ПРОСТЕЙШИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ НЕРАВЕНСТВА

Решение простейших тригонометрических неравенств целесообразно осуществлять либо с использованием графика соответствующей тригонометрической функции, либо с помощью единичной окружности.

Пример 1. Решите неравенство

$$\sin x > -\frac{1}{2}.$$

Решение. Функция $\sin x$ определена на всей числовой прямой, непрерывна и является 2π-периодической, поэтому решением неравенства будет объединение интервалов вида $(x_1 + 2\pi n;\quad x_2 + 2\pi n)$, $n \in Z$, где x_1 и x_2 – корни уравнения $\sin x = -\frac{1}{2}$ на некотором отрезке длинной 2π.

Действительно, прямая $\tilde{y} = -\frac{1}{2}$ пересекает единичную окружность в двух точках M_1 и M_2. Точке M_1 отвечает угол $\left(-\frac{\pi}{6}\right)$ радиан, а точке M_2 – $\frac{7}{6}\pi$ радиан (рис. 5.1), т. е. $x_1 = -\frac{\pi}{6}$, $x_2 = \frac{7}{6}\pi$ и синус угла в x радиан будет больше $\left(-\frac{1}{2}\right)$, если ордината $\tilde{y}_p$ точки $P(x)$ на единичной окружности, отвечающей углу в x радиан, будет больше $\left(-\frac{1}{2}\right)$. Из рис. 5.1 следует, что неравен-

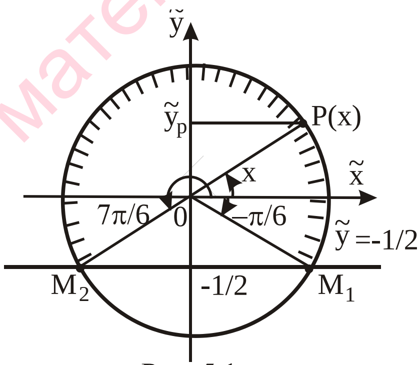

Рис. 5.1

ство $\tilde{y}_p > -\dfrac{1}{2}$ выполняется при $-\dfrac{\pi}{6} < x < \dfrac{7}{6}\pi$, а с учетом периодичности функции $\sin x$ при

$$-\frac{\pi}{6} + 2\pi n < x < \frac{7}{6}\pi + 2\pi n, \quad n \in Z.$$

Ответ: $-\dfrac{\pi}{6} + 2\pi n < x < \dfrac{7}{6}\pi + 2\pi n, \quad n \in Z$.

Пример 2. Решите неравенство

$$|\cos x| > \frac{1}{2}. \qquad (1)$$

Решение. Способ 1. Построим графики функций $y = |\cos x|$ и $y = \dfrac{1}{2}$.

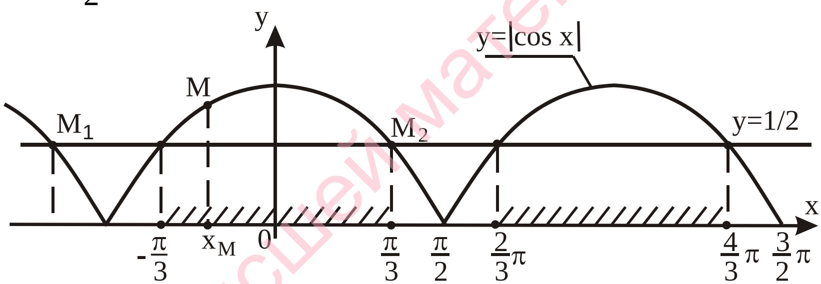

Рис. 5.2

Функция $y = |\cos x|$ определена для всех $x \in R$, непрерывна и является π-периодической, поэтому достаточно найти решение неравенства на отрезке $\left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]$ длинной π. Прямая $y = \dfrac{1}{2}$ пересекает график функции $y = |\cos x|$ на отрезке $\left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]$ в двух точках M_1 и M_2, абсциссы которых соответственно $x_1 = -\dfrac{\pi}{3}$ и $x_2 = \dfrac{\pi}{3}$.

