На правах рукописи

КУЗНЕЦОВ Алексей Викторович

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ И МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ ЛОКАЛЬНОЙ ОПТИМАЛЬНОСТИ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

Специальность 05.13.18 – Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени кандидата технических наук

Рязань 2013

Работа выполнена на кафедре Высшей математики ФГБОУ ВПО «Рязанский государственный радиотехнический университет» (ФГБОУ ВПО «РГРТУ»).

Научный руководитель: **Миронов Валентин Васильевич,**
доктор физико-математических наук, профессор кафедры ВМ ФГБОУ ВПО «РГРТУ»

Официальные оппоненты: **Меньшиков Валерий Александрович,**
доктор технических наук, профессор, генеральный директор проекта «Международная Аэрокосмическая Система Глобального Мониторинга и Прогнозирования» (МАКСМ), г. Москва.

Мамонов Сергей Станиславович,
доктор физико-математических наук, профессор Рязанского государственного университета имени С.А. Есенина

Ведущая организация: **филиал ФГУП ГНПРКЦ "ЦСКБ–Прогресс" Особое конструкторское бюро «Спектр»,**
г. Рязань

Защита диссертации состоится «20» декабря 2013 г. в 14 часов на заседании диссертационного совета Д 212.211.02 в ФГБОУ ВПО «РГРТУ» по адресу: **390005, г. Рязань, ул. Гагарина, д. 59/1**.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ФГБОУ ВПО «Рязанский государственный радиотехнический университет».

Автореферат разослан «16» Ноября 2013 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
канд. техн. наук, доцент Д.А. Перепелкин

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. В современных условиях при решении научно-технических задач по созданию управляемых систем все возрастающую роль играет выбор класса управляющих функций и оптимизация методов достижения целей управления.

В русле этого магистрального направления в диссертационной работе строятся и изучаются, как с помощью аналитических, так и численными методами нелинейные математические модели реальных технических устройств и объектов, приводящие к задачам оптимального управления на классе исключительно кусочно-постоянных управлений. Такое сужение класса управлений по сравнению с традиционным классом ограниченных, кусочно-непрерывных управлений связано с реальными запросами практики и производства, в частности, космического, и приводит, в свою очередь, к упрощению задействованных алгоритмов, уменьшению объемов программных комплексов, сокращению времени программной реализации и, как следствие, более выгодно экономически.

Создание математической теории управления подобными системами основано на трудах выдающихся ученых Л.С. Понтрягина, В.Г. Болтянского, Р.В. Гамкрелидзе, Н.Н. Красовского, В.И. Зубова, Р. Калмана, Р. Беллмана и др.

Заметный вклад в теорию устойчивости, проектирование систем управления, теорию дифференциальных уравнений внесли рязанские ученые И.П. Макаров, М.Т. Терехин, В.П. Корячко, В.В. Миронов, С.С. Мамонов.

В задачах управления какими-либо детерминированными процессами в силу технических причин с необходимостью приходится ограничивать класс управляющих воздействий. Ограничения могут касаться амплитуды управляющих сигналов, минимальной продолжительности воздействия (так называемая дискретизация управляющего сигнала), а также других характеристик процессов. В связи с этим возникает задача нахождения оптимального управления и исследования на оптимальность полученного каким-либо иным способом управления из класса управлений, удовлетворяющих принятым ограничениям или, вообще, решения задачи управляемости объектом, что приводит к вопросу разрешимости краевых задач.

Ввиду отмеченной актуальности исследований основные результаты по данной теме относятся к решению практических задач в более широких классах управления, таких как ограниченные, кусочно-непрерывные, измеримые по Лебегу вектор функции. Сложность проверки условий применимости результатов также важна, поэтому в настоящей работе большое внимание уделяется актуальной проблеме нахождения более простых и явных условий подобной проверки.

Актуальность компьютерного моделирования в современных условиях трудно переоценить[1], поэтому большинство результатов в данной работе

[1] Корячко В.П., Таганов А.И., Таганов Р.А. Методологические основы разработки и управления требованиями к программным системам. - М.: Горячая линия-Телеком, 2009. - 224 с.

предусматривает возможность численной реализации на электронно-вычислительных машинах.

Современные технические системы являются чрезвычайно сложными системами. Как результат, управление такими системами существенно усложняется, и возникают новые задачи оценки надежности подобных систем. Упрощение управляющих подсистем, при условии сохранения свойства оптимальности управления способствует повышению надежности технических систем.

Таким образом, тема диссертации, посвященная отысканию условий оптимальности управлений из класса кусочно-постоянных вектор-функций для нелинейных математических моделей управляемых процессов, а также разрешимости краевой задачи в указанном классе для линейных нестационарных моделей, является *актуальной*.

Цель работы. Целью диссертационной работы является повышение качества управления реальными объектами за счет сужения класса управлений, которое в свою очередь приводит к упрощению алгоритмов, уменьшению объемов программных комплексов, сокращению времени программной реализации и, в конечном счете, к экономической выгоде.

Основные задачи. Цель диссертационного исследования предопределила постановку и решение следующих задач:

– моделирование детерминированных управляемых процессов путем сведения их описания к системам обыкновенных дифференциальных уравнений с кусочно-постоянным управлением;

– поиск условий, при которых исследуемое управление доставляет функционалу качества локальный экстремум на классе кусочно-постоянных векторных управлений;

– нахождение условий, гарантирующих наличие так называемого допустимого управления, разрешающего краевую задачу с фиксированными концами на классе кусочно-постоянных векторных управления;

– численное моделирование реальных систем управления с использованием программных комплексов.

