Федеральное агентство по образованию

Рязанский государственный радиотехнический университет

К.В. БУХЕНСКИЙ, Н.В. ЕЛКИНА,
Н.Н. МАСЛОВА, К.А. ЦИПОРКОВА

Опорные конспекты по высшей математике

Часть 2

Учебное пособие

Рязань 2010

УДК 517
Опорные конспекты по высшей математике. Часть 2: учеб. пособие / К.В. Бухенский, Н.В. Елкина, Н.Н. Маслова, К.А. Ципоркова; Рязан. гос. радиотехн. ун-т. – Рязань, 2010. – 240с.

Акцент сделан на сообщении студентам сведений, необходимых для практического применения математического аппарата в профессиональной деятельности. Предполагается, что доказательства приведенных теорем, и выводы части расчетных сообщений могут быть при необходимости разобраны по рекомендованной литературе. Приведены необходимые примеры решения типовых задач.

Предназначено для студентов, посещающих корректирующие курсы по математике, студентов групп УВЦ, а также может быть использовано в качестве опорного конспекта при подготовке к практическим занятиям и тестированию.

Табл. 9. Ил. 9. Библиогр. 14 назв.

Производная, дифференциал, неопределенный интеграл, определенный интеграл, несобственный интеграл, функция нескольких переменных, дифференциальные уравнения, системы дифференциальных уравнений

Печатается по решению редакционно-издательского совета Рязанского государственного радиотехнического университета.

Рецензент: кафедра высшей математики Рязанского государственного радиотехнического университета (зам. зав. кафедрой старший преподаватель Н.В. Елкина)

ОГЛАВЛЕНИЕ

Условные обозначения……………………………………………6
Предисловие……………………………………………………..7
ГЛАВА 1. ПРОИЗВОДНАЯ И ЕЁ ПРИЛОЖЕНИЯ ……………8
§ 1. Определение производной.
Механический и физический смысл производной …...9
§ 2. Связь между дифференцируемостью
и непрерывностью функции. Правила дифференцирования суммы, произведения и частного……………...13
§ 3. Производная сложной и обратной функции ………..14
§ 4. Производная степенно-показательной функции……15
§ 5. Производные основных элементарных функций…...16
§ 6. Дифференциал функции…………………………………17
6.1. Определение дифференциала ……………………17
6.2 Геометрический смысл дифференциала ………....18
6.3. Дифференциал сложной функции.
Инвариантность формы первого дифференциала.19
6.4. Использование дифференциала
для приближенных вычислений…………………19
§ 7. Производные и дифференциалы высших порядков...20
§ 8. Производная функции, заданной неявно……………22
§ 9. Дифференцирование функции,
заданной параметрически…………………..………..23
§ 10. Основные теоремы дифференциального
исчисления...25
§ 11. Правила Лопиталя раскрытия неопределенностей...28
§ 12. Формула Тейлора. Разложение экспоненты, синуса,
косинуса, логарифма, арктангенса
и степенного бинома по формуле Тейлора…………32
§ 13. Полное исследование функции……………………..37
13.1. Критерий монотонности функции……………...37
13.2. Отыскание локального экстремума…………….38
13.3. Отыскание наибольших и наименьших значений
непрерывной на отрезке функции………………40
13.4. Выпуклость и вогнутость графика функции…...40
13.5. Асимптоты графика функции…………………...42
13.6. Схема исследования функции и
построения ее графика……………………….43

ГЛАВА 2. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ
ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ ……………..49
§ 1. Элементарные методы интегрирования ……..…......50
§ 2. Метод замены переменной ………..………………...55
§ 3. Метод интегрирования по частям…………………...60
§ 4. Интегрирование дробно-рациональных функций.…66
§ 5. Интегрирование тригонометрических функций …...77
§ 6. Интегрирование иррациональных функций………...82
§ 7. Определенный интеграл. Свойства определенного
интеграла. Формула Ньютона - Лейбница…………...96
7.1. Понятие определенного интеграла……………….96
7.2. Геометрический смысл определенного интеграла…97
7.3. Основные свойства определенных интегралов….97
7.4. Формула Ньютона - Лейбница…………………...99
§ 8. Методы интегрирования подстановкой
и по частям для определенного интеграла………….101
8.1. Интегрирование подстановкой………………….101
8.2. Интегрирование по частям……………………….104
§ 9. Приложения определенного интеграла…………….106
9.1. Вычисление площади плоской фигуры………...106
9.2. Вычисление длины дуги кривой……………….111
9.3. Объем тела……………………………………...114
§ 10. Несобственные интегралы………………………...118
10.1. Интегралы с бесконечным промежутком интегрирования (несобственные интегралы I рода).119
10.2. Признаки сходимости несобственных интегралов с бесконечными пределами……………………123
10.3. Интегралы от неограниченных функций (несобственные интегралы II рода)…………...125
10.4. Признаки сходимости несобственных интегралов II рода…………….128
10.5. Значения некоторых несобственных интегралов.129
ГЛАВА 3. ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ
(ФНП)……………………………………………..130
§ 1. Понятие ФНП. Элементы топологии в R^n 130
§ 2. Предел функции……………………………………...134
§ 3. Непрерывность функции……………………………137

§ 4. Частные производные. Полный дифференциал……138
§ 5. Касательная плоскость и нормаль к поверхности…141
§ 6. Частные производные высших порядков…………..143
§ 7. Дифференцирование функции……………………145
§ 8. Производная по направлению. Поверхности и линии уровня. Градиент скалярного поля………………....151
§ 9. Экстремум функции нескольких переменных……..155
9.1. Локальный экстремум…………………………...155
9.2. Условный экстремум……………………………159
9.3. Задачи на наибольшее и наименьшее значения функции……………………………..161
ГЛАВА 4. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ…...165
§ 1. Обыкновенные дифференциальные уравнения первого порядка …………………….………….165
1.1. Общие понятия………………………………....165
1.2. Уравнения с разделенными и разделяющимися переменными……………………………………..168
1.3. Однородные уравнения первого порядка………174
1.4. Линейные уравнения первого порядка…………179
1.5. Уравнение Бернулли…………………………...186
1.6. Уравнения в полных дифференциалах…………189
§ 2. Дифференциальные уравнения высших порядков...193
2.1. Основные понятия……………………………….193
2.2. Уравнения, допускающие понижение порядка..195
§ 3. Линейные дифференциальные уравнения…………200
3.1. Линейные однородные дифференциальные уравнения (ЛОДУ) высших порядков…………..200
3.2. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения (ЛНДУ) второго порядка……………202
3.3. ЛОДУ с постоянными коэффициентами……….206
3.4. ЛНДУ с постоянными коэффициентами……….208
3.5. ЛНДУ со специальной правой частью………….210
§ 4. Системы дифференциальных уравнений…………..221
4.1. Нормальная система дифференциальных уравнений……………………………………...221
4.2. Решение линейных СДУ с постоянными коэффициентами с помощью матриц…………..224
РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА…………………..237

Условные обозначения

◄	– начало решения примера
►	– решение примера завершено
$\varnothing$	– пустое множество
$A \Rightarrow B$	– из высказывания A следует высказывание B
$A \Leftrightarrow B$	– высказывания A и B равносильны
$\mathbf{N}$	– множество натуральных чисел
$\mathbf{Z}$	– множество целых чисел
$\mathbf{Q}$	– множество рациональных чисел
$\mathbf{R}$	– множество действительных чисел
$x \in X$	– элемент x принадлежит множеству X
$i = \overline{1, n}$	– число i принимает последовательно все значения от 1 до n из множества $\mathbf{N}$
$\forall$	– квантор всеобщности (любой, для всякого)
$\exists$	– квантор существования (существует)
Опр.	– определение
НОК	– наименьшее общее кратное
ОДУ	– обыкновенное дифференциальное уравнение
СДУ	– система дифференциальных уравнений
ФНП	– функция нескольких переменных
ЛНДУ	– линейное неоднородное дифференциальное уравнение
ЛОДУ	– линейное однородное дифференциальное уравнение
сл. обр.	– следующим образом
сл–но	– следовательно
т. и т.т.	– тогда и только тогда
т.о.	– таким образом

Предисловие

В пособии рассмотрен материал, который изучается в технических вузах в рамках дисциплины «Математика», как правило во II-м семестре на 1-м курсе. Это:

- *ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ* – описывает отношения между малыми приращениями соответствующих переменных.
- *ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ* – позволяет количественно выразить свойства множества объектов в целом или в среднем и обеспечивает аппарат для сложения большого числа малых приращений.
- *ФУНКЦИИ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ* – позволяют количественно выразить зависимость между несколькими величинами.
- *ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ* – позволяют выразить соотношения между изменениями физических величин и потому имеют большое значение в практических приложениях.

Теоретический материал по данным разделам содержит основные определения, формулировки теорем, примеры, демонстрирующие методы решения типичных задач. Предполагается, что доказательства приведенных утверждений можно изучить по рекомендованной в пособии литературе.

Особую благодарность авторы выражают доценту кафедры высшей математики Лукьяновой Г.С., которая систематизировала рекомендуемую литературу по разделам и факультетам.

ГЛАВА 1. ПРОИЗВОДНАЯ И ЕЁ ПРИЛОЖЕНИЯ

Зачатки методов математического анализа были у древнегреческих математиков (Архимед). Систематическое развитие эти методы получили в 17 веке. На рубеже 17 и 18 вв. И. Ньютон и Г. В. Лейбниц в общем и целом завершили создание дифференциального и интегрального исчисления, а также заложили основы учения о рядах и о дифференциальных уравнениях. В 18 веке Л. Эйлер разработал последние два раздела, а также внес большой вклад в развитие других дисциплин математического анализа.

К концу 18 века накопился огромный фактический материал, но он был недостаточно разработан в логическом отношении. Этот недостаток был устранен усилиями крупнейших ученых 19 века, таких, как О. Л. Коши во Франции, Н. И. Лобачевский в России, Н. Х. Абель в Норвегии, Г. Ф. Б. Риман в Германии и др.

Источником дифференциального исчисления были два вопроса:

1) о нахождении касательной к произвольной линии,
2) о нахождении скорости при произвольном законе движения.

Оба они привели к одной и той же вычислительной задаче, которая и легла в основу дифференциального исчисления. Эта задача состоит в том, чтобы по данной функции $f(t)$ найти другую функцию $f'(t)$, названную позже производной и представляющую скорость изменения функции $f(t)$ относительно изменения аргумента. В таком общем виде задача была поставлена И. Ньютоном и в сходной форме Г. В. Лейбницем в 70-х и 80-х годах 17 века. Но еще в предыдущие полвека Я. Ферма, Б. Паскаль и другие ученые фактически дали правила для нахождения производных многих функций.

Ньютон и Лейбниц завершили это развитие; они ввели общие понятия производной и дифференциала, а также обозначения, очень упростившие вычисления; они развили аппарат дифференциального исчисления до максимальных пределов и применили дифференциальное исчисление к решению многих задач геометрии и механики. Недостаток логической строгости был восполнен только в 19 веке.

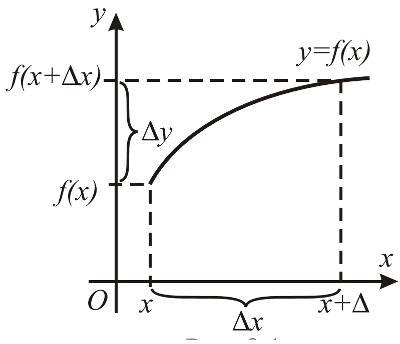
§ 1. Определение производной. Механический и физический смысл производной

Рассмотрим функцию $y = f(x)$, определенную на некотором интервале (a,b). Придадим значению аргумента x произвольное приращение Δx такое, чтобы точка $x+\Delta x$ также принадлежала интервалу (a,b). Значению аргумента $x+\Delta x$ соответствует значение функции $f(x+\Delta x)$. Тогда приращение функции $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$.

***Опр.* 1.** *Производной функции* $y = f(x)$ *в точке* $x \in (a,b)$ называется предел отношения приращения функции Δy в этой точке к соответствующему приращению аргумента Δx при $\Delta x \to 0$, если предел существует, и обозначается y' (или $f'(x)$, или $\dfrac{dy}{dx}$).

Т. о., $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ или $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$.

Производная является функцией от x $(f'(x) = \varphi(x))$, если в каждой точке x некоторого промежутка функция $f(x)$ имеет производную. Частное значение производной при $x = a$ обозначают $f'(a)$ или $y'\big|_{x=a}$. Операцию нахождения производной называют *дифференцированием* функции, а функцию называют *дифференцируемой* в точке.



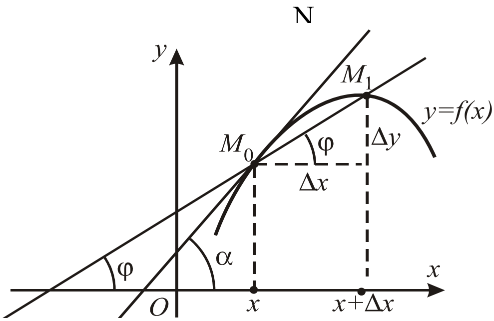
Если функция дифференцируема в каждой точке некоторого интервала (отрезка), то говорят, что она дифференцируема на этом интервале (отрезке).

Понятие производной и соответствующий математический аппарат широко используются в различных прикладных задачах.

Пример 1. Известно, что средняя скорость движения тела определяется выражением $v = \dfrac{S}{t}$ ($S = S(t)$ – путь, пройденный телом, t – время движения). Очевидно, что *мгновенную* скорость можно найти, как

$v = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta S}{\Delta t} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{S(t+\Delta t) - S(t)}{\Delta t} = S'(t)$ – предел определяет скорость в момент времени t. В этом состоит *механический смысл производной.* ▶

Пример 2. Возьмем на графике непрерывной функции $y = f(x)$ произвольные точки $M_0(x, y)$ и $M_1(x+\Delta x, y+\Delta y)$ и



проведем секущую M_0M_1. Угол наклона φ секущей к оси OX определяется выражением $\mathrm{tg}\varphi = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$. Если точка M_1 приближается к точке M_0, двигаясь по графику функции $y = f(x)$ (при этом $\Delta x \to 0$), то секущая M_0M_1, поворачиваясь вокруг точки M_0, стремится к некоторому предельному положению M_0N, которое называют *касательной* к графику данной функции $y = f(x)$ в точке M_0, если предельное положение существует. Поэтому угловой коэффициент касательной равен

$$k = \mathrm{tg}\alpha = \lim_{\Delta x \to 0} \mathrm{tg}\varphi = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

(в силу непрерывности функции $y = f(x)$), если предел существует и конечен. ▶

Т.о., мы пришли к выводу:

Значение производной $f'(x)$ *при данном значении аргумента* x *равняется тангенсу угла наклона касательной к графику функции* $y = f(x)$ *в соответствующей точке* $M(x, y)$. В этом заключается *геометрический смысл производной.*

Пользуясь уравнением прямой, проходящей через заданную точку в заданном направлении $\left(y - y_0 = k\left(x - x_0\right)\right)$, можно записать уравнение касательной к кривой $y = f(x)$ в точке $\left(x_0, y_0\right)$ в виде

$$y - y_0 = f'(x_0) \cdot (x - x_0) .$$

Прямая, перпендикулярная касательной в точке касания, называется *нормалью к кривой*.