Решением неравенства (1) будут абсциссы x_M тех точек графика функции $y=|\cos x|$, которые лежат выше прямой $y=\frac{1}{2}$. Абсциссы x_M таких точек образуют интервал $\left(-\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{3}\right)$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$. С учетом периодичности функции $y=|\cos x|$ решением неравенства (1) будет объединение интервалов $\left(-\frac{\pi}{3}+\pi n;\quad \frac{\pi}{3}+\pi n\right)$, $n\in Z$.

Ответ: $-\frac{\pi}{3}+\pi n<x<\frac{\pi}{3}+\pi n,\quad n\in Z.$

Способ 2. Решение неравенства (1) можно осуществить также с помощью единичной окружности. Поскольку

$$|\cos x|>\frac{1}{2}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos x>\frac{1}{2},\\ \cos x<-\frac{1}{2},\end{array}\right.$$

то решение неравенства (1) равносильно нахождению множества точек $\{\tilde{x}_p\}$ на оси $O\tilde{x}$ таких, что $-1\le\tilde{x}_p<-\frac{1}{2}$ или $\frac{1}{2}<\tilde{x}_p\le 1$.

Из рис. 5.3 следует, что искомые точки $P(x)$, абсциссы $\tilde{x}_p$ которых удовлетворяют указанным неравенствам, лежат на дугах M_1M_2 и $M_1'M_2'$. Ду-

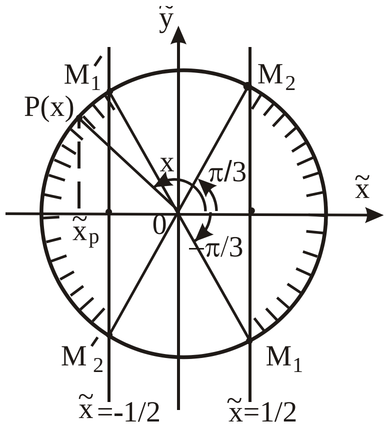

Рис. 5.3

ге M_1M_2 отвечают углы

$\left(-\dfrac{\pi}{3}+2\pi n;\quad \dfrac{\pi}{3}+2\pi n\right)$, $n\in Z$, а дуге $M_1'M_2'$ – углы

$\left(\dfrac{2}{3}\pi+2\pi n;\quad \dfrac{4}{3}\pi+2\pi n\right)$, $n\in Z$. Поскольку

$$\frac{2}{3}\pi=-\frac{\pi}{3}+\pi;\quad \frac{4}{3}\pi=\frac{\pi}{3}+\pi,$$

то полученные решения можно записать в виде одного двойного неравенства:

$$-\frac{\pi}{3}+\pi n<x<\frac{\pi}{3}+\pi n,\quad n\in Z.$$

Ответ: $-\dfrac{\pi}{3}+\pi n<x<\dfrac{\pi}{3}+\pi n,\quad n\in Z$.

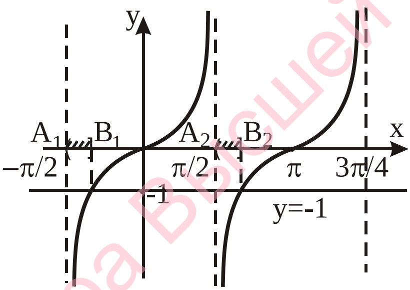

Рис. 5.4

Пример 3. Решите неравенство

$$\operatorname{tg}x\le -1. \qquad (2)$$

Решение. Для решения данного неравенства воспользуемся графиком функции $y=\operatorname{tg}x$ (рис. 5.4). Из рисунка следует, что решением неравенства (2) будут все точки полуинтервалов A_1B_1, A_2B_2 и т.д., т.е.

$$-\frac{\pi}{2}+\pi n<x\le -\frac{\pi}{4}+\pi n,\quad n\in Z.$$

Ответ: $-\dfrac{\pi}{2}+\pi n<x\le -\dfrac{\pi}{4}+\pi n,\quad n\in Z$.

Некоторые неравенства не являются простейшими, но легко сводятся к ним. Такой случай рассматривается в примерах 4 и 5.

Пример 4. Решите неравенство

$$\cos x + \sin x \ge \sqrt{2}\,. \qquad (3)$$

Решение. Поскольку

$$\cos x + \sin x = \sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right),$$

то неравенство (3) равносильно простейшему неравенству $\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \ge 1$. Его решением будет множество точек

$x - \frac{\pi}{4} = 2\pi n,\ n \in Z$, или $x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in Z$.