Объект исследования. Объектом исследования являются технические системы и процессы, возникшие из потребностей техники (в том числе космической техники), прикладной физики, производственной химии, а также отчасти экономики, и биологии.

Предмет исследования. Предметом исследования являются математические модели технических систем и процессов, приводящие к системам обыкновенных дифференциальных уравнений с кусочно-постоянным векторным управлением и сами системы дифференциальных уравнений.

Методы исследования. Решение поставленных задач осуществлено путем использования как классического, так и современного инструментария:

– методов математического моделирования;

– методов теории дифференциальных уравнений;

– методов функционального анализа;

– формализма теории динамических систем;

– методов вычислительной математики.

Решение поставленных задач. Решение задач проведено по следующей схеме. От реальных технических систем произведен переход к их математическим моделям, описываемым системами обыкновенных дифференциальных уравнений с управлением. Возмущенное решение системы исследуется в окрестности известного номинального решения. Управление выбирается из класса кусочно-постоянных вектор-функций.

Задача исследования оптимальности управления решается с помощью сведения к конечномерной задаче исследования форм высшего порядка, а затем к выяснению наличия экстремума функционала задающего критерий качества процесса.

Разрешимость краевой задачи исследуется путем построения последовательности кусочно-постоянных вектор-функций, сходящейся к управлению с требуемыми свойствами. Доказательства теорем используют результаты теории обыкновенных дифференциальных уравнений и функционального анализа, в частности, теорему о неподвижной точке нелинейного оператора.

По результатам аналитического исследования соответствующих абстрактных систем делаются выводы о свойствах технических систем, и проводится численное моделирование изучаемых процессов.

Научная новизна. В диссертационной работе получены следующие оригинальные результаты:

– предложен метод исследования системы на оптимальность сведением задачи к алгебраической задаче исследования однородных форм высшего порядка;

– построена модификация алгоритма численного поиска оптимального управления на основе точных формул для дифференциала критерия качества траектории динамической системы;

– разработаны методы преобразования управления, позволяющие удовлетворить требованиям на размерность пространства управляющих функций;

– для разрешимости краевой задачи приведены условия достаточного типа, не использующие, в отличие от традиционного подхода, фундаментальную систему решений, а использующие только свойства коэффициентов исходной системы.

На защиту выносятся следующие положения:

1. Математические модели конкретных технических систем с управлением и методика их построения.

2. Обоснование применения кусочно-постоянного управления системами.

3. Математический аппарат исследования моделей на оптимальность управления. Необходимые и достаточные условия оптимальности рассматриваемого кусочно-постоянного управления. Сведение задачи исследования на оптимальность управления к исследованию форм высшего порядка на знакоопределенность. Достаточные условия разрешимости краевой

задачи для линейной нестационарной системы в классе кусочно-постоянных управлений.

4. Численные методы решения задач. Программная реализация поиска оптимального управления для моделей рассматриваемых технических систем и объектов.

Личный вклад диссертанта. Задачи были поставлены соискателю научным руководителем проф. В.В. Мироновы при консультации с проф. М.Т. Терехиным. Практически все результаты диссертационной работы получены автором самостоятельно, что отражено в приводимой в конце автореферата библиографии.

Теоретическая и практическая значимость работы. Ценность проведенной работы состоит в том, что она позволяет:

– повысить эффективность исследования на оптимальность систем, получаемых при математическом моделировании различных конкретных детерминированных процессов в технике, космической практике, прикладной физике, производственной химии;

– упростить исследование на разрешимость краевой задачи для линейной нестационарной системы в классе кусочно-постоянных управлений;

– получить численные решения задачи оптимального управления с некоторым достаточно малым приближением.

Внедрение результатов работы. Исследования по тематике диссертации проводились в рамках общего научного направления, реализуемого на кафедре Высшей математики РГРТУ в лаборатории системного анализа под руководством проф. Миронова В.В.

Результаты исследований, подтвержденные соответствующими актами, внедрены:

– в филиале ФГУП ЦСКБ–Прогресс (г. Самара) – Особом конструкторском бюро «Спектр» (г. Рязань);

– на Государственном Рязанском приборном заводе (г. Рязань).

Соответствие паспорту специальности. Проблематика, исследованная в диссертации, соответствует специальности 05.13.18 – «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ», так как включает в себя основные положения Паспорта специальности. А именно:

– проведено математическое моделирование детерминированных управляемых процессов и систем;

– проведен аналитический поиск условий, при которых исследуемое управление доставляет функционалу качества локальный экстремум на классе кусочно-постоянных векторных управлений;

– найдены конструктивные условия, гарантирующие наличие допустимого управления, разрешающего краевую задачу с фиксированными концами на классе кусочно-постоянных векторных управлений;

– проведено численное моделирование технических систем

– создан программный комплекс, решающий поставленные задачи, в тех случаях, когда аналитическое решение невозможно или практически громоздко.

Апробация работы. Основные результаты работы многократно докладывались на научном семинаре в Рязанском государственном радиотехническом университете под руководством д.ф.-м.н., профессора Миронова В.В., на заседаниях научно-исследовательского семинара по качественной теории дифференциальных уравнений в Рязанском государственном педагогическом университете под руководством д.ф.-м.н., профессора Терехина М.Т., на X Международной конференции «Математика. Компьютер. Образование» в г. Пущино, на VII и XVI Всероссийской научно-технической конференции студентов, молодых ученых и специалистов «Новые информационные технологии в научных исследованиях и в образовании», на заседаниях Воронежской зимней математической школы «Современные методы теории функций и смежные проблемы», на III Всероссийской научной конференции «Современные проблемы математики, механики, информатики» в г. Тула.

