МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

РЯЗАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ РАДИОТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. В.Ф. УТКИНА

С.В. БОГАТОВА, Ю.С. КОСТРОВА

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

Рязань 2023

УДК 514.123

Аналитическая геометрия: методические указания/ Рязан. гос. радиотехн. ун-т; сост.: С.В. Богатова, Ю.С. Кострова; - Рязань, 2023. – 40 с.

Содержат краткий теоретический материал, варианты типовых расчетов для студентов и образцы решения задач по теме: «Аналитическая геометрия».

Предназначены для студентов направления 11.03.04 «Электроника и наноэлектроника», но также могут быть использованы студентами всех направлений подготовки при изучении раздела «Аналитическая геометрия».

Библиогр.: 4 назв.

Прямая, плоскость, точка, направляющий вектор, нормальный вектор, прямоугольная декартова система координат, кривая второго порядка, фокус, директриса, эксцентриситет, асимптоты

Печатается по решению редакционно-издательского совета Рязанского государственного радиотехнического университета им. В.Ф. Уткина.

Рецензенты: кафедра высшей математики Рязанского государственного радиотехнического университета им. В.Ф. Уткина (зав. кафедрой, канд. физ.-мат. наук, доц. К.В. Бухенский)

Предисловие

Изучение математики студентами РГРТУ сопровождается выполнением типовых расчетов. Типовой расчет – набор задач по некоторой теме, индивидуальных для каждого студента, предназначенных для закрепления теоретических знаний и отработки практических навыков. Поэтому выполнять задания типового расчета следует своевременно и самостоятельно.

Перед выполнением типового расчета необходимо изучить соответствующий теоретический материал (лекции, рекомендованную литературу) и решения задач, разобранные на практических занятиях.

При решении задач типового расчета нужно обосновать каждый этап решения исходя из теоретических положений курса. Полезно до начала вычислений составить краткий план решения.

Решения задач следует излагать подробно, вычисления располагать в строгом порядке, отделяя вспомогательные вычисления от основных. Решение каждой задачи типового расчета должно доводиться до ответа, требуемого условием, и по возможности в общем виде с выводом формулы. Затем в полученную формулу подставляют числовые значения.

Типовой расчет сдается на проверку преподавателю строго в установленный срок. Самостоятельность выполнения типового расчета проверяется при его защите у преподавателя (собеседование с преподавателем), который вправе предложить решить задачи аналогичного типа или задать вопросы по любым задачам из выполненного типового расчета.

Типовой расчет засчитывается преподавателем по результатам защиты в ходе очной встречи при условии, что правильно решены все задачи на этапе самостоятельной работы.

Прямая на плоскости

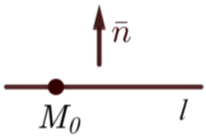
Виды уравнений прямой на плоскости

1. **Общее уравнение прямой**

$$Ax + By + D = 0, \; (A^2 + B^2 \neq 0),$$

$\bar{n} = (A, B)$ – нормальный вектор прямой.

2. **Уравнение прямой по нормальному вектору и точке**

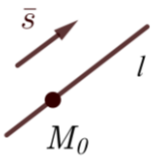


$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$,

$M_0(x_0, y_0)$ – точка на прямой,

$\bar{n} = (A, B)$ – нормальный вектор прямой.

3. **Каноническое уравнение прямой**

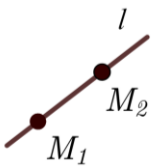


$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n},$$

$M_0(x_0, y_0)$ – точка на прямой,

$\bar{s} = (m, n)$ – направляющий вектор прямой.

4. **Уравнение прямой по двум точкам**



$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1},$$

$M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$ – точки на прямой.

5. **Параметрические уравнения прямой**

$$\begin{cases} x = mt + x_0, \\ y = nt + y_0, \end{cases}$$

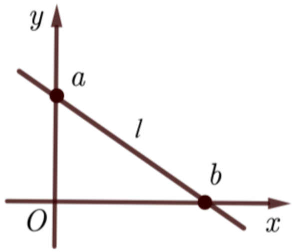
$M_0(x_0, y_0)$ – точка на прямой,

$\bar{s} = (m, n)$ – направляющий вектор прямой.

6. Уравнение прямой в отрезках

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1,$$

a, b – отрезки на осях Ox, Oy.

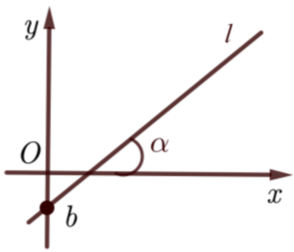


7. Уравнение прямой с угловым коэффициентом

$y=kx+b$,

$k=tg\,\alpha$, α – угол наклона прямой к оси Ox,

$(0,b)$ – точка пересечения с осью Oy.



Примеры решения задач

Пример 1. Прямая l_1 задана общим уравнением $3x-y+4=0$. Написать уравнение прямой l_2, проходящей через точку $M_0(1;1)$

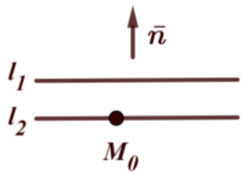
а) параллельно l_1; b) перпендикулярно к l_1.

Решение. Так как прямая l_1 задана общим уравнением, то коэффициенты, стоящие перед x и y в уравнении $3x-y+4=0$, являются координатами нормального вектора прямой l_1. Имеем вектор $\overline{n}=(3;-1)$.

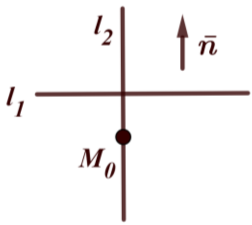
а) Если прямые l_1 и l_2 параллельны, то вектор $\overline{n}$ перпендикулярен к этим прямым.

Для прямой l_2 можно написать уравнение по нормальному вектору и точке. Это уравнение имеет вид

$A(x-x_0)+B(y-y_0)=0$, $M_0(x_0,y_0)$ – точка на прямой, $\overline{n}=(A,B)$ – нормальный вектор прямой. Подставляем координаты точки $M_0(1;1)$ и вектора $\overline{n}=(3;-1)$ в уравнение, получаем уравнение $3(x-1)-(y-1)=0$ или $3x-y-2=0$.



b) Если прямые l_1 и l_2 перпендикулярны и вектор $\overline{n}$ перпендикулярен к прямой l_1, то вектор $\overline{n}$ параллелен прямой l_2, а значит, является направляющим вектором для прямой l_2.



Напишем каноническое уравнение прямой l_2 в виде $\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}$, где $M_0(x_0,y_0)$ – точка на прямой, $\overline{s}=(m,n)$ – направляющий вектор прямой. В данной задаче точка на прямой $M_0(1;1)$, а направляющий вектор $\overline{s}=\overline{n}=(3;-1)$, поэтому уравнение примет вид $\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y-1}{-1}$, или $-(x-1)=3(y-1)$, или $x+3y-4=0$.

Ответ: a) $3x-y-2=0$, b) $x+3y-4=0$.

Пример 2. В треугольнике ABC даны координаты вершин $A(1;2)$, $B(4;5)$, $C(5;0)$. Написать:

a) уравнение стороны (AB);
b) уравнение высоты (BH);
c) уравнение медианы (BD).

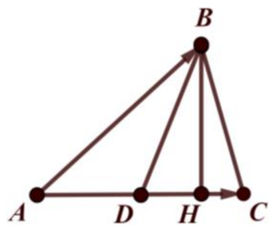
Найти:

d) косинус угла между (BH) и (BD);

e) расстояние от точки C до прямой (AB).

Решение.

a) По координатам точек $A(1;2)$ и $B(4;5)$ находим вектор $\overline{AB}=(4-1;5-2)=(3;3)$. Вектор $\overline{AB}$ параллелен прямой (AB), поэтому он является направляющим вектором прямой, и можно написать каноническое уравнение прямой (AB).