Так как нормаль перпендикулярна касательной, то ее угловой коэффициент определяется из равенства

$$k_{\text{êàñ}} \cdot k_{\text{íîðì}} = -1 .$$

Тогда уравнение нормали имеет вид

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'\left(x_0\right)} \cdot \left(x - x_0\right), \text{ если } f'\left(x_0\right) \neq 0 .$$

Вообще говоря, если функция $y = f(x)$ описывает какой-либо физический процесс, то производная этой функции характеризует быстроту протекания этого процесса. В этом состоит *физический смысл производной.*

Например, если $q = q(t)$ – закон, определяющий зависимость количества электричества, протекающего через поперечное сечение проводника, от времени t, то производная $I = \dfrac{dq}{dt}$ определяет силу тока в момент времени t; если $X = f(x)$ – закон, определяющий количество вещества, образовавшегося при химической реакции за промежуток времени t, тогда $v = \dfrac{dX}{dt}$ – скорость химической реакции в данный момент времени t.

Замечание 1. Если $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta f}{\Delta x}=\pm\infty$, то говорят, что функция имеет бесконечную производную знака «+» или «–».

Пример 3. Исходя из определения производной, найти производную функции $y=\sqrt{x}$.

◀ Зададим приращение Δx, такое, что $x+\Delta x\geq 0$.

Тогда

$$\Delta y=\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}\ .$$

Поэтому

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}}{\Delta x}.$$

Переходим в последнем равенстве к пределу при $\Delta x\to 0$:

$$y'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}}{\Delta x}=\left|\frac{0}{0}\right|=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta x(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x})}=\frac{1}{2\sqrt{x}},\text{ т. е. } (\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}}.\blacktriangleright$$

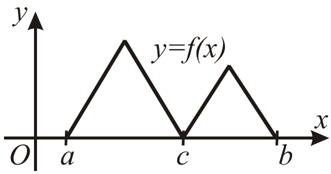
***Опр.* 2.** $f'_{пр}(x)=\lim\limits_{\Delta x\to +0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ – *правосторонняя производная* или $f'(x_0+0)$,

$f'_{лев}(x)=\lim\limits_{\Delta x\to -0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ – *левосторонняя производная* или $f'(x_0-0)$.

Замечание 2. Функция $f(x)$ имеет производную в точке $x=x_0$, т. и т. т., когда существуют левые и правые производные и они равны между собой.

§ 2. Связь между дифференцируемостью и непрерывностью функции. Правила дифференцирования суммы, произведения и частного

***Теорема* 1.** *Если функция $y=f(x)$ дифференцируема в некоторой точке, то она в этой точке непрерывна.*



Очевидно, в точках разрыва функция не может иметь производной. Это не значит, однако, что если функция непрерывна в точке x_0, то она дифференцируема в ней. Рассмотрим функцию, график которой представлен на рисунке. Функция непрерывна во всех точках отрезка $[a,b]$. Однако, в точке c касательной не существует, то есть в этой точке первая производная не существует (претерпевает разрыв) и функция непрерывна, но не дифференцируема.

Рассмотрим функцию $y=|x|$, являющуюся непрерывной при $x \in (-\infty,+\infty)$, но $f'(-0)=-1$, $f'(+0)=1$, то есть в точке $x=0$ рассматриваемая функция непрерывна, но не дифференцируема.

Теорема 2. *Если функции $u(x)$ и $v(x)$ дифференцируемы в точке x, то сумма, произведение и частное этих функций (если $v(x)\neq 0$) также дифференцируемы в этой точке и справедливы следующие формулы:*

$$1)\ (u \pm v)' = u' \pm v';$$

$$2)\ (uv)' = u'v + uv';$$

$$3)\ \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2},\ v \neq 0.$$

Следствие. Пусть функция $u=u(x)$ имеет производную в точке x. Тогда функция $c \cdot u(x)$, где $c=const$, также имеет в этой точке производную и $(cu(x))' = c \cdot u'(x)$, то есть постоянная величина выносится за знак производной.

§ 3. Производная сложной и обратной функции

Теорема 1. *Если функция $u=\varphi(x)$ имеет производную в точке x, а функция $y=f(u)$ имеет производную в соответ-*

ствующей точке $u=\varphi(x)$*, то сложная функция* $y=f(\varphi(x))$ *имеет производную в точке* x*, и имеет место формула:*

$$y'(x)=y'(u)\cdot u'(x) \text{ или}$$

$$y'_x=y'_u\cdot u'_x \text{ или}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}. \qquad (1)$$

Замечание. Если $y=F\big(f(\varphi(x))\big)$, то $y'_x=y'_u\cdot u'_v\cdot v'_x$, где $v=\varphi(x)$, $u=f(v)$, $y=F(u)$ – дифференцируемые функции своих аргументов.

Пример 1. Вычислить производную сложной функции $y=\sin(3x-5)$.

◄ Введем обозначения $y=\sin(u)$, $u=3x-5$.

Воспользуемся формулой (1) $y'_x=y'_u\cdot u'_x$:

$$y'_u=\cos u=\cos(3x-5),\ u'_x=3 \text{, тогда}$$

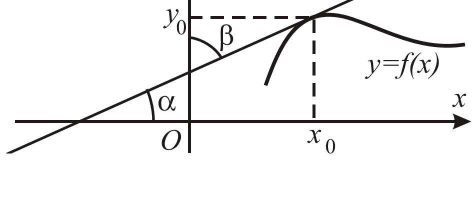
$$(\sin(3x-5))'=3\cos(3x-5).►$$

Теорема 2. *Пусть функция* $y=f(x)$ *непрерывна и строго монотонна в некоторой окрестности точки* $x=x_0$*, и пусть в этой точке существует и не равна нулю производная этой функции (*$f'(x_0)\neq 0$*). Тогда обратная к* $f(x)$ *функция* $x=f^{-1}(y)$ *имеет производную в точке* $y_0=f(x_0)$*, причем:*

$$\left(f^{-1}(y_0)\right)'=\frac{1}{f'(x_0)} \text{ или } \frac{df^{-1}(y_0)}{dy}=\frac{1}{\dfrac{df(x_0)}{dx}}.$$

Геометрический смысл производной обратной функции

Рассмотрим в окрестности точки x_0 график функции $y=f(x)$. Известно, что



$$f'(x_0)=\operatorname{tg}\alpha .$$

Тогда, если

$x=f^{-1}(y)$ или $x=\varphi(y)$, то $\varphi'(y_0)=\operatorname{tg}\beta$ – угол наклона касательной к оси OY (поскольку $\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{2}$, то

$$\varphi'(y_0)=\operatorname{tg}\beta=\frac{1}{\operatorname{ctg}\beta}=\frac{1}{\operatorname{ctg}(\frac{\pi}{2}-\alpha)}=\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}=\frac{1}{f'(x_0)}).$$

Пример 2. Найти производную для функции $y=\operatorname{arctg}x$.

◀ Функция $y=\operatorname{arctg}x$ является обратной к функции $x=\operatorname{tg}y$ на интервале $-\dfrac{\pi}{2}<y<\dfrac{\pi}{2}$. Поэтому по правилу дифференцирования обратной функции, получаем, что

$$(\operatorname{arctg}x)'=\frac{1}{(\operatorname{tg}y)'}=\frac{1}{\frac{1}{\cos^2 y}}=\cos^2 y=\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 y}=\frac{1}{1+x^2}. ▶$$

§ 4. Производная степенно-показательной функции

Найдем производную степенно-показательной функции $y=u(x)^{v(x)}$, основание и показатель степени которой являются функциями от x, где $u(x)$ и $v(x)$ – дифференцируемые функции. Прологарифмируем эту функцию и возьмем производную от обеих частей, учитывая, что y является функцией от x:

$$(\ln y)'=\left(v(x)\cdot\ln u(x)\right)' \Leftrightarrow y'\cdot\frac{1}{y}=$$

$$=v'(x)\cdot\ln u(x)+v(x)\cdot u'(x)\cdot\frac{1}{u(x)}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y'=y\cdot(v'(x)\cdot\ln u(x)+v(x)\cdot u'(x)\cdot\frac{1}{u(x)})\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y' = u(x)^{v(x)} \cdot (v'(x) \cdot \ln u(x) + v(x) \cdot \frac{u'(x)}{u(x)}) =$$

$$= u(x)^{v(x)} \cdot \ln u(x) \cdot v'(x) + v(x) \cdot u(x)^{v(x)-1} \cdot u'(x).$$

Данный прием нахождения производной называется *логарифмическим дифференцированием*.

Пример. Найти производную функции $y = x^x$.

◀ $\ln y = x \cdot \ln x \Leftrightarrow (\ln y)' = (x \cdot \ln x)' \Leftrightarrow y' \cdot \frac{1}{y} = \ln x +$

$+ x \cdot \frac{1}{x} \Leftrightarrow y' = y \cdot (\ln x + 1)$. Окончательно $y' = x^x \cdot (\ln x + 1)$.▶

§ 5. Производные основных элементарных функций

Формулы дифференцирования основных элементарных функций, приведенных в табл. 1, необходимо знать наизусть!

Таблица 1

Формулы дифференцирования основных элементарных функций

1. $(u^\alpha)' = \alpha \cdot u^{\alpha-1} \cdot u'$, $\alpha \in \mathbf{R}$, $\alpha \neq 0$	**2.** $(\mathrm{tg} u)' = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u' = \sec^2 u \cdot u'$
3. $C' = 0, \quad C = const$	**4.** $(\mathrm{ctg}\, u)' = -\frac{1 \cdot u'}{\sin^2 u} = -\mathrm{cosec}^2 u \cdot u'$
5. $\left(\sqrt{u}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'$	**6.** $(\arcsin \mathrm{u})' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$
7. $\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{1}{u^2} \cdot u'$	**8.** $(\arccos\ u)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$

Окончание таблицы 1

9. $(a^u)' = a^u \cdot u' \cdot \ln a$	**10.** $(\mathrm{arctg}\, u)' = \dfrac{1}{1+u^2} \cdot u'$
11. $(e^u)' = e^u \cdot u'$	**12.** $(\mathrm{arcctg}\; u)' = -\dfrac{1}{1+u^2} \cdot u'$
13. $(\ln u)' = \dfrac{1}{u} \cdot u'$	**14.** $(\mathrm{sh}\; u)' = \left(\dfrac{e^u - e^{-u}}{2}\right)' = \mathrm{ch} u \cdot u'$
15. $\left(\log_a u\right)' = \dfrac{1}{u \cdot \ln a} \cdot u'$	**16.** $(\mathrm{ch}\, u)' = \left(\dfrac{e^u + e^{-u}}{2}\right)' = \mathrm{sh} u \cdot u'$
17. $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$	**18.** $(\mathrm{th} u)' = \left(\dfrac{\mathrm{sh} u}{\mathrm{ch} u}\right)' = \dfrac{1}{\mathrm{ch}^2 u} \cdot u'$
19. $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$	**20.** $(\mathrm{cth}\, u)' = \left(\dfrac{\mathrm{ch} u}{\mathrm{sh} u}\right)' = -\dfrac{1}{\mathrm{sh}^2 u} \cdot u'$

Замечание. Здесь $u = u(x)$, то есть рассматривается производная сложной функции. Если положить $u = x$, то 1-я формула примет вид $(x^\alpha)' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$. В частности $x' = 1$. Аналогично преобразуются остальные формулы.

§ 6. Дифференциал функции

6.1. Определение дифференциала

Если функция $y = f(x)$ дифференцируема на некотором отрезке, то производная этой функции $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$ принимает определенные значения. Тогда, по теореме о связи функции, ее предела и бесконечно малой функции, отношение $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ при $\Delta x \to 0$ можно представить в виде $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha$, где $\alpha \to 0$ при $\Delta x \to 0$ или

$$\Delta y = f'(x) \cdot \Delta x + \alpha \cdot \Delta x . \qquad (2)$$

В общем случае, полагая $f'(x) \neq 0$, получим, что произведение $f'(x) \cdot \Delta x$ есть величина бесконечно малая одного порядка с Δx, а $\alpha \cdot \Delta x$ – бесконечно малая высшего порядка.

В формуле (2) $f'(x) \cdot \Delta x$ – главная часть приращения, линейная относительно Δx, называется *дифференциалом* функции $f(x)$ в точке x и обозначается $df(x)$ или dy, то есть

$$dy = f'(x) \cdot \Delta x . \tag{3}$$

Найдем dy для функции $y = x$:

$$dy = dx = x' \cdot \Delta x = 1 \cdot \Delta x = \Delta x ,$$

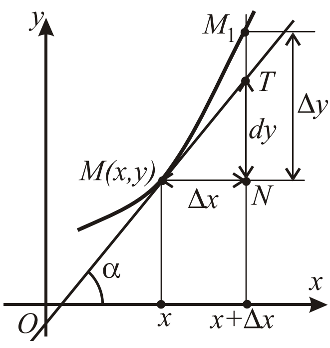
то есть дифференциал независимой переменной x равен приращению этой переменной: $dx = \Delta x$.

Поэтому формулу (3) можно записать так:

$$dy = f'(x) \cdot dx . \tag{4}$$

Если разделить (4) на dx, то производная $f'(x) = \dfrac{dy}{dx}$ есть отношение дифференциала функции к дифференциалу аргумента.

6.2. Геометрический смысл дифференциала



Возьмем на кривой $y = f(x)$ произвольную точку $M(x, y)$ и проведем касательную. Приращению Δx аргумента соответствуют приращение Δy функции и точка $M_1(x + \Delta x, y + \Delta y)$. Из треугольника MNT находим $NT = MN \cdot tg\alpha = f'(x) \cdot \Delta x = dy$ (по определению дифференциала), то есть геометрически дифференциал представляет собой приращение ординаты касательной к графику функции в точке $M(x, y)$.