Достоверность результатов исследования. Достоверность научных результатов, вынесенных на защиту, подтверждена

– квалифицированным рецензированием публикаций;

– апробацией предложенной методики на конкретных моделях, результаты которой согласуются с экспериментальными данными;

– разработкой действующих программных средств;

– наличием актов внедрения исследований в производство.

Публикации. Основные результаты диссертации отражены в 11 работах (две из которых опубликованы в журналах, рекомендованных по данной специальности ВАК), и полный список которых приведен в конце автореферата.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, четырех глав, разделенных на параграфы (12 параграфов), заключения, списка литературы, включающего 116 наименований и приложения. Работа изложена на 110 страницах стандартного машинописного текста, содержит 1 таблицу.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении дается обоснование актуальности темы диссертации, обзор работ по ее тематике, краткое описание методики исследования и содержания работы. Обоснованы следующие математические модели, для исследования которых разработана математический аппарат, изложенный в диссертации.

А. Модель движения космического летательного аппарата. Рассматривается модель летательного аппарата (ЛА) с учетом гравитационной силы, сопротивления воздуха, реактивной тяги двигателя, подъемной силы и аэродинамического момента:

Пусть движение происходит в экваториальной плоскости за счет тяги создаваемой реактивным двигателем при выгорании топлива, mg – гравитационная сила, влияние атмосферы учитывается в виде лобового сопротивления X, подъемной силы Y и аэродинамического момента M_z. Тогда соответствующие зависимости могут быть заданы в виде системы дифференциальных уравнений:

$$\dot{v} = \omega_3^2 r \sin\vartheta + \frac{P}{m}\cos\alpha - \frac{X}{m} - g(r)\sin\vartheta,$$

$$\dot{\vartheta} = \frac{1}{v}\left(\left(\omega_3^2 r + \frac{v^2}{r}\right)\cos\vartheta - 2\omega_3 v\right) + \frac{P\sin\alpha + Y}{mv} - \frac{g(r)}{v}\cos\vartheta,$$

$$\dot{\omega} = \frac{M_z}{J_z}, \quad \dot{\varphi} = \omega, \quad \dot{\lambda} = -\frac{v}{r}\cos\vartheta, \quad \dot{r} = v\sin\vartheta, \quad \dot{m} = -u_1.$$

В этой системе $r = r_3 + h$, где r_3 - радиус Земли, h - высота полета; λ - долгота; φ - угол тангажа (угол между горизонтом и продольной осью ЛА); v - скорость центра масс ЛА относительно Земли; ω_3 - угловая скорость вращения Земли; ϑ - траекторный угол (между горизонтом и вектором скорости центра масс); $\varphi = \alpha + \vartheta$, где α - угол атаки; J_z - момент инерции ЛА; g – гравитационное ускорение; u_1 - скорость выгорания топлива; $P = -\mathrm{v}u_1$ - тяга двигателя, где v – относительная скорость истечения газов из сопла двигателя (предполагается постоянной). В рассмотренной системе первые шесть уравнений описывают движение ЛА с тремя степенями свободы, а последнее уравнение – работу двигателя.

Критерием качества управления ввиду важности данного показателя принят минимум расхода топлива

$$J(u) = \int_{t_0}^{t_1} F(u_1)dt \to \min.$$

Б. Управление движением электропоездов с релейно-контактным управлением и подвижным составом с дискретным регулированием силы тяги. Уравнение движения состава может быть задано в виде дифференциального уравнения:

$$\frac{dv}{ds} = \frac{1}{v}\left(f - w_0(v) - w_D - b\right),$$

где f – сила тяги поезда, w_0 – основное сопротивление движению поезда, w_D – дополнительное сопротивление движению поезда, b – сила торможения тормозной системы поезда. Сила тяги поезда может меняться, как правило, дискретно. Основное сопротивление движению складывается из сопротивления воздуха, трения в колесных парах и т.п. Это силы, которые замедляют движение независимо от профиля полотна. Для практических задач вид основной силы сопротивления задается формулой:

$$w_0(v) = k_0 + k_1 v + k_2 v^2,$$

где коэффициенты определяются экспериментально для конкретного типа поезда. Дополнительное сопротивление движению возникает при движении поезда на спусках, подъемах, поворотах, т.е. зависит от типа поезда и характеристик участка пути, здесь учитываются такие показатели пути как угол наклона (ската), кривизна пути. Также в случае необходимости, в нем учитывается сопротивление за счет ветра, низкой температуры и т.п.

Критерием оптимальности является минимальность энергозатрат на прохождение за фиксированное время данного участка пути:

$$J = \frac{1}{\mu}\int_0^L f(s)ds,$$

где μ – к.п.д. двигателя, $f(s)$ – сила тяги на участке пути s.

Рассмотрение именно таких моделей для данных технических систем оправдано тем, что возмущающие силы и в первой и во второй модели которые явно не входят в уравнения, носят случайный нецеленаправленный характер и многочисленны, так как и летательный аппарат и подвижной состав являются макрообъектами и подвержены множеству данных воздействий. Поэтому результирующая сила подчиняется вероятностному закону больших чисел с высокой точностью. Практическая значимость данных моделей была неоднократно подтверждена в ходе экспериментальных исследований.

