**Всероссийская студенческая физико-математическая олимпиада
имени Георгия Николаевича Шуппе
Рязанский государственный радиотехнический университет им. В.Ф. Уткина
5-8 апреля 2024 года**

Задача 1. Пусть $f_n(x)$ – определитель матрицы n -го порядка, в которой $a_{ij} = 1 + x^2$, если $i = j$, $a_{ij} = x$, если $|i - j| = 1$, $a_{ij} = 0$, если $|i - j| \geq 2$, где $x \in (-1; 1)$. Построить график функции $F(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$.

Задача 2. Найти 20000 матриц 8×8 , удовлетворяющих уравнению $A^4 + E = 0$ и состоящих из действительных чисел с модулями не больше $3/4$.

Задача 3. На плоскости дан квадрат со стороной a . Найти длину замкнутой линии, состоящей из тех точек плоскости, откуда квадрат виден под углом 45° .

Задача 4. Считая Землю шаром, найти широту и долготу самой северной точки на геодезической (кратчайшем пути по поверхности, т. е. сечении сферы плоскостью, проходящей через центр), соединяющей Петербург (60° с.ш., 30° в.д.) и Магадан (60° с.ш., 150° в.д.).

Задача 5. При каких $C \in R$ рекуррентная последовательность $x_1 = x_2 = 1$, $x_n = x_{n-1} - Cx_{n-2}$ периодична?

Задача 6. Решить систему:

$$\begin{cases} u^3 + v^3 + w^3 = 24, \\ uv(u+v) + vw(v+w) + wu(w+u) = xy(x+y) + yz(y+z) + zx(z+x), \\ xyz = 8, \\ u, v, w, x, y, z > 0. \end{cases}$$

Задача 7. Вычислить интеграл: $\int_0^{\pi/2} \ln(\operatorname{tg}^{2024} x + \operatorname{ctg}^{2024} x) \cdot \ln(\operatorname{tg} x) dx$.

Задача 8. Пусть операторы $\hat{A}$ и $\hat{B}$ удовлетворяют соотношению $\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A} = \hat{I}$, где $\hat{I}$ – единичный оператор. Требуется:

а) найти $\hat{A}\hat{B}^2 - \hat{B}^2\hat{A}$;

б) найти $f(\hat{A})\hat{B} - \hat{B}f(\hat{A})$, где $f(x)$ – произвольная бесконечно дифференцируемая функция;

в) доказать, что не существует таких линейных операторов в конечномерном пространстве.

Задача 9. Раскаленная монета площадью 4 см^2 расположена параллельно стене на расстоянии 1 м . Двигая линзу, параллельную стене, вдоль нормали между стеной и монетой, два раза получили четкое изображение монеты на стене, и сумма площадей этих двух изображений 17 см^2 . Найти оптическую силу линзы.

Задача 10. С вершины гладкой полусферы радиуса R , массы M начинает соскальзывать небольшое тело массы m . $M/m=2$. Сфера расположена на гладкой горизонтальной поверхности. На какой высоте h тело оторвется от поверхности полусферы?

Задача 11. Для равновесного состояния термодинамической системы найти связь между термическими коэффициентами:

$$\alpha = \frac{1}{V_0} \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P; \quad \beta = -\frac{1}{V_0} \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_T; \quad \gamma = \frac{1}{P_0} \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_V,$$

где P_0 и V_0 – соответственно, среднее давление и средний объем в произвольной термодинамической системе.

Задача 12. Расплавленный свинец заливается в теплоизолированную форму, имеющую прямоугольное сечение, глубиной $h=1 \text{ см}$. Полагая температуру свинца равной температуре плавления $T_{pb} = 600 \text{ К}$, оценить время τ , за которое произошла полная кристаллизация, если отток тепла шел с поверхности, температуру которой можно считать постоянной и равной $T_0 = 300 \text{ К}$. Принять для свинца: удельную теплоту кристаллизации $q = 25 \text{ кДж/кг}$, коэффициент теплопроводности $\lambda = 35 \text{ Вт/(м} \cdot \text{К)}$, плотность $\rho = 11,3 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$.

Задача 13. Бесконечно длинный провод с током I согнут в плоскости так, что радиус кривизны в плоскости сгиба равен R , а угол между прямолинейными участками провода равен α . Найти магнитную индукцию в центре кривизны области сгиба.

Указание: использовать закон Био-Савара-Лапласа $d\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{[d\mathbf{l}, \mathbf{R}]}{R^3}$.