КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 621.324

И.В. Белоконов, С.И. Гусев, А.И. Таганов

ИТОГИ РАБОТЫ И РЕШЕНИЯ ПЕРВОГО РОССИЙСКОГО СИМПОЗИУМА ПО НАНОСПУТНИКАМ

Рассматриваются итоги работы и решения Первого российского симпозиума по наноспутникам с международным участием, который прошел с 2 по 4 июня 2015 года в Самаре на базе Самарского государственного аэрокосмического университета (СГАУ) имени академика С.П.Королева (национального исследовательского университета) при участии Рязанского государственного радиотехнического университета по направлениям «Научная аппаратура и бортовые системы наноспутников», «Миссии и проекты наноспутников».

Ключевые слова: *российский симпозиум по наноспутникам, проблемы создания сверхмалых космических аппаратов, области применения наноспутников.*

Рязанский государственный радиотехнический университет как участник Инновационного Российского Космического Консорциума [1, 2] принял участие в работе Первого российского симпозиума по наноспутникам, организаторами которого являлись СГАУ (основной координатор – межвузовская кафедра космических исследований, заведующий кафедрой профессор И.В. Белоконов), АО «РКЦ «Прогресс», Поволжское отделение Российской академии космонавтики имени К. Э. Циолковского, при поддержке Федерального космического агентства (Роскосмос), Правительства Самарской области, Совета по космосу РАН, Международной астронавтической федерации.

В симпозиуме приняли участие представители различных организаций, среди которых:

научно-производственные организации и компании:

- АО «РКЦ «Прогресс» (г. Самара);
- ФГУП «ЦНИИ машиностроения» (г. Королев);
- ОАО «Российские космические системы» (г. Москва);
- НИИ космических систем им. А.А. Максимова – филиал ФГУП ГНПЦ им.М.В. Хруничева;
- ОАО «Сатурн» (г. Краснодар);
- ФГБУ НПО «Тайфун» (г. Обнинск);
- Центральная аэрологическая обсерватория Росгидромета (г. Москва);
- Центр международного космического сотрудничества «Ясный - Космотрас» (г. Москва);
- GAUSS Srl (Italy, Rome);
- ЗАО «СОКБ «Вектор» (г. Москва);
- ЗАО «Технологии ГЕОСКАН» (г. Москва);
- АО «ЦПТА» (г. Москва);
- ООО «СПУТНИКС» (г. Москва);

академические институты:

- Институт космических исследований РАН;
- Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН;
- Институт прикладной физики РАН;
- НИИ ядерной физики МГУ;
- ДТОО «Институт космической техники и технологий» (Казахстан);

высшие учебные заведения:

- Рязанский государственный радиотехнический университет;
- Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана;
- Morehead State University (USA);
- Белорусский государственный университет;
- Казахский национальный университет им. Аль-Фараби.

В рамках работы секций обсуждены актуальные темы, среди которых: миссии и проекты, проектирование, навигация, управление движением, научная аппаратура и бортовые системы, испытания и попутные запуски наноспутников.

В рамках симпозиума прошел круглый стол на тему «Мониторинг геофизических полей с использованием группировки наноспутников в рамках евразийского партнёрства», участники которого обменялись мнениями по поводу перспектив развития наноспутниковых технологий и применения сверхмалых космических аппаратов (СМКА) и их группировок для решения фундаментальных и прикладных задач.

Симпозиум отметил следующие существующие проблемы.

1. Одной из тенденций развития ракетно-космической техники (РКТ) в мире является миниатюризация элементной базы и уменьшение габаритов бортовых систем и космических аппаратов (КА) в целом. Принятые системы классификации рассматривают не только микро КА (массой от 10 до 50 кг), но и КА классов нано- (массой от 1 до 10 кг), пико- (массой от 0,1 до 1 кг) и фемто- (массой менее 0,1 кг).

В настоящее время заканчивается демонстрационная стадия развития СМКА и начинается стадия операционная. Таким образом, развитые страны переходят к систематическому целевому использованию СМКА.