Первая глава посвящена исследованию детерминированных управляемых процессов и систем с помощью построения соответствующих математических моделей и исследованию последних на оптимальность управлений по отношению к некоторому функционалу качества.

Приведены конкретные системы управляемых процессов допускающих математическое моделирование определенного выше типа.

Обоснована математическая модель для задачи управления нелинейной системой, даны основные определения, рассмотрены примеры систем. Заменой переменных задача исследования на оптимальность известного управления сводится к исследованию на неотрицательность функционала зависящего от возмущения управления.

Рассматривается n- мерная система

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y, \omega), \qquad (1.1)[2]$$

с начальным условием

$$y(t_0) = y_0, \qquad (1.2)$$

в которой $f(t, y, \omega)$ – непрерывная, по совокупности аргументов, n- мерная вектор-функция, на множестве $G = [t_0, T] \times R^n \times R^m$, $y \in R^n$ – фазовая переменная, $\omega \in R^m$ – управляющее воздействие, $t \in [t_0, T]$.

В работе даны необходимые определения для формулировки утверждений.

Ставятся условия, при которых управление $\varpi(t)$ в задаче (1.1),(1.2) доставляет *локальный минимум* функционалу:

$$J[x,u] \equiv \int_{t_0}^{T} h^*(t,x,u)\, dt, \qquad (1.5)$$

где $h^*(t,x,u) = h(t, x+y, u+\varpi) - h(t, y, \varpi)$.

Управление будем представлять в виде

$$u(t) = \sum_{k=1}^{N} \chi_k(t) v_k, \qquad (1.6)$$

[2] Нумерация формул и теорем сохранена без изменения по сравнению с диссертационной работой.

где $\chi_k(t)=\begin{cases}1, t\in[t_{k-1},t_k)\\ 0, t\notin[t_{k-1},t_k)\end{cases}$, v_k - постоянные векторы из R^m, $k=\overline{1,N}$, $t_N=T$.

Система представлена в виде

$$\frac{dx}{dt}=A(t)x+B(t)u+\varphi_1(t,u)+\varphi_2(t,x,u), \qquad (1.7)$$

где $A(t),B(t)$ – непрерывные по t матрицы-функции размерностей $n\times n$ и $n\times m$ соответственно, $\varphi_1(t,u)$– вектор-функция, допускающая представление в виде $\varphi_1(t,u)=\varphi_1^k(t,u)+o(|u|^k)$, а $\varphi_2(t,x,u)$ – допускает представление в виде $\varphi_2(t,x,u)=\varphi_2^k(t,x,u)+o(|y|^k)$, где $\varphi_1^k(t,u)$ – форма порядка k относительно переменной u, $\varphi_2^k(t,x,u)$ – форма порядка k относительно совокупности переменных x,u, $y=(x,u)$. Вектор-функции $\varphi_1^k(t,u)$, $\varphi_2^k(t,x,u)$ непрерывны по $t\in[t_0,T]$, $k\ge 2$,

Пусть имеют место представления

$$\varphi_1(t,u)=D(t,u)u, \qquad (1.8)$$

где матрица $D(t,u)$ непрерывна на множестве $[t_0,T]\times U(\delta^*)$ и удовлетворяет равенству $D(t,0)=0$,

$$\varphi_2(t,x,u)\equiv M_1(t,x,u)\,u+M_2(t,x,u)\,x, \qquad (1.9)$$

Далее будем рассматривать вектор-функцию $u(\cdot)\in L$, удовлетворяющую условию $\|u(\cdot)\|\le\delta^*$. Класс таких вектор-функций обозначим символом $L(\delta^*)=\{u(t)\in L:\|u(\cdot)\|\le\delta^*\}$.

Теорема 1.2. При выполнении некоторых условий (вид которых не приводится ввиду его громоздкости) решение задачи может быть представлено в виде

$$x(t,u(\cdot))=\int_{t_0}^{t}K(t,s)B(s)u(s)\,ds+o(|u|), \qquad (1.10)$$

где $o(|u|)$ – вектор такой, что $\lim\limits_{|u|\to 0}\frac{o(|u|)}{|u|}=0$ равномерно относительно $t\in[t_0,T]$.

Введем новое обозначение

$$\tilde{x}(t,u(\cdot))=\int_{t_0}^{t}K(t,s)B(s)u(s)\,ds. \qquad (1.11)$$

Теорема 1.3. Пусть выполнены условия (1.10)-(1.11) и $u(\cdot)\in L(\delta^*)$.

Тогда решение задачи (1.4),(1.5) может быть представлено в виде

$$x(t,u(\cdot))=\int_{t_0}^{t}K(t,s)\begin{Bmatrix}B(s)u(s)+[D(s,u(s))+\\ M_1(s,\tilde{x}(s,u(\cdot)),u(s))]u(s)+M_2(s,\tilde{x}(s,u(\cdot)),u(s))\tilde{x}(s,u(\cdot))\end{Bmatrix}ds+ \qquad (1.12)$$
$$+o(|u|^2),$$

где $o(|u|^2)$ – вектор, определяемый соотношением $\lim\limits_{|u|\to 0}\frac{o(|u|^2)}{|u|^2}=0$.

Определение 1.3. Управление $u(t) \equiv 0$ назовем локально оптимальным в каком-либо классе управлений, если оно доставляет локальный минимум функционалу (1.5) в этом классе управлений.

