УДК 517.1

В.А. Саблина

О ПОРЯДКАХ ЗАМКНУТЫХ КЛАССОВ В ТРЕХЗНАЧНОЙ ЛОГИКЕ, II

Рассмотрены вопросы определения порядка замкнутого класса и выразимости функций замкнутого класса формулами над базисной системой на примере двух классов сохранения основания. Доказано, что один класс имеет порядок 2, а другой – 3. Указаны способы выражения функций классов формулами над базисными системами данных классов.

Ключевые слова: *Трехзначная логика, замкнутый класс, базис, порядок, выразимость, основание, решетка.*

Введение. Проблема функциональной выразимости в многозначной логике P_k в наиболее общей постановке заключается в описании решетки всех замкнутых классов с указанием, когда это возможно, базисов и порядков. Полностью эта проблема решена лишь в двузначном случае [1]. Кроме того, проводились исследования замкнутых классов многозначной логики $P_k\ (k>2)$ [2-5]. Выяснилось, что при изучении решетки замкнутых классов многозначной логики уже при $k=3$ чувствуется нехватка методов определения порядков замкнутых классов, методов выразимости функций замкнутого класса формулами над базисной системой данного класса.

Обычно для описания замкнутых классов используется язык предикатов, предложенный А.В. Кузнецовым [6]. Однако, как показал И.А. Черепов [7], предикатно описуемые замкнутые классы описываются и как классы сохранения основания [8], что при описании решетки замкнутых классов в P_k не только более удобно в обращении, но и позволяет ввести перечень оснований (как, например, в [9]), который будет дисциплинировать исследование решетки замкнутых классов в P_k. В противном случае исследования приобретают характер хаоса [3,10,11]

Цель работы. В настоящей работе автор продолжает исследование методов определения порядков замкнутых классов с указанием схем реализуемости функций в базисе того же порядка согласно перечню [9]; исследован поставленный вопрос относительно третьего и четвертого классов сохранения основания.

Везде в дальнейшем $\tilde{x}=(x_1,...,x_n)$, n – количество аргументов функции.

Класс *ПС*3

Рассмотрим класс функций *ПС*3 (третий класс перечня [9]) из P_3.

Пусть функция $f_3(x)=\begin{cases}0 \text{ при } x\in\{0,1\},\\ 2 \text{ при } x=2.\end{cases}$

Тогда $ПС3=\{f(\tilde{x})\,|\,f(\{f_3(x),x\}^n)\in\{f_3(x),x\}\}$.

Функция $f(x)\in ПС3$ на подкубе $\{0,1\}^n$ не принимает значения 2, так как выполнено $f(\{0,1\}^n)\in\{0,1\}$, то есть функции класса *ПС*3 сохраняют множество $\{0,1\}$.

Также видно, что $f(\tilde{0})=0$, $f(\tilde{2})=2$.

На остальных наборах вида $\{0,1,2\}^n\setminus(\{0,1\}^n\cup\{\tilde{2}\})$ функции $f(x)\in ПС3$ независимо пробегают все значения из множества $\{0,1,2\}$.

Класс *ПС*3 содержит функцию $\max(x_1,x_2)$, поскольку $\max(f_3(x),f_3(x))=f_3(x)$, $\max(x,x)=\max(f_3(x),x)=\max(x,f_3(x))=x$, а также функцию $\max(\tilde{x})=\max(x_1,\max(x_2,...,x_n))$.

Обозначим $\Phi(\tilde{x})=\begin{cases}2 \text{ при } \tilde{x}=\tilde{2},\\ 0 \text{ в остальных случаях.}\end{cases}$

$\Phi(\tilde{x})=\Phi(x_1,\Phi(x_2,...,x_n))$. $\Phi(\tilde{x})\in ПС3$.

Определим функцию $\psi^{\tilde{\alpha}}(x)\in ПС3$:

$$\psi^{\tilde{\alpha}}(\tilde{x})=\begin{cases}2 \text{ при } \tilde{x}=\tilde{2},\\ 1 \text{ при } \tilde{x}=\tilde{\alpha},\\ 0 \text{ в остальных случаях,}\end{cases}$$

где $\tilde{\alpha}\in\{0,1\}^n\setminus\{\tilde{0}\}$.

Для случая двух переменных имеем:

$$\psi^{(\alpha_1,\alpha_2)}(x_1,x_2)=\begin{cases}2 \text{ при } (x_1,x_2)=(2,2),\\ 1 \text{ при } (x_1,x_2)=(\alpha_1,\alpha_2),\\ 0 \text{ в остальных случаях,}\end{cases}$$

где $\alpha_1,\alpha_2\in\{0,1\},(\alpha_1,\alpha_2)\neq(0,0)$.