2. Сам факт появления СМКА следует отнести к качественному скачку в развитии РКТ. Благодаря этому появляются возможности:

- существенного уменьшения сроков создания и снижения стоимости КА;

- расширения номенклатуры, повышения качества и объема предоставления космических услуг;

- комплексирования таких КА, создания из них орбитальных структур с улучшенными технико-экономическими показателями, функциональными возможностями, надежностью и отказоустойчивостью.

3. К проблемным вопросам создания отечественных СМКА следует отнести:

- отсутствие правовой и нормативно-технической базы, регламентирующей роль и место СМКА в круге социально-экономических и научных задач, решаемых с помощью космических средств, порядок и технологию их создания;

- ограничение загрязнения околоземных орбит пассивными СМКА, прекратившими активное существование;

- создание отечественной микроэлектронной базы и микроэлектромеханических систем (МЭМС) для использования в условиях воздействия факторов космического пространства;

- создание маломассогабаритной целевой аппаратуры, включая оптико-электронные и радиотехнические комплексы, для установки на борт СМКА;

- создание средств выведения СМКА на орбиту, включая средства выведения сверхлегкого класса и пусковые устройства для ручного выведения СМКА (деплоеров) с борта МКС, последних ступеней РН, с РБ и автоматических крупногабаритных КА;

- создание перспективных (адаптация существующих) наземных средств управления СМКА, приема и распространения целевой информации;

- создание маломассогабаритных систем электропитания высокой мощности;

- стандартизация требований к конструкции российских СМКА.

Симпозиум рекомендует совместными усилиями заинтересованных организаций и отдельных специалистов разработать и представить в Роскосмос и Правительство РФ предложения по проектам концепции и программы работ по созданию и целевому использованию СМКА.

Необходимо также предусмотреть в целевых программах Роскосмоса проведение работ по разработке правовой и нормативно-технической базы, определяющей правила создания и использования СМКА в РФ.

Заинтересованным организациям и отдельным специалистам необходимо конкретизировать проект программы работ по созданию и целевому использованию СМКА в виде проектов, тематических карточек с техническим и технико-экономическим обоснованием; активизировать участие в разработке национальных и международных стандартов, регламентирующих требования к конструкции, технологии изготовления и порядку эксплуатации СМКА.

Симпозиум принял решения о своевременности и актуальности проведения данного мероприятия, ориентированного на обсуждение проблем наноспутниковых технологий и создания сверхмалых космических аппаратов. Первоочередной задачей отмечено создание СМКА, в том числе форм-фактора CubeSat в научно-образовательных целях, а также для отработки перспективных космических технологий.

Для ускорения развития наноспутниковых технологий, повышения качества космического образования и формирования кадров, обладающих компетенциями, необходимыми для устойчивого инновационного развития РКТ в России, симпозиум решил считать целесообразной разработку проекта группировки научно-образовательных наноспутников с ее развертыванием в 2018 году. Целью группировки должно являться решение фундаментальной задачи мониторинга геофизических полей, конкретизация которой будет осуществлена после обсуждения на экспертной комиссии Совета РАН по космосу. Симпозиум решил также обратиться к Федеральному космическому агентству с просьбой поддержать работу и, в случае положительного решения, определить порядок развертывания российской группировки научно-образовательных спутников на орбите.

В рамках отдельных консультаций рассматривались заинтересованными организациями вопросы подготовки квалифицированных кадров для аэрокосмических отраслей в свете решений задач Инновационного Российского Космического Консорциума [1, 2]. При этом в частных дискуссиях обсуждались вопросы использования потенциала и ресурсов международного образовательного проекта Tempus NETCENG для распространения передового опыта в образовательной сфере и подготовке магистрантов и аспирантов [3-5].

В докладе от РГРТУ авторов В.С. Гурова, А.И. Таганова, С.И. Гусева на тему: «Задачи и перспективные направления научно-образовательного центра «Космические технологии» были отражены основные направления, планы и результаты РГРТУ по созданию современных лабораторий в университете по космической тематике, а также планы создания студенческих наноспутников с актуальной учебно-научной миссией.