Пусть в функционале (1.5) функция $h^*(t,x,u)$ представима равенством

$$h^*(t,x,u) = \sum_{i=\nu}^{k} P_i(t,x,u) + o(|z|^k), \tag{1.13}$$

в котором $P_i(t,x,u), i \in \{\nu \ldots k\}$ – форма порядка i по совокупности переменных x,u, непрерывная по $t \in [t_0,T], \lim\limits_{|z|\to 0} \dfrac{o(|z|^k)}{|z|^k} = 0$, $z=(x,u)$, равномерно относительно $t \in [t_0,T]$, $\nu > 1$. Тогда, с учетом равенств (1.3), (1.12), (1.13) функционал (1.6) можно записать так

$$J[\alpha] = l^T\alpha + \sum_{i=\mu}^{k} Q_i(\alpha) + o(|\alpha|^k), \tag{1.14}$$

где l – известный вектор, $Q_i(\alpha)$ – форма порядка i относительно α, $\mu \ge 2$, $\lim\limits_{|\alpha|\to 0} \dfrac{o(|\alpha|^k)}{|\alpha|^k} = 0$.

Таким образом, задача определения условий, при которых управление $u(t) \equiv 0$ является локально оптимальным в классе управлений, определяемых равенством (1.7), свелась к задаче определения условий, при которых $\alpha = 0$ является точкой минимума функции $m \cdot N$ переменных, определенной равенством (1.14).

Далее предполагаем, что существует такое число $p \in \{\mu,\ldots,\mathrm{k}\}$, что форма низшего порядка $Q_p(\alpha)$ в равенстве (1.23) не равна тождественно нулю. Для простоты рассуждений примем, что $Q_\mu(\alpha)$ не обращается тождественно в ноль.

Теорема 1.4. Для того чтобы управление $u(t) \equiv 0$ было локально оптимальным в $L(\delta^*)$ необходимо, чтобы в равенстве (1.13) выполнялось:

а) вектор $l = 0$;

б) $Q_\mu(\alpha)$ – положительная знакопостоянная форма.

Теорема 1.5. Пусть в равенстве (1.14) $l = 0$, форма $Q_\mu(\alpha)$ – определенно положительная. Тогда управление $u(t) \equiv 0$ будет локально оптимальным в классе $L(\delta)$, $\delta > 0$ – некоторое число.

Рассмотрен также случай системы, содержащей нелинейные слагаемые порядка малости не ниже второго.

В работе указан метод сведения задачи с заранее неизвестными моментами времени переключения управления к случаю с фиксированными моментами времени переключения.

В случае вариации моментов переключения управление записывается как

$$u(t) = \sum_{k=1}^{N} \chi_{[\tau_{k-1},\tau_k]}(t)v_k + \sum_{k=1}^{N-1} (v_k - v_{k+1})\chi_{[\tau_k,\tau_k+\rho_k]}(t) sign(\rho_k). \tag{1.16}$$

Варьируя компоненты вектора α и вектор смещений моментов переключения управления $\rho = (\rho_1, \ldots, \rho_{N-1})$, получим интегральное представление решения $x(t)$ в форме

$$x(t) = \int_{t_0}^{t} K(t,s)B(s)\left[\sum_{k=1}^{N} \chi_{[\tau_{k-1},\tau_k]}(s)v_k + \sum_{k=1}^{N-1}(v_k - v_{k+1})\chi_{[\tau_k,\tau_k+\rho_k]}(s)sign(\rho_k)\right]ds + o(|u|). \quad (1.17)$$

Учитывая вид вектора $\alpha = (v_1^1, v_1^2, \ldots, v_1^m, v_2^1, \ldots, v_{N-1}^m, v_N^1, \ldots, v_N^m)$ и равенство (1.17) приращение функционала (1.16) может быть записано в следующей форме

$$J[\alpha,\rho] = l_1(\alpha,\rho) + l_k(\alpha,\rho) + o(|\gamma|^k), \quad (1.18)$$

где $l_1(\alpha,\rho)$ – линейная функция от α, ρ, $l_k(\alpha,\rho)$ – форма порядка k-го порядка относительно переменных α, ρ, $\gamma = (\alpha,\rho)$, $|\gamma| = \max\{|\alpha|, |\rho|\}$.

Теорема 1.8. Пусть имеет место представление (1.18) для функционала и выполнены условия:

а) существует число $\delta > 0$ такое, что функция $l_1(\alpha,\rho)$ тождественно равна нулю на множестве $\Lambda_\delta = \{|\alpha| < \delta, |\rho| < \delta\}$;

б) форма $l_k(\alpha,\rho)$ является определенно положительной на множестве $\Lambda'_\delta = \{0 < |\alpha| < \delta, 0 < |\rho| < \delta\}$.

Тогда управление $u(t) \equiv 0$ будет локально оптимальным в классе управлений вида (1.16).

Вторая глава посвящена изучению условий положительной определенности форм высшего порядка от многих переменных, поскольку полученные в первой главе условия сформулированы в терминах знакоопределенности форм высшего порядка. Известные результаты касаются исследования форм многих переменных второго порядка. Результаты касающиеся форм более высокого порядка пока далеки до завершенного вида.

В этой главе приведены алгоритмы преобразования форм общего вида, приводящие к условиям достаточного типа для знакоопределенности форм.

Описан алгоритм преобразования исследуемой формы общего вида с произвольным числом переменных к виду, допускающему, при определенных предположениях, вывод о знакоопределенности этой формы.