Определим функцию $\varphi_{\beta}^{\tilde{\beta}}(\tilde{x})\in ПС3$:

$$\varphi_{\beta}^{\tilde{\beta}}(\tilde{x})=\begin{cases}2 \text{ при } \tilde{x}=\tilde{2},\\ \beta \text{ при } \tilde{x}=\tilde{\beta},\\ 0 \text{ в остальных случаях,}\end{cases}$$

где $\widetilde{\beta} \in \{0,1,2\}^n \setminus (\{0,1\}^n \bigcup \{\widetilde{2}\})$, $\beta \in \{1,2\}$.

Для случая двух переменных имеем:

$$\varphi_{\beta}^{(\beta_1,\beta_2)}(\widetilde{x}) = \begin{cases} 2 \text{ при } (x_1,x_2) = (2,2), \\ \beta \text{ при } (x_1,x_2) = (\beta_1,\beta_2), \\ 0 \text{ в остальных случаях,} \end{cases}$$

где либо $\beta_1 = 2$, либо $\beta_2 = 2$, но $\beta_1 \neq \beta_2$, $\beta \in \{1,2\}$.

Функции $\psi^{\widetilde{\alpha}}(\widetilde{x})$, $\widetilde{\alpha} \in \{0,1\}^n \setminus \{\widetilde{0}\}$ выражаются через функции системы $\psi^{(\alpha_1,\alpha_2)}(x_1,x_2)$ следующим образом:

$\psi^{\widetilde{\alpha}}(\widetilde{x}) = \psi^{(\alpha_i,1)}(x_i, \psi^{(\alpha_1,\ldots,\alpha_{i-1},\alpha_{i+1},\ldots,\alpha_n)}(x_1,\ldots,x_{i-1},x_{i+1},\ldots,x_n))$, где i выбираем таким образом, чтобы $(\alpha_1,\ldots,\alpha_{i-1},\alpha_{i+1},\ldots,\alpha_n) \neq \widetilde{0}$.

Лемма 3. *Функции* $\varphi_{\beta}^{\widetilde{\beta}}(\widetilde{x})$, $\beta \in \{1,2\}$, $\widetilde{\beta} \in \{0,1,2\}^n \setminus (\{0,1\}^n \bigcup \{\widetilde{2}\})$ *выражаются либо через функции системы* $\varphi_{\beta}^{(\beta_1,\beta_2)}(x_1,x_2)$, *либо через функцию* $\varphi_{\beta}^{21}(x_1,x_2)$ *и функции системы* $\psi^{(\alpha_1,\alpha_2)}(x_1,x_2)$, $\alpha_1,\alpha_2 \in \{0,1\}, (\alpha_1,\alpha_2) \neq (0,0)$.

Δ Из ограничений на набор $\widetilde{\beta}$ следует, что $\exists i\, \beta_i = 2$. Далее возможны два варианта: $\exists j \neq i\, \beta_j = 2$ и обратный случай.

Рассмотрим первый вариант. Тогда можно выразить:

$\varphi_{\beta}^{\widetilde{\beta}}(\widetilde{x}) = \varphi_{\beta}^{21}(x_i, \varphi_1^{(\beta_1,\ldots\beta_{i-1},\beta_{i+1},\ldots\beta_n)}(x_1,\ldots,x_{i-1},x_{i+1},\ldots,x_n))$.

Продолжаем итеративно раскладывать до выражения через функции вида $\varphi_{\beta}^{(\beta_1,\beta_2)}(x_1,x_2)$ либо до наступления второго варианта.

Второй возможный вариант заключается в том, что $\beta_i = 2$, а набор $(\beta_1,\ldots\beta_{i-1},\beta_{i+1},\ldots,\beta_n) \in \{0,1\}^n \setminus \{\widetilde{0}\}$. Тогда можно выразить:

$\varphi_{\beta}^{\widetilde{\beta}}(\widetilde{x}) = \varphi_{\beta}^{21}(x_i, \psi^{(\alpha_1,\ldots,\alpha_{i-1},\alpha_{i+1},\ldots,\alpha_n)}(x_1,\ldots,x_{i-1},x_{i+1},\ldots,x_n))$.

