, а добротность контура увеличивается.

Принужденная составляющая находится в установившемся режиме из схемы после коммутации, в которой индуктивность заменяется коротким замыканием, а емкость – разрывом цепи:

$$i_{пр} = E/R. \qquad (7.38)$$

Для случая $Q > 0.5$ изменение тока через индуктивность во время переходного процесса будет описываться функцией

$$i_L(t) = Ae^{-\alpha t} \cdot \sin(\omega_c t + \Theta) + E/R.$$

После дифференцирования тока $i(t)$ находим напряжение на индуктивности, которое равно напряжению на емкости

$$\begin{aligned} u_L(t) = u_C(t) = L\frac{di}{dt} = \\ = L \cdot A \cdot \left(-\alpha \cdot e^{-\alpha t} \cdot \sin(\omega_c t + \Theta) + \omega_c \cdot e^{-\alpha t} \cdot \cos(\omega_c t + \Theta)\right). \end{aligned} \qquad (7.39)$$

Подставляя в выражения для тока $i_L(t)$ и напряжения $U_C(t)$ начальные условия при $t = 0$, получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} 0 = A \cdot \sin\Theta + E/R, \\ 0 = -\alpha \cdot \sin\Theta + \omega_c \cos\Theta. \end{cases} \qquad (7.40)$$

Решая полученную систему уравнений, определяем значения постоянных интегрирования

$$A = -\frac{\omega_0}{\omega_c}\frac{E}{R}, \quad \Theta = \operatorname{arctg}\frac{\omega_c}{\alpha}. \tag{7.41}$$

Тогда для тока в цепи во время переходных процессов запишем выражение

$$i(t) = \frac{E}{R}\left(1 - \frac{\omega_0}{\omega_c}\right)e^{-\alpha t} \cdot \sin(\omega_c t + \Theta). \tag{7.42}$$

График изменения тока при добротности Q >> 1, когда Θ = 90, показан на рис. 7.7

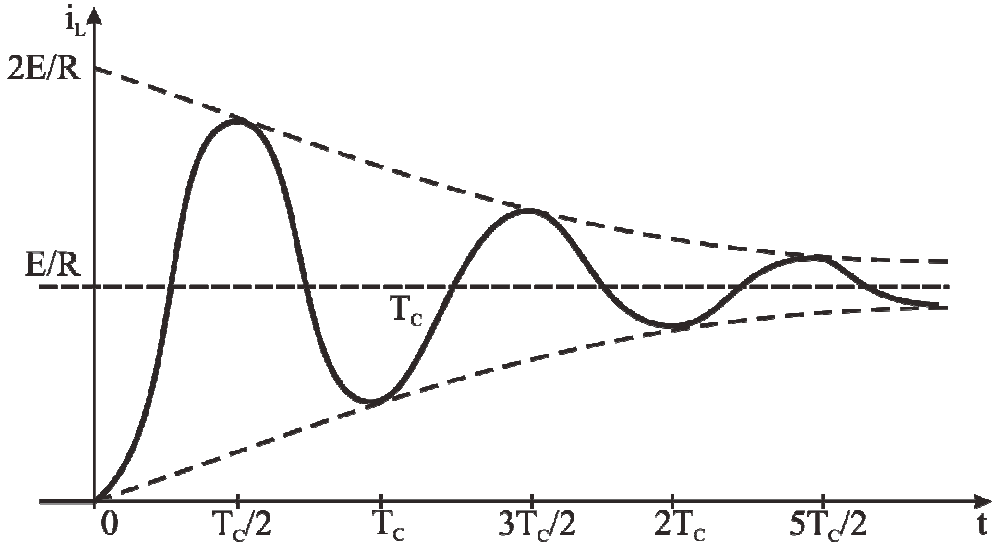


Рис. 7.7. Переходные процессы в параллельном контуре при подключении ЭДС

Методика выполнения работы

В качестве элементов исследуемых схем использовать переменный резистор R, конденсатор C_1 номиналом 1 мкФ, индуктивность L_1 номиналом 1 Гн.

Выставление наминала переменного резистора осуществляется при отключенном сопротивлении из схемы и контролируется с помощью мультиметра, переведенного в положение измерения сопротивления.

Для получения временных диаграмм напряжения используется первый канал осциллографа, который подсоединяется к элементу, подключенному к заземляющему контакту (точка 1 для каждой схемы рис. 7.8). На осциллографе необходимо выставить масштаб по оси времени – 1 мс/дел, а по оси напряжения – 2 В/дел. С помощью регуляторов смещения осциллографа временные диаграммы располагать таким образом, чтобы на экране наблюдался весь переходный процесс. На рисунке начало координат должно соответствовать началу переходного процесса. На осях временных диаграмм, зарисованных в отчете, необходимо обозначить измеряемые величины, их размерность и масштаб.

Программа работы

Перед выполнением лабораторной работы необходимо:

- составить отчет, который должен содержать краткие элементы теории, все исследуемые схемы, таблицы и расчеты, указанные в программе работы. Схемы и таблицы должны быть выполнены карандашом и в соответствии с требованиями ЕСКД;
- изучить лабораторный стенд (см. приложение), порядок проведения измерений электрических величин с помощью мультиметра VC 9808^{+}, работу генератора GFG -3015 и осциллографа АКИП-4115/3А, а также методику выполнения работы.

СТУДЕНТ, НЕ ПОДГОТОВИВШИЙ ОТЧЕТ, К ВЫПОЛНЕНИЮ ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЫ НЕ ДОПУСКАЕТСЯ.

При выполнении работы на генераторе сигналов специальной формы необходимо установить импульсное напряжение прямоугольной формы с частотой f = 20 Гц, амплитудой U_m = 5 В, напряжением смещения 2.5 В и скважностью 2 (асимметрия 50 %).

1. Исследование переходных процессов апериодического режима работы.

1.1. На переменном резисторе R выставить сопротивление R = 32 кОм и рассчитать добротность, учитывая, что внутреннее сопротивление источника ЭДС равно 100 Ом.

1.2. Собрать схему последовательной RLC-цепи согласно рис. 7.8,а и зарисовать полученную временную диаграмму напряжения на резисторе.

1.3. Собрать схему последовательной RLC-цепи согласно рис. 7.8,б и зарисовать временную диаграмму напряжения на индуктивности L отдельным рисунком.

1.4. Собрать схему последовательной RLC-цепи согласно рис. 7.8,в и зарисовать временную диаграмму напряжения на конденсаторе C отдельным рисунком.