Так, в бизнес-инкубаторе РГРТУ на кафедре «Космические технологии» созданы ряд специализированных лабораторий и научно-образовательных центров подготовки аспирантов и магистрантов [1,2]:

- научно-учебная лаборатория геоинформационных систем и технологий, в которой развернуты современные отечественные и зарубежные программно-аппаратные комплексы обработки аэрокосмических данных с аэрокосмических систем наблюдения Земли;
- научно-учебная лаборатория проектирования радиоэлектронных устройств беспилотных аэрокосмических аппаратов, моделирования и проведения научных экспериментов;
- научно-учебная лаборатория проектирования, экспериментального производства и исследования систем малых космических аппаратов и наземных систем приема и обработки данных с аэрокосмических систем наблюдения Земли;
- научно-учебная лаборатория «чистая комната» для выполнения сборочно-монтажных и наладочных работ при создании космических аппаратов формата Cubesat (пико/нано/микроспутников) и проведения научных исследований;
- учебно-научный центр, предназначенный для контроля и управления полетами МКА (пико/нано/микроспутниками), для космического радиомониторинга, для приема и обработки данных с космических аппаратов, а также для проведения научных исследований;
- производственно-испытательный центр МКА, в котором имеется участок станков с ЧПУ для изготовления несущих конструкций и механических узлов МКА, автоматизированная линия для изготовления печатных плат, сборки модулей, выполнения электромонтажа модулей и пайки печатных плат.

На базе научно-методического и инструментального обеспечения научно-учебных лабораторий кафедры космических технологий и ее научно-образовательного центра могут проводиться и проводятся НИОКР по следующим приоритетным научным направлениям [1,2].

1. Разработка математического, программного и технического обеспечения для вычислительных комплексов и космических систем обработки сигналов, изображений и полей.
2. Создание радиотехнических, информационных и телекоммуникационных космических устройств и систем, в том числе по профилю сверхмалых малых космических аппаратов.
3. Разработка физических основ, систем проектирования и технологий создания электронных и микроэлектронных космических приборов и устройств, в том числе наноспутников.
4. Создание базовых информационных технологий управления наукоемкими проектами космических устройств и систем в условиях неопределенности и нечеткости проектных данных [6,7].

Библиографический список

1. *Гуров В.С., Таганов А.И., Гусев С.И.* Вопросы менеджмента деятельности научно-образовательного центра космических технологий // Вестник Рязанского государственного радиотехнического университета. 2014. № 49. С.118-123.

2. *Гуров В.С., Таганов А.И., Гусев С.И.* Внедрение в учебно-научную деятельность РГРТУ технологий подготовки специалистов космической отрасли в рамках задач космического научно-образовательного инновационного консорциума // Труды VII Всероссийской научно-технической конференции «Актуальные проблемы ракетно-космического приборостроения и информационных технологий».

3. www.netceng.eu.

4. *Таганов А.И.* Выполнение в РГРТУ Международного проекта Tempus NETCENG: Задачи, планы, результаты // Вестник Рязанского государственного

радиотехнического университета. 2014. № 50-1. С. 3-4.

5. *Бриндикова И.В., Воеводин А.А., Гуров В.С., Корячко В.П., Таганов А.И., Чернышев С.В.* Системно-функциональное построение автоматизированной системы дистанционного обучения по направлению «Глонасс» // Вестник Рязанского государственного радиотехнического университета. 2010. № 33. С. 82 - 89.

6. *Гуров В.С., Еремеев В.В., Таганов А.И.* Научно-методические аспекты реализации образовательной системы по космическим технологиям // Сборник докл. 6-й международной НТК «Космонавтика. Радиотехника. Геоинформатика». – Рязань:РГРТУ, 2013. - С. 72.

7. *Таганов А.И.* Основы идентификации, анализа и мониторинга проектных рисков качества программных изделий в условиях нечеткости. М.: Горячая линия – Телеком, 2012. 224 с.

УДК 621.391.2

А.И. Бакулин

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ ФУНКЦИИ С ОГРАНИЧЕННЫМ СПЕКТРОМ

Показано, что функция с ограниченным спектром может быть представлена амплитудным спектром и плотностью вероятности, порождаемой функцией, с точностью до преобразований инверсии и сдвига, оценено влияние сдвига частоты исходной функции.

Ключевые слова: *спектр, плотность вероятности.*

Введение. Функции с ограниченным спектром обладают свойством полностью определяться отсчетами, взятыми через интервалы, зависящие от ширины спектра. Это свойство, являющееся содержанием теоремы Котельникова, играет фундаментальную роль в цифровой связи, так как передаваемые сигналы с необходимым для практики приближением имеют ограниченный спектр.