Подставляем в общий вид канонического уравнения $\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}$ координаты точки $A(1;2)$ вместо $M_0(x_0,y_0)$ и координаты вектора $\overline{AB}=(3;3)$ вместо $\bar{s}=(m,n)$. Имеем уравнение $\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y-2}{3}$, или $3(x-1)=3(y-2)$, или $x-y+1=0$.

b) По координатам точек $A(1;2)$ и $C(5;0)$ находим вектор $\overline{AC}=(5-1;0-2)=(4;-2)$. Так как прямая (BH) содержит высоту треугольника ABC, то вектор $\overline{AC}$ перпендикулярен к прямой (BH) и является нормальным вектором прямой (BH). По нормальному вектору и точке уравнение прямой записывается в виде $A(x-x_0)+B(y-y_0)=0$, $M_0(x_0,y_0)$ – точка на прямой, $\bar{n}=(A,B)$ – нормальный вектор прямой. Прямая (BH) проходит через точку $B(4;5)$ и $\bar{n}=\overline{AC}=(4;-2)$, значит, уравнение (BH) имеет вид $4(x-4)-2(y-5)=0$, $2x-y-3=0$.

c) Точка D - середина отрезка AC, следовательно, координаты точки D как середины отрезка вычисляются по формулам:

$x_D = \dfrac{x_A + x_C}{2}$ и $y_D = \dfrac{y_A + y_C}{2}$, $x_D = \dfrac{1+5}{2} = 3$, $y_D = \dfrac{2+0}{2} = 1$, точка $D(3;1)$. Пишем уравнение медианы (BD) по двум точкам $B(4;5)$ и $D(3;1)$. В уравнение $\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1} = \dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}$ вместо первой точки $M_1(x_1, y_1)$ подставляем координаты точки $D(3;1)$, вместо второй точки $M_2(x_2, y_2)$ - координаты точки $B(4;5)$. Получим уравнение $\dfrac{x-3}{4-3} = \dfrac{y-1}{5-1}$, $\dfrac{x-3}{1} = \dfrac{y-1}{4}$, $4(x-3) = y-1$, $4x - y - 11 = 0$.

d) В пунктах b) и c) найдены уравнения прямых (BH): $2x - y - 3 = 0$ и $(BD): 4x - y - 11 = 0$. Это общие уравнения прямых, выписываем коэффициенты, стоящие перед переменными x и y в этих уравнениях, они являются координатами нормальных векторов данных прямых. Вектор $\overline{n}_1 = (2; -1)$ - нормальный вектор прямой (BH), вектор $\overline{n}_2 = (4; -1)$ - нормальный вектор для прямой (BD). Вычисляем косинус угла между прямыми как косинус угла между их нормальными векторами: $\cos((BH)\hat{,}(BD)) = \cos(\overline{n}_1 \hat{,} \overline{n}_2) = \dfrac{(\overline{n}_1, \overline{n}_2)}{|\overline{n}_1| \cdot |\overline{n}_2|}$, $(\overline{n}_1, \overline{n}_2)$ - скалярное произведение векторов $\overline{n}_1$ и $\overline{n}_2$, $|\overline{n}_1|$ и $|\overline{n}_2|$ - длины этих векторов. Так как $\overline{n}_1 = (2; -1)$ и $\overline{n}_2 = (4; -1)$, то

$$\cos((BH)\hat{,}(BD)) = \frac{2 \cdot 4 + (-1) \cdot (-1)}{\sqrt{2^2 + (-1)^2} \cdot \sqrt{4^2 + (-1)^2}} = \frac{9\sqrt{85}}{85}.$$

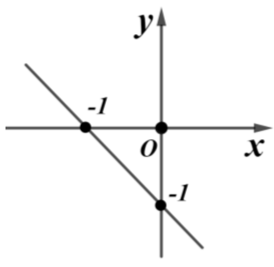
e) Уравнение прямой (AB) имеет вид $x - y + 1 = 0$. Известно, что расстояние от точки $M_0(x_0, y_0)$ до прямой $l: Ax + By + D = 0$ можно вычислить как

$\rho(M_0, l) = \dfrac{|Ax_0 + By_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$. Подставляя в формулу координаты точки $C(5; 0)$ вместо $M_0(x_0, y_0)$ и коэффициенты из общего уравнения прямой (AB), получим расстояние $\rho(C, (AB)) = \dfrac{|1 \cdot 5 - 1 \cdot 0 + 1|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \dfrac{6}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2}$.

Ответ: a) (AB): $x - y + 1 = 0$; b) (BH): $2x - y - 3 = 0$;
c) $(BD): 4x - y - 11 = 0$; d) $\dfrac{9\sqrt{85}}{85}$; e) $3\sqrt{2}$.

Пример 3. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(-4; 3)$ и отсекающей равные отрезки от начала координат на полуосях с одинаковыми знаками. Найти расстояние от начала координат до этой прямой.

Решение. Уравнение прямой в отрезках записывается как $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$, a, b – отрезки на осях Ox, Oy. По условию задачи $a = b$, откуда уравнение прямой примет вид $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{a} = 1$. Так как точка $M_0(-4; 3)$ лежит на прямой, то координаты точки удовлетворяют уравнению, подставим их в уравнение: $\dfrac{-4}{a} + \dfrac{3}{a} = 1$, $\dfrac{-1}{a} = 1$, $a = -1$. Снова уточняя уравнение, получаем $\dfrac{x}{-1} + \dfrac{y}{-1} = 1$ или $x + y + 1 = 0$.



Расстояние от точки $M_0(x_0, y_0)$ до прямой $l: Ax + By + D = 0$ вычисляется по формуле $\rho(M_0, l) = \dfrac{|Ax_0 + By_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$. Прямая l задана уравнением $x + y + 1 = 0$ и начало координат $O(0; 0)$, поэтому расстояние $\rho(O, l) = \dfrac{|1 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 1|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Ответ: $x + y + 1 = 0$, $\rho(O, l) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Задания для типового расчета

Задание 1. Прямая l_1 задана общим уравнением. Написать уравнение прямой l_2, проходящей через точку M_0

a) параллельно l_1; b) перпендикулярно к l_1.

1. $l_1:\ 3x - 2y + 2 = 0,\quad M_0(5; 2)$.
2. $l_1:\ x + 4y + 1 = 0,\quad M_0(-1; 3)$.
3. $l_1:\ 3x + y - 5 = 0,\quad M_0(1; -1)$.
4. $l_1:\ 2x + 3y - 4 = 0,\quad M_0(2; 2)$.
5. $l_1:\ x - 7y + 4 = 0,\quad M_0(-3; 3)$.
6. $l_1:\ 5x - y - 3 = 0,\quad M_0(1; 4)$.
7. $l_1:\ 3x + 3y + 1 = 0,\quad M_0(-2; 5)$.
8. $l_1:\ x + 2y - 3 = 0,\quad M_0(2; -3)$.
9. $l_1:\ x - y + 6 = 0,\quad M_0(4; 3)$.
10. $l_1:\ 2x - y - 4 = 0,\quad M_0(1; 1)$.
11. $l_1:\ 2x + y - 3 = 0,\quad M_0(-2; 4)$.
12. $l_1:\ 5x - y + 7 = 0,\quad M_0(3; 1)$.
13. $l_1:\ x + 4y + 3 = 0,\quad M_0(3; -3)$.

14. $l_1:\ 2x-2y+5=0,\quad M_0(1;-2)$.
15. $l_1:\ 3x+5y+1=0,\quad M_0(-2;0)$.
16. $l_1:\ x-y-5=0,\quad M_0(3;1)$.
17. $l_1:\ 3x+y+6=0,\quad M_0(-4;2)$.
18. $l_1:\ x+2y+4=0,\quad M_0(1;-1)$.
19. $l_1:\ 4x+2y-5=0,\quad M_0(3;-1)$.
20. $l_1:\ 2x-3y-2=0,\quad M_0(1;2)$.
21. $l_1:\ x+5y+2=0,\quad M_0(3;1)$.
22. $l_1:\ 3x-y+6=0,\quad M_0(-2;-1)$.
23. $l_1:\ 4x-y+4=0,\quad M_0(0;3)$.
24. $l_1:\ x+2y+7=0,\quad M_0(-4;5)$.
25. $l_1:\ 3x+3y-4=0,\quad M_0(1;-2)$.
26. $l_1:\ x+y+8=0,\quad M_0(-5;1)$.
27. $l_1:\ 2x-y-4=0,\quad M_0(0;2)$.
28. $l_1:\ x+y-3=0,\quad M_0(4;3)$.
29. $l_1:\ x-5y+2=0,\quad M_0(3;-4)$.
30. $l_1:\ 2x-5y-3=0,\quad M_0(1;0)$.

Задание 2. В треугольнике ABC даны координаты всех вершин.
Написать:

a) уравнение стороны (AB);
b) уравнение высоты (BH);
c) уравнение медианы (BD).