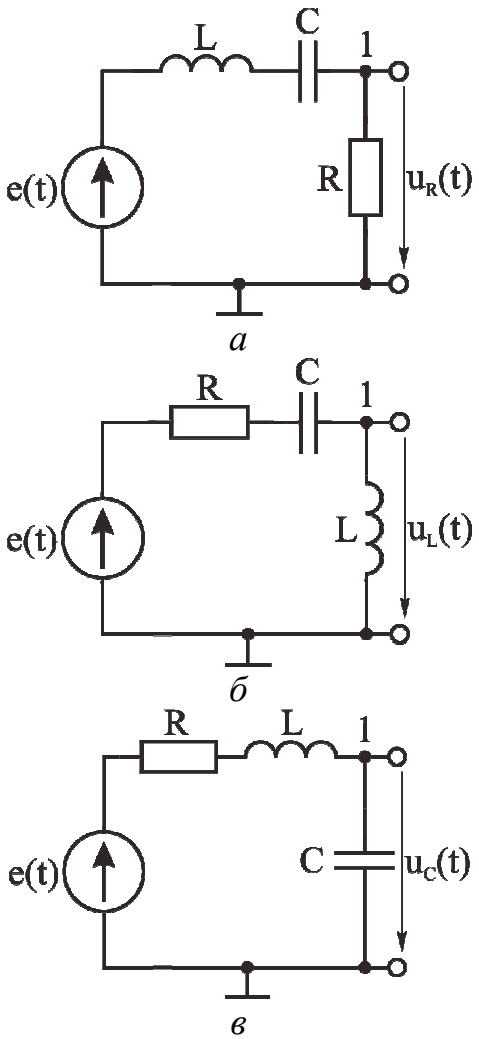


Рис. 7.8. Схема исследования напряжений на сопротивлении (а), индуктивности (б) и емкости (в) в последовательной RLC-цепи

2. Исследование переходных процессов в колебательном режиме и влияния изменения добротности на переходный процесс.

2.1. Собрать схему последовательной RLC-цепи согласно рис. 7.8,в.

2.2. На переменном резисторе R выставить сопротивление R = 400 Ом и рассчитать добротность, учитывая, что внутреннее сопротивление источника ЭДС равно 100 Ом. Полученные данные занести в таблицу. Зарисовать временную диаграмму напряжения на конденсаторе C при рассчитанном значении добротности.

2.3. На переменном резисторе R выставить сопротивление R = 600 Ом и рассчитать добротность, учитывая, что внутреннее сопротивление источника ЭДС равно 100 Ом. Полученные данные занести в таблицу. Зарисовать временную диаграмму напряжения на конденсаторе C при рассчитанном значении добротности.

2.4. На переменном резисторе R выставить сопротивление R = 1,4 кОм и рассчитать добротность, учитывая, что внутреннее сопротивление источника ЭДС равно 100 Ом. Зарисовать временную диаграмму напряжения на конденсаторе C при рассчитанном значении добротности.

3. По временным диаграммам напряжения на конденсаторе, полученным в п. 2.2 и 2.3, определить период колебаний T и коэффициент затухания α. Используя значения сопротивлений, измеренных в п. 2.2 и 2.3, рассчитать аналитическим методом период колебаний T и коэффициент затухания α. Полученные данные занести в таблицу.

Влияние добротности контура на переходный процесс

R, Ом	Q	$T_{расч}$	$\alpha_{расч}$	$T_{измер}$	$\alpha_{измер}$
400					
600					

Контрольные вопросы

1. Какие электрические цепи являются цепями второго порядка?
2. Приведите пример электрической цепи второго порядка с нулевыми начальными условиями для L и C элементов.
3. Приведите пример электрической цепи второго порядка с ненулевыми начальными условиями: а) для индуктивности, б) для емкости.
4. Запишите дифференциальное уравнение для RLC-цепи.
5. Что такое характеристическое уравнение и какой вид оно имеет для цепи второго порядка?
6. Какие значения могут иметь корни характеристического уравнения для цепи второго порядка?
7. Как выглядит решение дифференциального уравнения для электрической цепи второго порядка в случаях: а) апериодического переходного процесса; б) колебательного переходного процесса?
8. Что такое добротность LC контура и как она влияет на характер переходного процесса?
9. Что такое декремент затухания, что он характеризует, от чего зависит?

ТЕМА 5
ЛИНЕЙНЫЕ ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКИ

Электрическая цепь, имеющая две пары зажимов, называется четырехполюсником. Понятием четырехполюсника пользуются в тех случаях, когда необходимо знать токи и напряжения только в двух ветвях электрической цепи. Как четырехполюсники рассматриваются электрические фильтры, трансформаторы, длинные линии и др.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 8
ИССЛЕДОВАНИЕ ЛИНЕЙНЫХ ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКОВ

Цель работы – исследование работы и основных характеристик линейных четырехполюсников на примере дифференцирующих и интернирующих RC- и RL-цепей.

Общие сведения

Многие электротехнические устройства имеют два входных и два выходных зажима, причем их внутренняя электрическая цепь может быть весьма сложной. Такие устройства носят название четырехполюсников — пассивных, если внутри них отсутствуют источники энергии, и активных, если внутри них содержатся источники энергии.

Линейный пассивный четырехполюсник в общем случае может содержать внутри себя источники энергии, но с обязательным условием, что действие их взаимно компенсируется внутри четырехполюсника таким образом, что напряжения на входных, а также и на выходных разомкнутых зажимах равны нулю.

Четырехполюсник может быть обобщенно охарактеризован тремя независимыми параметрами, которые могут быть определены расчетом, если известно внутреннее строение четырехполюсника, а также экспериментально. Экспериментальное определение параметров четырехполюсника имеет особо важное значение, когда внутреннее строение четырехполюсника неизвестно.

Примерами пассивных четырехполюсников являются трансформатор (рис. 8.1,а), электрический фильтр (рис. 8.1,б), мостовая цепь (рис. 8.1,в). Они имеют два входных (1, 1') и два выходных (2, 2') зажима.

В дальнейшем будем рассматривать свойства четырехполюсников при установившихся

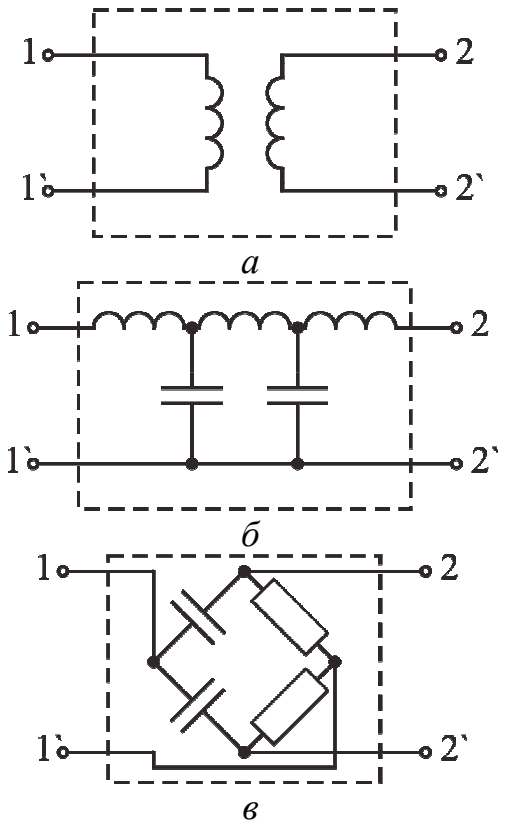


Рис.8.1. Примеры пассивных четырехполюсников

синусоидальных процессах.