Ранее показано, что функции $\psi^{\widetilde{\alpha}}(\widetilde{x})$ порождаются функциями системы $\psi^{(\alpha_1,\alpha_2)}(x_1,x_2)$, $\widetilde{\alpha} \in \{0,1\}^n \setminus \{\widetilde{0}\}$. ▲

Теорема 3. *Система функций из* $ПС3$ $\max(x_1,x_2)$, $\Phi(x_1,x_2)$, $\psi^{(\alpha_1,\alpha_2)}(x_1,x_2)$, $\alpha_1,\alpha_2 \in \{0,1\}$, $(\alpha_1,\alpha_2) \neq (0,0)$, $\varphi_{\beta}^{(\beta_1,\beta_2)}(x_1,x_2)$, $\beta_1 = 2$ или $\beta_2 = 2$, $\beta_1 \neq \beta_2$, $\beta \in \{1,2\}$ *является базисом класса* $ПС3$, *то есть класс* $ПС3$ *имеет порядок 2.*

Δ Произвольная функция $f(\widetilde{x}) \in ПС3$ может быть получена следующим образом:

$$f(\widetilde{x}) = \max_{\substack{\widetilde{\alpha}: f(\widetilde{\alpha})=1 \\ \widetilde{\beta},\beta: f(\widetilde{\beta})=\beta}} \{\Phi(\widetilde{x}), \psi^{\widetilde{\alpha}}(\widetilde{x}), \varphi_{\beta}^{\widetilde{\beta}}(\widetilde{x})\},$$

где $\widetilde{\alpha} \in \{0,1\}^n \setminus \{\widetilde{0}\}$, $\widetilde{\beta} \in \{0,1,2\}^n \setminus (\{0,1\}^n \bigcup \{\widetilde{2}\})$, $\beta \in \{1,2\}$.

Таким образом, с помощью функций $\psi^{\widetilde{\alpha}}(\widetilde{x})$ определяем значения функции $f(\widetilde{x})$ на подкубе $\{0,1\}^n$, а с помощью функций $\varphi_{\beta}^{\widetilde{\beta}}(\widetilde{x})$ – значения на оставшихся наборах $\widetilde{\beta}$, кроме значений на наборах $\widetilde{0}$ и $\widetilde{2}$, которые постоянны для всех функций; функция $\Phi(\widetilde{x})$ играет роль «фона».

Выше показано, что функция $\max(\widetilde{x})$ порождается функцией $\max(x_1,x_2)$; $\Phi(\widetilde{x})$ – функцией $\Phi(x_1,x_2)$; $\psi^{\widetilde{\alpha}}(\widetilde{x})$ – функциями $\psi^{(\alpha_1,\alpha_2)}(x_1,x_2)$, $\widetilde{\alpha} \in \{0,1\}^n \setminus \{\widetilde{0}\}$; $\varphi_{\beta}^{\widetilde{\beta}}(\widetilde{x})$ – функциями $\varphi_{\beta}^{(\beta_1,\beta_2)}(x_1,x_2)$, либо функцией $\varphi_{\beta}^{21}(x_1,x_2)$ и функциями $\psi^{(\alpha_1,\alpha_2)}(x_1,x_2)$, $\alpha_1,\alpha_2 \in \{0,1\}, (\alpha_1,\alpha_2) \neq (0,0)$, $\widetilde{\beta} \in \{0,1,2\}^n \setminus (\{0,1\}^n \bigcup \{\widetilde{2}\})$, $\beta \in \{1,2\}$. ▲

Класс *ПС*4

Рассмотрим класс функций $ПС4$ (четвертый класс перечня [9]) из P_3.

Пусть функция $f_8(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x = 0, \\ 2 \text{ при } x = 1, \\ 1 \text{ при } x = 2. \end{cases}$

Тогда $ПС4 = \{f(\widetilde{x}) \mid f(\{f_8(x), x\}^n) \in \{f_8(x), x\}\}$.

Класс $ПС4^S$ сопряжен с $ПС4$ относительно

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Будем для удобства рассматривать класс

$$ПС4^S = \{f(\widetilde{x}) \mid f(\{f_{12}(x), x\}^n) \in \{f_{12}(x), x\}\},$$

где $f_{12}(x) = \begin{cases} 1 \text{ при } x = 0, \\ 0 \text{ при } x = 1, \\ 2 \text{ при } x = 2. \end{cases}$

Лемма 4.1. *Порядок класса* $ПС4^S > 2$.

Δ Функции $f(\widetilde{x}) \in ПС4^S$ сохраняют множество $\{0,1\}$ и являются самодвойственными на подкубе $\{0,1\}^n$. Множество самодвойственных функций от двух переменных x_1, x_2 на подкубе $\{0,1\}^2$ совпадает с $\{x_1, x_2, \bar{x}_1, \bar{x}_2\}$.

Отсюда порядок класса $ПС4^S > 2$. ▲

Класс $ПС4^S$ не содержит функции $\min(x_1,x_2)$, $\max(x_1,x_2)$, но содержит их фрагменты.