Теорема 2.1. Если в рассматриваемом представлении для всех $j_1, j_2, \ldots, j_{n-1}$ из множества $\{1,2,\ldots,k\}$

1) все коэффициенты $a_{P_0}, a_{P_1}^{j_1}, \ldots, a_{P_{n-2}}^{(j_1,j_2,\ldots,j_{n-2})}$ – положительные (отрицательные) числа,

2) формы второго порядка $V_2^{(j_1\ldots j_{n-1})}$ – определенно положительные (отрицательные).

Тогда форма V_{2n} – определенно положительная (отрицательная).

Теорема 2.2. Форма V_{2n} – знакоположительная (знакоотрицательная), если в равенстве (2.5) для всех $j_1, j_2, \ldots, j_{n-1}$ из множества $\{1,2,\ldots,k\}$ все коэффициенты $a_{P_0}, a_{P_1}^{j_1}, \ldots, a_{P_{n-2}}^{(j_1,j_2,\ldots,j_{n-2})}$, а также формы $V_2^{(j_1\ldots j_{n-1})}$ – неотрицательные (неположительные) и хотя бы одно из этих чисел отлично от нуля или хотя бы одна из форм $V_2^{(j_1 \cdots j_{n-1})}$ – знакоопределенная.

Приведен ряд методов преобразования форм от двух переменных и на числовых примерах продемонстрировано применение полученных результатов. Приведены примеры применения алгоритмов этой главы для определения условий существования локального минимума нелинейного функционала, заданного на решениях системы дифференциальных уравнений.

Третья глава посвящена исследованию задачи управляемости для линейной нестационарной системы дифференциальных уравнений с управлением.

Рассмотрим линейную нестационарную управляемую систему

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, \tag{3.1}$$

с закрепленными концами

$$x(t_0) = x_0, \; x(t_1) = x_1, \tag{3.2}$$

в которой $A(t)$ – $n \times n$-матрица, $B(t)$ – $n \times m$-матрица, $n \geq m$, элементы матриц $A(t), B(t)$ – кусочно-непрерывные функции на сегменте $[t_0, t_1]$, $t_0 < t_1$ – некоторые фиксированные постоянные числа. Пусть $x_0 \in E_n, x_1 \in E_n$, – произвольные фиксированные векторы, $E_n - n$- мерное евклидово пространство, $u(t)$ – вектор-управление, $U \subset E_m$, – множество значений, принимаемых этим вектором.

Даны определения понятий необходимых для формулировки и доказательства ряда утверждений.

Решается задача нахождения условий, при которых имеется постоянное вектор-управление, размерности совпадающей с размерностью фазового пространства, разрешающее краевую задачу (3.1),(3.2).

Определим следующие величины

$$\alpha \equiv \int_{t_0}^{t_1} \|A(t)\| dt, \qquad \beta \equiv \int_{t_0}^{t_1} \|B(t)\| dt, \tag{3.3}$$

где α, β – положительные числа. Норма матрицы определяется как

$$\|A\| = \left(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^2 \right)^{1/2}, \text{ а норма вектора } \quad |x| = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right)^{1/2}.$$

Теорема 3.1. Пусть числа $\varepsilon > 0, N > 0$ таковы, что $q < 1$ и выполнены неравенства

$$\int_{t_0}^{t_1} v^T B(t) v dt \geq \varepsilon |v|^2,$$

где $v \in E_n$ – произвольный вектор, а также

$$|x_1 - x_0| + (t_1 - t_0) \max_{[t_0, t_1] \times W(l)} |A(t)x| < N\varepsilon.$$

Тогда найдется единственное управление $u \in E(N) = \{u \in E_n : \|u\| \leq N\}$, являющееся решением задачи управления (3.1),(3.2), соответствующее этому управлению решение $x(t)$ системы (3.1), удовлетворяет включению $x(t) \in W(l)$ при любом $t \in [t_0, t_1]$.

Пусть при любом $t \in [t_0, t_1]$ $\|A(t)\| \le \alpha_0$, $\|B(t)\| \le \beta_0$, где α_0, β_0 – некоторые числа, $\alpha_1 = \alpha_0(t_1 - t_0)$, $\beta_1 = \beta_0(t_1 - t_0)$, $q_1 = \alpha_1\left(1 + \frac{\beta_1}{\varepsilon}\right)$.

Проводится процедура обобщения метода на случай, когда управления рассматриваются из класса кусочно-постоянных вектор-функций с фиксированным числом точек разрыва.

Сегмент $[t_0, t_1]$ разделим на p равных частей точками $t_0 = \tau_0 < \tau_1 < \ldots < \tau_{p-1} < \tau_p = t_1$. Пусть числа p и ε_0 таковы, что при любом $i \in \{0,1,2,\ldots,p\}$

$$\int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} \big(B(t)v, v\big)dt \ge \varepsilon_1 |v|^2, \tag{3.4}$$

где $\varepsilon_1 = \varepsilon_0(\tau_{i+1} - \tau_i)$. Положим $q = \alpha_0(t_1 - t_0)\left(1 + \frac{\beta_0}{\varepsilon_0}\right)$, $q_0 = 1 - \frac{q}{p}$, $\bar{l} = \frac{1}{q_0}\left[|x_1 - x_0| + (t_1 - t_0)\max\limits_{[t_0,t_1]\times E(N)} |A(t)x_0(t) + B(t)u|\right]$, $N > 0$ – некоторое число.

