ТИПОВОЙ РАСЧЕТ
«Функции нескольких переменных»

Задание 1. Найти область определения функции $z = f(x, y)$ и изобразить её на координатной плоскости.

1.1. $z = \sqrt{1 - \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16}}$	**1.11.** $z = \ln(xy)$
1.2. $z = \ln(y^2 - 4x + 8)$	**1.12.** $z = \ln\left(\frac{x^2}{y}\right)$
1.3. $z = \sqrt{x+y} + \sqrt{x-y}$	**1.13.** $z = \arccos(x - 2y)$
1.4. $z = \ln\left(\frac{x+y}{y}\right)$	**1.14.** $z = \ln\left(\frac{2x}{\sqrt{y}}\right)$
1.5. $z = \arccos\left(x - \frac{1}{y}\right)$	**1.15.** $z = \sqrt{x - \sqrt{y}}$
1.6. $z = \sqrt{81 - x^2 - y^2}$	**1.16.** $z = \arcsin\frac{x^2 + y^2}{4}$
1.7. $z = \ln(y - \sqrt{x})$	**1.17.** $z = \frac{1}{9 - x^2 - y^2}$
1.8. $z = \arcsin\frac{y-1}{x}$	**1.18.** $z = \frac{\sqrt{4x - y^2}}{\ln(1 - x^2 - y^2)}$
1.9. $z = \ln(y\sqrt{x})$	**1.19.** $z = \arcsin(xy - 2)$

1.10. $z=\sqrt{\frac{4x}{y}-2}$	**1.20.** $z=\sqrt{\frac{x}{y-x}}$
1.21. $z=\arcsin\frac{x-1}{y}$	**1.26.** $z=\ln\left(\frac{x}{y}\right)$
1.22. $z=\ln\left(\frac{x+y}{y-x}\right)$	**1.27.** $z=\frac{\sqrt{4x+3y^2}}{\ln(4-x^2-y^2)}$
1.23. $z=\sqrt{1-\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{25}}$	**1.28.** $z=\ln\left(y^2+4x+10\right)$
1.24. $z=\sqrt{x+3\sqrt{y}}$	**1.29.** $z=\sqrt{2x-3\sqrt{y}}$
1.25. $z=\sqrt{x+2y}+\sqrt{3x-y}$	**1.30.** $z=\ln(2x-2y)$

Задание 2. Изобразить на координатной плоскости линии уровня для функции $z=f(x,y)$, придавая z значения от -2 до 2 через 1.

2.1. $z=5+y-\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{6}y^2$	**2.7.** $z=\frac{1}{6}y^2-\frac{1}{9}x^2-2x-1$
2.2. $z=\frac{1}{3}x^2+y^2+x-12$	**2.8.** $z=\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{3}y^2-2y-9$
2.3. $z=\frac{1}{5}x^2+y^2-x-9$	**2.9.** $z=\frac{1}{2}x^2-2x+y-7$
2.4. $z=\frac{1}{5}x^2+\frac{1}{6}y^2-x-7$	**2.10.** $z=\frac{1}{9}x^2+\frac{1}{25}y^2+y-1$

2.5. $z=\frac{1}{2}x+6-\frac{1}{5}y^2-\frac{1}{5}x^2$	**2.11.** $z=\frac{1}{25}x^2+\frac{1}{25}y^2+2y-1$
2.6. $z=\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}y^2-\frac{1}{7}x-12$	**2.12.** $z=\frac{1}{5}x^2+\frac{1}{2}y^2+2y-14$
2.13. $z=\frac{1}{9}x^2+\frac{1}{8}y^2-x-4$	**2.22.** $z=\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{3}y-\frac{1}{4}x-7$
2.14. $z=8-\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}x^2-\frac{1}{7}y^2$	**2.23.** $z=x^2+\frac{1}{2}x+2y-9$
2.15. $z=\frac{1}{12}x^2+\frac{1}{6}y^2+y-6$	**2.24.** $z=\frac{1}{16}x^2+\frac{1}{16}y^2-2x-3$
2.16. $z=\frac{1}{5}x^2+\frac{1}{7}y^2-3y-13$	**2.25.** $z=\frac{1}{4}x^2+y^2+2x-9$
2.17. $z=\frac{1}{6}x^2+\frac{1}{7}y^2-\frac{2}{3}x-5$	**2.26.** $z=\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{5}y^2+x-9$
2.18. $z=\frac{1}{8}x^2+\frac{3}{4}y^2-2x-14$	**2.27.** $z=y^2-\frac{1}{2}y+x-9$
2.19. $z=\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{4}y^2+2x-8$	**2.28.** $z=19+2x+2y-\frac{1}{2}y^2$
2.20. $z=\frac{3}{9}x^2+\frac{3}{9}y^2-4x-18$	**2.29.** $z=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}y^2+y-1$
2.21. $z=\frac{1}{9}x^2-\frac{1}{6}y^2-2x+1$	**2.30.** $z=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{4}y^2+2y-3$

Задание 3. Для функции $z = f(x, y)$ найти:

а) дифференциал первого порядка в точке M_0;

б) градиент в точке M_0;

в) производную функции в точке M_0 в направлении, идущем от этой точки к точке M.