6.3. Дифференциал сложной функции. Инвариантность формы первого дифференциала

По определению дифференциала $dy = f'(x) \cdot dx$. Если $y = f(x)$, $x = \varphi(t)$ – дифференцируемые функции, то есть $y = f(\varphi(t))$, то

$$dy = d\big(f(\varphi(t))\big) = \big(f(\varphi(t))\big)' dt =$$
$$= f'_x \cdot \varphi'_t \cdot dt = \left|\varphi'_t \cdot dt = dx\right| = f'_x dx. \qquad (5)$$

Т. о., формула (4) справедлива для сложной функции, когда x – зависимая переменная. Следует заметить, что $dx = \varphi'(t)dt$ – функция в (5), а в формуле (4) dx – число.

Данное свойство называется *инвариантностью (неизменностью) формы первого дифференциала.*

Свойства дифференциала:

1. $d(u \pm v) = du \pm dv$;

2. $d(u \cdot v) = v \cdot du + u \cdot dv$;

3. $d\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{v \cdot du - u \cdot dv}{v^2}$, $v \neq 0$.

Доказываются эти формулы с помощью определения дифференциала и основных правил дифференцирования. Например,

$$d(u \cdot v) = (u \cdot v)' dx = (u' \cdot v + u \cdot v')dx =$$
$$= v(u'dx) + u(v'dx) = v \cdot du + u \cdot dv.$$

Замечание. Исходя из определения дифференциала и его свойств, нетрудно найти дифференциалы элементарных функций. Например, для функции $y = \sin x$ дифференциал равен $d(\sin x) = \cos x \cdot dx$.

6.4. Использование дифференциала для приближенных вычислений

То, что в выражении $\Delta y = dy + \alpha \cdot \Delta x$ второе слагаемое является бесконечно малой более высокого порядка чем Δx, позволяет в приближенных вычислениях использовать следующий алгоритм:

$$\Delta y \approx f'(x)\cdot\Delta x \Leftrightarrow f(x+\Delta x)-f(x)\approx f'(x)\cdot\Delta x \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow f(x+\Delta x)\approx f(x)+f'(x)\cdot\Delta x, \qquad (6)$$

причем вычисления тем точнее, чем меньше величина Δx .

Пример 1. Вычислим приближенное значение $\sin 46^\circ$.

◀ $46^\circ = 45^\circ + 1^\circ = \frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{180}$. Из (6) очевидно, что

$$\sin(x+\Delta x)\approx \sin x + \Delta x\cdot\cos x \text{ и}$$

$$\sin 46^\circ = \sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{180}\right)\approx \sin\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{180}\cdot\cos\frac{\pi}{4}\approx 0{,}7194\,.$$ ▶

Пример 2. Вычислить $(2{,}1)^3$.

◀ Пусть $y = x^3$, где $x = 2{,}1$, $x = x_0 + \Delta x = 2 + 0{,}1$. $dy = 3{x_0}^2 dx = 3\cdot 2^2\cdot 0{,}1 = 1{,}2$. Итак, $(2{,}1)^3 \approx 2^3 + 1{,}2 = 9{,}2$. ▶

§ 7. Производные и дифференциалы высших порядков

Производная $y' = f'(x)$ функции $y = f(x)$ есть также функция от x и называется производной первого порядка.

***Опр.* 1.** *Второй производной* (или *производной второго порядка*) функции $y = f(x)$ называется производная от ее первой производной, если она существует.

Обозначения:

$$y'' = \left(f'(x)\right)', \quad f''(x), \quad \frac{d^2y}{dx^2}.$$

Производная 2–го порядка равна ускорению движущейся точки в момент времени *t*.

Действительно, $v = S'(t)$, где $S = f(t)$ – закон прямолинейного движения материальной точки M . Отношение $\frac{\Delta v}{\Delta t}$ выражает среднее ускорение движения точки за время Δt , а $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta t} = a$ называется ускорением точки M в данный момент времени t, то есть $v' = a$. Поэтому, $a = \left(S_t' \right)' = f''(t)$. В этом заключается *механический смысл* производной 2-го порядка.

Аналогично определяются 3-я, 4-я и так далее производные n-го порядка:

$$y^{(n)} = \left(y^{(n-1)} \right)'.$$

***Опр.* 2.** Функция $y = f(x)$, имеющая производные до n-го порядка включительно в некоторой области X, называется *n-раз дифференцируемой* в области X.

Пример 3. Найти $y^{(n)}$ для следующих функций:

а) $y = e^{ax}$; б) $y = \sin x$; в) $y = \ln x$.

◀ а) $y = e^{ax}$, $y' = a \cdot e^{ax}$, $y'' = a^2 \cdot e^{ax}, \ldots, y^n = a^n \cdot e^{ax}$.

б) $y = \sin x$, $y' = \cos x$, $y'' = -\sin x$, $y''' = -\cos x$, $y^{IV} = \sin x, \ldots, y^{(n)} = \sin(x + n \cdot \frac{\pi}{2})$.

в) $y = \ln x$, $y' = \frac{1}{x}$, $y'' = -\frac{1}{x^2}$, $y''' = \frac{1 \cdot 2}{x^3}$, $y^{IV} = -\frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{x^4}, \ldots, y^{(n)} = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{x^n}$. ▶

***Опр.* 3.** *Вторым дифференциалом* от функции $y = f(x)$ (x – независимая переменная) называется дифференциал от первого дифференциала:

$$d^2 y = d(dy).$$

Очевидно, что

$$d(dy) = d(f'(x)dx) = (f'(x)dx)' dx = f''(x)dx^2. \tag{7}$$

И, вообще, дифференциал n-го порядка функции $y = f(x)$, n-раз дифференцируемой в области X, находится по формуле:

$$d^n y = f^{(n)}(x)dx^n, \tag{8}$$

из которой следует, что $f^{(n)}(x) = \dfrac{d^n y}{dx^n}$.

Если x – зависимая переменная: $x=\varphi(t)$ – дифференцируемая функция, то есть $y=f(\varphi(t))$, тогда, поскольку $dy = f'(x)dx$, то второй дифференциал равен

$$\begin{aligned} d^2y &= d(dy) = d(f'(x)dx) = d(f'(x)dx) + f'(x)d(dx) = \\ &= f''(x)dx^2 + f'(x)d^2x, \end{aligned} \tag{9}$$

здесь $d^2x = \varphi''(t)dt^2$.

Сравнивая формулы (7) и (9), убеждаемся, что в случае сложной функции формула дифференциала второго порядка изменяется: появляется второе слагаемое $f'(x)d^2x$.

Т.о., свойство инвариантности для дифференциалов высших порядков в случае сложной функции не выполняется.

§ 8. Производная функции, заданной неявно

Если функция задана уравнением $F(x,y)=0$, не разрешенным относительно y, то говорят, что функция задана *неявно* (например, $x-y+2^y-1=0$).

Производная функции, заданной неявно, находится путем дифференцирования уравнения, задающего эту функцию, по x, рассматривая при этом y как функцию x. Затем, полученное уравнение, необходимо разрешить относительно y'.

Пример 1. Найти производную функции y, заданной неявно $\sin(x+y)-e^{x-y}=0$.

◀ Дифференцируя обе части равенства по x и помня, что y есть функция от x, получим:

$$(1+y')\cos(x+y)-(1-y')e^{(x-y)}=0 \Rightarrow y' = \frac{e^{(x-y)}-\cos(x+y)}{e^{(x-y)}+\cos(x+y)}.$$

▶

Нахождение производной второго порядка от функции, заданной неявно, поясним на следующем примере.

Пример 2. Найти y'', если $\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{y^2}{3}=1$.

◀ Дифференцируем уравнение $\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{y^2}{3}-1=0$ по переменной x: $x+\dfrac{2}{3}\cdot y\cdot y'=0$. Отсюда $y'=-\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{x}{y}$. Затем находим

$$y''=-\frac{3}{2}\cdot\frac{1\cdot y-x\cdot y'}{y^2}=-\frac{3}{2}\cdot\frac{y-x\cdot\left(-\frac{3}{2}\cdot\frac{x}{y}\right)}{y^2}=$$

$$=\frac{3}{2}\cdot\frac{y+\frac{3}{2}\cdot\frac{x^2}{y}}{y^2}=\frac{3\cdot\left(2y^2+3x^2\right)}{4y^3}.$$ ▶

Аналогично поступают для нахождения производной третьего, четвертого, …, n-го порядка.

§ 9. Дифференцирование функции, заданной параметрически

Пусть функция $y=f(x)$ задана параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x=\varphi(t), \\ y=\psi(\mathrm{t}), \end{cases} \quad \alpha\le t\le\beta.$$

Если функция $\varphi(t)$ монотонна и непрерывна, то

$$\exists\ t=\varphi^{-1}(x)\Rightarrow\ y=\psi\left(\varphi^{-1}(x)\right)=f(x).$$

Пусть функции $\varphi(t)$, $\psi(\mathrm{t})$ дифференцируемы и $\varphi'(t)\neq 0$. Тогда по теореме о производной обратной функции:

$$y_x'=\psi'(t)\cdot\left(\varphi^{-1}(x)\right)'=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\Rightarrow$$

$$y_x'=\frac{y'(t)}{x'(t)}. \qquad (10)$$

Данная формула позволяет находить производную y'_x от функции, заданной параметрически, не находя явной зависимости y от x.

Пример 1. Вычислить производную функции, заданной параметрически:

$\begin{cases} x = a \cdot \cos t, \\ y = b \cdot \sin t, \end{cases}$ $0 \le t \le 2\pi$ (параметрические уравнения эллипса).

$$◄\ y_x' = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{b\cos t}{-a\sin t} = -\frac{b}{a}\operatorname{ctg} t,\ 0 < t < \pi .►$$

Подчеркнем, что промежуток существования функции и её производной могут быть различными.

Найдем вторую производную от функции, заданной параметрически.

Из определения второй производной и равенства (10) следует, что $y''_{xx} = \left(y'_x\right)'_x = \left(y'_x\right)'_t \cdot t'_x = \frac{\left(y'_x\right)'_t}{x'_t}$, то есть

$$y''_{xx} = \frac{\left(y'_x\right)'_t}{x'_t}. \tag{11}$$

Аналогично получаем $y'''_{xxx} = \frac{\left(y''_{xx}\right)'_t}{x'_t}$, $y^{\mathrm{IV}}_{xxxx} = \frac{\left(y'''_{xxx}\right)'_t}{x'_t}$,….

Пример 2. Найти вторую производную функции

$$\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b\sin t. \end{cases}$$

◄ Из примера 1 данного параграфа $y_x' = -\frac{b}{a}\operatorname{ctg} t$. Тогда по формуле (11)

$$y''_{xx}=\frac{\left(-\dfrac{b}{a}\operatorname{ctg}t\right)'_t}{(a\cos t)'_t}=-\frac{b}{a^2}\cdot\frac{\dfrac{1}{\sin^2 t}}{\sin t}=-\frac{b}{a^2}\cdot\frac{1}{\sin^3 t}\,.\blacktriangleright$$

§ 10. Основные теоремы дифференциального исчисления

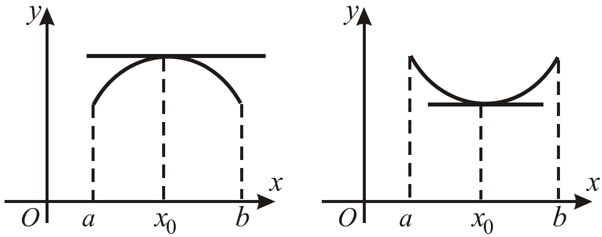
Сформулируем ряд основных теорем дифференциального исчисления, имеющих большое теоретическое и практическое приложение.

***Теорема* 1** (Ферма). *Пусть функция* $y=f(x)$ *определена и непрерывна на интервале* (a,b) *и в некоторой точке* x_0 *этого интервала имеет наибольшее или наименьшее значение. Тогда, если в точке* x_0 *существует производная, то она равна нулю, то есть*

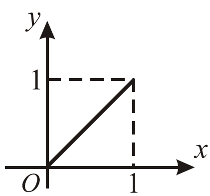
$$f'(x_0)=0\,.$$

Геометрический смысл теоремы Ферма

Касательная к графику функции $y=f(x)$ в точке с абсциссой $x=x_0$ параллельна оси OX.



Замечание 1. Если функцию $f(x)$ рассматривать на отрезке $[a,b]$, то теорема не верна.



Проиллюстрируем это на следующем примере.

Пример 1. Пусть задана функция $f(x)=x$, $x\in[0,1]$. В точке $x=0$ функция принимает наименьшее значение, в точке $x=1$ – наибольшее значение.

$f'(x) = 1 \neq 0 \quad \forall \ x \in [0;1]$.►

***Теорема* 2** (Ролля). *Пусть функция* $y = f(x)$ *удовлетворяет следующим условиям:*

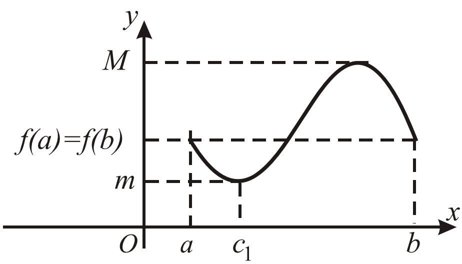
1) она определена и непрерывна на отрезке $[a, b]$;

2) дифференцируема в интервале (a, b);

3) $f(a) = f(b)$.

Тогда $\exists \ c \in (a, b): \ f'(c) = 0$.

Геометрический смысл теоремы Ролля



На графике функции $y = f(x)$ найдется точка $((\tilde{n}_1, m), (\tilde{n}_2, M))$, в которой касательная к графику параллельна оси OX внутри интервала (a, b).

***Теорема* 3** (Коши). *Пусть функции* $f(x)$ *и* $g(x)$ *непрерывны на отрезке* $[a, b]$, *дифференцируемы на интервале* (a, b), *причем* $g'(x) \neq 0$ *для* $\forall x \in (a, b)$. *Тогда*

$$\exists \ c \in (a, b): \ \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}. \qquad (12)$$

Замечание 2. Формула (12) верна и для $b < a$.

***Теорема* 4** (Лагранжа). *Пусть функция* $y = f(x)$*:*

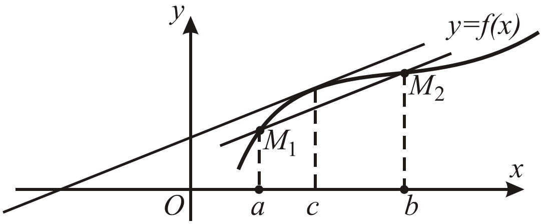
1) определена и непрерывна на отрезке $[a, b]$;

2) дифференцируема на интервале (a, b).

Тогда $\exists \ c \in (a, b): \ \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$.