Ответ: $x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in Z$.

Пример 5. Решите неравенство

$$\left|\cos x + \sin x\right| > 1.$$

Решение. Поскольку $\cos x + \sin x = \sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$, то исходное неравенство равносильно неравенствам

$$\left|\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right| > \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) > \frac{1}{\sqrt{2}}, \\ \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) < -\frac{1}{\sqrt{2}}. \end{array}\right.$$

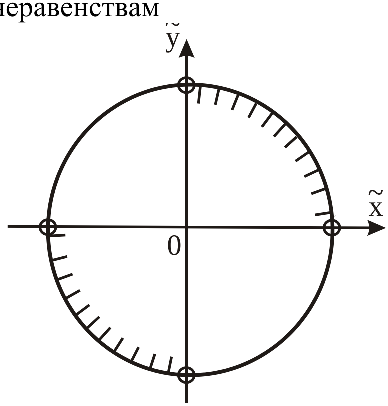

Рис. 5.5

Эти неравенства аналогичны рассмотренным в примере 2. Решив их, получим, что

$$\pi n < x < \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in Z \text{ (рис. 5.5).}$$

Ответ: $\pi n < x < \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in Z$.

Пример 6. Решите неравенства

а) $\cos x < \cos 3$; б) $\sin x \geq \sin 5$; в) $\operatorname{tg} x \geq \operatorname{ctg} 3$.

Решение. а) Иллюстрация к неравенству $\cos x < \cos 3$ приведена на рис. 5.6. Из него следует, что решением неравенства на отрезке $[0; 2\pi]$ будет интервал $(3; 2\pi - 3)$, а на всей числовой прямой – объединение интервалов

$$(3 + 2\pi n;\ 2\pi - 3 + 2\pi n),\ n \in Z.$$

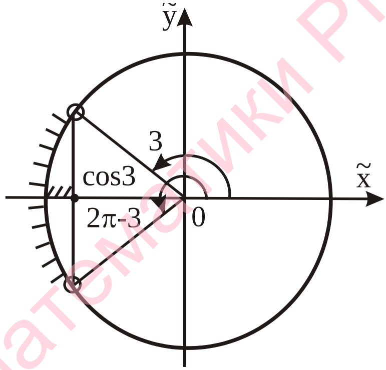

Рис. 5.6

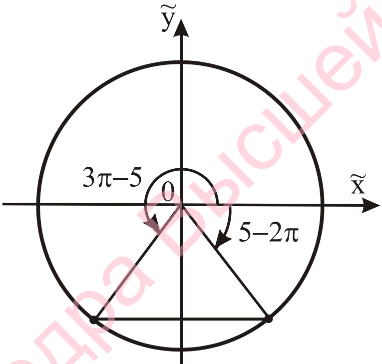

Рис. 5.7

б) Из неравенства $\frac{3}{2}\pi < 5 < 2\pi$ и из рис. 5.7 следует, что решением неравенства $\sin x \geq \sin 5$ будет множество $\{x\}$ точек x, удовлетворяющих неравенствам

$$5 - 2\pi + 2\pi n \leq x \leq 3\pi - 5 + 2\pi n,$$
$n \in Z$.

в) Так как $\operatorname{ctg} 3 = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - 3\right)$,

$-\frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{2} - 3 < \frac{\pi}{2}$ и функция $y = \operatorname{tg} x$ строго возрастает на интервале $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, то

$$\operatorname{tg}x \ge \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-3\right) \Leftrightarrow \quad \frac{\pi}{2}-3+\pi n \le x < \frac{\pi}{2}+\pi n, n \in Z.$$

Это и есть решение неравенства в).

Ответ: а) $3+2\pi n < x < 2\pi-3+2\pi n, \quad n \in Z;$

б) $5-2\pi+2\pi n \le x \le 3\pi-5+2\pi n, \quad n \in Z$;

в) $\frac{\pi}{2}-3+\pi n \le x < \frac{\pi}{2}+\pi n, \quad n \in Z$.

Литература

1. Тригонометрические функции, уравнения и неравенства: Пособие для поступающих /А.И.Новиков; Рязан. гос. радиотехн. ун-т. Рязань, 2007. 288 с. ISBN 5-7722-0248-0.