Определим функции:

$$mi(\tilde{x})=\begin{cases} x_n \text{ при } \tilde{x}\in\{0,1\}^n, \\ \min(\tilde{x}) \text{ в остальных случаях,}\end{cases}$$

$$ma(\tilde{x})=\begin{cases} x_n \text{ при } \tilde{x}\in\{0,1\}^n, \\ 2 \text{ в остальных случаях.}\end{cases}$$

Также определим функцию:

$$ma_\beta^{\tilde{\beta}}(\tilde{x})=\begin{cases} \beta \text{ при } \tilde{x}=\tilde{\beta}, \\ ma(\tilde{x}) \text{ в остальных случаях,}\end{cases}$$

где $\tilde{\beta}\in\{0,1,2\}^n\setminus(\{0,1\}^n\cup\{\tilde{2}\})$, $\beta\in\{0,1\}$.

Можно выразить:

$$mi(x_1,x_2,x_3)=mi(x_1,mi(x_2,x_3)),$$

$$mi(\tilde{x})=mi(x_1,mi(x_2,...,x_n));$$

$$ma(x_1,x_2,x_3)=ma(x_1,ma(x_2,x_3)),$$

$$ma(\tilde{x})=ma(x_1,ma(x_2,...,x_n)).$$

Лемма 4.2. *Функции системы* $\{ma_\beta^{\tilde{\beta}}(\tilde{x})\}$ *выражаются через функции системы* $\{ma(x_1,x_2)$, $ma_\beta^{(\beta_1,\beta_2,\beta_3)}(x_1,x_2,x_3)\}$; $\beta\in\{0,1\}$, $\tilde{\beta}\in\{0,1,2\}^n\setminus(\{0,1\}^n\cup\{\tilde{2}\})$.

Δ Рассмотрим набор $\tilde{\beta}=(\beta_1,\beta_2,...,\beta_n)$, $n\ge 4$.

Если $\beta_n=2$, то $\exists\beta_i\in\{0,1\}$.

Если $\beta_n\in\{0,1\}$, то $\exists\beta_i=2$.

Выберем произвольное β_j, $j\ne i$, $j\ne n$.

Тогда можно разложить:

$$ma_\beta^{\tilde{\beta}}(\tilde{x})=ma(ma_\beta^{(\beta_i,\beta_j,\beta_n)}(x_i,x_j,x_n),$$

$$ma_\beta^{(\beta_i,\beta_1,...,\beta_{j-1},\beta_{j+1},...,\beta_n)}(x_i,x_1,...,x_{j-1},x_{j+1},...,x_n)).$$

Далее аналогично раскладываем получившуюся функцию от $(n-1)$ переменных; продолжаем этот процесс итеративно до выражения исходной функции $ma_\beta^{\tilde{\beta}}(\tilde{x})$ через функции $ma_\beta^{(\beta_1,\beta_2,\beta_3)}(x_1,x_2,x_3)$ и функцию $ma(x_1,x_2)$. ▲

Пусть $sa(x_1,x_2,x_3)=$

$$=\begin{cases} x_1\bar{x}_2\vee x_1\bar{x}_3\vee\bar{x}_2\bar{x}_3 \text{ при } (x_1,x_2,x_3)\in\{0,1\}^3, \\ 2 \text{ в остальных случаях.}\end{cases}$$

Лемма 4.3. *Из функции* $sa(x_1,x_2,x_3)$ *можно построить любую функцию вида*

$$G(\tilde{x})=\begin{cases} g(\tilde{x}) \text{ при } \tilde{x}\in\{0,1\}^n, \\ 2 \text{ в остальных случаях,}\end{cases} \qquad (1)$$

где $g(\tilde{x})$ *– произвольная самодвойственная булева функция.*

Δ Функция $g(\tilde{x})$ выражается через функцию $x_1\bar{x}_2\vee x_1\bar{x}_3\vee\bar{x}_2\bar{x}_3$ [1]. Тогда функция $G(\tilde{x})$ выражается через функцию $sa(x_1,x_2,x_3)$. ▲

Рассмотрим функции из $ПС4^S$, которые равны x_n на подкубе $\{0,1\}^n$ и могут принимать произвольные значения на остальных наборах, кроме набора $\{\tilde{2}\}$. Функция такого вида $F(\tilde{x})$ может быть получена следующим образом:

$$F(\tilde{x})=\underset{\tilde{\beta},\beta:F(\tilde{\beta})=\beta}{mi}(ma(\tilde{x}),ma_\beta^{\tilde{\beta}}(\tilde{x})), \qquad (2)$$

где $\tilde{\beta}\in\{0,1,2\}^n\setminus(\{0,1\}^n\cup\{\tilde{2}\})$, $\beta\in\{0,1\}$.