Последнюю формулу называют *формулой Лагранжа* или *формулой конечных приращений*: приращение дифференцируемой функции на отрезке $[a, b]$ равно приращению аргумента, умноженному на значение производной функции в некоторой внутренней точке этого отрезка.

Геометрический смысл теоремы Лагранжа



1) $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = \operatorname{tg}\alpha$ – угловой коэффициент секущей M_1M_2.

2) $\exists\ c : \operatorname{tg}\alpha = f'(c)$ (касательная параллельна секущей).

Таких точек может быть несколько, по крайней мере, одна всегда существует.

***Следствие* 1.** Если производная функции равна нулю на некотором промежутке, то функция постоянна на этом промежутке.

***Следствие* 2.** Если две функции имеют равные производные на некотором промежутке, то они отличаются друг от друга на постоянное слагаемое.

Замечание 3. Так как $a < c < b$, то $c = a + \theta(b-a)$, где $0 < \theta < 1$, то есть

$$f(b) - f(a) = f'(a + \theta(b-a)) \cdot (b-a).$$

Замечание 4. Если $a = x,\ b = x + \Delta x$, то

$$f(x+\Delta x) - f(x) = f'(x + \theta\cdot\Delta x)\cdot\Delta x, \qquad (13)$$

где $f(x+\Delta x) - f(x) = \Delta f,\ 0 < \theta < 1$.

Формула (13) описывает приращение функции через произвольное приращение аргумента.

Замечание 5. Формулу Коши (12) еще называют *обобщенной формулой конечных приращений.*

§ 11. Правила Лопиталя раскрытия неопределенностей

Теорема 5 (первое правило Лопиталя раскрытия неопределенностей вида $\left|\frac{0}{0}\right|$). *Пусть функции* $f(x)$ *и* $g(x)$ *определены и дифференцируемы в некоторой окрестности точки* $x = a$, *за исключением, может быть, самой точки* a. *Пусть* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ *è* $g'(x) \neq 0$ *в окрестности точки* a. *Тогда, если существует* $\lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ *(конечный или бесконечный), то и существует* $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$, *причем справедлива формула:*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Данная теорема показывает, что предел отношения двух бесконечно малых функций равен пределу отношения их производных, если последний существует.

Замечание 1. При необходимости правило Лопиталя применяется несколько раз.

Замечание 2. Теорема остается верной при $x \to +\infty$, $x \to -\infty$, $x \to \infty$.

Пример 1. С помощью правила Лопиталя вычислить предел функции: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{3\sin 2x - 6x}{x^3}$.

◄ Непосредственная подстановка $x = 0$ приводит к неопределенности вида $\left|\frac{0}{0}\right|$, сл–но, можно применить правило Лопиталя, то есть заменить предел отношения функций пределом отношения их производных:

$$\lim_{x\to 0} \frac{3\sin 2x - 6x}{x^3} = \left|\frac{0}{0}\right| = \lim_{x\to 0} \frac{6\cos 2x - 6}{3x^2} = \left|\frac{0}{0}\right| =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{-12\sin 2x}{6x} = \left|\frac{0}{0}\right| = \lim_{x\to 0}\frac{-24\cos 2x}{6} = -4 .\blacktriangleright$$

Теорема 2 (второе правило Лопиталя раскрытия неопределенности вида $\left|\frac{\infty}{\infty}\right|$). *Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ определены и дифференцируемы в некоторой окрестности точки $x = a$, за исключением, может быть, самой точки a. Пусть* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty$ и $g'(x) \neq 0$ *в окрестности точки a и существует предел $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ (конечный или бесконечный), тогда существует предел*

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} .$$

Пример 2. С помощью правила Лопиталя вычислить предел функции: $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{\lg x}{\ln x}$.

◀ При $x \to +\infty$ получим неопределенность вида $\left|\frac{\infty}{\infty}\right|$. Применим второе правило Лопиталя:

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{\lg x}{\ln x} = \left|\frac{\infty}{\infty}\right| = \lim_{x\to +\infty}\frac{(\lg x)'}{(\ln x)'} = \lim_{x\to +\infty}\frac{\frac{1}{x\ln 10}}{\frac{1}{x}} =$$

$$= \frac{1}{\ln 10}\lim_{x\to +\infty}\frac{1}{1} = \frac{1}{\ln 10} . \blacktriangleright$$

Пример 3. Найти предел $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{x^n}{e^x}$.

$$\blacktriangleleft \lim_{x\to +\infty}\frac{x^n}{e^x} = \left|\frac{\infty}{\infty}\right| = \lim_{x\to +\infty}\frac{nx^{n-1}}{e^x} = \left|\frac{\infty}{\infty}\right| =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{n(n-1)x^{n-2}}{e^x} = \left|\frac{\infty}{\infty}\right| = \ldots = \lim_{x\to+\infty} \frac{n!}{e^x} = 0 .$$ ►

Пример 4. При вычислении предела $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x+\sin x}{x}$ правило Лопиталя применить нельзя, поскольку предел $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1+\cos x}{1}$ не существует.►

Раскрытие неопределенностей других видов

Часто встречаются неопределенности следующих видов:

$$|0\cdot\infty|, |\infty-\infty|, \left|1^{\infty}\right|, \left|0^{0}\right|, \left|\infty^{0}\right| ,$$

все они сводятся к изученным выше двум неопределенностям путем алгебраических преобразований.

Рассмотрим некоторые из них.

1) $y = f(x)^{g(x)}$, где $\begin{cases} \lim\limits_{x\to a} f(x) = 1(0 \text{ или } \infty), \\ \lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty(0), \end{cases}$ то есть неопределенности вида $\left|1^{\infty}\right|, \left|0^{0}\right|, \left|\infty^{0}\right|$.

Можно записать:

$$y = f(x)^{g(x)} \Leftrightarrow \ln y = \ln f(x)^{g(x)} \Leftrightarrow \ln y = g(x)\cdot \ln f(x) ,$$

то есть необходимо рассматривать предел:

$$\ln y = \lim_{x\to a} g(x)\cdot \ln f(x) .$$

2) $y = \varphi(x)\psi(x)$, где $\begin{cases} \lim\limits_{x\to a} \varphi(x) = 0, \\ \lim\limits_{x\to a} \psi(x) = \infty, \end{cases}$ то есть неопределённость вида $|0\cdot\infty| \Rightarrow$

$$y = \varphi(x)\psi(x) = \frac{\varphi(x)}{\dfrac{1}{\psi(x)}} = \left|\frac{0}{0}\right|.$$

3) $y=f(x)-\psi(x)$, где $\begin{cases}\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty,\\ \lim\limits_{x\to a}\psi(x)=\infty,\end{cases}$ то есть неопределённость вида

$|\infty-\infty| \Rightarrow$

$$y=f(x)-\psi(x)=\left[\frac{1}{f(x)}-\frac{1}{\psi(x)}\right]:\ \frac{-1}{f(x)\cdot\psi(x)}=\left|\frac{0}{0}\right|.$$

Пример 5. Найти предел $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)$.

◀ $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)=|\infty-\infty|=\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln x-(x-1)}{(x-1)\cdot\ln x}=$

[неопределенность вида $\left|\frac{0}{0}\right|$, применяем правило Лопиталя] $=$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x}-1}{\ln x+1-\frac{1}{x}}=[\left|\frac{0}{0}\right|;\text{ правило Лопиталя}]=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{-\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{x+1}=-\frac{1}{2}\ .▶$$

Пример 6. Найти предел $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\pi-2x)^{\cos x}$.

◀ $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\pi-2x)^{\cos x}=\left|0^0\right|$. Обозначим

$$y=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\pi-2x)^{\cos x}.$$

Прологарифмируем обе части равенства

$\ln y=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\ln(\pi-2x)\cos x=$ [неопределенность вида $|\infty\cdot 0|$] $=$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\ln(\pi-2x)}{\frac{1}{\cos x}} = [\left|\frac{0}{0}\right|; \text{правило Лопиталя}] =$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{-2}{\pi-2x}}{\frac{\sin x}{\cos^2 x}} = -2\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin x}\cdot \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x}{\pi-2x} = -2\cdot \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2x}{-2(2x-\pi)} =$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2x}{2x-\pi} = [\left|\frac{0}{0}\right|; \text{правило Лопиталя}] =$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{-2\sin 2x}{2} = 0.$$ Получили

$\ln y = 0$, сл–но $y = e^0 = 1$, то есть $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\pi-2x)^{\cos x} = 1$. ►

§ 12. Формула Тейлора. Разложение экспоненты, синуса, косинуса, логарифма, арктангенса и степенного бинома по формуле Тейлора

Нередко вычисление значений функции $y = f(x)$ при конкретных значениях x оказывается затруднительным. Например, как найти значения функций $y = \sin x$ или $y = \ln(1+x)$ при значениях x из области определения этих функций? Один из эффективных приемов в этом случае – замена функции степенным многочленом (полиномом) вида:

$$P_n(x) = C_0 + C_1\cdot(x-a) + C_2\cdot(x-a)^2 + \ldots + C_n\cdot(x-a)^n, \quad (14)$$

значение которого при $x = a$ равно значению функции $f(a)$.

Если функция $y = f(x)$ дифференцируема $(n+1)$ раз в некоторой окрестности точки a, то коэффициенты C_i можно определить так: потребуем, чтобы в точке a выполнялись условия $f^{(i)}(a) = P_n^{(i)}(a)$, то есть, чтобы в точке a были равны значения соответствующих производных. Получим:

$$f(a) = C_0,\ f'(a) = C_1,\ f''(a) = 2\cdot C_2 = C_2\cdot 2!, \ldots,$$
$$f^{(n)}(a) = C_n \cdot n!,$$

где $n! = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k)\cdot\ldots\cdot 3\cdot 2\cdot 1$ (символ $n!$ называется n – факториал).

Отсюда легко находятся все коэффициенты C_i:

$$C_i = \frac{f^{(i)}(a)}{i!},\ i = \overline{0,n}.$$

Подставляя найденные значения C_i в равенство (14) имеем многочлен

$$P_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n,$$

называемый *многочленом Тейлора функции* $y = f(x)$.

Очевидно, что совпадая при $x = a$, в других точках значения $f(x)$ и $P_n(x)$ отличаются. Обозначив это отличие через $R_{n+1}(x) = f(x) - P_n(x)$ получим:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots +$$
$$+ \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_{n+1}(x). \qquad (15)$$

Величину $R_{n+1}(x)$ называют *остаточным членом*. Для значений x, при которых остаточный член мал, многочлен $P_n(x)$ дает приближенное значение $f(x)$. Оценить величину $R_{n+1}(x)$ при различных x позволяет выражение

$$R_{n+1}(x) = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi), \text{ где } \xi \in (a, x), \qquad (16)$$

которое называется *формой Лагранжа* остаточного члена.

Величину ξ можно представить в виде: $\xi = a + \theta\cdot(x-a)$, где $0 < \theta < 1$ и тогда (16) примет вид

$$R_{n+1}(x) = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}\left[a + \theta(x-a)\right]$$

(очевидно, что, если x расположено в достаточно малой окрестности a, то величина $R_{n+1}(x)$ при достаточно большом n может быть достаточно мала, чтобы обеспечить требуемую точность).

Кроме того, $R_{n+1}(x)$ может быть представлен в другой форме:

а) $R_{n+1}(x) = \dfrac{f^{(n+1)}\left(a+\theta(x-a)\right)}{n!}(1-\theta)^n (x-a)^{n+1}, 0<\theta<1$ – *форма Коши*;

б) $R_{n+1}(x) = o\left((x-a)^n\right)$ – *форма Пеано*, где $o\left((x-a)^n\right)$ – бесконечно малая более высокого порядка по сравнению с $(x-a)^n$.

Выражение (15) называется *формулой Тейлора разложения функции* $y = f(x)$. Частный случай её при $a = 0$:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots +$$

$$+ \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_{n+1}(x),$$

где $R_{n+1}(x) = \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)\,!} f^{(n+1)}(\theta \cdot x)$, $0 < \theta < 1$ называется *формулой Маклорена*.

Используя правила дифференцирования, несложно получить разложения многих функций по формуле Маклорена. Приведем некоторые из них с остаточным членом в форме Пеано (Лагранжа):

если $f(x) = e^x$, то

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + o\left(x^n\right),$$

$$\left(R_{n+1}(x)=\frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}\cdot x^{n+1}\right), \qquad (17)$$

если $f(x)=\sin x$, то

$$\sin x=\frac{x}{1!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots+\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}+o\left(x^{2n}\right),$$

$$\left(R_{2n+2}(x)=\frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}\cdot\sin(\theta x+(n+1)\pi)\right)$$

если $f(x)=\cos x$, то

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots+\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}+o\left(x^{2n+1}\right),$$

$$\left(R_{2n+1}(x)=\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\cdot\cos\left(\theta x+\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi\right)\right)$$

если $f(x)=\ln(1+x)$, то

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+o\left(x^n\right),$$

$$\left(R_{n+1}(x)=(-1)^n\frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}}\right), \qquad (18)$$

если $f(x)=\operatorname{arctg} x$, то

$$\operatorname{arctg} x=\frac{x}{1}-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\ldots+\frac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{2n-1}+o\left(x^n\right),$$

$$R_{n+1}(x)=???$$

если $f(x)=(1+x)^m$, то

$$(1+x)^m=1+\frac{m}{1!}x+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\ldots+$$

$$+\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n+o\left(x^n\right),$$

$$\left(R_{n+1}(x) = \frac{m(m-1)\cdot\ldots\cdot(m-n)}{(n+1)!} x^{n+1} (1+\theta x)^{m-n-1} \right)$$

(всюду $0<\theta<1$).

Пример 1. Найти число e с точностью до 0,001.

◀ В формуле (17) положим $x=1$:

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \frac{e^{\theta}}{(n+1)!} .$$

Для нахождения e с точностью до 0,001 определим n из условия, что $\frac{e^{\theta}}{(n+1)!} < 0{,}001$. Так как $0<\theta<1$, то $e^{\theta}<3$. Поэтому при $n=6$ имеем $\frac{e^{\theta}}{7!} < \frac{3}{5040} = 0{,}0006 < 0{,}001$.

Тогда

$$e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} \approx 2 + 0{,}5000 + 0{,}1667 + 0{,}0417 +$$

$$+ 0{,}0083 + 0{,}0014 = 2{,}7181 \approx 2{,}718 .$$ ▶

Пример 2. Разложить функцию $f(x) = \ln(3x+4)$ по формуле Тейлора в окрестности точки $x=-1$.

◀ Представим данную функцию в виде $f(x) = \ln(3x+4) = \ln 4 + \ln\left(\frac{3x}{4} + 1\right)$.