Положительные направления напряжений и токов выберем, как показано на рис. 8.2,а. При этом положительное направление потока энергии на входных зажимах 1-1' будет к четырехполюснику, а на выходных зажимах 2-2' — от четырехполюсника. Такой выбор положительных направлений целесообразен, когда четырехполюсник рассматривается как передаточное устройство.

Пусть реальная схема четырехполюсника содержит n независимых контуров. В качестве первого выберем контур, включающий в себя источник энергии на входных зажимах 1-1'. В качестве второго выберем контур, включающий в себя приемник, присоединенный к выходным зажимам 2-2'. Будем рассматривать напряжение $\dot{U}_1$ на входных зажимах четырехполюсника как вызывающее токи в цепи. Составим уравнения по методу контурных токов. Решая полученные уравнения, получаем несколько уравнений четырехполюсников.

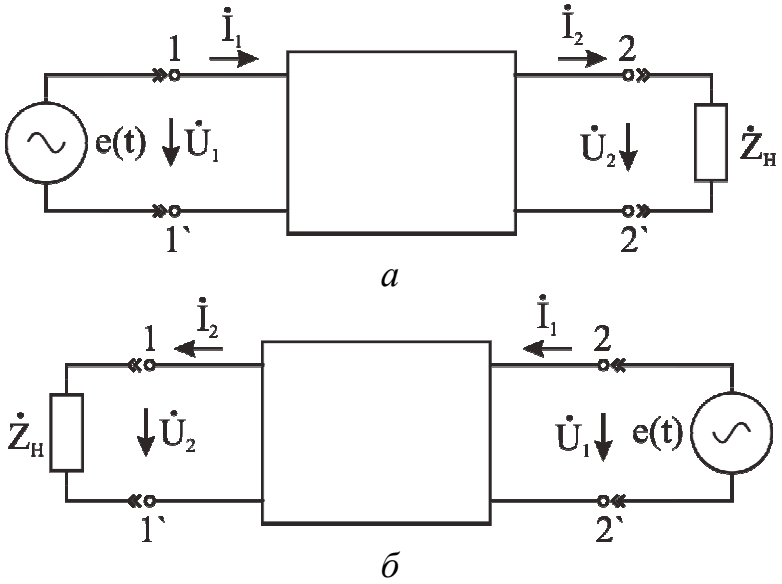


Рис. 8.2. Прямое (нагрузка включена со стороны выходных выводов - а) и обратное (нагрузка включена со стороны входных выводов - б) включение четырехполюсников

Решив полученную систему уравнений относительно напряжений $\dot{U}_1$ и $\dot{U}_2$, получим уравнения четырехполюсника, записанные через Z-параметры, имеющие размерность сопротивления:

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = \dot{Z}_{11}\dot{I}_1 + \dot{Z}_{12}\dot{I}_2 \\ \dot{U}_2 = \dot{Z}_{21}\dot{I}_1 + \dot{Z}_{22}\dot{I}_2 \end{cases},$$

при этом $\dot{Z}_{12} = -\dot{Z}_{21}$ (для линейной пассивной цепи).

Решив полученную систему уравнений относительно напряжений $\dot{I}_1$ и $\dot{I}_2$, получим уравнения четырехполюсника, записанные через Y-параметры, имеющие размерность проводимости:

$$\begin{cases} \dot{I}_1 = \dot{Y}_{11}\dot{U}_1 + \dot{Y}_{12}\dot{U}_2 \\ \dot{I}_2 = \dot{Y}_{21}\dot{U}_1 + \dot{Y}_{22}\dot{U}_2 \end{cases},$$

при этом $\dot{Y}_{12} = -\dot{Y}_{21}$ (для линейной пассивной цепи).

Наиболее распространенной формой записи уравнений четырехполюсника является такая, при которой входные величины $\dot{U}_1$ и $\dot{I}_1$ выражаются через выходные $\dot{U}_2$ и $\dot{I}_2$:

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = A\dot{U}_2 + B\dot{I}_2 \\ \dot{I}_1 = C\dot{U}_2 + D\dot{I}_2 \end{cases}. \qquad (8.1.)$$

Заметим, что параметры четырехполюсника A и D — безразмерные, B имеет размерность сопротивления, C — размерность проводимости. Между параметрами A, B, C и D четырехполюсника существует связь:

$$AD - BC = 1. \qquad (8.2)$$

В некоторых случаях оказывается целесообразным в качестве заданных и искомых величин четырехполюсника выбирать совокупности $\dot{I}_1$, $\dot{U}_2$ и $\dot{I}_2$, $\dot{U}_1$. При таком выборе уравнения четырехполюсника удобно представить через его H-параметры, называемые гибридными:

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = \dot{H}_{11}\dot{I}_1 + \dot{H}_{12}\dot{U}_2 \\ \dot{I}_2 = \dot{H}_{21}\dot{I}_1 + \dot{H}_{22}\dot{U}_2 \end{cases}.$$

Параметр $\dot{H}_{11}$ имеет размерность сопротивления, $\dot{H}_{22}$ — проводимости, параметры $\dot{H}_{12}$, $\dot{H}_{21}$ — безразмерные. Между H-параметрами существует связь $\dot{H}_{21} = \dot{H}_{12}$.

Если поменять местами входные и выходные зажимы четырехполюсника (см. рис. 8.2,а), то получим схему, изображенную на рис. 8.2,б [заменяем $\dot{U}_1$ на $\dot{U}_2$, $\dot{U}_2$ на $\dot{U}_1$, $\dot{I}_1$ на $-\dot{I}_2$ и $\dot{I}_2$ на $-\dot{I}_1$ в уравнениях четырехполюсника (8.1)]. Производя такую замену в уравнениях четырехполюсника (8.1) и учитывая уравнение (8.2), получаем уравнения четырехполюсника (рис. 8.2,б) в виде:

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = D\dot{U}_2 + B\dot{I}_2 \\ \dot{I}_1 = C\dot{U}_2 + A\dot{I}_2 \end{cases}.$$

Таким образом, если поменять местами вход и выход четырехполюсника, то в уравнениях меняются местами параметры A и D. Симметричным называют четырехполюсник, свойства которого одинаковы со стороны обеих пар зажимов (A = D).