Теорема 4. *Система функций из* $ПС4^S$ $sa(x_1,x_2,x_3)$, $ma_\beta^{(\beta_1,\beta_2,\beta_3)}(x_1,x_2,x_3)$, $ma(x_1,x_2)$, $mi(x_1,x_2)$, $(\beta_1,\beta_2,\beta_3)\in\{0,1,2\}^3\setminus(\{0,1\}^3\cup\{\tilde{2}\})$, $\beta\in\{0,1\}$ *является базисом класса* $ПС4^S$*, то есть класс* $ПС4^S$ *имеет порядок 3.*

Δ Произвольная функция $f(\tilde{x})\in ПС4^S$ может быть получена следующим образом:

$$f(\tilde{x})=mi(F(\tilde{x}),G(\tilde{x})),$$

где $G(\tilde{x})$ имеет вид (1) и получена из функции $sa(x_1,x_2,x_3)$, $F(\tilde{x})$ получена по (2) из функций $mi(\tilde{x})$, $ma(\tilde{x})$ и $ma_\beta^{\tilde{\beta}}(\tilde{x})$.

Выше показано, что функции $ma_\beta^{\tilde{\beta}}(\tilde{x})$ порождаются функциями $ma_\beta^{(\beta_1,\beta_2,\beta_3)}(x_1,x_2,x_3)$ и $ma(x_1,x_2)$ по лемме 4.2, функция $ma(\tilde{x})$ порождается функцией $ma(x_1,x_2)$, функция $mi(\tilde{x})$ порождается функцией $mi(x_1,x_2)$.

Таким образом, с помощью $G(\tilde{x})$ определяем значения функции $f(\tilde{x})$ на подкубе $\{0,1\}^n$, а с помощью $F(\tilde{x})$ – оставшиеся значения функции $f(\tilde{x})$. ▲

Следствие. *Класс* $ПС4$ *имеет порядок 3.*

Заключение. В статье предложены способы выражения функций двух рассмотренных классов сохранения основания через функции их базисов. Доказано, что данные классы трехзначной логики имеют порядки 2 и 3.

В заключение автор выражает свою благодарность В.В. Тарасову, под руководством которого выполнена эта работа.

Библиографический список

1. *Яблонский С.В., Гаврилов Г.П., Кудрявцев В.Б.* Функции алгебры логики и классы Поста. – М.: Наука, 1966. – 120 с.

2. *Гниденко В.М.* Нахождение порядков предполных классов в трехзначной логике //Проблемы кибернетики. Выпуск 8. – М.: Наука, 1962. – С. 341-346.

3. *Марченков С.С.* О замкнутых классах самодвойственных функций многозначной логики //Проблемы кибернетики. Выпуск 36. – М.: Наука, 1979. – С. 5-22.

4. *Lau D.* Submaximalle Klassen von P_3 //Electron. Informationsverarb. und Kybern. – 1982. – B. 18, N 4-5. – S. 227-243.

5. *Михеева Е.А.* Построение в P_k максимальных классов, не имеющих базисов //Дискретная математика. 1998. Т.10. Вып.2. С. 137-159.

6. *Кузнецов А.В.* Алгебра логики и ее обобщения Математическая логика и основания математики. Математика в СССР за сорок лет. Т1 //*Яновская С.А.* – М.: Физматлит, 1959. – С. 13-120.

7. *Черепов И.А.* Классы решетки Поста как классы сохранения основания //Материалы VII Международного семинара «Дискретная математика и ее применения» (29 января – 2 февраля 2001 г.)

8. *Яблонский С.В.* Функциональные построения в *k*-значной логике //Труды института им. В.А. Стеклова. Том 51. – М.: Издательство АН СССР, 1958. – С. 5-142.

9. *Саблина В.А., Сухов В.Е.* Каталог подполугрупп симметрической полугруппы третьей степени //Деп. в ВИНИТИ № 20. Рязань: Рязан. госуд. радиотехн. универ, 2008. 22 с.

10. *Мещанинов Д.Г.* О замкнутых классах *k*-значных функций, сохраняющих первые *d*-разности //Математические вопросы кибернетики. Вып. 8. – М.: Наука, 1999. – С. 219-230.

11. *Крохин А.А., Сафин К.Л., Суханов Е.В.* О строении решетки замкнутых классов полиномов //Дискретная математика. – 1997. – Т.9. Вып. 2. – С. 24-39.