Далее воспользуемся формулой (18). Будем иметь

$$\ln(3x+4) = \ln 4 + \ln\left(1 + \frac{3x}{4}\right) = \ln 4 + \frac{3}{4}x - \frac{3^2}{4^2 \cdot 3}x^2 + \ldots. +$$

$$+ (-1)^{n-1} \frac{3^n}{4^n n} x^n + o(x^n).$$ ▶

Формулу Тейлора можно применить для раскрытия неопределенностей вида $\left|\frac{0}{0}\right|$ и $\left|\frac{\infty}{\infty}\right|$. Функции в числителе и знаменателе дроби разлагаются по формуле Тейлора и, после некоторых преобразований, предел вычисляется.

Пример 3. Вычислить предел, используя разложение по формуле Тейлора $\lim\limits_{x\to 0}\frac{6\ln(1+x)-6x+3x^2}{2e^{-x}-(x-1)^2-1}$.

◄ Так как $\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o\left(x^3\right)$ и

$$e^{-x}=1-\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+o\left(x^3\right),$$

то получим $\lim\limits_{x\to 0}\frac{6\ln(1+x)-6x+3x^2}{2e^{-x}-(x-1)^2-1}=$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{6\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o\left(x^3\right)\right)-6x+3x^2}{2\left(1-\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+o\left(x^3\right)\right)+2x-2-x^2}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2x^3+o\left(x^3\right)}{-\frac{x^3}{3}+o\left(x^3\right)}=-6\,.\text{►}$$

§ 13. Полное исследование функции

13.1. Критерий монотонности функции

Производная находит многочисленные применения к исследованию функций и построению графиков функций.

Рассмотрим возможные приложения производной к решению вопроса о монотонности функции на некотором промежутке и нахождению наибольшего или наименьшего значения функции на отрезке.

***Теорема* 1** (необходимые и достаточные условия монотонности функции). *Если функция* $y = f(x)$ *определена и непрерывна в промежутке* X *и внутри него имеет конечную производную, то необходимым и достаточным условием неубывания (невозрастания) функции* $y = f(x)$ *в* X *является* $f'(x) \geq 0$ $\left(f'(x) \leq 0\right)$.

13.2. Отыскание локального экстремума

***Опр.* 1.** Точка x_0 называется *точкой строгого локального максимума* (*минимума*) функции $f(x)$, если существует такая $\delta-$окрестность точки x_0, такая, что

$$\forall x \in U\left(x_0, \delta\right), x \neq x_0 \Rightarrow \Delta f(x_0) < 0 \ \left(\Delta f\left(x_0\right) > 0\right).$$

Точки локального максимума и локального минимума функции $f(x)$ называются точками *локального экстремума*.

***Теорема* 2** (необходимое условие локального экстремума). *Если функция* $f(x)$ *дифференцируема в точке* x_0 *и в ней имеет локальный экстремум, то* $f'(x_0) = 0$.

В точках локального экстремума касательная параллельна оси OX.

***Опр.* 2.** Точки $x_1, x_2, \ldots$, в которых $f'(x) = 0$, называются *стационарными точками*, или *точками возможного экстремума*.

***Опр.* 3.** Точки $x_1, x_2, \ldots$, в которых $f'(x)$ не существует, называются *критическими точками*.

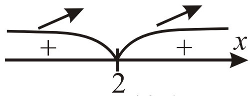
Пример 1. Пусть задана функция $f(x) = x^3$. $f'(x) = 3x^2$, $3x^2 = 0$, $x = 0$ – стационарная точка, но не является точкой локального экстремума. ►

***Теорема* 3** (1-е достаточное условие локального экстремума). *Пусть функция* $f(x)$ *дифференцируема в некоторой* δ *– окрестности стационарной точки* x_0. *Тогда, если* $f'(x) > 0$,

$\left(f'(x) < 0\right)$ *при* $x \in \left(x_0 - \delta, x_0\right)$, *а* $f'(x) < 0$ $\left(f'(x) > 0\right)$ *при* $x \in \left(x_0, x_0 + \delta\right)$, *то в точке* x_0 *функция имеет локальный максимум (локальный минимум).*

Если $f'(x)$ *во всей* δ *-окрестности точки* x_0 *имеет один и тот же знак, то в точке* x_0 *локального экстремума нет.*

Пример 2. Найти точки экстремума функции $f(x) = (x-2)^5$.



◄ $f(x) = (x-2)^5$, $f'(x) = 5(x-2)^4 = 0$. $x_0 = 2$ – стационарная точка, не являющаяся точкой экстремума. Точек экстремума нет. ►

Замечание 1. В точке экстремума производная может не существовать или обращаться в бесконечность (критическая точка!), но обязательно меняет знак в $\delta -$окрестности этой точки. В этом случае экстремум называют *острым* (в противоположность *гладкому* экстремуму, который имеет функция с непрерывной производной). Примером может служить функция $y = |x|$, у которой в точке $x = 0$ производная не существует, но $f'(0-0) < 0$, а $f'(0+0) > 0$.

***Теорема* 4** (2-е достаточное условие экстремума). *Пусть функция* $f(x)$ *в стационарной точке* x_0 *дважды непрерывно дифференцируема. Тогда функция* $f(x)$ *имеет в точке* x_0 *максимум, если* $f''(x_0) < 0$, *и минимум, если* $f''(x_0) > 0$.

Пример 3. Найти точки экстремума функции $f(x) = x^3 - 3x^2 - 4$.

◄ $f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$, $3x(x-2) = 0$, $x_{01} = 0$, $x_{02} = 2$ – стационарные точки. $f''(x) = 6x - 6$, $f''(0) = -6 < 0$, $f''(2) = 6 > 0$. x_{01} – точка максимума, x_{02} – точка минимума.►

13.3. Отыскание наибольших и наименьших значений непрерывной на отрезке функции

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$. Она достигает своего наибольшего и наименьшего значений на этом отрезке (теорема Вейерштрасса), которые могут находиться как в точках экстремума, так и на концах отрезка $[a,b]$.

Практическое решение задачи отыскания наибольшего и наименьшего значений функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$ сводится к следующему:

1) найти на (a,b) стационарные и критические точки;
2) найти значения функции $f(x)$ в этих точках и в точках a и b ($f(a)$ и $f(b)$);
3) выбрать из них наименьшее и наибольшее значения.

Пример 4. Найти наименьшее и набольшее значения функции $y = x^3 - 3x + 5$ на отрезке $[0,3]$.

◄ $y' = 3x^2 - 3$. 1) Найдем стационарные точки: $3x^2 - 3 = 0$, $x_{01} = -1$, $x_{02} = 1$, $1 \in (0,3)$.

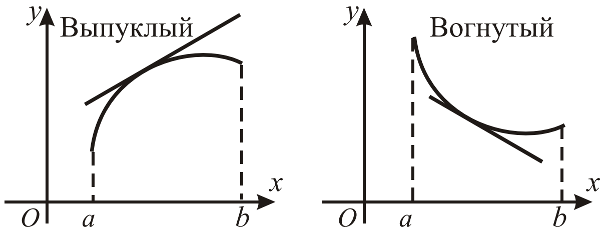
2) $y(1) = 1^3 - 3\cdot 1 + 5 = 3$, $y(0) = 0 - 0 + 5 = 5$,
$y(3) = 3^3 - 3\cdot 3 + 5 = 23$.

3) $y_{\text{наим}} = y(1) = 3$, $y_{\text{наиб}} = y(3) = 23$. ►

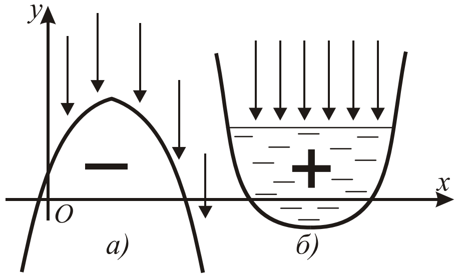
13.4. Выпуклость и вогнутость графика функции

Пусть функция $f(x)$ дифференцируема на интервале (a,b). Тогда существует касательная к графику функции $f(x)$ в любой точке этого интервала.

***Опр.* 4.** График дифференцируемой функции $f(x)$ называется *выпуклым* (*вогнутым*) на интервале (a,b), если он расположен на (a,b) ниже (выше) касательной, проведенной в любой его точке из (a,b).



***Теорема* 5** (достаточный признак выпуклости, вогнутости). *Если функция* $y = f(x)$ *имеет на интервале* (a,b) *вторую производную и* $f''(x) < 0$ $\left(f''(x) > 0\right)$ *во всех точках интервала* (a,b)*, то график функции* $f(x)$ *– выпуклый (вогнутый).*



Выпуклость и вогнутость графика функции наглядно иллюстрируются удобным для запоминания “*правилом дождя*”. Заключается оно в следующем: если *вторая производная отрицательна*, то говорят, что “*нет дождя*” – случай *а)* на рисунке, кривая $y_1 = f_1(x)$ – выпукла, «*струи дождя*» скатываются с выпуклой кровли и под ней сухо.

Если *вторая производная положительна*, то говорят, что «*есть дождь*» – случай *б)* на рисунке – кривая $y_2 = f_2(x)$ вогнута и «*струи дождя*» собираются в чаше.

Пример 5. Определить направления выпуклости графика функции $f(x) = x^3 - 3x^2 - 4$.

◄ $f(x) = x^3 - 3x^2 - 4$, $f'(x) = 3x^2 - 6x$, $f''(x) = 6x - 6$. $f''(x) > 0$ при $x > 1$, сл-но, здесь график вогнутый. $f''(x) < 0$ при $x < 1$, сл-но, здесь график выпуклый. ►

***Опр.* 5.** Точка $M\left(x_0, f\left(x_0\right)\right)$ называется *точкой перегиба* графика непрерывной функции $y = f(x)$, если точка M разделяет промежутки, в которых график выпуклый и вогнутый.

***Теорема* 6** (необходимое условие точки перегиба). *Пусть график функции $y = f(x)$ имеет перегиб в точке $M\left(x_0, f\left(x_0\right)\right)$ и пусть функция $y = f(x)$ имеет в окрестности точки x_0 непрерывную вторую производную. Тогда*

$$f''\left(x_0\right) = 0.$$

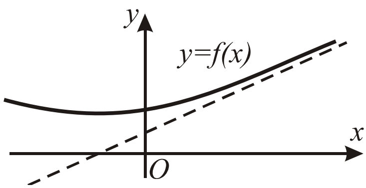
***Теорема* 7** (достаточное условие точки перегиба). *Пусть функция $y = f(x)$ имеет вторую производную в окрестности точки x_0. Если при переходе через точку x_0 $f''(x)$ меняет свой знак, то x_0 – точка перегиба.*

Пример 6. Найти точки перегиба для функции $f(x) = x^3 - 3x^2 - 4$.

◄ $f'(x) = 3x^2 - 6x$, $f''(x) = 6x - 6 = 6(x-1)$, $f''(x) = 0$ при $x = 1$. $f''(0) = -6 < 0$, $f''(2) = 6 > 0$. Следовательно, точка $x = 1$ – точка перегиба графика функции $f(x) = x^3 - 3x^2 - 4$. ►

13.5. Асимптоты графика функции

***Опр.* 6.** Прямая называется *асимптотой* графика функции $y = f(x)$, если расстояние от точки, принадлежащей графику до этой прямой, стремится к нулю при неограниченном удалении точки по графику функции от начала координат.



Существует два типа асимптот: вертикальная и наклонная (как частный случай наклонной – горизонтальная).

***Опр.*7.** Прямая $x = a$ называется *вертикальной асимптотой* графика функции $y = f(x)$, если хотя бы один из односторонних пределов функции $\lim\limits_{x \to a-0} f(x)$ или $\lim\limits_{x \to a+0} f(x)$ равен $+\infty$ или $-\infty$.

***Опр.* 8.** Прямая $y = kx + b$ называется *наклонной асимптотой* графика функции $y = f(x)$ при $x \to +\infty$ (или $x \to -\infty$), если $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty \\ (x\to-\infty)}} (f(x) - (kx + b)) = 0$.

При $k = 0$ наклонная асимптота называется *горизонтальной*.

Прямая $y = kx + b$ является наклонной асимптотой к графику функции $y = f(x)$, если существуют пределы

$$k = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}, \tag{19}$$

$$b = \lim_{x\to+\infty} \left[f(x) - kx \right]. \tag{20}$$

В этом случае говорят об *асимптоте вправо*.

Если хотя бы один из двух пределов (19), (20) не существует или $k \to +\infty$ ($-\infty$), то кривая наклонных асимптот вправо не имеет.

Аналогичные рассуждения можно провести для $x \to -\infty$ (*асимптоты влево*).

Пример 7. Найти вертикальные асимптоты графика функции $y = \dfrac{1}{x}$.

◄ $y = \dfrac{1}{x}$, $x = 0$ – вертикальная асимптота, так как $\lim\limits_{x\to 0+0} \dfrac{1}{x} = +\infty$, $\lim\limits_{x\to 0-0} \dfrac{1}{x} = -\infty$. ►

13.6. Схема исследования функции и построения ее графика

1. Найти область определения функции, ее точки разрыва.
2. Найти точки пересечения с осями.
3. Выяснить является ли функция четной, нечетной или общего вида.
4. Найти асимптоты графика функции.
5. Найти интервалы монотонности и точки экстремума функции.

6. Найти интервалы выпуклости и вогнутости графика функции и точки перегиба.

7. На основании полученных результатов построить график функции.

Пример 8. Исследовать функцию $y=\dfrac{x^3}{(x-1)^2}$ и построить ее график.

◄ Исследование выполним по предложенной схеме.

1. Область определения функции:
   $D(y)=(-\infty,1)\cup(1,\infty)$.

2. Найдем точки пересечения графика функции с осями координат. Пусть $\tilde{o}=0$, тогда $y=0$. Пусть $y=0$, тогда $x^3=0$ или $x=0$. Значит, график функции проходит через начало координат.

3. Проверим, является ли функция четной, нечетной или общего вида.

$$y(-x)=\frac{(-x)^3}{(-x-1)^2}=-\frac{x^3}{(x+1)^2}$$ – функция общего вида.

4. Найдем асимптоты графика функции (вертикальные, наклонные, горизонтальные).

Вертикальная асимптота может быть в точке разрыва или на границе области определения. Здесь вертикальная асимптота $x=1$, так как $\lim\limits_{x\to 1-0}\dfrac{x^3}{(x-1)^2}=\infty$ – предел слева в точке $x=1$;

$\lim\limits_{x\to 1+0}\dfrac{x^3}{(x-1)^2}=\infty$ – предел справа.

Наклонные асимптоты вида $y=kx+b$ найдем, если существуют конечные пределы $k=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ и $b=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left[f(x)-kx\right]$.