3.1. $z = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 + 1$, $M_0(3;1)$, $M(6;5)$	**3.6.** $z = 2x^3 + 4x^2y - xy^2 - 5$, $M_0(4;8)$, $M(7;12)$
3.2. $z = 4x^2 - \frac{2}{y} - 3x^3 - 2$, $M_0(4;2)$, $M(16;7)$	**3.7.** $z = \frac{1}{3}x^3 + 2x^2y^2 - 4x + 4$ $M_0(1;2)$, $M(9;17)$
3.3. $z = 4x^3 - 2y^2x + yx - 2$, $M_0(-13;-6)$, $M(11;1)$	**3.8.** $z = x^3y + y^2x - 5y + 1$, $M_0(5;-7)$, $M(10;5)$
3.4. $z = 2x^3 + 3x^2 - 2y^2 - 3$, $M_0(-2;4)$, $M(2;7)$	**3.9.** $z = 3y^3 - x^3 + 2xy - 3$, $M_0(-4;2)$, $M(2;10)$
3.5. $z = 5y^3 + 3y^2 - \frac{x^2+1}{y}$, $M_0(3;5)$, $M(9;13)$	**3.10.** $z = y^3 + \frac{1}{x^2} - \frac{2}{y^2} + 4$, $M_0(-2;-3)$, $M(1;1)$

3.11. $z = x^3 - 6x^2 - 4y^3x^2 - 3$, $M_0(-4;-7)$, $M(1;5)$	**3.17.** $z = 3x^3 - y^3 + x^2y + 7$, $M_0(1;-4)$, $M(16;4)$
3.12. $z = \frac{1}{2}y^3 + x^2 - 3y^2 + 2$, $M_0(-18;-2)$, $M(6;5)$	**3.18.** $z = \frac{1}{4}x^3 - 2y^2 + 3x - 7$, $M_0(6;-6)$, $M(30;1)$
3.13. $z = \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{3}y^2 + \frac{1}{4}x^2y + \frac{1}{5}$, $M_0(7;4)$, $M(10;8)$	**3.19.** $z = 4x^3 + 4x^2 - \frac{3}{y^2} + 2$, $M_0(-4;1)$, $M(2;9)$
3.14. $z = 2x^3 - 4y^2x - 3xy + 1$, $M_0(7;8)$, $M(13;16)$	**3.20.** $z = 2y^3x - 3x^3y + x^2 - 3$, $M_0(7;9)$, $M(10;13)$
3.15. $z = \frac{1}{3}y^3 - x^2y + y^2 - 5$, $M_0(5;-12)$, $M(12;12)$	**3.21.** $z = \frac{1}{4}x - y^2 - 3x^3 + 8$, $M_0(-8;2)$, $M(4;7)$
3.16. $z = x^3y^2 - 5x^2 + y - 2$, $M_0(4;-8)$, $M(12;7)$	**3.22.** $z = x^3 + y^2 + x + 1$, $M_0(-5;-3)$, $M(1;5)$

3.23. $z=2x^3y^3+x^2y^2+x+1$, $M_0(-3;-4)$, $M(3;4)$	**3.27.** $z=2y^3x^3+x^2y-y^2-1$, $M_0(6;3)$, $M(9;7)$
3.24. $z=x^2-5y^2-\frac{2}{x^3}+3$, $M_0(1;3)$, $M(4;7)$	**3.28.** $z=\frac{1}{2}x^3-8xy+y^3-5$, $M_0(2;2)$, $M(5;6)$
3.25. $z=2y^3-x^3+y^2x-6$, $M_0(-6;3)$, $M(6;8)$	**3.29.** $z=x^2y-y^3+x^2+9$, $M_0(14;-15)$, $M(21;9)$
3.26. $z=y^3+x^2y-5y^2+1$, $M_0(-9;3)$, $M(15;10)$	**3.30.** $z=5x^3-y^2x-xy-2$, $M_0(-7;-5)$, $M(1;1)$

Задание 4. Найти производную $\frac{dz}{dt}$.

4.1. $z=2x-3y^2+\operatorname{arctg}\frac{y}{2}$, где $x=t^2+1$, $y=e^t$.

4.2. $z=3x^2+y-\sqrt{1-\sin(xy)}$, где $x=\ln t$, $y=t^2$.

4.3. $z=\sqrt{y-x}+\cos(xy)$, где $x=\sin t$, $y=\cos t$.

4.4. $z=\sin(xy)-\frac{1}{\sqrt{x-y}}$, где $x=e^{2t}$, $y=e^t$.

4.5. $z=\operatorname{tg}x^2-\frac{y^3}{1-x}$, где $x=\ln t$, $y=\sin 3t$.

4.6. $z=\sin(x-y)+x^2y^3$, где $x=t^2-1$, $y=e^{2t}$.

4.7. $z=e^{xy}+\sqrt{x^2+2y^2}$, где $x=\cos t$, $y=\sin 2t$.

4.8. $z=2^{xy}+\sqrt{x^2-y^2}$, где $x=\ln 2t$, $y=\ln t$.

4.9. $z=3x^2+2y^3-\cos(xy)$, где $x=t^2$, $y=\sqrt{t}$.

4.10. $z=2x^3-y^2+\operatorname{arctg}(xy)$, где $x=\sin t$, $y=\cos t$.

4.11. $z=\dfrac{x}{2}+y^3-e^{xy}$, где $x=\arcsin t$, $y=\arccos t$.

4.12. $z=\dfrac{2}{x}+y^2+\operatorname{arcctg}\left(\dfrac{x}{y}\right)$, где $x=t^2$, $y=t$.

4.13. $z=x^2+\dfrac{1}{y}+\operatorname{arctg}\left(\dfrac{y}{x}\right)$, где $x=e^t$, $y=e^{2t}$.

4.14. $z=e^{xy}+\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}y$, где $x=\cos t$, $y=\sin t$.

4.15. $z=\dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{1}{3}y^3+\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$, где $x=t^2$, $y=t$.

4.16. $z=e^{xy}+x^2-y^2$, где $x=\sqrt{t+1}$, $y=\sqrt{t}$.

4.17. $z=\sqrt{x^2-y^2}-\cos y+\sin x$, где $x=\sqrt{2t}$, $y=\sqrt{t}$.

4.18. $z=e^x+\ln y+\sqrt{xy}$, где $x=\ln t$, $y=e^t$.

4.19. $z=\operatorname{tg}\left(\dfrac{x}{y-1}\right)+x^2-y^3$, где $x=2t^2$, $y=t^3$.

4.20. $z=\cos\left(\dfrac{y}{x}\right)+\sqrt{x+y}$, где $x=\sin t$, $y=\cos t$.

4.21. $z=3^x-2^y+\sin(xy)$, где $x=\ln t$, $y=\log_2 t^3$.

4.22. $z=x^2+y^5-\ln(x^2-y^2)$, где $x=\sqrt{t^2+1}$, $y=\sqrt{t+1}$.