В этой связи представляется очевидным, что расширение знаний о свойствах функции с ограниченным спектром может иметь практическую значимость в области обработки информации.

Цель работы. Положим, что случайная величина, равномерно распределенная на интервале $\left[-x_0, x_0\right]$, подвергается функциональному преобразованию по закону

$$y = f(x) = \sum_{i=1}^{N} a_i \cos(i\omega x + \varphi_i). \qquad (1)$$

При этом считаем $\left\{a_i\right\}$ заданными величинами, $\omega = \pi/x_0$, N – конечная величина. Преобразование (1) порождает на выходе случайную величину, имеющую плотность вероятности $w(y)$. Ставится задача определения тех изменений фазового спектра $\left\{\varphi_i\right\}$, которые не приводят к изменению $w(y)$, а также влияния сдвига частоты в (1).

Теоретическая часть. Запишем характеристическую функцию, соответствующую $w(y)$ [1]:

$$\theta(\upsilon) = \frac{1}{2x_0} \int_{-x_0}^{x_0} \mathrm{e}^{\,j\upsilon\sum_{i=1}^{N} a_i \cos(i\omega x + \varphi_i)}\, dx. \qquad (2)$$

Последнее выражение преобразуем, используя известное разложение [2]

$$\mathrm{e}^{jz\cos\phi} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} j^n\, \mathrm{e}^{jn\varphi} J_n(z), \qquad (3)$$

где $J_n(z)$ – функция Бесселя первого рода целого порядка.

Покажем, что ряд (3) сходится абсолютно. Абсолютная сходимость ряда легко устанавливается, если воспользоваться признаком сходимости Даламбера. Записывая $J_n(z)$ в виде ряда, получаем:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left|J_{n+1}(z)\right|}{\left|J_n(z)\right|} \approx \lim_{n\to\infty} \frac{z}{2(n+1)} = 0,$$

что свидетельствует об абсолютной сходимости ряда (3) при всех конечных значениях z. Очевидно, что (2) есть произведение рядов, аналогичных (3). Ввиду их абсолютной сходимости ряды можно перемножать, и выражение (2) представляется в виде:

$$\theta(\upsilon) = \frac{1}{2x_0} \int_{-x_0}^{x_0} \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \cdots \sum_{n_N=-\infty}^{\infty} j^{\sum_{i=1}^{N} n_i}\, \mathrm{e}^{\,j\sum_{i=1}^{N} n_i \varphi_i} \times$$
$$\times \prod_{i=1}^{N} J_{n_i}(a_i \upsilon)\, \mathrm{e}^{\,j\sum_{i=1}^{N} i n_i \omega x}\, dx. \qquad (2')$$

Рассмотрим интеграл, входящий в (2′):

$$\int_{-x_0}^{x_0} \exp\left(j\sum_{i=1}^{N} in_i\omega x \right) dx.$$

В нем n_i могут принимать любые целые значения, включая и ноль. Легко видеть, что с учетом того, что $\omega = \pi/x_0$

$$J = \int_{-x_0}^{x_0} \exp\left(j\sum_{i=1}^{N} in_i\omega x \right) dx = 2x_0 \frac{\sin\left(\pi\sum_{i=1}^{N} in_i \right)}{\pi\sum_{i=1}^{N} in_i}.$$

Из последнего соотношения получаем, что $J = 2x_0$, если

$$\sum_{i=1}^{N} in_i = 0. \qquad (4)$$

Если (4) не выполняется, $J = 0$.

Сказанное позволяет (2′) представить в виде:

$$\theta(\upsilon) = \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \cdots \sum_{n_N=-\infty}^{\infty} j^{\sum_{i=1}^{N} n_i} \mathrm{e}^{j\sum_{i=1}^{N} n_i\varphi_i} \prod_{i=1}^{N} J_{n_i}(a_i\upsilon). \qquad (5)$$

Частным случаем выполнения условия (4) есть $n_i = 0, \forall i$, что дает в (5) слагаемое $\prod_{i=1}^{N} J_0(a_i\upsilon)$, которое является характеристической функцией суммы N независимых случайных величин, распределенных по закону синуса со случайной фазой. Эта функция не зависит от $\{\varphi_i\}$, поэтому в дальнейшем, чтобы иметь дело только со слагаемыми, зависящими от $\{\varphi_i\}$, введем обозначение

$$\theta^{-}(\upsilon) = \theta(\upsilon) - \prod_{i=1}^{N} J_0(a_i\upsilon), \qquad (5\text{-}1)$$

то есть в $\theta^{-}(\upsilon)$ не предполагается суммирование для $n_i = 0, \forall i$.