Существует еще 2 формы записи уравнений четырехполюсника в системах B- и G-параметров соответственно:

$$\begin{cases} \dot{U}_2 = \dot{B}_{11}\dot{U}_1 + \dot{B}_{12}\dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 = \dot{B}_{21}\dot{U}_1 + \dot{B}_{22}\dot{I}_1 \end{cases},$$

$$\begin{cases} \dot{I}_1 = \dot{G}_{11}\dot{U}_1 + \dot{G}_{12}\dot{I}_2 \\ \dot{U}_2 = \dot{G}_{21}\dot{U}_1 + \dot{G}_{22}\dot{I}_2 \end{cases}.$$

Определение параметров четырехполюсника. Для экспериментального определения параметров четырехполюсников нет необходимости производить измерения при номинальных напряжения и токах. Достаточно выполнить измерения при холостом ходе ($Z_H = \infty$, $\dot{I}_2 = 0$) и при коротком замыкании ($Z_H = 0$, $\dot{U}_2 = 0$) на вторичных зажимах.

Рассмотрим это на примере А-параметров:

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = A\dot{U}_2 + B\dot{I}_2 \\ \dot{I}_1 = C\dot{U}_2 + D\dot{I}_2 \end{cases}.$$

Режим ХХ:
$$\begin{cases} \dot{U}_{10} = A\dot{U}_2 \\ \dot{I}_{10} = C\dot{U}_2 \end{cases},$$

где $\dot{U}_{10}$ - напряжение в первичной цепи на холостом ходу, $\dot{I}_{10}$ - ток в первичной цепи на холостом ходу.

Режим КЗ:
$$\begin{cases} \dot{U}_{1K} = B\dot{I}_2 \\ \dot{I}_{1K} = D\dot{I}_2 \end{cases},$$

где $\dot{U}_{1K}$ - напряжение в первичной цепи при коротком замыкании, $\dot{I}_{1K}$ - ток в первичной цепи при коротком замыкании.

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = A\dot{U}_2 + B\dot{I}_2 = \dot{U}_{10} + \dot{U}_{1K} \\ \dot{I}_1 = C\dot{U}_2 + D\dot{I}_2 = \dot{I}_{10} + \dot{I}_{1K} \end{cases}.$$

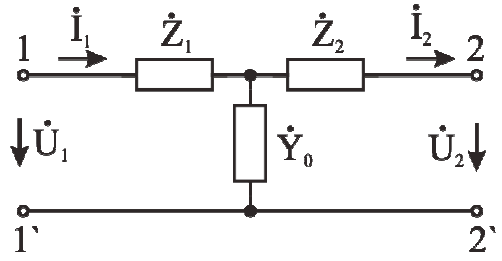
Так как пассивный четырехполюсник характеризуется только тремя независимыми параметрами, то простейшая эквивалентная схема четырехполюсника должна содержать три элемента. Таким образом, имеем две эквивалентные схемы замещения четырехполюсника – Т- и П-образные (рис. 8.3). Выразив напряжения и токи на входе и выходе четырехполюсника и сопоставив эти выражения с уравнениями четырехполюсника, можно получить связь между параметрами четырехполюсника и его эквивалентной схемы (в случае А-параметров эта связь представлена под соответствующей эквивалентной схемой четырехполюсника).

Четырехполюсники могут соединяться между собой различными способами. Наиболее распространенные способы соединения (показаны на рис. 8.4) – последовательный, параллельный и каскадный.

Часто возникает задача нахождения выходного тока (или напряжения) четырехполюсника под воздействием заданного тока (или напряжения) на входе. В этом случае возникает понятие передаточной функции, которая характеризует передачу некоторого воздействия от входа к выходу электрической цепи и определяется из соотношения

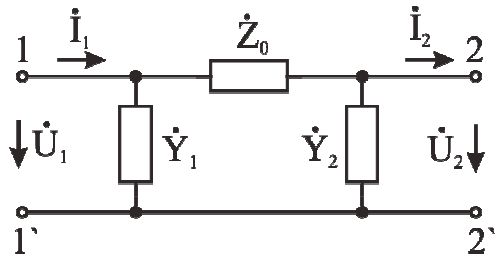
$$K(p) = \frac{X_2(p)}{X_1(p)},$$

где p - некоторый оператор, $X_1(p)$ и $X_2(p)$ - операторные изображения входной $x_1(t)$ и выходной $x_2(t)$ функций. В нашем случае $x_1(t)$ - это $i_1(t)$ или $u_1(t)$, а $x_2(t)$ - это $i_2(t)$ или $u_2(t)$. Наиболее часто применяются передаточные функции по току $K_I(p) = I_2(p)/I_1(p)$, по напряжению $K_U(p) = U_2(p)/U_1(p)$ и входное сопротивление $Z_{BX}(p) = U_1(p)/I_1(p)$.