4.23. $z=3\sqrt{x}+2y^2-\sin(xy)$, где $x=\sin t$, $y=\cos t$.

4.24. $z=\arcsin\sqrt{x-y}+4x^3-3y^2$, где $x=t^2+1$, $y=1-t^2$.

4.25. $z = 4^{xy} + \sqrt{x - y}$, где $x = \cos 2t$, $y = \sin 2t$.

4.26. $z = \dfrac{x}{y} + 3y^5 - 4x^3$, где $x = \sin t$, $y = \cos t$.

4.27. $z = \sqrt[3]{x - y} + e^{\frac{y}{x}}$, где $x = t^2$, $y = 1 - t^2$.

4.28. $z = \dfrac{1}{x} + \sqrt{y} + e^{xy}$, где $x = \ln t$, $y = 25t$.

4.29. $z = \dfrac{1}{3}x^2 + \dfrac{3}{4}y^4 + \cos(xy)$, где $x = e^t$, $y = t^2$.

4.30. $z = 2^{x-y} + \sqrt{xy} - 3y^2$, где $x = \operatorname{tg} t$, $y = \operatorname{ctg} t$.

Задание 5. Найти производные $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{dz}{dx}$.

5.1. $z = \sin(3x + 2y^3) + \operatorname{arctg}(xy)$, $y = \ln(2x)$.

5.2. $z = \operatorname{tg}(2xy) - \sqrt[3]{3x^2 + xy}$, $y = \lg(5x)$.

5.3. $z = \cos(2xy + \sqrt{y}) - \arcsin(x^2 y)$, $y = e^{4x} + 3x^2$.

5.4. $z = \operatorname{tg}(2xy) - \sqrt[3]{3x^2 + xy}$, $y = \sin 2x$.

5.5. $z = 2x^3\sqrt{y} + \sqrt{x}y$, $y = 2^{3x}$.

5.6. $z = y \cdot \operatorname{tg} x + 5x^2 y^4$, $y = e^{5x}$.

5.7. $z = \log_2(y^2 + xy)$, $y = \sin 2x$.

5.8. $z = \sin(xy^2) - 2x^2 + 4y^3$, $y = \arcsin 4x$.

5.9. $z = (2x + 3y)^5 - \cos(xy)$, $y = e^{2x}$.

5.10. $z = \operatorname{tg}(5xy^2) - \sqrt{xy}$, $y = e^{3x+1}$.

5.11. $z = \arcsin\sqrt{xy} + e^{x-y}$, $y = x^3 + 2x$.

5.12. $z = \arccos(x^2 y) - x^2 y^3$, $y = \ln x$.

5.13. $z = \operatorname{arctg}(2xy) + e^x - y^2$, $y = \sqrt{x}$.

5.14. $z = \log_2(3xy) - \cos y$, $y = 2^x$.

5.15. $z = 3xy + \sqrt{x^2 - 2y}$, $y = \operatorname{tg} 5x$.

5.16. $z = \log_3(x + y) - \sin(xy)$, $y = 2^{2x}$.

5.17. $z = y \cdot \sin(xy)$, $y = \arcsin(3x)$.

5.18. $z = \ln(x^2 y) - 3xy^2$, $y = \operatorname{tg} 3x$.

5.19. $z = y^2 \cdot \cos(xy)$, $y = 2x^3$.

5.20. $z = \sqrt{y} \cdot 2x - e^x$, $y = x^2 - x$.

5.21. $z = \operatorname{ctg}(2xy) \cdot \sqrt{x}$, $y = \ln(2x - 1)$.

5.22. $z = 2^{\arcsin(xy)}$, $y = e^{3x}$.

5.23. $z = \arcsin(x^2 y + y^2 x)$, $y = \ln x$.

5.24. $z = \arccos(2xy) - e^y$, $y = x^2 + x$.

5.25. $z = \sin\left(\dfrac{x}{y}\right) + y^2$, $y = \ln(x^2 + 3x)$.

5.26. $z = \ln(2x - 3y) + x^2 y^3$, $y = \sqrt{x}$.

5.27. $z = \sin(xy) + \sqrt{x^2 + y^2}$, $y = e^{2x}$.

5.28. $z = \arcsin(xy) - \cos y$, $y = 2x - 1$.

5.29. $z = \sqrt{x \cdot y} + \arccos x$, $y = \ln x$.

5.30. $z = (3y^2 + 1) \cdot x + \operatorname{tg} y$, $y = \sqrt{x}$.

Задание 6. Найти производные $\dfrac{\partial z}{\partial u}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial v}$.

6.1. $z = \sin^2 x + \cos^2 y$, $x = u + v$, $y = u^2 - v^2$.

6.2. $z = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$, $x = \ln(u - v)$, $y = \ln(u + v)$.

6.3. $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $x = u \cdot \cos v$, $y = u \cdot \sin v$.

6.4. $z = xy + y^2 - x^3$, $x = e^{u+v}$, $y = e^{u-v}$.

6.5. $z=e^{x}\cos y$, $x=3u-v$, $y=2v$.

6.6. $z=e^{xy}$, $x=u\cdot e^{v}$, $y=v\cdot e^{u}$.

6.7. $z=e^{x}\sin y$, $x=2u$, $y=\cos(u+v)$.

6.8. $z=y^{x}$, $x=\dfrac{u}{v}$, $y=u\cdot v$.

6.9. $z=\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$, $x=u^{2}+v^{2}$, $y=u\cdot v$.

6.10. $z=x^{2}y$, $x=u^{2}-v^{2}$, $y=e^{uv}$.

6.11. $z=\ln\left(x^{2}+y^{2}\right)$, $x=u\cdot v$, $y=\dfrac{u}{v}$.

6.12. $z=\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$, $x=u\cdot\sin v$, $y=u\cdot\cos v$.

6.13. $z=x^{2}+y^{2}$, $x=\sqrt{u+v}$, $y=\sqrt{u-v}$.

6.14. $z=\sqrt{x+y}$, $x=u-v$, $y=u\cdot v$.