В данном случае

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3}{x(x-1)^2}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3}{x^3-2x^2+x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{1-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}=1,$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^3}{(x-1)^2}-x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x^2-x}{x^2-2x+1}=2.$$

Итак, $y=x+2$ – уравнение наклонной асимптоты.

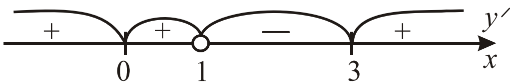
5. Найдем промежутки монотонности (возрастания и убывания) функции и точки экстремума.

Находим производную первого порядка.

$$y'=\frac{3x^2(x-1)^2-2x^3(x-1)}{(x-1)^4}=\frac{3x^2(x-1)-2x^3}{(x-1)^3}=$$

$$=\frac{3x^3-3x^2-2x^3}{(x-1)^3}=\frac{x^3-3x^2}{(x-1)^3}=\frac{x^2(x-3)}{(x-1)^3}.$$

Найдем стационарные и критические точки и выясним знаки y' на полученных интервалах в окрестности этих точек: $x_1=0$, $x_2=3$, $x_3=1$ – последняя точка не входит в область определения функции. Используя достаточные признаки экстремума, выясним, как меняет знак $\acute{o}'$ при переходе через критические точки слева направо. Применяем метод интервалов.



Так как при переходе через точку $x=0$ производная y' знак не меняет (она положительна), то функция монотонно возрастает и $x=0$ не является точкой экстремума.

При переходе через точку $\tilde{o}=3$ производная y' меняет знак с «–» на «+», значит, $\tilde{o}=3$ – точка минимума функции и $y_{\min}=y(3)=\dfrac{3^3}{(3-1)^2}=\dfrac{27}{4}=6{,}75$.

Итак, функция возрастает на промежутках $(-\infty,1)$ и $[3,\infty)$, убывает на промежутке $(1,3]$.

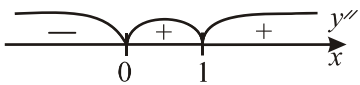
6. Найдем промежутки выпуклости и вогнутости графика функции и точки перегиба.

Для этого вычислим производную второго порядка.

$$y'' = \frac{\left(3x^2-6x\right)\left(x-1\right)^3 - 3\left(x-1\right)^2\left(x^3-3x^2\right)}{\left(x-1\right)^6} =$$

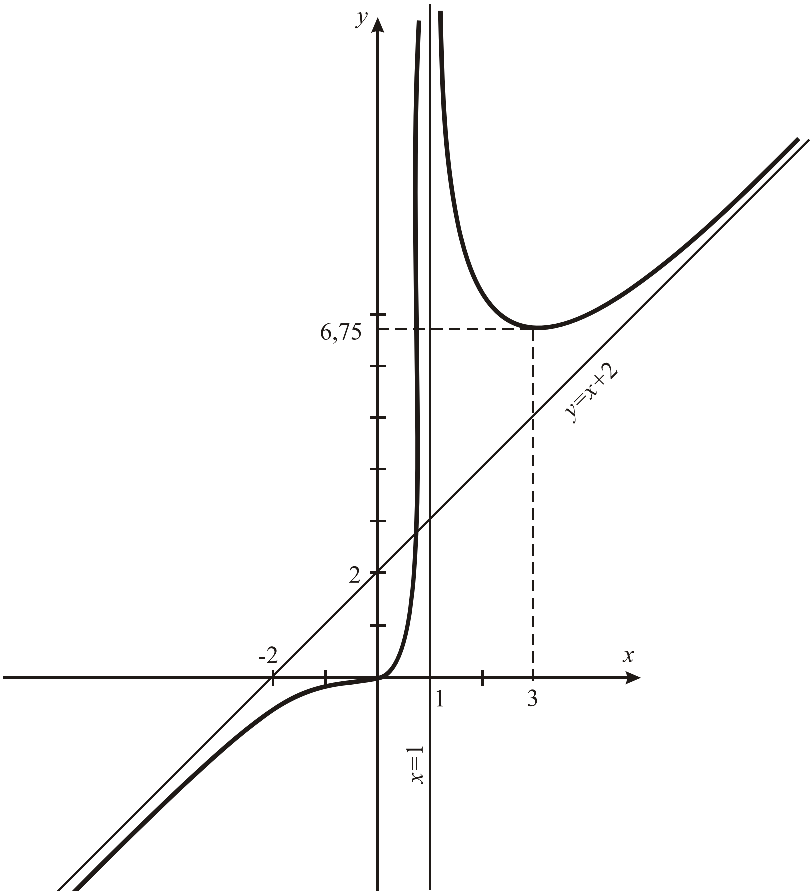
$$= \frac{\left(3x^2-6x\right)\left(x-1\right) - 3\left(x^3-3x^2\right)}{\left(x-1\right)^4} = \frac{6x}{\left(x-1\right)^4}.$$

Точки, при которых y'' обращается в нуль или не существует, такие: $x_1=0$, $x_2=1$, но последняя точка не входит в область определения функции. Используя достаточные признаки выпуклости, вогнутости функции, выясним, как меняет знак y'' при переходе через критические точки слева направо. Применяем метод интервалов.

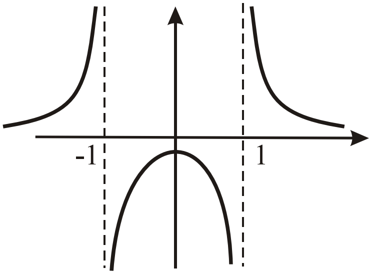


При переходе через точку $x=0$ y'' меняет знак с «–» на «+», значит, $x=0$ – точка перегиба, $(-\infty,0]$ - промежуток выпуклости; $[0;1)$, $(1;\infty)$ - промежутки вогнутости кривой.

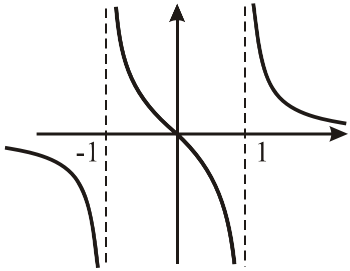
7. Строим график данной функции.



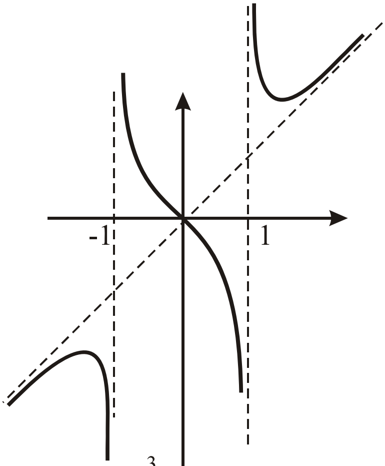
Приведем еще примеры эскизов графиков некоторых функций.



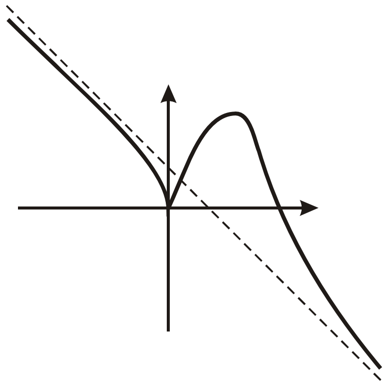
$y=\frac{1}{x^2-1}$



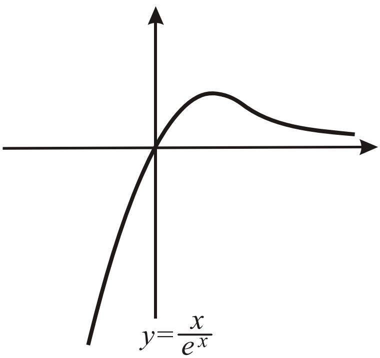
$y=\frac{x}{x^2-1}$



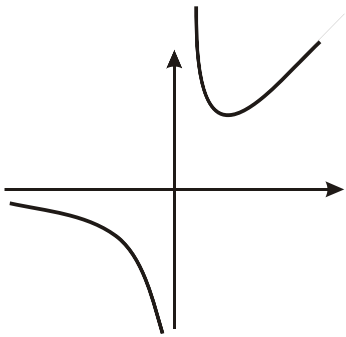
$y=\frac{x^3}{x^2-1}$



$y=\sqrt[3]{2x^2-x^3}$



$y=\frac{x}{e^x}$



$y=\frac{e^x}{x}$

ГЛАВА 2. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Интегральное исчисление возникло из потребности создать общий метод нахождения площадей, объемов и центров тяжести. Такой метод применялся еще Архимедом. Систематическое развитие он получил в 17 веке в работах Б. Кавальери, Э. Торричелли П. Ферма, Б. Паскаля и других ученых. В 1659 г. И. Барроу установил связь между задачей о нахождении площади и задачей о нахождении касательной. И. Ньютон и Г. В. Лейбниц в 70-х годах 17 века отвлекли эту связь от упомянутых частных геометрических задач. Тем самым была установлена связь между интегральным и дифференциальным исчислениями. Эта связь была использована Ньютоном, Лейбницем и их учениками для развития техники интегрирования.

Для преодоления трудностей, связанных с интегрированием, И. Ньютон и Г. В. Лейбниц выражали подынтегральную функцию в виде многочлена с бесконечным числом членов. Применяя к таким выражениям обычные правила алгебры, математики 18 века сделали множество замечательных открытий. Однако обнаружилось, что если безоговорочно применять правила алгебры к бесконечным суммам, то можно прийти к ошибкам. Стало необходимым точно сформулировать основные понятия и строго доказать свойства бесконечных рядов. Эта задача была решена математиками 19 века.

Интегральное исчисление позволяет количественно выразить свойства множества объектов в целом или в среднем и обеспечивает аппарат для сложения большого числа малых приращений. Своего нынешнего состояния методы интегрирования в основном достигли в работах Л. Эйлера. Труды М. В. Остроградского и П. Л. Чебышева завершили развитие этих методов.

§ 1. Элементарные методы интегрирования

Пусть функция $f(x)$ определена на некотором интервале (a,b). Тогда функция $F(x)$ называется *первообразной* для функции $f(x)$ на интервале (a,b), если $F'(x)=f(x)$ для всех $x\in(a,b)$.

Теорема. Если функция $F(x)$ является первообразной функции $f(x)$ на (a,b), то множество всех первообразных для $f(x)$ задается формулой $F(x)+C$, где $C=const$.

Опр. Совокупность всех первообразных для функции $f(x)$ называется *неопределенным интегралом* от функции $f(x)$ и обозначается символом $\int f(x)dx$.

Таким образом, если $F(x)$ – какая-либо первообразная функции $f(x)$, то $\int f(x)dx=F(x)+C$.

Знак $\int$ называется *знаком неопределенного интеграла*, $f(x)$ – *подынтегральной функцией*, $f(x)dx$ – *подынтегральным выражением*.

Основные правила интегрирования

Везде далее предполагается, что все рассматриваемые интегралы существуют.

1. $\int dF(x)=F(x)+C$.

2. $d\int f(x)dx=f(x)dx$.

3. $\int \alpha f(x)dx=\alpha\int f(x)dx$, где $\alpha=const$.

4. $\int[f(x)+g(x)]dx=\int f(x)dx+\int g(x)dx$.

5. Если $\int f(x)dx=F(x)+C$ и $a\neq 0$, то

$$\int f(ax+b)dx=\frac{1}{a}F(ax+b)+C.$$

Последняя формула значительно расширяет таблицу основных интегралов (см. табл. 2).

Таблица 2

Таблица основных интегралов

1. $\int x^{\alpha}dx=\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C$ $(\alpha\neq-1)$. В частности, $\int dx = x + C$.	**2.** $\int\dfrac{dx}{x}=\ln\lvert x\rvert+C$.
3. $\int a^{x}dx=\dfrac{a^{x}}{\ln a}+C$.	**4.** $\int e^{x}dx=e^{x}+C$.
5. $\int\sin x dx=-\cos x+C$.	**6.** $\int\cos x dx=\sin x+C$.
7. $\int\dfrac{dx}{\cos^{2}x}=\mathrm{tg}x+C$.	**8.** $\int\dfrac{dx}{\sin^{2}x}=-\mathrm{ctg}x+C$.
9. $\int\mathrm{tg}x dx=-\ln\lvert\cos x\rvert+C$.	**10.** $\int\mathrm{ctg}x dx=\ln\lvert\sin x\rvert+C$.
11. $\int\dfrac{dx}{1+x^{2}}=\mathrm{arctg}x+C$.	**12.** $\int\dfrac{dx}{a^{2}+x^{2}}=\dfrac{1}{a}\mathrm{arctg}\dfrac{x}{a}+C$.
13. $\int\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^{2}}}=\arcsin x+C$.	**14.** $\int\dfrac{dx}{\sqrt{a^{2}-x^{2}}}=\arcsin\dfrac{x}{a}+C$.
15. $\int\dfrac{dx}{a^{2}-x^{2}}=\dfrac{1}{2a}\ln\left\lvert\dfrac{a+x}{a-x}\right\rvert+C$.	**16.** $\int\dfrac{dx}{\sqrt{x^{2}\pm a^{2}}}=\ln\left\lvert x+\sqrt{x^{2}\pm a^{2}}\right\rvert+C$.
17. $\int\mathrm{ch}x dx=\mathrm{sh}x+C$.	**18.** $\int\mathrm{sh}x dx=\mathrm{ch}x+C$.
19. $\int\dfrac{dx}{\mathrm{ch}^{2}x}=\mathrm{th}x+C$.	**20.** $\int\dfrac{dx}{\mathrm{sh}^{2}x}=-\mathrm{cth}x+C$.

Рассмотрим примеры применения таблицы 2 и основных правил интегрирования.

Пример 1. Вычислить интеграл $I=\int\left(x^2-x+3\right)\left(1-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx.$

◀ Перемножим многочлены, стоящие под интегралом: $I=\int\left(x^2-x+3-\frac{x^2}{\sqrt{x}}+\frac{x}{\sqrt{x}}-\frac{3}{\sqrt{x}}\right)dx$. Заменив $\sqrt{x}$ на $x^{\frac{1}{2}}$, преобразуем выражение под интегралом:

$$I=\int\left(x^2-x+3-x^{\frac{3}{2}}+x^{\frac{1}{2}}-3x^{-\frac{1}{2}}\right)dx.$$

Применим правила **3** и **4**, после чего воспользуемся формулой **1** таблицы 2:

$$I=\int x^2dx-\int xdx+3\int dx-\int x^{\frac{3}{2}}dx+\int x^{\frac{1}{2}}dx-3\int x^{-\frac{1}{2}}dx=$$

$$=\frac{x^{2+1}}{2+1}-\frac{x^{1+1}}{1+1}+3x-\frac{x^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1}+\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}-3\frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}+C=$$

$$=\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+3x-\frac{2\sqrt{x^5}}{5}+\frac{2\sqrt{x^3}}{3}-6\sqrt{x}+C.$$ ▶

Пример 2. Найти интеграл $\int\left(2^{-x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)2^x\sqrt{x}dx$.