Условие (4) можно записать в виде:

$$m\left(n_1^0 + 2n_2^0 + 3n_3^0 + \ldots + Nn_N^0 \right) = 0, \qquad (4\text{-}1)$$

где $n_i^0\ \forall i$ удовлетворяют (4), но не имеют общих множителей, отличных от единицы.

Так как по характеру задачи n_i – нули и целые числа, то n_i^0 должны быть также нулями и целыми числами, $m = \pm$ (1, 2,…). Из (4-1) следует, что

$$n_i = mn_i^0. \qquad (4\text{-}2)$$

Очевидно, что (4-1) исчерпывает все возможные значения n_i, удовлетворяющие (4).

Сказанное выше позволяет записать:

$$\theta^{-}(\upsilon) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n_1^0=-\infty}^{\infty} \cdots \sum_{n_N^0=-\infty}^{\infty} \left[j^{m\sum_{i=1}^{N} n_i^0} \prod_{i=1}^{N} J_{mn_i^0}(a_i\upsilon) \mathrm{e}^{jm\sum_{i=1}^{N} n_i^0\varphi_i} + \right.$$
$$\left. + j^{-m\sum_{i=1}^{N} n_i^0} \prod_{i=1}^{N} J_{-mn_i^0}(a_i\upsilon) \mathrm{e}^{-jm\sum_{i=1}^{N} n_i^0\varphi_i} \right].$$

Последнее выражение упрощается, если учесть, что

$$j^{m\sum_{i=1}^{N} n_i^0} \prod_{i=1}^{N} J_{mn_i^0}(a_i\upsilon) = j^{-m\sum_{i=1}^{N} n_i^0} \prod_{i=1}^{N} J_{-mn_i^0}(a_i\upsilon),$$

вытекающее из известного равенства для функции Бесселя $J_{-n} = (-1)^n J_n$.

После упрощения получаем (для $N > 1$):

$$\theta^{-}(\upsilon) = 2\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n_1^0=-\infty}^{\infty} \cdots \sum_{n_N^0=-\infty}^{\infty} j^{m\sum_{i=1}^{N} n_i^0} \left(\prod_{i=1}^{N} J_{mn_i^0}(a_i\upsilon) \right) \cos\left(m\sum_{i=1}^{N} n_i^0\varphi_i \right). \qquad (6)$$

Выражение (6) с учетом (5-1) и (4-1) полностью эквивалентно соотношению (5) в смысле зависимости характеристической функции от фазового спектра $\varphi_i\ \forall i$, но оно более удобно для дальнейшего анализа. Из (6), в частности, следует, что замена φ_i на $-\varphi_i$ ввиду четности функции $\cos x$ оставляет неизменным выражение (6). Замена φ_i на $-\varphi_i$ равносильна замене в исходной функции (1) x на $-x$, что является преобразованием инверсии. Таким образом, из (6) следует, что преобразование инверсии исходной функции оставляет неизменной $\theta^{-}(\nu)$, следовательно, и $w(y)$.

Рассмотрим общий случай влияния изменения фазового спектра на $\theta^{-}(\upsilon)$, для чего дадим произвольное приращение фазы δ_i:

$$\varphi_i' = \varphi_i + \delta_i.$$

С учетом этого имеем:

$$\cos m\sum_{i=1}^{N} n_i^0 \left(\varphi_i + \delta_i \right) = \cos m\sum_{i=1}^{N} n_i^0\varphi_i \cdot \cos m\sum_{i=1}^{N} n_i^0\delta_i -$$
$$-\sin m\sum_{i=1}^{N} n_i^0\varphi_i \cdot \sin m\sum_{i=1}^{N} n_i^0\delta_i.$$

Условием неизменности $\theta^{-}(\nu)$ при добавлении δ_i является одновременное выполнение соотношений

$$\cos m\sum_{i=1}^{N} n_i^0\delta_i = 1, \quad \sin m\sum_{i=1}^{N} n_i^0\delta_i = 0,$$

что равносильно равенству

$$m\sum_{i=1}^{N} n_i^0\delta_i = 2\pi k, \quad k = 0,1,2,\ldots \qquad (7)$$

Проанализируем возможность выполнения равенства (7). Суммирование в нем идет до N.