Найти:

d) косинус угла между (BH) и (BD);
e) расстояние от точки C до прямой (AB).

1. $A(1;5)$, $B(3;3)$, $C(4;-1)$.
2. $A(2;-1)$, $B(4;3)$, $C(5;0)$.
3. $A(4;-3)$, $B(5;4)$, $C(7;2)$.
4. $A(-3;5)$, $B(0;1)$, $C(1;6)$.
5. $A(-2;-3)$, $B(-1;7)$, $C(3;1)$.
6. $A(0;-6)$, $B(2;1)$, $C(4;-2)$.
7. $A(1;-5)$, $B(3;2)$, $C(5;1)$.
8. $A(-1;7)$, $B(1;-1)$, $C(4;4)$.
9. $A(-5;1)$, $B(-4;-1)$, $C(-1;3)$.
10. $A(-3;-2)$, $B(-1;4)$, $C(1;1)$.
11. $A(0;-2)$, $B(2;1)$, $C(5;-4)$.
12. $A(1;-7)$, $B(3;4)$, $C(6;0)$.
13. $A(-3;3)$, $B(-2;-2)$, $C(2;4)$.
14. $A(-5;3)$, $B(1;2)$, $C(2;-6)$.
15. $A(-1;-4)$, $B(1;3)$, $C(5;1)$.
16. $A(2;4)$, $B(4;-3)$, $C(5;4)$.
17. $A(-1;6)$, $B(0;2)$, $C(3;5)$.
18. $A(-3;-1)$, $B(-2;1)$, $C(3;-2)$.
19. $A(4;-3)$, $B(5;2)$, $C(6;-1)$.
20. $A(-4;2)$, $B(-1;5)$, $C(1;-1)$.
21. $A(-5;5)$, $B(-4;1)$, $C(1;7)$.
22. $A(1;1)$, $B(3;-5)$, $C(6;2)$.
23. $A(-2;-4)$, $B(0;3)$, $C(1;-5)$.
24. $A(-4;-4)$, $B(-3;1)$, $C(0;-3)$.

25. $A(1;-2)$, $B(4;5)$, $C(6;0)$.

26. $A(-2;3)$, $B(0;-7)$, $C(2;1)$.

27. $A(-3;4)$, $B(-1;-2)$, $C(1;3)$.

28. $A(-5;1)$, $B(-4;-3)$, $C(2;2)$.

29. $A(-1;6)$, $B(1;2)$, $C(3;7)$.

30. $A(-2;-2)$, $B(1;3)$, $C(4;-3)$.

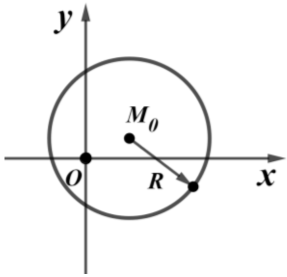
Задание 3. Написать уравнение прямой, проходящей через точку M_0 и отсекающей равные отрезки от начала координат на полуосях с одинаковыми знаками. Найти расстояние от начала координат до этой прямой.

1. $M_0(5;2)$	2. $M_0(-1;3)$	3. $M_0(1;1)$
4. $M_0(2;2)$	5. $M_0(6;3)$	6. $M_0(1;4)$
7. $M_0(-2;5)$	8. $M_0(4;3)$	9. $M_0(-1;7)$
10. $M_0(2;-3)$	11. $M_0(-2;4)$	12. $M_0(3;1)$
13. $M_0(3;-7)$	14. $M_0(1;-2)$	15. $M_0(-2;6)$
16. $M_0(3;1)$	17. $M_0(-4;2)$	18. $M_0(7;-1)$
19. $M_0(3;-1)$	20. $M_0(1;2)$	21. $M_0(3;1)$
22. $M_0(-2;-1)$	23. $M_0(5;3)$	24. $M_0(-4;5)$
25. $M_0(1;-2)$	26. $M_0(-5;1)$	27. $M_0(8;-2)$
28. $M_0(-4;-3)$	29. $M_0(3;-4)$	30. $M_0(1;7)$

Кривые второго порядка

Канонические уравнения кривых второго порядка

1. Окружность

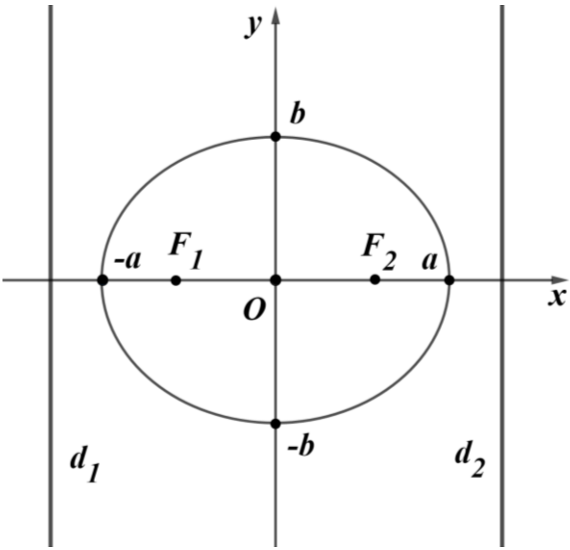


$$\left(x-x_0\right)^2+\left(y-y_0\right)^2=R^2,$$

$\left(x_0, y_0\right)$ – центр окружности,

R – радиус окружности.

2. Эллипс



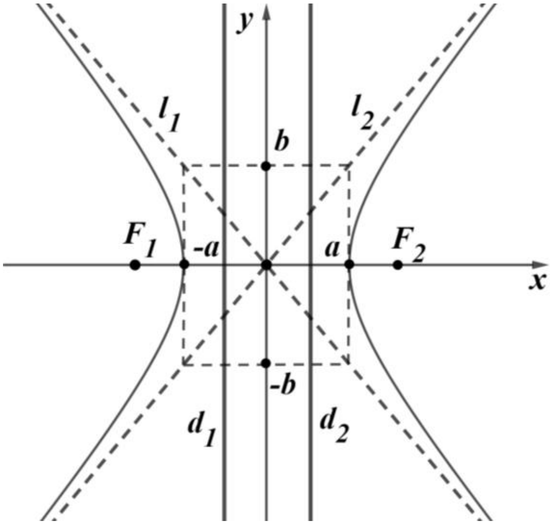
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

a и b – полуоси эллипса ($a>b$),

$$F_{1,2}\left(\pm c,0\right) \text{ – фокусы, } c=\sqrt{a^2-b^2}\ ,$$

$$d_{1,2}: x=\pm\frac{a}{\varepsilon} \text{ - директрисы эллипса.}$$

3. Гипербола



$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,$$

где a и b – полуоси гиперболы,

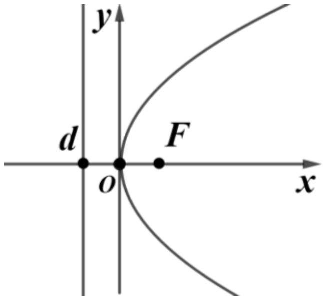
$$F_{1,2}\left(\pm c,0\right) \text{ – фокусы, } c=\sqrt{a^2+b^2}\ ,$$

$$d_{1,2}: x=\pm\frac{a}{\varepsilon} \text{ - директрисы гиперболы.}$$

$$l_{1,2}: y=\pm\frac{b}{a}x \text{ - асимптоты гиперболы}$$

4. Парабола

$$y^2=2px,$$



p – параметр параболы,

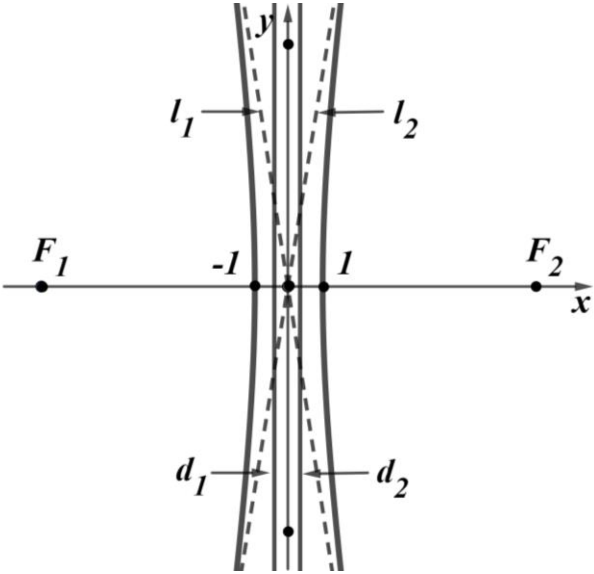
$F\left(\dfrac{p}{2},0\right)$ – фокус параболы,

$d: x=-\dfrac{p}{2}$ - директриса параболы.