6.15. $z=xy$, $x=e^{u}\cdot\cos v$, $y=e^{u}\cdot\sin v$.

6.16. $z=x^{2}y^{2}$, $x=\sqrt{u}+\sqrt{v}$, $y=\sin\left(u^{2}-v\right)$.

6.17. $z=x^{2}y-xy^{2}$, $x=u\cdot\sin v$, $y=v\cdot\cos u$.

6.18. $z=x+\operatorname{arctg}\left(xy^{2}\right)$, $x=u\cdot v$, $y=\dfrac{u}{v}$.

6.19. $z=e^{y}\cdot\sin x$, $x=\arcsin\dfrac{u}{v}$, $y=\ln\dfrac{u}{v}$.

6.20. $z=e^{2x-3y}$, $x=\cos(uv)$, $y=u^{5}-3v$.

6.21. $z=x^{y}$, $x=u^{2}-v^{2}$, $y=\ln(uv)$.

6.22. $z=e^{xy^{2}}$, $x=u^{2}-3v^{2}$, $y=\dfrac{2v}{u+v}$.

6.23. $z=\ln\left(xy^{2}\right)$, $x=u^{2}-v^{2}$, $y=u+v$.

6.24. $z=x^{2}\ln y$, $x=\sqrt{u^{2}+v^{2}}$, $y=\dfrac{u}{v}$.

6.25. $z=\sin(x+y)$, $x=\arcsin(u-v)$, $y=\cos(u+v)$.

6.26. $z=\sin x\cdot\cos y$, $x=\arcsin(u\cdot v)$, $y=\arccos(u\cdot v)$.

6.27. $z=e^{x-y}$, $x=\dfrac{u}{u+v}$, $y=\dfrac{v}{u-v}$.

6.28. $z=\sqrt{x^2+y^2}$, $x=\sin(u+v)$, $y=\cos(u+v)$.

6.29. $z=\sqrt{xy}$, $x=v\cdot\sin u$, $y=u\cdot\cos v$.

6.30. $z=\sin x+\cos y$, $x=\arcsin\dfrac{u}{v}$, $y=\arccos\dfrac{u}{v}$.

Задание 7. Найти $\dfrac{dy}{dx}$, если $F(x,y)=0$.

7.1. $2^{xy}-3\sqrt{xy^3}+2y^3-5=0$.

7.2. $\cos(2x+y^3)+3x^3y-2x+1=0$.

7.3. $\sin(3y^2+x)+3^{x^2y}-2y+5=0$.

7.4. $\operatorname{tg}(y^3x^2)-2xy+3x-1=0$.

7.5. $\log_2(3x^2+2y)-4xy+5y^2+3=0$.

7.6. $3x^2y+\sqrt{2x+4y}-x^3+7=0$.

7.7. $e^{2xy}+y^2-\cos(x^2+y)-3=0$.

7.8. $\log_3(y^2x+4)+2y+e^x-4=0$.

7.9. $2\sin(x^2y^3)-3x^2y+y^4+1=0$.

7.10. $\cos(xy^2)+\sqrt{2x+3y}+2x-3y=0$.

7.11. $\sin(y^2x^3)+(x-3y^2)^3-5=0$.

7.12. $\operatorname{tg}(x^2y)+4y-3xy^3+8=0$.

7.13. $\ln(3x^2+xy)-4x^3y^2+x^2-1=0$.

7.14. $(3x-1)^y+3xy^3-4y^2-5=0$.

7.15. $e^{x+2y}+5x^3y-2y^2+3=0$.

7.16. $\lg\left(4x^2+2y\right)+x^2y^3-\sqrt{x}+3=0$.

7.17. $\cos\left(2x^2y\right)-\sqrt{2x+3y^2}+4y^3-2=0$.

7.18. $2^{x+2y}+\operatorname{ctg}(xy)-4y-4=0$.

7.19. $\sin\left(3x^2+y\right)-4x^3y^2+x^2-1=0$.

7.20. $2\cos\left(x^2y^2\right)-3x^3+4y^5+6=0$.

7.21. $\sqrt[3]{2x^2y+3x}+2y^3x+x^3-1=0$.

7.22. $3^{x^2+2y}+3xy+2y-5=0$.

7.23. $\sin\left(2x^2y^2\right)-2y^2+4x-3=0$.

7.24. $\log_5(3x+5y)-3x^2y+y^3-4=0$.

7.25. $2x+5y^2+\sqrt{3x+2y^2}-3=0$.

7.26. $\left(3y^2+1\right)^{2x-1}-8x^2y+y^3-2=0$.

7.27. $\arcsin\left(x^2y\right)+2x^3+4y-\lg 5=0$.

7.28. $5^{xy^2}-x^3y+y^4-1=0$.

7.29. $\operatorname{arctg}\left(xy^3\right)-2e^{2x+y}+y^4-5=0$.

7.30. $\cos\left(2x+3y^2\right)-x^2y^3+x^4-e^5=0$.

Задание 8. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, если $F(x,y,z)=0$.

8.1. $3x^2-xz^2+4zy^3=0$.

8.2. $\sin\left(x+z^2\right)-2y^3+3xz=0$.

8.3. $2z^3y+y^2x+e^{zx}=0$.

8.4. $\operatorname{arctg}(2z+x)+x^3y-2xyz=0$.

8.5. $\sin(zy)+3x^3y-xz=0$.

8.6. $\ln(xz)+2z^3y^2-3x^2y^3=0$.

8.7. $\cos\left(y+z^2\right)+2xy^3-xz^2=0$.

8.8. $3x^3y^2 - 5yz + \sin(xyz) = 0$.

8.9. $2xz^3 + \operatorname{arctg}(yz) - 2x^2 = 0$.

8.10. $\sin\left(y + x^3\right) - 2x^2z + yz^2 = 0$.

8.11. $\log_2(x + z) - 3x^2yz + z^3 = 0$.

8.12. $\sin\left(x^2y + 2z\right) - zy^3 + x^3 = 0$.