Число возможных n_i^0, удовлетворяющих (4-1) при $N > 2$, гораздо больше N. Обозначим возможные комбинации n_i^0, удовлетворяющие (4-1) в виде $\left\{n_i^0\right\}_l$. Если $N=1$, $\left\{n_i^o\right\}_l = \left\{0\right\}_1$ и (7) выполняется для любых δ1, а $k=0$. Это согласуется с тем, что в данном случае $\theta(\nu) = J_0(a_1, \nu)$. При $N=2$

$\left\{n_i^0\right\}_l = \left\{\begin{matrix} 2 \\ -1 \end{matrix}\right\}_1$ (возможная смена знаков отражена в m). Соотношение (7) при этом представляется в виде

$$2\delta_1 - \delta_2 = 2\pi k/m. \qquad (7\text{-}1)$$

Если $\delta_1 = \delta_0$ и $\delta_2 = 2\delta_0$, то $2\delta_1 - \delta_2 = 0$ и правая часть (7-1) также должна обращаться в ноль, откуда следует, что k = 0. Рассмотренное преобразование фаз реализуется при операции сдвига. Действительно, если сдвиг равен Δ, то полная фаза слагаемых в (1) записывается $i\omega\left(t+\Delta\right) + \varphi_i = i\omega t + i\delta_0 + \varphi_i$, где $\delta_0 = \omega\Delta$. Из (7-1) следует, что это равенство не выполняется, если δ_1 и δ_2 не соответствуют операции сдвига. Рассмотрим вариант $N=3$. При этом число комбинаций $\left\{n_i^0\right\}_l$ неограниченно возрастает. Укажем некоторые из них:

$$\left\{\begin{matrix} n_1^0 \\ n_2^0 \\ n_3^0 \end{matrix}\right\}_l = \left\{\begin{matrix} 2, & 3, & 0, & 1, & 1, & 7... \\ -1, & 0, & 3, & 1, & 4, & 1... \\ 0, & -1, & -2, & -1, & -3, & -3... \end{matrix}\right\}. \qquad (8)$$

Не повторяя рассуждений предыдущего случая, заключаем, что при $N=3$ равенство (7) превращается в бесконечномерную систему уравнений вида

$$n_{1l}^0\delta_1 + n_{2l}^0\delta_2 + n_{3l}^0\delta_3 = 2\pi k/m,$$

которая имеет решение только при $\delta_i = i\delta_0$, то есть при операции сдвига в (1).

Рассмотрение варианта $N > 3$ ничего нового не дает.

На основании изложенного можно утверждать, что любые изменения фазового спектра $\left\{\varphi_i\right\}$, не совпадающие с операциями инверсии и сдвига в (1), приводят к изменению плотности вероятности $w(y)$, порождаемой (1). Сказанное можно сформулировать в понятиях более близких методам обработки информации.

Функция с ограниченным спектром определяется амплитудным спектром (нормированным) и порождаемой ею плотностью вероятности с точностью до операций сдвига и инверсии.

С точки зрения практических приложений важно знать влияние сдвига по частоте на ω_0 исходной функции

$$y = \sum_{i=1}^{N} a_i \cos\left((\omega_0 + i\omega)x + \varphi_i\right) \quad \omega = \pi/x_0. \qquad (9)$$

Характеристическая функция плотности вероятности, порождаемой (9), по аналогии с (2′) запишется:

$$\theta(\upsilon) = \frac{1}{2x_0}\int_{-x_0}^{x_0}\sum_{n_1=-\infty}^{\infty}\cdots\sum_{n_N=-\infty}^{\infty} j^{\sum_{i=1}^{N} n_i} n_i \,\mathrm{e}^{j\sum_{i=1}^{N} n_i\varphi_i} \times$$
$$\times\prod_{i=1}^{N} J_{n_i}(a_i\upsilon)\,\mathrm{e}^{j\sum_{i=1}^{N}(\omega_0 + i\omega)n_i x}\, dx. \qquad (10)$$