Примеры решения задач

Пример 1. Дано уравнение кривой второго порядка $\dfrac{x^2}{1}-\dfrac{y^2}{49}=1$. Найти длины полуосей, координаты фокусов, эксцентриситет, уравнения директрис, уравнения асимптот (для гиперболы). Построить данную кривую.

Решение. Каноническое уравнение гиперболы имеет вид $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$, следовательно, действительная полуось $a=1$, а мнимая полуось $b=7$, откуда вершины гиперболы имеют координаты $(\pm 1, 0)$, $c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{1+49}=5\sqrt{2}$. Фокусы гиперболы имеют координаты $F_{1,2}\left(\pm 5\sqrt{2}, 0\right)$. Эксцентриситет гиперболы вычисляется по формуле $\varepsilon=\dfrac{c}{a}=\dfrac{5\sqrt{2}}{1}=5\sqrt{2}$. Директрисы гиперболы задаются уравнениями $x=\pm\dfrac{a}{\varepsilon}$, значит, $x=\pm\dfrac{1}{5\sqrt{2}}$ или $x=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{10}$.



Уравнения асимптот гиперболы записываются как $y = \pm\frac{b}{a}x$, по данным задачи асимптоты определяются уравнениями $y = \pm 7x$. На чертеже отмечаем фокусы, вершины, проводим директрисы и асимптоты гиперболы, после чего строим ветви гиперболы, неограниченно приближая их к асимптотам.

Ответ: $\varepsilon = 5\sqrt{2}$, $x = \pm\frac{\sqrt{2}}{10}$, $y = \pm 7x$.

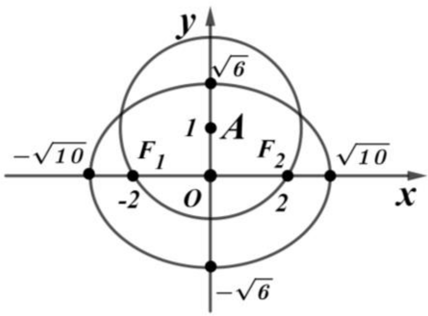
Пример 2. Записать уравнение окружности, проходящей через фокусы эллипса $\frac{x^2}{10} + \frac{y^2}{6} = 1$ и имеющей центр в точке $A(0;1)$. Сделать чертеж.

Решение. Уравнение окружности имеет вид

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2,$$

где (x_0, y_0) – центр окружности, R – ее радиус. Так как точка $A(0;1)$ является центром окружности, то окружность определяется уравнением $x^2 + (y-1)^2 = R^2$.

Каноническое уравнение эллипса записывается в общем виде как $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, значит, большая полуось $a = \sqrt{10}$, малая полуось $b = \sqrt{6}$, откуда $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{10-6} = 2$. Фокусы эллипса задаются координатами $F_{1,2}(\pm 2, 0)$. По условию окружность проходит через точки $F_{1,2}(\pm 2, 0)$, следовательно, координаты этих точек удовлетворяют уравнению окружности. Подставляя координаты фокусов в уравнение окружности, получим $(\pm 2)^2 + (0-1)^2 = R^2$, $R^2 = 5$, $R = \sqrt{5}$.



На чертеже изображаем фокусы и вершины эллипса, проводим эллипс, строим окружность с центром в точке $A(0;1)$ радиусом $R = \sqrt{5}$.

Ответ: $R = \sqrt{5}$.

Задания для типового расчета

Задание 1. Дано уравнение кривой второго порядка. Найти длины полуосей, координаты фокусов, эксцентриситет, уравнения директрис, уравнения асимптот (для гиперболы). Построить данную кривую.

1. $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{1}=1$.

2. $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{16}=1$.

3. $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$.

4. $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{9}=1$.

5. $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{1}=1$.

6. $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{1}=1$.

7. $\frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{9}=1$.

8. $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{25}=1$.

9. $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$.

10. $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{1}=1$.

11. $\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{4}=1$.

12. $\frac{x^2}{1}-\frac{y^2}{25}=1$.

13. $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$.

14. $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{64}=1$.

15. $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$.

16. $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{1}=1$.

17. $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{1}=1$.

18. $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$.

19. $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$.

20. $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{16}=1$.

21. $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{4}=1$.

22. $\frac{x^2}{1}-\frac{y^2}{64}=1$.

23. $\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{9}=1$.

24. $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1$.

25. $\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{16}=1$.

26. $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{49}=1$.

27. $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{1}=1$.

28. $\frac{x^2}{49}-\frac{y^2}{16}=1$.

29. $\frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{4}=1$.

30. $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{64}=1$.

Задание 2. Записать уравнение окружности, проходящей через указанные точки и имеющей центр в точке A. Сделать чертеж.

1. Вершины гиперболы $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{4}=1$, $A(0;1)$.
2. Фокусы эллипса $\frac{x^2}{20}+\frac{y^2}{16}=1$, $A(0;3)$.
3. Фокусы гиперболы $\frac{x^2}{7}-\frac{y^2}{9}=1$, $A(0;-2)$.
4. Вершина параболы $y^2=-x+3$, $A(0;2)$.
5. Вершины гиперболы $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{1}=1$, $A(0;-3)$.
6. Фокусы эллипса $\frac{x^2}{13}+\frac{y^2}{4}=1$, $A(0;4)$.
7. Фокусы гиперболы $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{32}=1$, $A(0;5)$.
8. Фокусы эллипса $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{15}=1$, $A(0;1)$.
9. Вершины гиперболы $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{1}=1$, $A(0;3)$.
10. Вершина параболы $y^2=2(x+2)$, $A(0;-2)$.
11. Фокусы гиперболы $\frac{x^2}{1}-\frac{y^2}{24}=1$, $A(0;-1)$.
12. Фокусы эллипса $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{7}=1$, $A(0;2)$.
13. Фокус параболы $y^2=8x$, $A(0;0)$.

14. Фокусы эллипса $\frac{x^2}{17}+\frac{y^2}{1}=1$, $A(0;-3)$.

15. Вершины гиперболы $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$, $A(0;1)$.

16. Фокусы эллипса $\frac{x^2}{40}+\frac{y^2}{4}=1$, $A(0;4)$.

17. Вершины гиперболы $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{16}=1$, $A(0;-2)$.

18. Фокус параболы $y^2=-4x$, $A(0;-3)$.

19. Вершины гиперболы $\frac{x^2}{1}-\frac{y^2}{64}=1$, $A(0;-1)$.

20. Фокусы эллипса $\frac{x^2}{34}+\frac{y^2}{9}=1$, $A(0;2)$.

21. Вершины гиперболы $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1$, $A(0;-4)$.

22. Фокусы эллипса $\frac{x^2}{10}+\frac{y^2}{1}=1$, $A(0;0)$.

23. Вершины гиперболы $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{49}=1$, $A(0;3)$.

24. Вершина параболы $y^2=3(x-1)$, $A(0;-1)$.

25. Вершины гиперболы $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{64}=1$, $A(0;2)$.

26. Фокусы эллипса $\frac{x^2}{26}+\frac{y^2}{1}=1$, $A(0;1)$.

27. Вершины гиперболы $\frac{x^2}{49}-\frac{y^2}{16}=1$, $A(0;-3)$.

28. Фокусы эллипса $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$, $A(0;-2)$.

29. Вершина параболы $y^2 = -x - 2$, $A(0; -4)$.

30. Фокусы эллипса $\frac{x^2}{17} + \frac{y^2}{1} = 1$, $A(0; 4)$.

Прямая и плоскость в пространстве

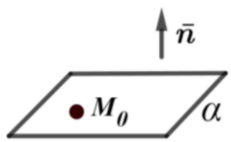
Виды уравнений плоскости

1. **Общее уравнение плоскости**

$$Ax + By + Cz + D = 0, \ (A^2 + B^2 + C^2 \neq 0),$$

$\bar{n} = (A, B, C)$ - нормальный вектор плоскости.