8.13. $\arcsin(xz) - 3y^3x + 2xz = 0$.

8.14. $(3x - 1)^y + 3z^3y - 4zx^2 = 0$.

8.15. $\operatorname{tg}(x + z) - 2xy^2 + \log_2(zy + 1) = 0$.

8.16. $\arccos\left(2z + y^2x\right) + 4z^3x - y^3x = 0$.

8.17. $\operatorname{ctg}\left(2y + z^3\right) - 5y^3x^2 + 2z^2x = 0$.

8.18. $\cos\left(3y^2x - 2z\right) - e^{3z} + x^2y = 0$.

8.19. $2z^3 - 3\sin(x + z) + x^2y^3 = 0$.

8.20. $\sin\left(3z^2 + 2x\right) - 2y^3x^2 + e^{2z} = 0$.

8.21. $x^3z^2 + 2\cos\left(yz + x^2\right) - 3y^2 = 0$.

8.22. $\log_3\left(yz^2 + 2x\right) - 2x^2y + e^{yz} = 0$.

8.23. $2z^2y^3 + \sin\left(x^3 + z\right) - x^3y^4 = 0$.

8.24. $3z^3x - 2\cos(xyz) + e^y = 0$.

8.25. $\arcsin(xy) - 4x^3z + 3yz^2 = 0$.

8.26. $\operatorname{tg}\left(2z + x^2\right) - 4xy^3z + x^2y = 0$.

8.27. $\operatorname{arctg}\left(zy^2\right) + 2e^{xyz} - x^2y^3 = 0$.

8.28. $\ln\left(2x + y^3\right) + 3z^2x^2y - \sqrt[3]{z} = 0$.

8.29. $\sin\left(2x^2 + 3z\right) - xy^3z^2 + zy = 0$.

8.30. $\cos\left(xz^2\right) - 4y^2z + 3e^{xy} = 0$.

Задание 9. Записать уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности S в точке M_0.

9.1. $S: x^2+3y^2-z^2+5x+yz-15=0, \quad M_0(1,2,3).$

9.2. $S: x^2+y^2-2z^2+3z-2xy+13=0, \quad M_0(1,0,-2).$

9.3. $S: 3x^2-y^2-z^2+2y-2xz-15=0, \quad M_0(2,0,-1).$

9.4. $S: 2x^2+3y^2-2z^2+z+3xy-20=0, \quad M_0(1,-3,0).$

9.5. $S: -x^2+2y^2+z^2+xy-2xz-3=0, \quad M_0(1,-1,3).$

9.6. $S: -3x^2+y^2+z^2+5xy-2z+30=0, \quad M_0(-2,3,-1).$

9.7. $S: 4x^2-2y^2+5z^2+7xy-5z-8=0, \quad M_0(0,-1,2).$

9.8. $S: -2x^2+4y^2-3z^2+xy-2z+5=0, \quad M_0(1,1,-2).$

9.9. $S: 5x^2-7y^2+z^2+xy+8xz+8=0, \quad M_0(-2,0,2).$

9.10. $S: -7x^2+3y^2+2z^2+5yz-6z-20=0, \quad M_0(-1,3,0).$

9.11. $S: 3x^2+y^2-2z^2+4xy+5z+11=0, \quad M_0(0,-1,4).$

9.12. $S: -2x^2-y^2+4z^2-x-3yz-11=0, \quad M_0(1,-2,-3).$

9.13. $S: 3x^2+5y^2-7z^2-xy+3z+19=0, \quad M_0(-1,0,2).$

9.14. $S: x^2+y^2-3z^2+5xz-z-13=0, \quad M_0(2,-3,0).$

9.15. $S: -x^2+2y^2-4z^2+3yz-7x+39=0, \quad M_0(1,5,-3).$

9.16. $S: -2x^2-5y^2+6z^2-7x+2yz+9=0, \quad M_0(-4,1,0).$

9.17. $S: x^2-2y^2+6z^2+4xy-13z+4=0, \quad M_0(5,-1,1).$

9.18. $S: 4x^2+y^2+2z^2-4x-13yz-4=0, \quad M_0(3,-2,-1).$

9.19. $S: 8x^2+4y^2-7z^2+3xz-5y+1=0, \quad M_0(0,2,1).$

9.20. $S: 3x^2-7y^2+z^2+8x-3yz-21=0, \quad M_0(-2,0,5).$

9.21. $S: 4x^2-y^2+2z^2+5y+13xz+31=0, \quad M_0(1,-2,-3).$

9.22. $S: -3x^2+5y^2-z^2+7xy-3z+21=0, \quad M_0(-2,1,0).$

9.23. $S: 4x^2 - 2y^2 + z^2 - 25x + 8yz - 4 = 0, \quad M_0(1, 0, -5).$

9.24. $S: -5x^2 + 3y^2 - 4z^2 + 4xy + 7z + 3 = 0, \quad M_0(0, -2, 3).$

9.25. $S: 3x^2 + 4y^2 - z^2 - 5x + 2yz + 6 = 0, \quad M_0(1, -1, 2).$

9.26. $S: x^2 - 5y^2 + z^2 + 2y - 4xz - 13 = 0, \quad M_0(-4, 1, 0).$

9.27. $S: -4x^2 + y^2 - 3z^2 - 9z + 2xy + 30 = 0, \quad M_0(3, 0, -2).$

9.28. $S: 5x^2 + 4y^2 - 3z^2 + 12x - 7yz - 26 = 0, \quad M_0(-4, 1, 1).$

9.29. $S: x^2 - y^2 + 2z^2 + 4y + 7xz + 10 = 0, \quad M_0(-1, 5, 2).$

9.30. $S: -2x^2 - y^2 + 3z^2 + 5z + 2xy - 11 = 0, \quad M_0(0, 1, -3).$

Задание 10. Для функции $u = f(x, y, z)$ найти дифференциал второго порядка в указанной точке.