Теорема 3.2. Пусть числа $\alpha_0, \beta_0, \varepsilon_0$ и p такие, что

1) выполнено неравенство (3.18),
2) при любом $i \in \{0,1,2,\ldots,p\}$ $\quad \tau_{i+1} - \tau_i < \dfrac{1}{\alpha_0\left(1 + \frac{\beta_0}{\varepsilon_0}\right)}$,
3) $\dfrac{x_1 - x_0}{t_1 - t_0} + \max\limits_{[t_0,t_1]\times W(\bar{l})} |A(t)x| < N\varepsilon_0$.

Тогда найдется, определенное на сегменте $[t_0, t_1]$, кусочно-постоянное управление $u(t)$, являющееся решением задачи (3.1), (3.2), а соответствующее этому управлению решение $x(t)$ системы (3.1) удовлетворяет включению $x(t) \in W(\bar{l})$ при любом $t \in [t_0, t_1]$.

Приводятся два варианта метода обобщающего теорию на случай, когда размерность фазового пространства больше размерности пространства управлений.

В четвертой главе приводятся и интерпретируются результаты моделирования и численные методы исследований математических моделей, полученные в трех предыдущих главах.

Моделировнание систем 1. Поведение объекта описывается системой дифференциальных уравнений с управлением

$$\dot{x}_1 = x_2 + 6x_2x_3^2 + 3x_1^2x_2,$$
$$\dot{x}_2 = x_3 + 4x_2^2x_3 + 7x_1x_2x_3,$$
$$\dot{x}_3 = u(\tau) + 2x_1^2x_3^3 + 5x_1x_2^3x_3^2,$$

в которой кусочно-постоянная функция $u(\tau)$ определена равенством

$$u(\tau)=\begin{cases}0,\ при\ 0\le\tau<1/4,\\ \mu_1,\ при\ 1/4\le\tau<1/2,\\ \mu_2,\ при\ 1/2\le\tau<1,\end{cases}$$

где μ_1, μ_2 – параметры, значения которых принадлежат интервалу $(-\mu_0, \mu_0)$, $\mu_0 > 0$ – некоторое число. Задан функционал качества

$$J[x,u]=\int_0^1 x_1^2(t)-x_2^2(t)+x_3^2(t)\,dt.$$

Применением методов анализа на локальную оптимальность из первой главы данный функционал после подстановки функции управления и соответствующего решения системы приводится к виду:

$$\Delta J[\mu_1,\mu_2]=\frac{653903\mu_1^2+1186584\mu_1\mu_2+828544\mu_2^2}{20643840}+o\left(\|u\|^2\right),$$

где первое слагаемое – положительно определенная квадратичная форма, из чего делается обоснованный вывод о локальной оптимальности номинального (невозмущенного) решения.

Моделировнание систем 2. Поведение объекта описывается системой дифференциальных уравнений с управлением вида

$$\begin{aligned}\dot x_1&=u_1u_2+3x_1x_2^2x_3+2x_1^2x_2,\\ \dot x_2&=u_1^2-u_2^2+2x_1x_2x_3^2+5x_1^2x_2x_3,\\ \dot x_3&=u_1^2+u_2^2+x_1x_3^3+4x_1x_2x_3^2,\end{aligned}$$

с нулевыми начальными условиями (уравнения в возмущениях).

Этой системе соответствует функционал качества вида (в новых переменных):

$$J[x,u]=\int_0^1 x^T(t)\begin{pmatrix}-1&0&1/3\\0&1&0\\1/3&0&1\end{pmatrix}x(t)\,dt.$$

Подстановка полученного представления решения $x(t,u)$ в функционал после применения методов исследования, описанных во второй главе, приводит к следующему выражению,

$$J[u_1,u_2]=\frac{1}{3}\left(\left(u_1^2-u_2^2\right)^2+\frac{1}{6}(u_1+u_2)^4+\frac{5}{6}\left(u_1^4+u_2^4\right)\right)+o\left(\|u\|^4\right),$$

что свидетельствует о положительной определенности приращения функционала и об оптимальности соответствующего невозмущенного решения задачи управления.

Моделировнание систем 3. Приведем пример применения результатов третьей главы:

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений с управлением (краевая задача), описывающую (моделирующую) поведение объекта, описанного в первой главе:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \\ \lambda & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{23-28t}{2} \\ \frac{1}{2} & t+9t^2 \end{pmatrix} u,$$

где краевые условия имеют по определению вид $x(0,u) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\quad x(1,u) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Если в матрице A параметр $\lambda = 0.14 < \dfrac{2.75}{(7.91+2.75)\sqrt{3}}$, а константа

$$N = 2 > \frac{(1+\lambda\sqrt{3})\sqrt{17}}{2.75},$$

то условия доказанных ранее теорем будут выполнены, а, следовательно, исследуемая система будет управляемой в классе $E(N)$.

Моделировнание систем 4. В результате численного расчета движения летательного аппарата методом проекции сопряженного градиента с модификацией шага получены приближенные решения отличающиеся значением функционала от точных (не кусочно-постоянных) управлений полученных с помощью принципа максимума Понтрягина на 5-10%, при трех интервалах постоянства управляющей функции.

Моделировнание систем 5. Для задачи оптимального движения подвижного состава на различных участках пути (отличающихся дополнительными силами сопротивления и длиною участка) получены численные решения задачи оптимального управления, проигрывающие точному решению (полученному по принципу максимума Понтрягина) от 7% до 9% в зависимости от характера участка. Общий вид управления при допущенных упрощениях не изменился (участки включения двигателя чередуются с участками свободного пробега состава по инерции и завершающий участок торможения).