$$Y_0 = C; \quad Z_1 = \frac{A-1}{C}; \quad Z_2 = \frac{D-1}{C}$$

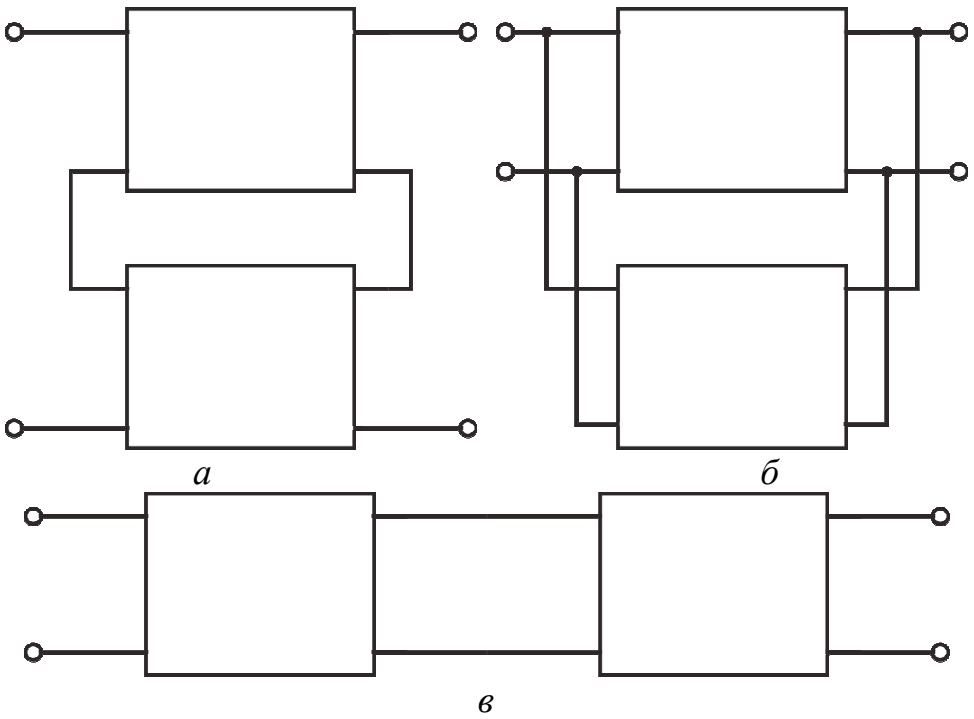
а



$$Z_0 = B; \quad Y_1 = \frac{D-1}{B}; \quad Z_2 = \frac{A-1}{B}$$

б

Рис. 8.3. Эквивалентные схемы замещения четырехполюсников Т- (а) и П- (б) образные, связь между параметрами четырехполюсника и его эквивалентной схемы в случае А-параметров



а *б*

в

Рис. 8.4. Соединение четырехполюсников: а – последовательное, б – параллельное, в – каскадное

Рассмотрим передаточную функцию по напряжению

$$K(p) = \frac{U_2(p)}{U_1(p)},$$

если в качестве оператора рассматривают $p = j\omega$, функция $K(j\omega)$ принимает смысл комплексной частотной характеристики четырехполюсника

$$\dot{K}(j\omega) = \frac{\dot{U}_2(j\omega)}{\dot{U}_1(j\omega)}.$$

Комплексную характеристику (коэффициент передачи) можно представить в виде

$$\dot{K}(j\omega) = K(\omega)e^{j\varphi(\omega)},$$

где $K(\omega) = |\dot{K}(j\omega)|$ называется амплитудно-частотной характеристикой (АЧХ), $\varphi(\omega)$ – фазочастотной характеристикой (ФЧХ) четырехполюсника. АЧХ – это зависимость коэффициента передачи четырехполюсника от частоты при воздействии на входе гармонического напряжения (тока). Если входное напряжение линейного четырехполюсника гармоническое:

$$u_1(t) = U_{m1}\sin(\omega t + \varphi_1),$$

то выходное напряжение также является гармоническим с той же частотой и другими значениями амплитуды U_{m_2} и фазы φ_2:

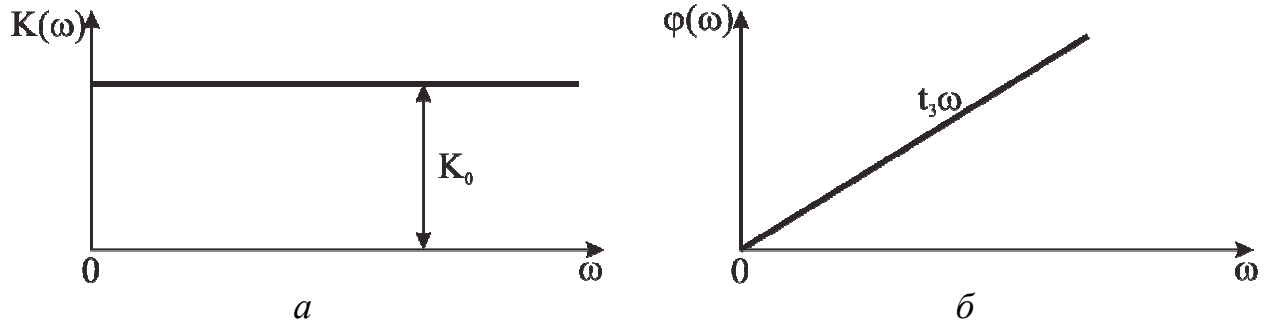
$$u_2(t) = U_{m2}\sin(\omega t + \varphi_2).$$

Тогда АЧХ и ФЧХ как зависимости от частоты определяются соотношениями:

$$K(\omega) = \frac{U_{m2}(\omega)}{U_{m1}(\omega)}, \quad \varphi(\omega) = \varphi_2(\omega) - \varphi_1(\omega).$$

Экспериментально АЧХ четырехполюсника измеряется путем изменения частоты входного гармонического напряжения при постоянной амплитуде входного напряжения $U_{m1}(\omega) = U_{m1} = \text{const}$. При этом нормированная зависимость выходного напряжения от частоты $U_{m2}(\omega)/U_{m1}$ будет являться АЧХ четырехполюсника.

Существует понятие идеального четырехполюсника, АЧХ которого постоянная, а ФЧХ является линейной функцией (рис. 8.5).



а *б*

Рис. 8.5. Идеальные амплитудно-частотная (а) и фазочастотная (б) характеристики

Реальные четырехполюсники содержат один или несколько реактивных элементов, и их АЧХ и ФЧХ отличаются от идеальных. В этом случае форма выходной реакции четырехполюсника не будет совпадать с формой входного

воздействия. Для расчета выходной реакции $u_2(t)$ четырехполюсника с заданным комплексным коэффициентом передачи $\dot{K}(j\omega)$ по известному входному воздействию $u_1(t)$ можно использовать спектральный метод, основанный на свойствах преобразования Фурье.

Весьма важной является возможность создания четырехполюсников, напряжение на выходе которых представляет собой производную или интеграл напряжения на входе. Такие четырехполюсники, получившие наименование дифференцирующих (переходных) и интегрирующих цепей, находят широкое применение в измерительной технике, в системах автоматики и в устройствах для интегрирования систем дифференциальных уравнений.

Рассмотрим простейшие дифференцирующие (переходные) и интегрирующие цепи, составим выражения передаточных функций, получим выражения для АЧХ и ФЧХ и построим их графики.

Интегрирующая RC-цепь может рассматриваться как линейный четырехполюсник (рис. 8.6).