◀ Раскроем скобки в подынтегральном выражении, воспользуемся свойством **4** и таблицей 2 (формулы **1** и **3**):

$$\int\left(2^{-x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)2^x\sqrt{x}dx=\int\left(2^{-x}2^x\sqrt{x}+\frac{2^x\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)dx=$$

$$=\int\left(\sqrt{x}+2^x\right)dx=\int x^{\frac{1}{2}}dx+\int 2^x\,dx=\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}+\frac{2^x}{\ln 2}+C=$$

$$\frac{2\sqrt{x^3}}{3}+\frac{2^x}{\ln 2}+C.\blacktriangleright$$

В дальнейших примерах необходимо найти указанные интегралы.

Пример 3. $\int(3x+2)^{11}\,dx$.

◄ Применим свойство **5** $(a=3,\quad b=2)$ и формулу **1** таблицы 2:

$$\int(3x+2)^{11}dx=\frac{1}{3}\cdot\frac{(3x+2)^{12}}{12}+C.\blacktriangleright$$

Пример 4. $\int\frac{dx}{\sqrt{25-9x^2}}$.

◄ Так как $\sqrt{25-9x^2}=\sqrt{5^2-(3x)^2}$, то при вычислении интеграла воспользуемся свойством **5** и формулой **14** таблицы 2:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{25-9x^2}}=\int\frac{dx}{\sqrt{5^2-(3x)^2}}=\frac{1}{3}\arcsin\frac{3x}{5}+C.\blacktriangleright$$

Пример 5. $\int\frac{dx}{\sqrt{x+2}-\sqrt{x-3}}$.

◄ Освободимся от иррациональности в знаменателе, для чего умножим и числитель, и знаменатель дроби на выражение $\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{x-3}\right)$, сопряженное к знаменателю:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x+2}-\sqrt{x-3}}=\int\frac{\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{x-3}\right)dx}{\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{x-3}\right)\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{x-3}\right)}=$$

$$=\int\frac{\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{x-3}\right)}{\left(\sqrt{x+2}\right)^2-\left(\sqrt{x-3}\right)^2}dx=\int\frac{\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{x-3}\right)}{x+2-x+3}dx=$$

$$=\frac{1}{5}\int\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{x-3}\right)dx=\frac{1}{5}\int(x+2)^{\frac{1}{2}}dx+\frac{1}{5}\int(x-3)^{\frac{1}{2}}dx=$$

$$=\frac{1}{5}\cdot\frac{2}{3}\sqrt{(x+2)^3}+\frac{1}{5}\cdot\frac{2}{3}\sqrt{(x-3)^3}+C=$$

$$=\frac{2}{15}\sqrt{(x+2)^3}+\frac{2}{15}\sqrt{(x-3)^3}+C\,.►$$

Пример 6. $\int\frac{dx}{x^2+4x+13}$.

◄ Квадратный трехчлен не имеет действительных корней, так как его дискриминант $D=-4<0$. Выделим в знаменателе полный квадрат: $x^2+4x+13=\left(x^2+4x+4\right)+9=$
$=(x+2)^2+9$. Тогда

$$\int\frac{dx}{x^2+4x+13}=\int\frac{dx}{(x+2)^2+9}=\int\frac{dx}{(x+2)^2+3^2}=\left|\begin{array}{l}\text{свойство 5,}\\ \text{формула 11 (табл. 2)}\end{array}\right|$$

$$=\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{x+2}{3}+C\,.►$$

Пример 7. $\int\frac{dx}{\sqrt{9x^2-6x+2}}$.

$$◄\ \int\frac{dx}{\sqrt{9x^2-6x+2}}=\int\frac{dx}{\sqrt{\left(9x^2-6x+1\right)+1}}=$$

$$=\int\frac{dx}{\sqrt{(3x-1)^2+1}}=\left|\begin{array}{l}\text{свойство 5,}\\ \text{формула 16 (табл. 2)}\end{array}\right|=$$

$$=\frac{1}{3}\ln\left|3x-1+\sqrt{(3x-1)^2+1}\right|+C=$$

$$=\frac{1}{3}\ln\left|3x-1+\sqrt{9x^2-6x+2}\right|+C\,.►$$

Пример 8. $\int \operatorname{tg}^2 x dx$.

◀ Воспользуемся формулой $1+\operatorname{tg}^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$, откуда $\operatorname{tg}^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x} - 1$. В результате интеграл примет вид:

$$\int \operatorname{tg}^2 x dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} - \int dx = \operatorname{tg} x - x + C\ .$$ ▶

§ 2. Метод замены переменной

Процесс вычисления интегралов состоит в том, что интеграл с помощью различных преобразований приводят к известному интегралу (как правило, к одному из табличных). К преобразованиям относятся, в первую очередь, алгебраические преобразования, замена переменной и интегрирование по частям.

Вычисления интегралов путем алгебраических преобразований были рассмотрены в предыдущем параграфе.

Данный параграф посвящен методу замены переменной.

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на интервале (a,b) и $x = \varphi(t)$, где функция $\varphi(t)$ непрерывно дифференцируема на интервале (α, β); причем функция $\varphi(t)$ отображает интервал (α, β) в интервал (a,b). Пусть также функция $x = \varphi(t)$ имеет обратную $t = \varphi^{-1}(x)$, определенную на (a,b). Тогда

$$\int f(x) dx = \left| \begin{matrix} x = \varphi(t) \\ dx = \varphi'(t) dt \end{matrix} \right| = \int f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt\ .$$

После вычисления интеграла в правой части следует вернуться к старой переменной x, то есть вместо новой переменной t подставить её значение $\varphi^{-1}(x)$.

Пример 1. $\int x\sqrt{x+5}dx$.

◀ Чтобы избавиться от корня, положим $\sqrt{x+5} = t$. Тогда $x = t^2 - 5$ и, сл–но, $dx = 2tdt$. После подстановки получим $\int x\sqrt{x+5}dx = \int (t^2 - 5) t \cdot 2tdt = \int (2t^4 - 10t^2) dt =$

$$=2\frac{t^5}{5}-10\frac{t^3}{3}+C=\frac{2}{5}(x+5)^{\frac{5}{2}}+\frac{10}{3}(x+5)^{\frac{3}{2}}+C. \blacktriangleright$$

Замечание 1. При вычислении интегралов вида $\int\frac{dx}{x\sqrt{ax^2+bx+c}}$ полезно применять подстановку $x=\frac{1}{t}$.

Пример 2. $\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$.

$$\blacktriangleleft\ \int\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}=\left|x=\frac{1}{t},\quad dx=-\frac{1}{t^2}dt\right|=\int\frac{-\frac{1}{t^2}dt}{\frac{1}{t}\sqrt{\frac{1}{t^2}-1}}=$$

$$=-\int\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}=-\arcsin t+C=-\arcsin\frac{1}{x}+C. \blacktriangleright$$

Тригонометрические подстановки

1. Если интеграл содержит радикал $\sqrt{a^2-x^2}$, то применяют замену $x=a\sin t$ или $x=a\cos t$. В первом случае получим $\sqrt{a^2-x^2}=\sqrt{a^2(1-\sin^2 t)}=a\cos t$ и $dx=a\cos t\,dt$.

2. Если интеграл содержит радикал $\sqrt{a^2+x^2}$, то применяют замену $x=a\,\mathrm{tg}\,t$ или $x=a\,\mathrm{ctg}\,t$. В первом случае имеем

$$\sqrt{a^2+x^2}=\sqrt{a^2(1+\mathrm{tg}^2t)}=a\sqrt{\frac{1}{\cos^2 t}}=\frac{a}{\cos t}\ \text{ и }\ dx=\frac{a\,dt}{\cos^2 t}.$$

3. Если интеграл содержит радикал $\sqrt{x^2-a^2}$, то применяют замену $x=\frac{a}{\cos t}$ или $x=\frac{a}{\sin t}$. В первом случае получим

$$\sqrt{x^2-a^2}=\sqrt{a^2\left(\frac{1}{\cos^2 t}-1\right)}=a\,\mathrm{tg}\,t\ \text{ и }\ dx=\frac{a\sin t\,dt}{\cos^2 t}.$$

Замечание 2.

$$\sqrt{a^2\left(1-\sin^2 t\right)}=\left|a\cos t\right|=\begin{cases} a\cos t, & \text{если} \quad a\cos t>0, \\ -a\cos t, & \text{если} \quad a\cos t<0. \end{cases}$$

Для определенности остановимся на случае $a\cos t>0$. Аналогично для случаев **2** и **3**.

Пример 3. $\int\frac{x^2dx}{\sqrt{9-x^2}}$.

◄ $$\int\frac{x^2dx}{\sqrt{9-x^2}}=\left|\begin{array}{c} x=3\sin t \\ dx=3\cos tdt \end{array}\right|=\int\frac{9\sin^2 t\cdot 3\cos tdt}{\sqrt{9-9\sin^2 t}}=$$

$$=9\int\frac{\sin^2 t\cdot\cos tdt}{\cos t}=9\int\sin^2 tdt=9\int\frac{1-\cos 2t}{2}dt=$$

$$=\frac{9}{2}\left(t-\frac{1}{2}\sin 2t\right)+\tilde{N}.$$

Вернемся к переменной x. Так как $x=3\sin t$, то $t=\arcsin\frac{x}{3}$. Тогда

$$\int\frac{x^2dx}{\sqrt{9-x^2}}=\frac{9}{2}\arcsin\frac{x}{3}-\frac{9}{4}\sin\left(2\arcsin\frac{x}{3}\right)+C=$$

$$=\frac{9}{2}\arcsin\frac{x}{3}-\frac{9}{2}\sin\left(\arcsin\frac{x}{3}\right)\cos\left(\arcsin\frac{x}{3}\right)+C=\frac{9}{2}\arcsin\frac{x}{3}-$$

$$-\frac{9}{2}\sin\left(\arcsin\frac{x}{3}\right)\sqrt{1-\sin^2\left(\arcsin\frac{x}{3}\right)}+C=\frac{9}{2}\arcsin\frac{x}{3}-$$

$$-\frac{9}{2}\frac{x}{3}\sqrt{1-\frac{x^2}{9}}+C=\frac{9}{2}\arcsin\frac{x}{3}-\frac{1}{2}x\sqrt{9-x^2}+C.$$ ►

Если интеграл имеет вид $\int f\left(\varphi(x)\right)\varphi'(x)dx$, то его вычисление можно проводить сл. обр.:

$$\int f(\varphi(x))\,\varphi'(x)dx = \int f(\varphi(x))\,d\varphi(x) = \left|\begin{matrix} \varphi(x) = t \\ dt = \varphi'(x)dx \end{matrix}\right| = \int f(t)dt\,.$$

Это правило подведения переменной под знак дифференциала.

Пример 4. $\int \frac{dx}{\cos^2 x\sqrt{1+\mathrm{tg}x}}$.

$$◄\ \int \frac{dx}{\cos^2 x\sqrt{1+\mathrm{tg}x}} = \left|\begin{matrix} t = 1+\mathrm{tg}x \\ dt = \dfrac{dx}{\cos^2 x} \end{matrix}\right| = \int \frac{dt}{\sqrt{t}} =$$

$$= 2\sqrt{t} + C = 2\sqrt{1+\mathrm{tg}x} + C\,.►$$

Пример 5. $\int \frac{e^x dx}{e^{2x}+1}$.

$$◄\ \int \frac{e^x dx}{e^{2x}+1} = \left|\begin{matrix} t = e^x \\ dt = e^x dx \end{matrix}\right| = \int \frac{dt}{t^2+1} =$$

$$= \mathrm{arctg}t + C = \mathrm{arctg}\,e^x + C\,.►$$

Пример 6. $\int \frac{\cos x dx}{\sqrt{1+2\sin x}}$.

$$◄\ \int \frac{\cos x dx}{\sqrt{1+2\sin x}} = \left|\begin{matrix} t = 1+2\sin x \\ dt = 2\cos x dx \end{matrix}\right| = \frac{1}{2}\int \frac{2\cos x dx}{\sqrt{1+2\sin x}} =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{t}} = \frac{1}{2}2\sqrt{t} + C = \sqrt{1+2\sin x} + C\,.►$$

Замечание 3. При вычислении интегралов полезно применять следующие формулы дифференциалов элементарных функций:

$$x^{\alpha}dx = \frac{1}{\alpha+1}d\left(x^{\alpha+1}\right), \qquad \frac{dx}{x} = d(\ln x),$$

$$\cos x dx = d(\sin x), \qquad \sin x dx = -d(\cos x),$$

$$e^x dx = d\left(e^x\right), \qquad a^x dx = \frac{1}{\ln a}d\left(a^x\right),$$

$$\frac{dx}{\cos^2 x} = d(\mathrm{tg}x), \qquad \frac{dx}{\sin^2 x} = -d(\mathrm{ctg}x),$$

$$\frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{1}{a} d(\arcsin x) = -\frac{1}{a} d(\arccos x),$$

$$\frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} d(\mathrm{arctg}\, x) = -\frac{1}{a} d(\mathrm{arcctg}\, x),$$

$$\frac{dx}{\sqrt{x}} = 2d(\sqrt{x}), \qquad \frac{dx}{x^2} = -d\left(\frac{1}{x}\right).$$

Пример 7. $\int \frac{dx}{x \ln x}$.

◄ $\int \frac{dx}{x \ln x} = \int \frac{d(\ln x)}{\ln x} = \ln|\ln x| + C$.►

Пример 8. $\int \mathrm{tg}^3 x dx$.

◄ $\int \mathrm{tg}^3 x dx = \int \mathrm{tg}^2 x \mathrm{tg} x dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) \mathrm{tg} x dx =$

$$= \int \frac{\mathrm{tg} x dx}{\cos^2 x} - \int \mathrm{tg} x dx = \int \mathrm{tg} x\, d(\mathrm{tg} x) + \ln|\cos x| =$$

$$= \frac{\mathrm{tg}^2 x}{2} + \ln|\cos x| + C.$$►

Пример 9. $\int \frac{3x - 1}{x^2 + 4} dx$.