2. **Уравнение плоскости по нормальному вектору и точке**

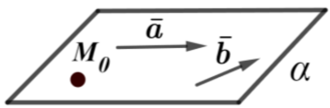


$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0,$$

$\bar{n} = (A, B, C)$ - нормальный вектор плоскости,

$M_0(x_0, y_0, z_0)$ - точка на плоскости.

3. **Уравнение плоскости по двум неколлинеарным векторам, параллельным плоскости**



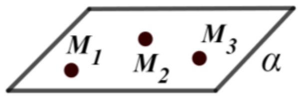
$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = 0,$$

$M_0(x_0, y_0, z_0)$ - точка на плоскости,

$\bar{a} = (a_x, a_y, a_z)$ и $\bar{b} = (b_x, b_y, b_z)$ - неколлинеарные векторы, параллельные плоскости.

4. **Уравнение плоскости по трем точкам**

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0,$$

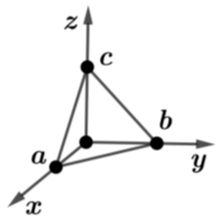


$M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$ - точки на плоскости.

5. **Уравнение плоскости в отрезках**

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1,$$

a, b, c - длины отрезков, отсекаемых плоскостью на осях координат от начала координат.



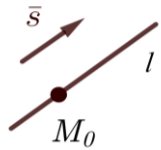
Виды уравнений прямой в пространстве

1. **Канонические уравнения прямой**

$$\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p},$$

$M_0(x_0, y_0, z_0)$ - точка на прямой,

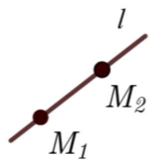
$\bar{s} = (m, n, p)$ - направляющий вектор прямой.



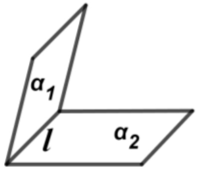
2. **Уравнения прямой по двум точкам**

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1},$$

$M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$ - точки на прямой.



3. **Прямая как линия пересечения двух плоскостей**



$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases}$$

4. Параметрические уравнения прямой

$$\begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt, \\ z = z_0 + pt, \end{cases}$$

$M_0\left(x_0, y_0, z_0\right)$ - точка на прямой,

$\overline{s} = \left(m, n, p\right)$ - направляющий вектор прямой.

Примеры решения задач

Пример 1. Даны точки $A\left(2; 1; -2\right)$, $B\left(1; 3; 3\right)$.

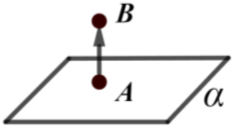
Написать уравнение

a) плоскости, проходящей через точку A перпендикулярно к вектору $\overline{AB}$;

b) прямой, проходящей через точки A и B.

Решение.

а) По координатам точек $A\left(2; 1; -2\right)$ и $B\left(1; 3; 3\right)$ находим координаты вектора $\overline{AB} = \left(1-2; 3-1; 3+2\right) = \left(-1; 2; 5\right)$. Так как



вектор $\overline{AB}$ - нормальный вектор плоскости, то будем использовать уравнение плоскости в виде

$$A\left(x - x_0\right) + B\left(y - y_0\right) + C\left(z - z_0\right) = 0,$$

где $\overline{n} = \left(A, B, C\right)$ - нормальный вектор плоскости, $M_0\left(x_0, y_0, z_0\right)$ - точка на плоскости. Плоскость проходит через точку $A\left(2; 1; -2\right)$, следовательно, в уравнение вместо точки $M_0\left(x_0, y_0, z_0\right)$ подставляем координаты точки $A(2;1;-2)$, $\overline{n}=\overline{AB}=(-1;2;5)$. Тогда уравнение плоскости примет вид $-(x-2)+2(y-1)+5(z+2)=0$ или $-x+2y+5z+10=0$.

b) Прямая проходит через точки A и B, поэтому вектор $\overline{AB}=(-1;2;5)$ параллелен прямой и является направляющим вектором этой прямой. Канонические уравнения прямой имеют вид $\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p}$, где $M_0\left(x_0, y_0, z_0\right)$- точка на прямой, а $\overline{s}=(m, n, p)$- направляющий вектор прямой. В уравнения точку $A(2;1;-2)$ подставляем вместо точки $M_0\left(x_0, y_0, z_0\right)$ и $\overline{s}=\overline{AB}=(-1;2;5)$, получаем уравнения прямой $\dfrac{x-2}{-1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z+2}{5}$.

Ответ: a) $-x+2y+5z+10=0$; b) $\dfrac{x-2}{-1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z+2}{5}$.

Пример 2. Плоскость α_1 задана общим уравнением $x+5y-z+3=0$.

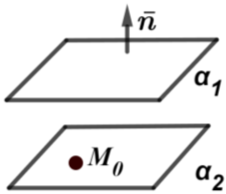
a) Написать уравнение плоскости α_2, проходящей через точку $M_0(1;-1;2)$ параллельно плоскости α_1.

b) Найти расстояние между параллельными плоскостями α_1 и α_2.

c) Написать уравнение прямой l_1, проходящей через точку $M_0(1;-1;2)$ перпендикулярно к плоскости α_1.

d) Найти косинус угла между прямой l_1 и прямой $l_2:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z-1}{1}$.

Решение. Плоскость α_1 задана общим уравнением, поэтому коэффициенты, стоящие перед x, y и z в уравнении $x+5y-z+3=0$, являются координатами нормального вектора плоскости α_1, таким образом, нормальный вектор $\overline{n}=(1;5;-1)$.



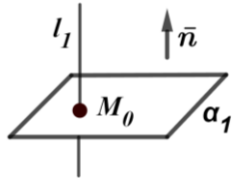
a) Если плоскости α_1 и α_2 параллельны, то вектор $\overline{n}$ будет перпендикулярен к обеим плоскостям. Для плоскости α_2 можно написать уравнение по нормальному вектору и точке, которое имеет вид

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0,$$

где $\overline{n}=(A,B,C)$ - нормальный вектор плоскости, $M_0(x_0,y_0,z_0)$ - точка на плоскости. Подставляем координаты точки $M_0(1;-1;2)$ и вектора $\overline{n}=(1;5;-1)$ в уравнение плоскости, получаем уравнение $(x-1)+5(y+1)-(z-2)=0$ или $x+5y-z+6=0$.

b) Известно, что расстояние между параллельными плоскостями, заданными общими уравнениями, α_1: $Ax+By+Cz+D_1=0$ и α_2: $Ax+By+Cz+D_2=0$ определяется по формуле $\rho(\alpha_1,\alpha_2)=\dfrac{|D_1-D_2|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$. Так как α_1: $x+5y-z+3=0$ и α_2: $x+5y-z+6=0$, то расстояние между плоскостями $\rho(\alpha_1,\alpha_2)=\dfrac{|3-6|}{\sqrt{1^2+5^2+(-1)^2}}=\dfrac{3}{\sqrt{27}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

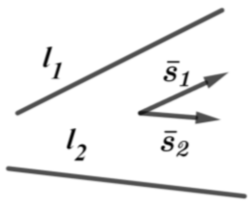
c) Прямая l_1 перпендикулярна к плоскости α_1, и вектор $\overline{n}=(1;5;-1)$ перпендикулярен к плоскости α_1, следовательно, вектор $\overline{n}$ и прямая l_1 параллельны, а значит, вектор $\overline{n}$ является направляющим вектором для прямой l_1. Будем использовать для решения задачи канонические уравнения прямой l_1 в виде



$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p},$$

где $M_0\left(x_0,\, y_0,\, z_0\right)$- точка на прямой, $\bar{s}=\left(m,\, n,\, p\right)$- направляющий вектор прямой. Так как $\bar{n}=\left(1;\, 5;\, -1\right)=\bar{s}$ и прямая l_1 проходит через точку $M_0\left(1;\, -1;\, 2\right)$, то прямая l_1 будет задаваться уравнениями $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+1}{5}=\dfrac{z-2}{-1}$.

d) Из канонических уравнений прямых l_1: $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+1}{5}=\dfrac{z-2}{-1}$ и $l_2: \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z-1}{1}$ берем координаты направляющих векторов (они стоят в знаменателях дробей) $\bar{s}_1=\left(1;\, 5;\, -1\right)$ и