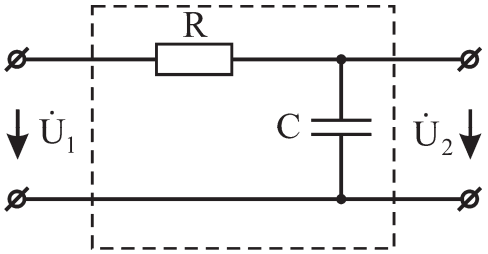


Рис. 8.6. Интегрирующая RC-цепь

Комплексный коэффициент передачи определяется как

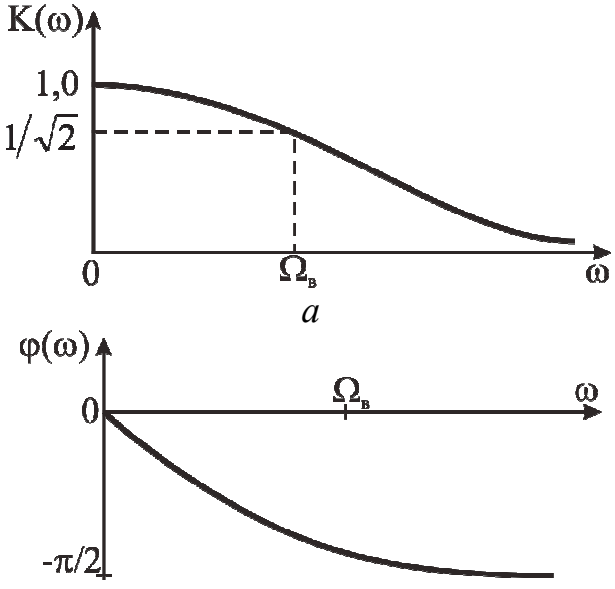
$$\dot{K} = \frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1} = \frac{1}{1 + j\omega RC}.$$

Интегрирующая RC-цепь характеризуется параметром постоянной времени $\tau = RC$. Находим АЧХ и ФЧХ интегрирующей RC-цепи:

$$K(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2\tau^2}},$$

$$\varphi(\omega) = \operatorname{arctg}(-\omega\tau).$$

Частотные характеристики интегрирующей RC-цепи показаны на рис 8.7. Частота среза $\Omega_{ср}$, на которой коэффициент передачи снижается до уровня $1/\sqrt{2} = 0.707$, называется верхней $\Omega_в = 1/\tau = 1/RC$.



а

б

Рис. 8.7. АЧХ (а) и ФЧХ (б) интегрирующей RC-цепи

Рассмотрим переходную RC-цепь (рис. 8.8) как линейный четырехполюсник. Находим комплексный коэффициент передачи переходной RC-цепи

$$\dot{K} = \frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1} = \frac{j\omega RC}{1 + j\omega RC}.$$

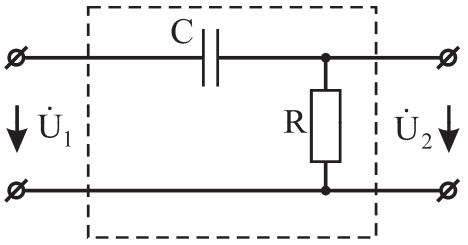
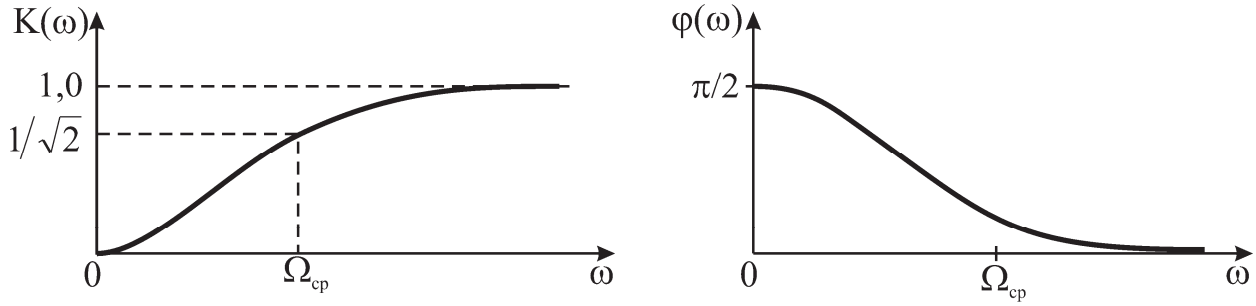


Рис. 8.8. Схема переходной RC-цепи

АЧХ и ФЧХ переходной RC-цепи описываются выражениями

$$K(\omega)=\frac{\omega RC}{\sqrt{1+\omega^2 R^2 C^2}},\quad \varphi(\omega)=\operatorname{arctg}(1/\omega RC).$$

Параметром переходной RC-цепи является постоянная времени $\tau = RC$. АЧХ и ФЧХ переходной RC-цепи показаны на рис 8.9. Переходная RC-цепь является фильтром верхних частот I порядка с частотой среза $\Omega_{ср} = 1/RC$.



а *б*

Рис. 8.9. АЧХ (а) и ФЧХ (б) переходной RC-цепи

Методика выполнения работы

Для снятия АЧХ линейных четырехполюсников необходимо к входным зажимам четырехполюсника (1-1') подключить генератор, а к выходным (2-2') – вольтметр (мультиметр в режиме измерения действующего значения переменного напряжения. Схема подключения показана на рис 8.10.

Выставить на генераторе сигналов специальной формы синусоидальное напряжение с амплитудой U_m =5 В (напряжение смещения – 2,5 В, асимметрия – 50 %) и, изменяя частоту генератора согласно таблице (от 20 до 200 Гц), фиксировать и заносить в таблицу показания вольтметра, затем для каждой частоты определить коэффициент передачи K и построить зависимость K(f).

Рис. 8.10. Схема для снятия АЧХ линейных четырехполюсников

Программа работы

Перед выполнением лабораторной работы необходимо:

- составить отчет, который должен содержать краткие элементы теории, все исследуемые схемы, таблицы и расчеты, указанные в программе работы. Схемы и таблицы должны быть выполнены карандашом и в соответствии с требованиями ЕСКД;
- изучить лабораторный стенд (см. приложение), порядок проведения измерений электрических величин с помощью мультиметра VC 9808^+, работу генератора GFG -3015 и осциллографа АКИП-4115/3А, а также методику выполнения работы.

СТУДЕНТ, НЕ ПОДГОТОВИВШИЙ ОТЧЕТ, К ВЫПОЛНЕНИЮ ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЫ НЕ ДОПУСКАЕТСЯ.

1. Исследование дифференцирующей (переходной) RC-цепи.

1.1. Собрать схему дифференцирующей RC-цепи (рис. 8.11,а). В качестве сопротивления R использовать резистор R_2 номиналом 1.5 кОм, а в качестве емкости C – конденсатор C_1 номиналом 1 мкФ.

1.2. Снять АЧХ дифференцирующей RC-цепи – зависимость коэффициента передачи от частоты K(f) (см. таблицу) и определить частоту среза f_{CP} графическим методом.