Вычислим интеграл, входящий в (10):

$$J = \int_{-x_0}^{x_0} \exp\left(j\sum_{i=1}^{N}\left(\omega_0 + i\omega\right)n_i x\right)dx.$$

Когда $\omega_0 = k\omega, k-$ целое положительное число, интегрирование дает:

$$J = \left| \begin{matrix} 2x_0, & \text{если} & \sum_{i=1}^{N}(k+i)n_i = 0, \\ 0, & \text{если} & \sum_{i=1}^{N}(k+i)n_i \neq 0. \end{matrix} \right. \qquad (11)$$

Условие $\sum_{i=1}^{N}(k+i)n_i = 0$ по смыслу аналогично (4), но наличие k приводит к росту n_i. По аналогии с (4-1) для N = 3 запишем:

$$m\left[\left(k+1\right)n_1^0 + \left(k+2\right)n_2^0 + \left(k+3\right)n_3^0\right] = 0. \qquad (12)$$

Очевидно наличие нулевого решения в (12) и, как следствие, наличие в характеристической функции, аналогичной (5), слагаемого $\prod_{i=1}^{N} J_0(a_i\nu)$. В свою очередь, правомерно введение функции $\theta^{-}(\nu)$, аналогичной (5-1). Сказанное справедливо для любых N. По аналогии с (8) приведем некоторые ненулевые решения (12):

$$\left\{\begin{matrix} n_1^0 \\ n_2^0 \\ n_3^0 \end{matrix}\right\}^l = \left\{\begin{matrix} k+2, & k+3, & 0 & ... \\ -\left(k+1\right), & 0, & k+3 & ... \\ 0, & -\left(k+1\right), & -\left(k+2\right) & ... \end{matrix}\right\}.$$

С ростом k, то есть с ростом сдвига частоты ω_0, значения $k + n_i^0$ растут, что приводит к уменьшению $\theta^{-}(\nu)$. В связи с уменьшением функций Бесселя J_n с ростом порядка можно утверждать, что при некотором $\omega_0 \geq \Omega$ величиной $\theta^{-}(\nu)$ можно пренебречь. В этом случае влияние фазового спектра $\{\varphi_i\}$ на $w(y)$ исчезает, $\theta^-(\nu) \to 0$, и $\theta(\nu)$ становится равной $\prod_{i=1}^{N} J_0(a_i \nu)$.

Случай дробного k большого интереса не представляет.

Заключение. Проведенный анализ поставленной в начале статьи задачи позволяет сделать следующие выводы.

1. Функция с ограниченным спектром определяется амплитудным спектром и ее плотностью вероятности $w(y)$ с точностью до инверсии и сдвига ее аргумента.

2. Изменение фазового спектра, не совпадающего с изменением при инверсии и сдвиге, приводит к изменению $w(y)$.

3. Если на входы фильтров, различающихся только фазовыми характеристиками, подать сигнал с ограниченным спектром, то выходные сигналы будут иметь различные плотности вероятности.

4. Сдвиг функции (1) по частоте на некоторое значение ω_0 (вариант однополосной модуляции) приводит к уменьшению влияния фазового спектра исходной функции на ее плотность вероятности по мере увеличения сдвига. Начиная с некоторого значения ω_0, этим влиянием можно пренебречь, и плотность вероятности становится зависимой только от амплитудного спектра, что дает возможность моделировать случайные величины с необходимыми плотностями вероятности (симметричными).

5. В качестве дальнейшего исследования правомерно ставить задачу о нахождении фазового спектра функции с ограниченным спектром (с точностью до инверсии и сдвига), если известны ее амплитудный спектр и плотность вероятности. Возможно указать и другие направления исследования.

Библиографический список

1. *Левин Б.Р.* Теоретические основы статистической радиотехники. Кн. 1. – М.: Советское радио, 1966. – 342 с.

2. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. – М.: Наука, 1966. – 295 с.