В приложении приведены программы на языке PASCAL, реализующие алгоритм проверки условий достаточного типа, позволяющий, на основе теорем второй главы, сделать вывод о знакоположительности форм высшего порядка для двух и трех переменных.

Приведен также набор программных модулей на языке системы MATLAB, реализующий градиентный поиск локально-оптимального управления на множестве кусочно-постоянных управлений.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ РАБОТЫ

Основные результаты диссертационного исследования состоят в следующем:

1. Обоснован переход от реальных технических систем к математическим моделям управляемых детерминированных процессов с кусочно-постоянным управлением.
2. Разработана методика исследования математической модели посредством сведения задачи к исследованию знакоопределенности однородных форм высшего порядка нескольких переменных.
3. Разработан и численно реализован алгоритм преобразования указанных форм к виду, допускающему вывод об их знакоопределенности.
4. Разработан комплекс программ, позволяющий находить локально-оптимальные управления в классе кусочно-постоянных функций.

Исследования по тематике диссертации проводились в рамках общего научного направления, реализуемого на кафедре Высшей математики РГРТУ в лаборатории системного анализа под руководством проф. Миронова В.В.

В работе выполнен анализ методов исследования локальной оптимальности управлений в детерминированных системах. В работе была поставлена и решена задача разработки методики исследования локальной оптимальности управления систем в классе кусочно-постоянных функций. Также в работе усовершенствован метод численного нахождения локально-оптимального управления в классе кусочно-постоянных управлений. Разработана методика сведения задачи оптимального управления к конечномерной задаче исследования однородных форм высшего порядка.

Полученные результаты позволяют упростить и удешевить реализацию систем управления техническими объектами, что повысит общую надежность рассматриваемых систем и принесет экономический выигрыш.

Результаты работы, подтвержденные соответствующими актами, внедрены:

– в филиале ФГУП ЦСКБ–Прогресс (г. Самара) – ОКБ «Спектр» (г. Рязань);

– на Государственном Рязанском приборном заводе (г. Рязань),

что подтверждено справками о внедрении.

ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Публикации в изданиях, рекомендованных ВАК Минобрнауки РФ

1. Кузнецов А.В. Управляемость в классе кусочно-постоянных вектор-функций для линейной нестационарной системы // Известия ТулГУ. Серия «Естественные науки. Дифференциальные уравнения и прикладные задачи» Вып. 1. Тула. 2004. С. 30-38.

2. Кузнецов А.В. Условия локальной оптимальности для нелинейных управляемых систем в классе кусочно-постоянных управлений // Вестник РГРТУ.– 2011. № 4 Вып. 38 С. 125-128

Статьи в зарегистрированных изданиях

3. Кузнецов А.В. О некоторых достаточных условиях оптимальности управления // Известия Российской академии естественных наук. Дифференциальные уравнения. Рязань: Изд-во РГПУ, 2002. № 6. С. 55-61.
4. Кузнецов А.В. Об одной оптимизационной задаче // Информатика и прикладная математика: Межвуз. сб. науч. тр. Рязань: Изд-во РГПУ, 2002. С. 72-74.
5. Кузнецов А.В. Об управляемости систем дифференциальных уравнений // Математические методы в научных исследованиях: Межвуз. сб. научных трудов. Рязань: Изд-во РГРТА, 2004. С. 34-38.
6. Кузнецов А.В. О достаточных признаках положительности форм высшего порядка многих переменных // Информатика и прикладная математика: Межвуз. сб. науч. тр.: РГПУ, 2004. С. 48-53.

Зарегистрированные тезисы докладов

7. Кузнецов А.В. Об одном методе исследования задачи оптимального управления (тезисы доклада) // Новые информационные технологии в научных исследованиях и в образовании. Тезисы докладов Всероссийской научной конференции. Тула: Изд-во ТулГУ, 2002. С. 40-41.
8. Кузнецов А.В. Об одной задаче оптимального управления (тезисы доклада) // Новые информационные технологии в научных исследованиях и в образовании. Тезисы докладов 7-й всероссийской научно-технической конференции студентов, молодых ученых и специалистов. Рязань: Изд-во РГРТА, 2002. С. 20-21.
9. Кузнецов А.В. Об одном алгоритме решения задачи оптимального управления (тезисы доклада) // Математика. Компьютер. Образование. Тезисы докладов X международной конференции. М., 2003. С. 127.
10. Кузнецов А.В. О методе сведения задачи оптимального управления к конечномерной задаче (тезисы доклада) // Современные методы теории функций и смежные проблемы. Материалы конференции Воронежской зимней математической школы. Воронеж: Изд-во ВГУ, 2003. С. 138.
11. Кузнецов А.В. Метод приращения целевого функционала в задаче оптимального управления // Тезисы доклада. XVI Всероссийская научно-техническая конференция «Новые информационные технологии в научных исследованиях» (НИТ-2011).

Кузнецов Алексей Викторович

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ И МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ ЛОКАЛЬНОЙ ОПТИМАЛЬНОСТИ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата технических наук

Рязанский государственный радиотехнический университет
Россия, 390005, г. Рязань, ул. Гагарина, д. 59/1.

Отпечатано в ООО «Полиграф»
Заказ № 305. Тираж 100 экз.