$\bar{s}_2=\left(2;\, -2;\, 1\right)$. Далее вычисляем косинус угла между прямыми как косинус угла между направляющими векторами этих прямых $\cos(\bar{s}_1\hat{,}\,\bar{s}_2)=\dfrac{(\bar{s}_1,\bar{s}_2)}{\left|\bar{s}_1\right|\cdot\left|\bar{s}_2\right|}$, $(\bar{s}_1,\bar{s}_2)$- скалярное произведение векторов $\bar{s}_1$ и $\bar{s}_2$, $\left|\bar{s}_1\right|$ и $\left|\bar{s}_2\right|$ - длины этих векторов. Получим

$$\cos(\bar{s}_1\hat{,}\,\bar{s}_2)=\frac{1\cdot 2+5\cdot(-2)+(-1)\cdot 1}{\sqrt{1^2+5^2+(-1)^2}\cdot\sqrt{2^2+(-2)^2+1^2}}=$$

$$=\frac{-9}{\sqrt{27}\cdot\sqrt{9}}=-\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Так как из двух углов между прямыми нужно выбирать острый угол, а $(\widehat{\bar{s}_1, \bar{s}_2}) > \frac{\pi}{2}$, то по формулам приведения $\cos(\widehat{l_1, l_2}) = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Ответ: a) $x + 5y - z + 6 = 0$; b) $\frac{\sqrt{3}}{3}$; c) $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{5} = \frac{z-2}{-1}$; d) $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Пример 3. Написать уравнение плоскости, проходящей через три точки $M_1(0;0;1)$, $M_2(0;2;3)$, $M_3(2;3;4)$.

Решение. Уравнение плоскости по трем точкам записывается как

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0,$$

где $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$- заданные точки на плоскости. Подставляя координаты точек в уравнение, получаем $\begin{vmatrix} x-0 & y-0 & z-1 \\ 0-0 & 2-0 & 3-1 \\ 2-0 & 3-0 & 4-1 \end{vmatrix} = 0$ или $\begin{vmatrix} x & y & z-1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 0$. Упрощаем уравнение, вычисляя определитель с помощью разложения по первой строке:

$$\begin{vmatrix} x & y & z-1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 3 \end{vmatrix} = x \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} - y \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + (z-1) \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} =$$

$= 4y - 4(z-1) = 4y - 4z + 4$. В итоге плоскость определяется уравнением $4y - 4z + 4 = 0$ или $y - z + 1 = 0$.

Ответ: $y - z + 1 = 0$.

Пример 4. Прямая l задана как линия пересечения двух плоскостей $\begin{cases} x-y+z+3=0, \\ 2x+y+3z=0. \end{cases}$ Написать канонические уравнения прямой l.

Решение. Для написания канонических уравнений прямой

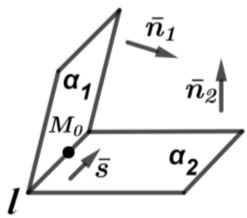
$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$$

нужно найти точку на прямой $M_0\left(x_0,\, y_0,\, z_0\right)$ и направляющий вектор прямой $\bar{s}=\left(m,\, n,\, p\right)$.

1. Выберем точку $M_0\left(x_0,\, y_0,\, z_0\right)$ на прямой l, для этого в системе $\begin{cases} x-y+z+3=0, \\ 2x+y+3z=0 \end{cases}$ зафиксируем одну из переменных. Например, пусть $z_0=0$ (можно выбрать любое число и любую переменную). Тогда система уравнений примет вид $\begin{cases} x-y+3=0, \\ 2x+y=0 \end{cases}$ или $\begin{cases} x+2x+3=0, \\ y=-2x \end{cases}$ или $\begin{cases} x_0=-1, \\ y_0=2. \end{cases}$

   Получили точку $M_0\left(-1,\, 2,\, 0\right)$ на прямой l.

2. Найдем направляющий вектор прямой $\bar{s}=\left(m,\, n,\, p\right)$. Прямая l задана как линия пересечения двух плоскостей $\begin{cases} x-y+z+3=0, \\ 2x+y+3z=0. \end{cases}$ Пусть плоскость α_1 определяется уравнением $x-y+z+3=0$, а плоскость α_2 - $2x+y+3z=0$. Тогда их нормальные вектора задаются координатами $\bar{n}_1=\left(1;-1;1\right)$ и $\bar{n}_2=\left(2;1;3\right)$. Известно, что направляющий вектор $\bar{s}$ прямой l вычисляется по формуле $\bar{s}=\left[\bar{n}_1;\bar{n}_2\right]$. Тогда



$$\overline{s}=\begin{vmatrix}\overline{i} & \overline{j} & \overline{k}\\ 1 & -1 & 1\\ 2 & 1 & 3\end{vmatrix}=\overline{i}\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 1 & 3\end{vmatrix}-\overline{j}\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & 3\end{vmatrix}+\overline{k}\begin{vmatrix}1 & -1\\ 2 & 1\end{vmatrix}=$$

$$=-4\overline{i}-\overline{j}+3\overline{k}=(-4;-1;3).$$

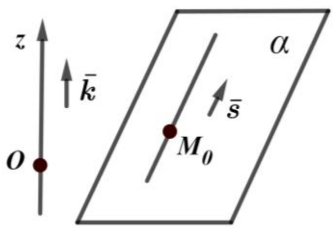
3. Пишем канонические уравнения прямой l по точке $M_0(-1,2,0)$ и направляющему вектору $\overline{s}=(-4;-1;3)$

$$\frac{x+1}{-4}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z}{3}.$$

Ответ: $\frac{x+1}{-4}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z}{3}$.

Пример 5. Написать уравнение плоскости α, проходящей через прямую $l:\frac{x-2}{1}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z-2}{1}$ параллельно координатной оси Oz. Найти расстояние от начала координат до этой плоскости.

Решение. Так как прямая l задана каноническими уравнениями



$\frac{x-2}{1}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z-2}{1}$, то известен направляющий вектор прямой $\overline{s}=(1;-1;1)$ (его координаты записаны в знаменателях дробей) и точка на прямой $M_0(2;-1;2)$. Из того что плоскость α проходит через прямую l, следует, что вектор $\overline{s}$ параллелен плоскости α, и точка M_0 принадлежит плоскости α.

Координатная ось Oz определяется базисным вектором $\overline{k}=(0;0;1)$, который тоже параллелен плоскости α, потому что плоскость α параллельна оси Oz.

Таким образом, имеем два вектора $\overline{s} = (1; -1; 1)$ и $\overline{k} = (0; 0; 1)$, параллельных плоскости α, векторы не коллинеарны, так как их координаты не пропорциональны. Напишем уравнение плоскости по двум неколлинеарным векторам

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = 0,$$

где $M_0(x_0, y_0, z_0)$- точка на плоскости, $\overline{a} = (a_x, a_y, a_z)$ и $\overline{b} = (b_x, b_y, b_z)$ - неколлинеарные векторы, параллельные плоскости. Подставив в уравнение плоскости точку $M_0(2; -1; 2)$, координаты вектора $\overline{s} = (1; -1; 1)$ вместо $\overline{a} = (a_x, a_y, a_z)$, координаты вектора $\overline{k} = (0; 0; 1)$ вместо $\overline{b} = (b_x, b_y, b_z)$, получим

$\begin{vmatrix} x - 2 & y + 1 & z - 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0,$ или $\begin{vmatrix} x - 2 & y + 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 0,$ или $x + y - 1 = 0$.

Плоскость α задана общим уравнением $x + y - 1 = 0$. Известно, что расстояние от точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ до плоскости $\alpha : Ax + By + Cz + D = 0$ можно вычислить как $\rho(M_0, \alpha) = \dfrac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$. Тогда расстояние от начала координат $O(0, 0, 0)$ до плоскости α равно

$$\rho(O, \alpha) = \frac{|1 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 - 1|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Ответ: $x+y-1=0$, $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Задания для типового расчета

Задание 1. Написать уравнение

a) плоскости, проходящей через точку A перпендикулярно к вектору $\overline{AB}$;

b) прямой, проходящей через точки A и B.