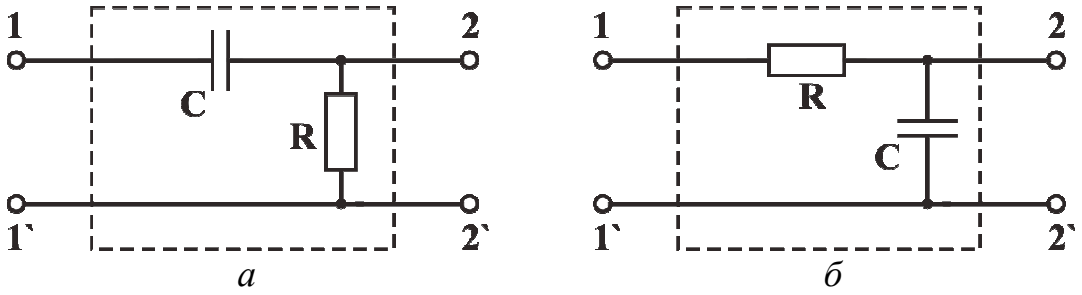


Рис. 8.11. Схемы дифференцирующей (а) и интегрирующей (б) RC-цепи

2. Исследование интегрирующей RC цепи.

2.1. Собрать схему интегрирующей RC цепи (рис. 8.11,б). В качестве сопротивления R использовать резистор R_2 номиналом 1.5 кОм, а в качестве емкости C – конденсатор C_1 номиналом 1 мкФ.

Коэффициент передачи и амплитудо-частотные характеристики

	RC-цепь (п.1)		RC-цепь (п.2)		RL-цепь (п.3)		RL-цепь (п.4)	
f, Гц	V, В	K	V, В	K	V, В	K	V, В	K
20								
40								
60								
…								
200								
f_{CP}, Гц								

2.2. Снять АЧХ интегрирующей RC-цепи – зависимость коэффициента передачи от частоты K(f) и определить (графическим методом) частоту среза f_{CP}.

3. Исследование дифференцирующей RL цепи.

3.1. Собрать схему дифференцирующей RL-цепи (рис. 8.12,а). В качестве сопротивления R использовать резистор R_2 номиналом 750 Ом, а в качестве индуктивности L – индуктивность L_1 номиналом 1 Гн.

3.2. Снять АЧХ дифференцирующей RL цепи – зависимость коэффициента передачи от частоты K(f) и определить (графическим методом) частоту среза f_{CP}.

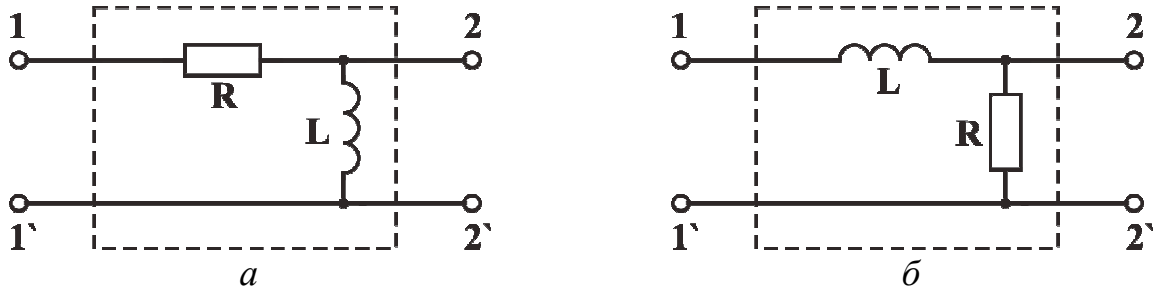


Рис. 8.12. Схемы дифференцирующей (а) и интегрирующей (б) RL-цепи

4. Исследование интегрирующей RL-цепи.

4.1. Собрать схему интегрирующей RL-цепи (рис. 8.12,б). В качестве сопротивления R использовать резистор R_2 номиналом 750 Ом, а в качестве индуктивности L – индуктивность L_1 номиналом 1 Гн.

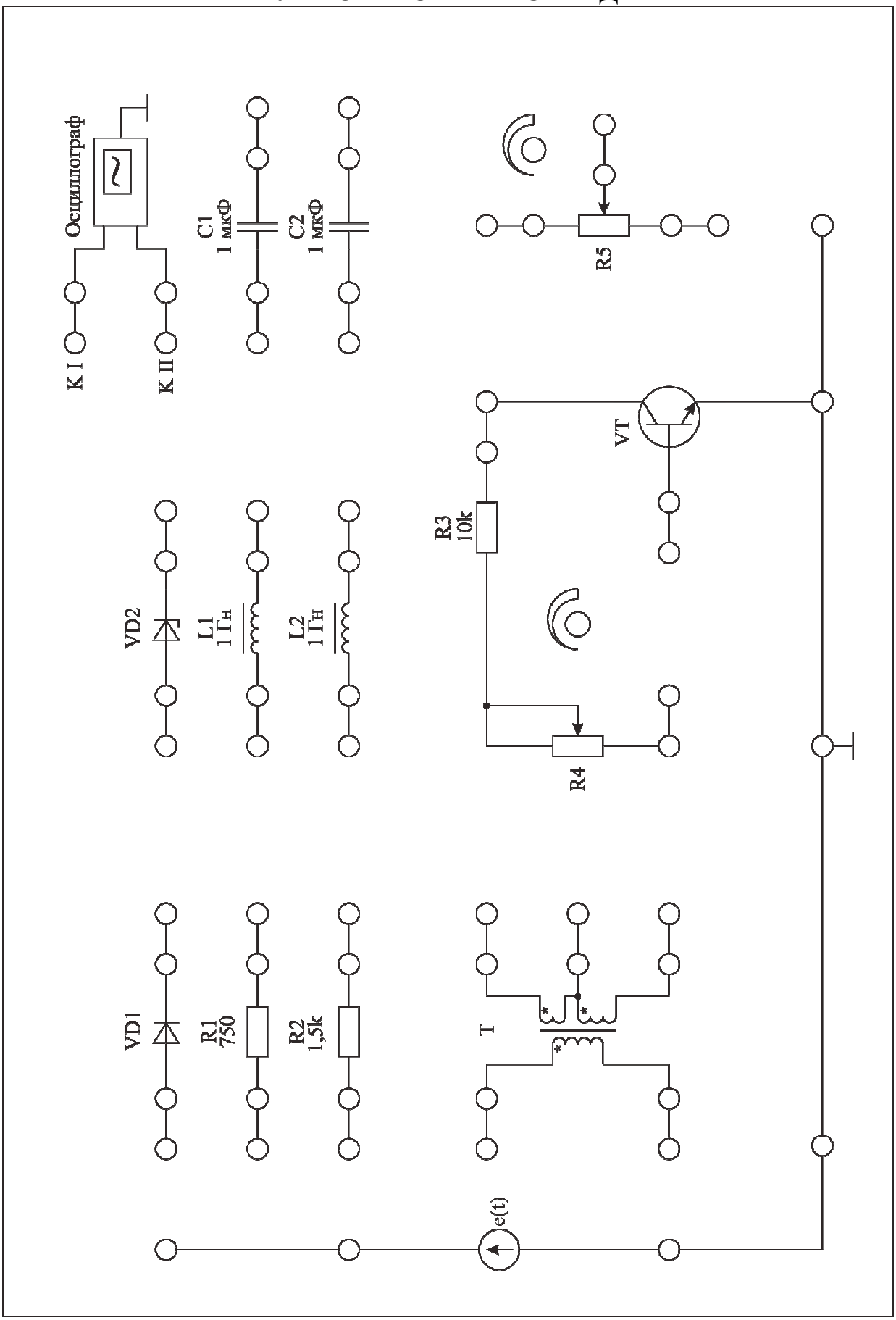
4.2. Снять АЧХ интегрирующей RL-цепи – зависимость коэффициента передачи от частоты K(f) и определить (графическим методом) частоту среза f_{CP}.