10.1. $u = \frac{xyz}{2}, \quad P(4, 2, 6).$

10.2. $u = x^2 y + yz^2, \quad P(-2, 1, 4).$

10.3. $u = \sin x \cdot \sin y + z^2, \quad P\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, 2\right).$

10.4. $u = \ln\sqrt{x^2 + y^2} + z, \quad P(1, 2, 3).$

10.5. $u = \cos(x + y^2 + z), \quad P\left(\frac{\pi}{4}, 0, \frac{\pi}{4}\right).$

10.6. $u = \frac{1}{2}(x^2 + y^3 + z^4), \quad P(2, 1, 0).$

10.7. $u = \frac{1}{2}(xy + yz + zx), \quad P(1, -1, 1).$

10.8. $u = \cos(x + 2z) + \sin(y + x) - xyz, \quad P\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right).$

10.9. $u = e^{xy} \cdot \sin z, \quad P\left(2, -1, \frac{\pi}{4}\right).$

10.10. $u=\frac{y}{x}-\frac{x}{z}-\frac{z}{y}$, $P(2,1,-1)$.

10.11. $u=\frac{xy}{y-z}$, $P(3,5,0)$.

10.12. $u=z^{x+y}$, $P(2,3,4)$.

10.13. $u=\operatorname{arctg}\sqrt{x-y+z}$, $P(1,0,1)$.

10.14. $u=\ln\sin(x+y)+\frac{z^3}{3}$, $P(2,1,4)$.

10.15. $u=z\cdot\ln(x+y)$, $P(1,2,-1)$.

10.16. $u=\frac{1}{2}(x+y\cdot z)^2$, $P(2,3,-1)$.

10.17. $u=e^{x\cdot y+z}$, $P(-1,2,1)$.

10.18. $u=e^{x+y}\cdot\operatorname{tg}z$, $P(3,1,2)$.

10.19. $u=xy^2-yz^2$, $P(-2,3,-1)$.

10.20. $u=\sin x\cdot\cos y-z^2$, $P\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4},2\right)$.

10.21. $u=x\cdot\cos y-z\cdot\sin x$, $P\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3},1\right)$.

10.22. $u=e^x\cdot\cos(y+z)$, $P\left(2,\frac{\pi}{3},-\frac{\pi}{6}\right)$.

10.23. $u=\sin(x-y+z)$, $P\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{6}\right)$.

10.24. $u=x+\ln\sqrt{y^2-z^2}$, $P(2,4,3)$.

10.25. $u=(x+y)^z$, $P(1,2,2)$.

10.26. $u=\operatorname{arctg}\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $P(3,4,5)$.

10.27. $u=\sin\ln(x+y)-z$, $P(2,1,2)$.

10.28. $u=\dfrac{1}{x-y+z}$, $P(2,2,3)$.

10.29. $u=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}$, $P(2,-2,1)$.

10.30. $u=\ln(2x+y)+y\cdot z$, $P(0,e,2)$.

Задание 11. Разложить функцию $z=f(x,y)$ по степеням $x-x_0$ и $y-y_0$ с помощью многочлена Тейлора.

11.1.-11.5. $f(x,y)=2x^3+5xy^2-y^3+2y^2-x^2y+x-4y+5$.

11.1. $x_0=1$, $y_0=-2$.
11.2. $x_0=-1$, $y_0=2$.
11.3. $x_0=2$, $y_0=-1$.
11.4. $x_0=-2$, $y_0=1$.
11.5. $x_0=0$, $y_0=-3$.

11.6.-11.10. $f(x,y)=4x^3-2x^2y+y^3-x^2+xy^2-2y-3$.

11.6. $x_0=-1$, $y_0=2$.
11.7. $x_0=1$, $y_0=-2$.
11.8. $x_0=-2$, $y_0=1$.
11.9. $x_0=2$, $y_0=-1$.
11.10. $x_0=0$, $y_0=-3$.

11.11.-11.15. $f(x,y)=x^3+3xy^2-4y^3+y^2-2x^2y+3x-1$.

11.11. $x_0=2$, $y_0=-1$.
11.12. $x_0=-2$, $y_0=1$.
11.13. $x_0=-1$, $y_0=2$.
11.14. $x_0=1$, $y_0=-2$.
11.15. $x_0=-3$, $y_0=0$.

11.16.-11.20. $f(x,y)=3x^3-x^2y+2y^3-5x^2+xy^2-y+2x+4$.

11.16. $x_0=-1$, $y_0=2$.
11.17. $x_0=1$, $y_0=-2$.
11.18. $x_0=-2$, $y_0=1$.
11.19. $x_0=2$, $y_0=-1$.
11.20. $x_0=3$, $y_0=0$.

11.21.-11.25. $f(x,y)=x^3+3xy^2-2y^3+y^2-2x^2y+4x-y+3$.

11.21. $x_0=2$, $y_0=-2$.

11.22. $x_0=-1$, $y_0=3$.

11.23. $x_0=1$, $y_0=-1$.

11.24. $x_0=-2$, $y_0=1$.

11.25. $x_0=0$, $y_0=-2$.

11.26.-11.30. $f(x,y)=3x^3-2x^2y+y^3-xy^2+y^2-x+3y+2$.

11.26. $x_0=-2$, $y_0=2$.

11.27. $x_0=1$, $y_0=-3$.

11.28. $x_0=-1$, $y_0=1$.

11.29. $x_0=2$, $y_0=-1$.

11.30. $x_0=2$, $y_0=0$.

Задание 12. Найти экстремум функции двух переменных.