1. $A(5;1;2)$, $B(1;0;-3)$.
2. $A(1;-1;3)$, $B(2;6;4)$.
3. $A(3;3;5)$, $B(2;-1;3)$.
4. $A(0;2;6)$, $B(3;4;7)$.
5. $A(2;1;-3)$, $B(1;0;4)$.
6. $A(-1;-2;1)$, $B(4;3;1)$.
7. $A(5;1;-2)$, $B(6;3;1)$.
8. $A(2;2;-3)$, $B(4;1;3)$.
9. $A(-1;0;4)$, $B(2;-1;5)$.
10. $A(3;2;5)$, $B(5;3;4)$.
11. $A(-4;1;-2)$, $B(0;2;3)$.
12. $A(3;3;0)$, $B(2;-5;2)$.
13. $A(2;4;4)$, $B(1;-3;6)$.
14. $A(4;-2;3)$, $B(0;-3;4)$.
15. $A(-1;2;-2)$, $B(2;5;6)$.
16. $A(3;1;0)$, $B(4;5;-2)$.
17. $A(1;1;3)$, $B(4;-2;2)$.
18. $A(-5;2;3)$, $B(-3;1;5)$.

19. $A(0;-3;-4)$, $B(2;-1;-6)$.
20. $A(-1;4;-3)$, $B(1;-1;2)$.
21. $A(4;5;1)$, $B(-2;3;2)$.
22. $A(3;1;-1)$, $B(1;2;3)$.
23. $A(1;5;6)$, $B(4;2;7)$.
24. $A(3;-2;-2)$, $B(1;2;5)$.
25. $A(3;-4;-2)$, $B(2;-2;4)$.
26. $A(2;0;7)$, $B(1;-5;6)$.
27. $A(5;-1;3)$, $B(4;2;8)$.
28. $A(-2;5;2)$, $B(0;3;5)$.
29. $A(3;1;4)$, $B(2;6;1)$.
30. $A(3;-5;3)$, $B(1;0;4)$.

Задание 2. Плоскость α_1 задана общим уравнением.

a) Написать уравнение плоскости α_2, проходящей через точку M_0 параллельно плоскости α_1.

b) Найти расстояние между параллельными плоскостями α_1 и α_2.

c) Написать уравнение прямой l_1, проходящей через точку M_0 перпендикулярно к плоскости α_1.

d) Найти косинус угла между прямой l_1 и прямой $l_2: \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z-1}{1}$.

1. $\alpha_1:\ x+2y-3z+2=0,\qquad M_0(5;0;-1)$.
2. $\alpha_1:\ 2x+y-z-3=0,\qquad M_0(2;1;3)$.
3. $\alpha_1:\ x+4y+z+2=0,\qquad M_0(2;-2;1)$.

4. $\alpha_1:\ x-2y-z+4=0,$ $M_0(-3;1;2)$.

5. $\alpha_1:\ 2x+2y+z+5=0,$ $M_0(4;3;0)$.

6. $\alpha_1:\ 3x-y+2z-4=0,$ $M_0(1;2;-1)$.

7. $\alpha_1:\ 2x+3z-1=0,$ $M_0(3;-5;2)$.

8. $\alpha_1:\ x-3y-z-6=0,$ $M_0(4;0;3)$.

9. $\alpha_1:\ 4x+y-3z+2=0,$ $M_0(1;5;2)$.

10. $\alpha_1:\ 2x+2y+z-1=0,$ $M_0(-2;1;6)$.

11. $\alpha_1:\ x+3y+5=0,$ $M_0(4;-3;0)$.

12. $\alpha_1:\ x-3y-2z=0,$ $M_0(2;1;5)$.

13. $\alpha_1:\ x+5y-z+2=0,$ $M_0(-1;-2;1)$.

14. $\alpha_1:\ 3x+2y-z+3=0,$ $M_0(2;-3;2)$.

15. $\alpha_1:\ 2x-y-4z+5=0,$ $M_0(0;4;-3)$.

16. $\alpha_1:\ 5x+2y-z-3=0,$ $M_0(5;1;1)$.

17. $\alpha_1:\ x+2y+3z+1=0,$ $M_0(3;2;-2)$.

18. $\alpha_1:\ 3x+y+3z+1=0,$ $M_0(-4;1;3)$.

19. $\alpha_1:\ 4x+2z-3=0,$ $M_0(1;-6;3)$.

20. $\alpha_1:\ x-5y+3z+2=0,$ $M_0(1;0;2)$.

21. $\alpha_1:\ x+y-4z+2=0,$ $M_0(-3;-3;1)$.

22. $\alpha_1:\ 2x-y-3z+3=0,$ $M_0(4;0;-2)$.

23. $\alpha_1:\ x+5y+5z=0,$ $M_0(3;-1;1)$.

24. $\alpha_1:\ 3x-3y+2z-4=0,$ $M_0(2;2;5)$.

25. $\alpha_1:\ x+y-5z+3=0,$ $M_0(2;-4;-1)$.

26. $\alpha_1:\ 3y-2z+3=0,$ $M_0(6;1;0)$.

27. $\alpha_1:\ 4x+3y-2z+3=0,$ $M_0(1;5;1)$.

28. $\alpha_1:\ 3x+2y-2z-2=0,\qquad M_0(-1;-2;3)$.

29. $\alpha_1:\ 3x+y-5=0,\qquad M_0(2;5;4)$.

30. $\alpha_1:\ x+y+4z=0,\qquad M_0(0;3;-6)$.

Задание 3. Написать уравнение плоскости, проходящей через три точки.

1. $M_1(3;0;0),\quad M_2(5;0;-1),\quad M_3(2;5;1)$.
2. $M_1(0;1;0),\quad M_2(2;1;3),\quad M_3(3;2;-2)$.
3. $M_1(0;0;2),\quad M_2(2;-2;1),\quad M_3(0;4;-1)$.
4. $M_1(-4;0;0),\quad M_2(-3;1;2),\quad M_3(-1;5;0)$.
5. $M_1(0;5;0),\quad M_2(4;3;0),\quad M_3(0;-4;2)$.
6. $M_1(0;0;-6),\quad M_2(1;2;-1),\quad M_3(3;0;-2)$.
7. $M_1(4;0;0),\quad M_2(3;-5;2),\quad M_3(0;1;3)$.
8. $M_1(0;-2;0),\quad M_2(4;0;3),\quad M_3(2;3;3)$.
9. $M_1(0;0;1),\quad M_2(1;5;2),\quad M_3(-4;0;2)$.
10. $M_1(-3;0;0),\quad M_2(-2;1;6),\quad M_3(0;5;4)$.
11. $M_1(0;-6;0),\quad M_2(4;-3;0),\quad M_3(2;-2;1)$.
12. $M_1(0;0;3),\quad M_2(2;1;5),\quad M_3(4;0;3)$.
13. $M_1(2;0;0),\quad M_2(-1;-2;1),\quad M_3(-3;3;0)$.
14. $M_1(0;-1;0),\quad M_2(2;-3;2),\quad M_3(0;5;6)$.
15. $M_1(0;0;-5),\quad M_2(0;4;-3),\quad M_3(1;-1;1)$.
16. $M_1(6;0;0),\quad M_2(5;1;1),\quad M_3(3;0;2)$.
17. $M_1(0;-3;0),\quad M_2(3;2;-2),\quad M_3(0;4;1)$.
18. $M_1(0;0;1),\quad M_2(-4;1;3),\quad M_3(2;0;5)$.
19. $M_1(-2;0;0),\quad M_2(1;-6;3),\quad M_3(-3;-2;0)$.

20. $M_1(0;-1;0)$, $M_2(1;0;2)$, $M_3(5;2;3)$.

21. $M_1(0;0;4)$, $M_2(-3;-3;1)$, $M_3(0;-1;3)$.

22. $M_1(1;0;0)$, $M_2(4;0;-2)$, $M_3(5;-1;1)$.

23. $M_1(0;-5;0)$, $M_2(3;-1;1)$, $M_3(6;1;0)$.

24. $M_1(0;0;6)$, $M_2(2;2;5)$, $M_3(0;-4;1)$.

25. $M_1(-1;0;0)$, $M_2(2;-4;-1)$, $M_3(3;0;4)$.

26. $M_1(0;2;0)$, $M_2(6;1;0)$, $M_3(3;2;-3)$.

27. $M_1(0;0;3)$, $M_2(1;5;1)$, $M_3(0;4;5)$.

28. $M_1(-3;0;0)$, $M_2(-1;-2;3)$, $M_3(1;0;2)$.

29. $M_1(0;4;0)$, $M_2(2;5;4)$, $M_3(-2;3;0)$.

30. $M_1(0;0;-1)$, $M_2(0;3;-6)$, $M_3(1;1;-2)$.

Задание 4. Прямая l задана как линия пересечения двух плоскостей. Написать канонические уравнения прямой l.