Контрольные вопросы

1. Дайте определение четырехполюсника и приведите его графическое обозначение.
2. Чем отличается пассивный четырехполюсник от активного?
3. Приведите примеры четырехполюсников. В чем необходимость применения теории четырехполюсников в описании устройств электротехники?
4. Запишите уравнения четырехполюсника через Z-параметры. Какую размерность они имеют?
5. Запишите уравнения четырехполюсника через Y-параметры. Какую размерность они имеют?
6. Запишите уравнения четырехполюсника через A-параметры. Какую размерность они имеют?
7. Запишите уравнения четырехполюсника через H-параметры. Какую размерность они имеют?
8. Как определяются параметры четырехполюсника?
9. Приведите эквивалентные схемы замещения четырехполюсников.
10. Определите связь параметров четырехполюсника с параметрами его эквивалентной схемы замещения.
11. Приведите способы соединения четырехполюсников.
12. Что такое передаточная функция? Когда возникает необходимость ее определения?
13. Дайте определение АЧХ.
14. Дайте определение ФЧХ.
15. Нарисуйте интегрирующую (дифференцирующую) RC-цепь. Рассчитайте комплексный коэффициент передачи, АЧХ и ФЧХ.
16. Нарисуйте интегрирующую (дифференцирующую) RL-цепь. Рассчитайте комплексный коэффициент передачи, АЧХ и ФЧХ.

Приложение

ЛАБОРАТОРНЫЙ СТЕНД



БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Теоретические основы электротехники: учеб. пособие/ В.С. Гуров, Е.В. Мамонтов, С.А. Круглов, Т.А. Глебова, Рязан. гос. радиотехн. ун-т. Рязань: РГРТУ, 2011. 140 с.

2. Иванов И.И. Электротехника: учеб. пособие. СПб.:Лань, 2008. 496 с.

3. Жаворонков М.А. Электротехника и электроника: учеб. пособие для вузов. - М.:Академия, 2005. 394 с.

4. Кузовкин В.А. Теоретическая электротехника: учеб. для вузов. М.:Логос, 2006. 479 с.

5. Демирчян К.С. Теоретические основы электротехники: в 3-х т. Том 1: учеб. для вузов. СПб.:Питер, 2003. 462 с.

6. Демирчян К.С. Теоретические основы электротехники: в 3-х т. Том 2: учеб. для вузов. СПб.:Питер, 2003. 575 с.

7. Демирчян К.С. Теоретические основы электротехники: в 3-х т. Том 3: учеб. для вузов. СПб.:Питер, 2003. 376 с.

8. Касаткин А.С. Электротехника: учеб. для вузов. М.:Издательский центр «Академия», 2005. 544 с.

9. Бессонов Л.А. Теоретические основы электротехники. Электрические цепи: учеб. для вузов. М.:Гардарики, 2002. 638 с.

10. Атабеков Г.И. Теоретические основы электротехники. Линейные электрические цепи: учеб. пособие. СПб.:Лань, 2009. 592 с.

11. Атабеков Г.И. Теоретические основы электротехники. Нелинейные электрические цепи. Электромагнитное поле: учеб. пособие. СПб.:Лань, 2009. 432 с.

12. Шатенье Г., Боэ М., Буи Д., Вайан Ж., Веркиидер Д. Учебник по общей электротехнике М.: Техносфера, 2009. 624 с.

13. Теоретические основы электротехники. методические указания к лабораторным работам. Ч.II. / Рязан. гос. радиотехн. ун-т.; сост.: В.С. Гуров, Е.В. Мамонтов, А.П. Борисовский, К.В. Шемарин, О.В. Киреева. Рязань, 2006. 40 с.

14. Теоретические основы электротехники: методические указания к лабораторным работам. Ч. I/ Рязан. гос. радиотехн. ун-т.; сост.: В.С. Гуров, Е.В. Мамонтов, А.П. Борисовский, С.А. Круглов, И.В. Филиппов, Г.П. Гололобов. Рязань, 2007. 32 с.

15. Теоретические основы электротехники: методические указания к расчетному заданию/ Рязан. гос. радиотехн. ун-т.; сост.: В.С. Гуров, Е.В. Мамонтов, С.А. Круглов, А.А. Дягилев. Рязань, 2007. 12 с.

16. Теоретические основы электротехники: методические указания к курсовому проектированию/ Рязан. гос. радиотехн. ун-т.; сост.: В.С. Гуров, Е.В. Мамонтов, С.А. Круглов. Рязань, 2007. 12 с.

17. Теоретические основы электротехники: методические указания к практическим занятиям и лабораторным работам, Ч. I, II/ Рязан. гос. радиотехн. ун-т.; сост.: В.С. Гуров, Е.В. Мамонтов, А.П. Борисовский, С.А. Круглов, И.В. Филиппов, А.В. Двойнин. Рязань, 2008. 92 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Тема 1. Резонансы в линейных электрических цепях синусоидального тока ……..... 3
Лабораторная работа № 5. Исследование явления резонанса в электрических цепях…….. 3
Тема 2. Электрические цепи с магнитно-связанными элементами…….... 14
Тема 3. Трехфазные цепи переменного тока……..…. 20
Тема 4. Переходные процессы в линейных электрических цепях……. 31
Расчетно-графическая работа № 4. Расчет переходного процесса первого порядка……...….. 32
Пример расчета переходного процесса первого порядка …….. 35
Расчетно-графическая работа № 5. Расчет переходного процесса второго порядка……...….. 39
Пример расчета переходного процесса второго порядка …….. 43
Лабораторная работа № 6. Исследование переходных процессов в линейных электрических цепях первого порядка…….. 46
Лабораторная работа № 7. Исследование переходных процессов в линейных электрических цепях второго порядка……... 57
Тема 5. Линейные четырехполюсники…….... 68
Лабораторная работа № 8. Исследование линейных четырехполюсников….. 68
Приложение. Лабораторный стенд……... 78
Библиографический список……... 79