12.1. $z=x^3-3xy+3x+3y^2-15y-5$
12.2. $z=2x^3+2x^2-2xy^2+\frac{2}{3}x-y^2+1$
12.3. $z=3x^2+xy-13x+y^3-5y+1$
12.4. $z=x^3-3xy-6x+3y^2-6y+4$
12.5. $z=6x^3+6x^2-3xy^2+2x-2y^2-2$
12.6. $z=x^2+2xy-2y^3+8y-3$
12.7. $z=24x-6xy-x^3+4y^2-4y+1$
12.8. $z=4x^3+9x^2-xy^2+\frac{27}{4}x-y^2+1$
12.9. $z=3xy^2-x^2-2x^3+4y^2+5$
12.10. $z=48x-6xy-3x^3-4y^2+28y-3$
12.11. $z=2xy^2-9x^2-3x^3-9x+3y^2+5$
12.12. $z=x^2+2xy+6x-2y^3+46y-2$
12.13. $z=x^3-4xy-7x+y^2+6y-2$
12.14. $z=2xy^2-15x^2-5x^3-15x+3y^2+4$

12.15. $z = x^2 - 2xy + 4y^3 - 52y + 3$
12.16. $z = 18x - 6xy - 3x^3 - 4y^2 - 12y + 5$
12.17. $z = 3xy^2 - 12x^2 - 4x^3 - 12x + 5y^2 - 2$
12.18. $z = 2x^4 + y^4 - x^2 - 2y^2$
12.19. $z = y - 8xy - 81x - x^3 - y^2 + 3$
12.20. $z = x^2y^2 - 2x^2 + 4x - 4y^2 + 1$
12.21. $z = 3x^2 + 6xy - 12x + 4y^3 - 30y + 2$
12.22. $z = 4x^3 - 4x^2 + 2xy^2 + 3y^2 - 5$
12.23. $z = 4xy - x^3 - y^2 - 2y + 5$
12.24. $z = x^2 + 3xy - 10x + y^3 - 18y - 3$
12.25. $z = xy^2 - x^2 - 5x^3 - 2y^2 + 2$
12.26. $z = 8xy - x^3 - 76x - y^2 - 2y - 4$
12.27. $z = 3x^2 - 4x^3 + xy^2 - y^2 + 3$
12.28. $z = 7x - 2xy - x^3 + y^2 - 2y + 1$
12.29. $z = 2x^2 - x^2y^2 + 6x + 9y - 3$
12.30. $z = 4xy^2 + 24xy + y^2 + 32y - 6$

Задание 13. Найти экстремум функции трех переменных

$$u = Ax^2 + Bxy + Cxz + Dx + Ey^2 + Fyz + Gy + Hz^2 + Iz + J,$$

коэффициенты которой заданы в таблице.

№	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
13.1	-3	-2	5	-4	-4	1	-6	-3	10	4
13.2	6	5	0	-73	5	-2	-72	4	18	1
13.3	-6	3	1	-17	-2	3	14	-4	-13	-2
13.4	1	-2	-2	4	7	5	-7	5	-41	-3
13.5	-3	3	4	-19	-4	-1	-1	-2	19	4
13.6	4	-4	1	-18	5	3	8	3	6	-5
13.7	-5	5	-2	20	-6	1	-10	-4	42	3

Окончание таблицы

13.8	3	4	3	-4	7	4	-22	2	-14	-2
13.9	-4	4	-5	37	-5	1	-33	-2	21	5
13.10	3	-3	2	-24	6	-3	27	4	10	-2
13.11	-4	2	3	-2	-5	1	36	-4	-32	1
13.12	6	5	2	-22	7	1	15	1	0	-3
13.13	-3	-4	-1	10	-7	1	34	-2	12	-2
13.14	4	3	3	-43	6	-2	15	3	-37	5
13.15	-2	-2	-1	25	-7	4	38	-1	-1	4
13.16	7	-5	3	69	4	2	-37	2	5	1
13.17	-5	4	5	23	-6	1	-39	-2	-1	-2
13.18	4	-2	2	0	2	-4	-28	3	38	-3
13.19	-3	4	5	34	-6	1	-24	-4	-35	3
13.20	7	5	-2	61	5	-1	15	3	-37	1
13.21	-3	-2	5	-11	-4	2	-34	-4	22	-6
13.22	5	3	2	-28	2	0	-17	3	18	3
13.23	-4	5	3	21	-7	-1	-44	-1	-7	1
13.24	8	-4	4	32	3	2	-40	2	-16	-3
13.25	-4	5	-1	-12	-8	1	48	-1	-12	2
13.26	3	-2	3	-22	4	-2	4	3	-28	4
13.27	-7	4	0	-50	-4	3	37	-1	-12	-5
13.28	2	-4	3	-39	9	-2	108	2	-26	4
13.29	-8	6	1	4	-7	3	54	-1	-22	3
13.30	5	-4	4	-40	3	-1	33	3	-18	-4

Задание 14. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $f = z(x, y)$ в области D, ограниченной заданными линиями.

14.1. $z(x, y) = 3x^2 - 2xy - 14x + 4y^2 + 12y - 1$,

D: $5x - 4y = 1$, $x + 4y = 4$, $x = 0$.

14.2. $z(x, y) = 4y^2 - 30x - 5x^2 - 16y + 3$,

D: $(x+2)^2 + (y-2)^2 = 2$, $y = 1$ $(y \geq 1)$.