1. $\begin{cases} x-3y+2z+5=0, \\ 2x+y+z-1=0. \end{cases}$

2. $\begin{cases} x+y+4z-2=0, \\ 3x+y-z+1=0. \end{cases}$

3. $\begin{cases} 3x+2y+4=0, \\ x-y+2z+3=0. \end{cases}$

4. $\begin{cases} x+y-3z+2=0, \\ 4x-y+z+3=0. \end{cases}$

5. $\begin{cases} x+2y+2z+3=0, \\ 2x-2y+z=0. \end{cases}$

6. $\begin{cases} x+5y-z+2=0, \\ 2x+y+2z+5=0. \end{cases}$

7. $\begin{cases} x+4y+4z-4=0, \\ 3x-y+z+2=0. \end{cases}$

8. $\begin{cases} 2y+z+4=0, \\ x+2y-3z+2=0. \end{cases}$

9. $\begin{cases} 3x-y-2z+1=0, \\ x+2y+3z+4=0. \end{cases}$

10. $\begin{cases} x+y+3z+2=0, \\ 3x-y+3z-1=0. \end{cases}$

11. $\begin{cases} 5x+y-3z+2=0, \\ x-4y+z-5=0. \end{cases}$

12. $\begin{cases} 2x+y+4z=0, \\ x+4y-2z+3=0. \end{cases}$

13. $\begin{cases} 2y - z + 8 = 0, \\ x + 3y + z + 3 = 0. \end{cases}$

14. $\begin{cases} x + 2y - 2z + 2 = 0, \\ 3x - y + z - 3 = 0. \end{cases}$

15. $\begin{cases} 3x + y + 6 = 0, \\ 2x - 2z + 3 = 0. \end{cases}$

16. $\begin{cases} x + 3y + z + 4 = 0, \\ x - y + 4z + 3 = 0. \end{cases}$

17. $\begin{cases} 3x + 4y - 4 = 0, \\ x - 3y + 3z + 1 = 0. \end{cases}$

18. $\begin{cases} x - y + 3z + 1 = 0, \\ 5x + 2y - z + 2 = 0. \end{cases}$

19. $\begin{cases} x + 4y + 2z - 6 = 0, \\ 3x + 4z + 4 = 0. \end{cases}$

20. $\begin{cases} x - y + 4z + 2 = 0, \\ 3x + y + 3z = 0. \end{cases}$

21. $\begin{cases} 2x - 3y + z = 0, \\ x + 2y + 4z - 5 = 0. \end{cases}$

22. $\begin{cases} 2y + z + 3 = 0, \\ x - y + 3z + 4 = 0. \end{cases}$

23. $\begin{cases} 3x + 3y + 2z = 0, \\ x + 3y - z + 3 = 0. \end{cases}$

24. $\begin{cases} 2x + y + 2z + 5 = 0, \\ 3x + 2y - 3z = 0. \end{cases}$

25. $\begin{cases} 4x + y - 4z + 2 = 0, \\ x + 3y + z + 1 = 0. \end{cases}$

26. $\begin{cases} x + 5z + 6 = 0, \\ 2x + y - z - 3 = 0. \end{cases}$

27. $\begin{cases} 2x - 4y + z - 4 = 0, \\ x + 3y - z + 1 = 0. \end{cases}$

28. $\begin{cases} 4x + 3y + z - 1 = 0, \\ 2y - z + 6 = 0. \end{cases}$

29. $\begin{cases} x + y - z + 1 = 0, \\ 3x + 2y + 2z + 2 = 0. \end{cases}$

30. $\begin{cases} 3x - 5y + 2 = 0, \\ x + 4y - z + 2 = 0. \end{cases}$

Задание 5. Написать уравнение плоскости α, проходящей через прямую l параллельно одной из координатных осей. Найти расстояние от начала координат до этой плоскости.

1. $l: \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+2}{-1} = \dfrac{z-3}{5}$, ось Ox.
2. $l: \dfrac{x+4}{3} = \dfrac{y-2}{1} = \dfrac{z-2}{4}$, ось Oy.
3. $l: \dfrac{x-3}{4} = \dfrac{y-4}{1} = \dfrac{z}{1}$, ось Oz.

4. $l:\dfrac{x+2}{2}=\dfrac{y+1}{3}=\dfrac{z-5}{3}$, ось Ox.

5. $l:\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z+3}{3}$, ось Oy.

6. $l:\dfrac{x+4}{1}=\dfrac{y+5}{3}=\dfrac{z-1}{-1}$, ось Oz.

7. $l:\dfrac{x}{4}=\dfrac{y-1}{3}=\dfrac{z+4}{1}$, ось Ox.

8. $l:\dfrac{x-3}{-1}=\dfrac{y+3}{1}=\dfrac{z-1}{-2}$, ось Oy.

9. $l:\dfrac{x-1}{-2}=\dfrac{y-1}{3}=\dfrac{z+1}{2}$, ось Oz.

10. $l:\dfrac{x+6}{2}=\dfrac{y-4}{1}=\dfrac{z-2}{-3}$, ось Ox.

11. $l:\dfrac{x}{4}=\dfrac{y-3}{3}=\dfrac{z+3}{-2}$, ось Oy.

12. $l:\dfrac{x-2}{-1}=\dfrac{y+5}{1}=\dfrac{z+3}{1}$, ось Oz.

13. $l:\dfrac{x+2}{2}=\dfrac{y+4}{5}=\dfrac{z-3}{-1}$, ось Ox.

14. $l:\dfrac{x-3}{3}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z}{3}$, ось Oy.

15. $l:\dfrac{x+2}{-1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-4}{2}$, ось Oz.

16. $l:\dfrac{x-1}{5}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z+1}{-2}$, ось Ox.

17. $l:\dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z-2}{3}$, ось Oy.

18. $l:\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z+4}{-3}$, ось Oz.

19. $l: \frac{x}{4} = \frac{y-1}{-4} = \frac{z-1}{3}$, ось Ox.

20. $l: \frac{x+1}{2} = \frac{y+2}{4} = \frac{z-1}{3}$, ось Oy.

21. $l: \frac{x-3}{1} = \frac{y+2}{-2} = \frac{z+2}{1}$, ось Oz.

22. $l: \frac{x-5}{3} = \frac{y-6}{-2} = \frac{z+4}{2}$, ось Ox.

23. $l: \frac{x+2}{4} = \frac{y}{2} = \frac{z-3}{-5}$, ось Oy.

24. $l: \frac{x-3}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z}{-3}$, ось Oz.

25. $l: \frac{x-2}{3} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-1}{2}$, ось Ox.

26. $l: \frac{x-5}{5} = \frac{y+1}{5} = \frac{z-4}{1}$, ось Oy.

27. $l: \frac{x+2}{1} = \frac{y+3}{-3} = \frac{z-2}{1}$, ось Oz.

28. $l: \frac{x-3}{-2} = \frac{y}{3} = \frac{z+2}{4}$, ось Ox.

29. $l: \frac{x-1}{4} = \frac{y-1}{-5} = \frac{z+1}{2}$, ось Oy.

30. $l: \frac{x-4}{2} = \frac{y}{-2} = \frac{z}{-3}$, ось Oz.

Библиографический список

1. Бухенский К.В., Карасёв И.П., Лукьянова Г.С. Краткий курс линейной алгебры и аналитической геометрии. Ч. 2. Аналитическая геометрия на плоскости и в пространстве. Линейные операторы. – М.: КУРС, 2020.
2. Бухенский К.В. Опорные конспекты по высшей математике: учеб. пособие. Ч. 1. – Рязань: РГРТУ, 2010.
3. Демин С.Е., Демина Е.Л. Аналитическая геометрия: учеб.-метод. пособие. – Нижний Тагил: НТИ (филиал) УрФУ, 2016.
4. Новиков А.И. Начала линейной алгебры и аналитическая геометрия. – М.: Физматлит, 2015.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Аналитическая геометрия

Составители: Б о г а т о в а Светлана Викторовна
К о с т р о в а Юлия Сергеевна

Редактор И.В. Черникова
Корректор С.В. Макушина
Подписано в печать 02.06.23. Формат бумаги 60×84 1/16.
Бумага писчая. Печать трафаретная. Усл. печ. л. 2,5.
Тираж 50 экз. Заказ
Рязанский государственный радиотехнический университет.
390005, Рязань, ул. Гагарина, 59/1.
Редакционно-издательский центр РГРТУ.