14.3. $z(x, y) = 4x^2 + xy - 35x - 2y^2 + 8y + 2$,

$D:\ y=2x,\ x=4y,\ x+2y=6.$

14.4. $z(x,y)=2x^2-3xy+5x-2y^2-10y-4,$

$D:\ y+(x+2)^2=2,\ y+2=0.$

14.5. $z(x,y)=3xy-3x^2-6x+y^2-11y+2,$

$D:\ y=x^2,\ y-x=2.$

14.6. $z(x,y)=5x^2-2xy+32x+y^2-8y-3,$

$D:\ x=5y,\ 3x+5y=1,\ x+5=0.$

14.7. $z(x,y)=x^2+4xy+12x-3y^2-32y+5,$

$D:\ 2y=x^2-14,\ y+1=0.$

14.8. $z(x,y)=4x^2+xy+26x+5y^2+23y-2,$

$D:\ 3x+2y-6=0,\ y+x^2=0.$

14.9. $z(x,y)=4xy-3x^2+22x+y^2-24y+3,$

$D:\ x+y=9,\ x=7y,\ 5x-3y=0.$

14.10. $z(x,y)=2x^2-5xy+34x-2y^2+19y-2,$

$D:\ y+x^3=0,\ y=8,\ y=4x.$

14.11. $z(x,y)=3x^2+6xy+36x+4y^2+44y+1,$

$D:\ x^2+y^2=25,\ y=1\ (y\le 1).$

14.12. $z(x,y)=xy-4x^2+50x+3y^2+6y-4,$

$D:\ x+3y=6,\ x-3y=6,\ x=1.$

14.13. $z(x,y)=7x^2-xy-37x+y^2-7y+2,$

$D:\ x=3y,\ y=5x,\ 2x+3y=23.$

14.14. $z(x,y)=5xy-2x^2-34x+4y^2+14y-3,$

$D:\ 4y=16-x^2,\ y=x.$

14.15. $z(x,y)=5x^2+2xy+40x-3y^2-24y+2,$

$D:\ x=3y,\ 5x+3y+15=0,\ y+6=0.$

14.16. $z(x,y)=2x^2-6xy-32x+y^2++34y-4,$

D: $2x+5y=10$, $x-2y=10$, $x=2$.

14.17. $z(x,y)=x^2+2xy-y^2-4x$,
D: $y=x+1$, $y=0$, $x=3$.

14.18. $z(x,y)=4x^2-2xy+18x-2y^2-3$,
D: $x^2+y^2=9$, $x=1$ $(x\le 1)$.

14.19. $z(x,y)=x^2+6xy+20x+3y^2+36y+2$,
D: $y=x$, $x=4y$, $x+5=0$.

14.20. $z(x,y)=3xy-2x^2+18x+y^2-5y-4$,
D: $y+x^2=0$, $8y+x^2=0$, $y+4=0$.

14.21. $z(x,y)=3x^2+5xy-26x-4y^2+27y+1$,
D: $y=x$, $x+y=3$, $x=3$.

14.22. $z(x,y)=4x^2+2xy+28x+3y^2-4y+3$,
D: $2y-x=4$, $x+y=0$, $x+3=0$.

14.23. $z(x,y)=x^2+6xy+26x-3y^2-18y-2$,
D: $x+2y+10=0$, $y+x^2=0$.

14.24. $z(x,y)=5x^2+xy-29x+2y^2+y+4$,
D: $(x-1)^2+(y-1)^2=9$, $x=2$ $(x\le 2)$.

14.25. $z(x,y)=4x^2-3xy-x+y^2-4y-5$,
D: $y=x^2$, $y=6$.

14.26. $z(x,y)=x^2+5xy+2x+2y^2+22y+3$,
D: $x-2y+12=0$, $x+8=0$, $x+2=0$, $y=1$.

14.27. $z(x,y)=2xy-3x^2-6x-4y^2-20y-1$,
D: $x=2y$, $y=3x$, $y+4=0$.

14.28. $z(x,y)=2x^2+3xy-3x+5y^2+21y+2$,
D: $3x-2y-19=0$, $5y+2x=0$, $2y+5x=0$.

14.29. $z(x,y)=4x^2+xy-33x+3y^2-10y+1$,

$D: \ x - y - 4 = 0, \ x = y^2.$

14.30. $z(x, y) = 2x^2 - 4xy + 20x + y^2 - 16y - 3,$

$D: \ y - x = 4, \ y + x = 0, \ x = 1.$

Задание 15. Найти точки экстремума функции $z = f(x, y)$ при условии, что $\varphi(x, y) = 0$ (методом неопределённых множителей Лагранжа).

15.1. $z = -x^2 - 2y^2 + 4;$ $\quad x + 3y + 2 = 0.$

15.2. $z = xy;$ $\quad x + y - 1 = 0.$

15.3. $z = x^2 + y^2;$ $\quad 2x - y + 2 = 0.$

15.4. $z = x^2 - y^2;$ $\quad x + 2y - 2 = 0.$

15.5. $z = 2x^2 + y^2;$ $\quad -x + y - 1 = 0.$

15.6. $z = x^2 - 2y^2;$ $\quad x - y - 2 = 0.$

15.7. $z = x^2 + 2y^2 + 3;$ $\quad x - 2y - 2 = 0.$

15.8. $z = x^2 + y^2;$ $\quad 2x - y - 4 = 0.$

15.9. $z = 5 - 2x^2 - y^2;$ $\quad x + y - 4 = 0.$

15.10. $z = 3x^2 + y^2;$ $\quad x + y - 12 = 0.$

15.11. $z = x^2 + 6y^2;$ $\quad 3x + 4y - 12 = 0.$

15.12. $z = x + \frac{4}{3}y;$ $\quad x^2 + y^2 - 36 = 0.$

15.13. $z = 2x^2 - y^2 + 3;$ $\quad 3x + 2y - 6 = 0.$

15.14. $z = -\frac{1}{3}x + \frac{1}{5}y;$ $\quad 4x^2 + y^2 - 1 = 0.$

15.15. $z = 5x^2 + y^2 + 7;$ $\quad 3x - 4y + 24 = 0.$

15.16. $z = \frac{1}{6}x - \frac{1}{10}y;$ $\quad 3x^2 + 4y^2 - 5 = 0.$

15.17. $z = 2x^2 + 3y^2;$ $\quad 5x - 2y - 10 = 0.$

15.18. $z=-\frac{1}{2}x+\frac{2}{3}y$; $x^2+y-1=0$.

15.19. $z=x^2+3y^2$; $x+y-6=0$.

15.20. $z=2x^2+2y^2-1$; $x+y-1=0$.

15.21. $z=x^2+y^2$; $x+y+3=0$.

15.22. $z=xy^2$; $x+2y-1=0$.

15.23. $z=2-3x^2-3y^2$; $x+y-5=0$.

15.24. $z=x+y+1$; $x^2+y^2-4=0$.

15.25. $z=2x+3y+4$; $x^2+4y^2-4=0$.

15.26. $z=x^2+2y^2$; $x+y-1=0$.

15.27. $z=x^2-y^2$; $x+y-3=0$.

15.28. $z=x^2+y^2-16$; $x+y-1=0$.

15.29. $z=x^2-y^2$; $2x+y-5=0$.

15.30. $z=4x+2y$; $x^2+y^2-36=0$.