◄ $\int \frac{3x-1}{x^2+4} dx = 3\int \frac{x dx}{x^2+4} - \int \frac{dx}{x^2+4} = \frac{3}{2} \int \frac{d(x^2+4)}{x^2+4} -$

$$- \frac{1}{2} \mathrm{arctg} \frac{x}{2} + C = \frac{3}{2} \ln(x^2 + 4) - \frac{1}{2} \mathrm{arctg} \frac{x}{2} + C.$$►

Пример 10. $\int \sin x\, e^{\cos x} dx$.

◄ $\int \sin x\, e^{\cos x} dx = -\int e^{\cos x} d(\cos x) = -e^{\cos x} + C$.►

§ 3. Метод интегрирования по частям

Пусть u и v – непрерывно дифференцируемые функции. Тогда формула интегрирования по частям имеет вид:

$$\int u dv = uv - \int v du \,. \qquad (1)$$

С помощью данной формулы вычисление исходного интеграла сводится к вычислению другого интеграла, который может оказаться более простым, чем исходный, или даже табличным. Обычно руководствуются следующими правилами:

$$1.\ \int P_n(x)\cdot\left\{\begin{matrix} e^{\alpha x}, \\ \sin\beta x, \\ \cos\beta x \end{matrix}\right\}dx = \left| \begin{matrix} u = P_n(x) \\ dv = \left\{\begin{matrix} e^{\alpha x}, \\ \sin\beta x, \\ \cos\beta x \end{matrix}\right\}dx \end{matrix} \right|.$$

$$2.\ \int P_n(x)\cdot\left\{\begin{matrix} \ln x, \\ \arcsin\alpha x, \\ \mathrm{arctg}\,\alpha x \end{matrix}\right\}dx = \left| \begin{matrix} u = \left\{\begin{matrix} \ln x, \\ \arcsin\alpha x, \\ \mathrm{arctg}\,\alpha x \end{matrix}\right\}dx \\ dv = P_n(x) \end{matrix} \right|.$$

$$3.\ \int e^{\alpha x}\cdot\left\{\begin{matrix} \sin\beta x, \\ \cos\beta x \end{matrix}\right\}dx = \left| \begin{matrix} u = e^{\alpha x} \\ dv = \left\{\begin{matrix} \sin\beta x, \\ \cos\beta x \end{matrix}\right\}dx \end{matrix} \right|.$$

Иногда формулу интегрирования по частям приходится применять несколько раз.

Пример 1. $\int (x-3)\cos 2x dx$.

◄ Введем обозначения $u = x - 3$, $dv = \cos 2x dx$. Для применения формулы интегрирования по частям требуется найти du и v: $du = dx$, $v = \int \cos 2x dx = \frac{1}{2}\sin 2x$. (Берем только одно значение неопределенного интеграла.) Подставим в формулу (1) и найдем полученный интеграл:

$$\int(x-3)\cos 2x dx=(x-3)\frac{1}{2}\sin 2x-\int\frac{1}{2}\sin 2x dx=\frac{x-3}{2}\sin 2x+$$
$$+\frac{\cos 2x}{4}+C\,.$$

Более кратко это можно записать так:

$$\int(x-3)\cos 2x dx=\begin{vmatrix} u=x-3 & du=dx \\ dv=\cos 2x dx & v=\int\cos 2x dx=\dfrac{\sin 2x}{2}\end{vmatrix}=$$
$$=(x-3)\frac{\sin 2x}{2}-\frac{1}{2}\int\sin 2x dx=(x-3)\frac{\sin 2x}{2}+\frac{\cos 2x}{4}+C\,.\blacktriangleright$$

Пример 2. $I=\int\left(x^2+x+1\right)\cdot e^x dx$.

$$\blacktriangleleft\ I=\int\left(x^2+x+1\right)e^x dx=\begin{vmatrix} u=x^2+x+1 & du=(2x+1)dx \\ dv=e^x dx & v=\int e^x dx=e^x\end{vmatrix}=$$
$$=\left(x^2+x+1\right)\cdot e^x-\int(2x+1)\cdot e^x dx\,.$$

После применения формулы (1) степень многочлена под интегралом понизилась. Чтобы многочлен под знаком интеграла “исчез”, применим формулу интегрирования по частям еще раз:

$$I=\begin{vmatrix} u=2x+1 & du=2dx \\ dv=e^x dx & v=e^x\end{vmatrix}=\left(x^2+x+1\right)\cdot e^x-\left((2x+1)\cdot e^x-2\int e^x dx\right)=$$
$$=\left(x^2+x+1\right)\cdot e^x-(2x+1)\cdot e^x+2e^x+C=\left(x^2-x+2\right)\cdot e^x+C\,.\blacktriangleright$$

Пример 3. $\int x\ln^2 x dx$.

$$\blacktriangleleft\quad \int x\ln^2 x dx=\begin{vmatrix} u=\ln^2 x & du=2\ln x\dfrac{dx}{x} \\ dv=xdx & v=\dfrac{x^2}{2}\end{vmatrix}=\frac{x^2\ln^2 x}{2}-$$
$$-\int x^2\ln x\frac{dx}{x}=\frac{x^2\ln^2 x}{2}-\int x\ln x dx=\begin{vmatrix} u=\ln x & du=\dfrac{dx}{x} \\ dv=xdx & v=\dfrac{x^2}{2}\end{vmatrix}=$$

$$=\frac{x^2\ln^2 x}{2}-\left(\frac{x^2\ln x}{2}-\int\frac{x^2dx}{2x}\right)=\frac{x^2\ln^2 x}{2}-\frac{x^2\ln x}{2}+\frac{1}{2}\int xdx=$$

$$=\frac{x^2}{2}\left(\ln^2 x-\ln x+\frac{1}{2}\right)+C.\blacktriangleright$$

Пример 4. $\int \operatorname{arctg} x dx$.

$$\blacktriangleleft \int \operatorname{arctg} x dx=\left|\begin{matrix} u=\operatorname{arctg} x & du=\dfrac{dx}{1+x^2} \\ dv=dx & v=x\end{matrix}\right|=x\operatorname{arctg} x-$$

$$-\int\frac{xdx}{1+x^2}=x\operatorname{arctg} x-\frac{1}{2}\int\frac{d\left(1+x^2\right)}{1+x^2}=x\operatorname{arctg} x-\frac{1}{2}\ln\left|1+x^2\right|+C.\blacktriangleright$$

Пример 5. $\int x^3e^{x^2}dx$.

$\blacktriangleleft$ Если положить $u=x^3$, $dv=e^{x^2}dx$, то $v=\int e^{x^2}dx$ не выражается через элементарные функции. Если взять $u=e^{x^2}$, то $du=2xe^{x^2}dx$, что приведет к более сложному интегралу. В данном интеграле целесообразно обозначить $u=x^2$, $dv=xe^{x^2}dx$. Тогда $du=2xdx$ и $v=\int xe^{x^2}dx=\frac{1}{2}\int e^{x^2}d\left(x^2\right)=\frac{1}{2}e^{x^2}$.

Получим:

$$\int x^3e^{x^2}dx=\frac{x^2}{2}e^{x^2}-\int xe^{x^2}dx=\frac{x^2}{2}e^{x^2}-\frac{1}{2}e^{x^2}+C=$$

$$=\frac{x^2-1}{2}e^{x^2}+C.\blacktriangleright$$

Замечание 1. Если применение формулы интегрирования по частям приводит к выражению, содержащему первоначальный интеграл, то полученное в результате применения формулы выражение рассматривается как уравнение, в котором неизвестным является исходный интеграл. Решая уравнение, получаем первоначальный интеграл.

Пример 6. $I=\int e^{2x}\cos\frac{x}{2}dx$.

$$◀\ I=\begin{vmatrix} u=e^{2x} & du=2e^{2x}dx \\ dv=\cos\frac{x}{2}dx & v=2\sin\frac{x}{2}\end{vmatrix}=$$

$$=2e^{2x}\sin\frac{x}{2}-4\int e^{2x}\sin\frac{x}{2}dx=\begin{vmatrix} u=e^{2x} & du=2e^{2x}dx \\ dv=\sin\frac{x}{2}dx & v=-2\cos\frac{x}{2}\end{vmatrix}=$$

$$=2e^{2x}\sin\frac{x}{2}-4\left(-2e^{2x}\cos\frac{x}{2}+4\int e^{2x}\cos\frac{x}{2}dx\right)=$$

$$=2e^{2x}\left(\sin\frac{x}{2}+4\cos\frac{x}{2}\right)-16\int e^{2x}\cos\frac{x}{2}dx.$$

Получили уравнение $I=2e^{2x}\left(\sin\frac{x}{2}+4\cos\frac{x}{2}\right)-16\cdot I$, откуда $I=\frac{2e^{2x}}{17}\left(\sin\frac{x}{2}+4\cos\frac{x}{2}\right)+C$.▶

Замечание 2. Аналогично вычисляются интегралы $\int e^{\alpha x}\sin\beta x dx$, $\int\sqrt{a\pm bx^2}dx$, $\int\cos(\ln x)dx$ и некоторые другие.

Пример 7. $I=\int\sqrt{2+x^2}dx$.

$$◀\ I=\int\sqrt{2+x^2}dx=\begin{vmatrix} u=\sqrt{2+x^2} & du=\frac{xdx}{\sqrt{2+x^2}} \\ dv=dx & v=x\end{vmatrix}=x\sqrt{2+x^2}-$$

$$-\int\frac{x^2}{\sqrt{2+x^2}}dx=x\sqrt{2+x^2}-\int\frac{x^2+2-2}{\sqrt{2+x^2}}dx=x\sqrt{2+x^2}-$$

$$-\int\sqrt{2+x^2}dx+2\int\frac{dx}{\sqrt{2+x^2}}=x\sqrt{2+x^2}-I+2\ln\left|x+\sqrt{2+x^2}\right|.$$

Т.о., $I=x\sqrt{2+x^2}-I+2\ln\left|x+\sqrt{2+x^2}\right|$.

$$I=\frac{1}{2}x\sqrt{2+x^2}+\ln\left|x+\sqrt{2+x^2}\right|+C\,.\blacktriangleright$$

Рекуррентные формулы

С помощью формулы интегрирования по частям выводятся рекуррентные формулы:

$$\int\sin^n xdx=-\frac{1}{n}\cdot\sin^{n-1}x\cos x+\frac{n-1}{n}\int\sin^{n-2}xdx\,,$$

$$\int\cos^n xdx=\frac{1}{n}\cdot\cos^{n-1}x\sin x+\frac{n-1}{n}\int\cos^{n-2}xdx\,,$$

$$\int x^n\sin xdx=-x^n\cos x+nx^{n-1}\sin x-n(n-1)\int x^{n-2}\sin xdx\,,$$

$$\int x^n\cos xdx=x^n\sin x+nx^{n-1}\cos x-n(n-1)\int x^{n-2}\cos xdx\,,$$

$$\int\frac{1}{\sin^n x}dx=-\frac{1}{n-1}\cdot\frac{\cos x}{\sin^{n-1}x}+\frac{n-2}{n-1}\int\frac{1}{\sin^{n-2}x}dx\,,$$

$$\int\frac{1}{\cos^n x}dx=\frac{1}{n-1}\cdot\frac{\sin x}{\cos^{n-1}x}+\frac{n-2}{n-1}\int\frac{1}{\cos^{n-2}x}dx\,,$$

где $n\in\mathbf{N}$.

Пример 8. $\int\sin^5 xdx$.

$$\blacktriangleleft\ \int\sin^5 xdx=-\frac{1}{5}\sin^4 x\cos x+\frac{4}{5}\int\sin^3 xdx=$$

$$=-\frac{1}{5}\sin^4 x\cos x+\frac{4}{5}\left(-\frac{1}{3}\sin^2 x\cos x+\frac{2}{3}\int\sin xdx\right)=$$

$$=-\frac{1}{5}\sin^4 x\cos x-\frac{4}{15}\sin^2 x\cos x-\frac{8}{15}\cos x+C\,.\blacktriangleright$$

Удобно также применять рекуррентные формулы для вычисления интегралов, в которых подынтегральная функция имеет вид $\mathrm{tg}^n x$ или $\mathrm{ctg}^n x$:

$$\int \mathrm{tg}^n x dx = \frac{1}{n-1}\mathrm{tg}^{n-1}x - \int \mathrm{tg}^{n-2} x dx,$$

$$\int \mathrm{ctg}^n x dx = \frac{1}{1-n}\mathrm{ctg}^{n-1}x - \int \mathrm{ctg}^{n-2} x dx.$$

Иногда на практике удобно вычислять интегралы *методом неопределенных коэффициентов*. В частности, его применяют при вычислении интегралов вида: $\int e^{\alpha x}\sin\beta x dx$, $\int e^{\alpha x}\cos\beta x dx$. Результатом их интегрирования является выражение вида $Ae^{\alpha x}\sin\beta x + Be^{\alpha x}\cos\beta x + C$. Покажем применение данного метода на примере.

Пример 9. $\int e^x \sin 2x dx$.

◄ $\int e^x \sin 2x dx = Ae^x \sin 2x + Be^x \cos 2x + C$.

Для нахождения коэффициентов A и B продифференцируем последнее равенство:

$$e^x \sin 2x = Ae^x \sin 2x + 2Ae^x \cos 2x + Be^x \cos 2x - 2Be^x \sin 2x.$$

Поделим на e^x и приравняем коэффициенты при $\sin 2x$ и $\cos 2x$ в обеих частях:
$$\begin{array}{r|l} \sin 2x & A - 2B = 1, \\ \cos 2x & 2A + B = 0. \end{array}$$

В результате имеем: $A = \frac{1}{5}$, $B = -\frac{2}{5}$. Окончательно

$$\int e^x \sin 2x dx = \frac{1}{5}e^x \sin 2x - \frac{2}{5}e^x \cos 2x + C.$$ ►

Этот метод удобно применять и к интегралам вида

$$\int P_n(x)\cos\beta x dx,\ \int P_n(x)\sin\beta x dx,\ \int P_n(x)e^{\alpha x}dx,$$

$$\int P_n(x)e^{\alpha x}\cos\beta x dx,\ \int P_n(x)e^{\alpha x}\sin\beta x dx.$$

§ 4. Интегрирование дробно-рациональных функций

***Опр.* 1.** *Дробно-рациональной функцией* называется функция вида

$$y=\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}=\frac{a_m x^m+a_{m-1}x^{m-1}+\ldots+a_1x+a_0}{b_n x^n+b_{n-1}x^{n-1}+\ldots+b_1x+b_0},$$

где $m,n\in\mathbf{N}$.

***Опр.* 2.** Дробь $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ называется *правильной*, если $m<n \quad (a_m\neq 0,\, b_n\neq 0)$, и *неправильной,* если $m\geq n$.

Всякую неправильную рациональную дробь $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ можно путем деления числителя на знаменатель представить в виде суммы многочлена $L(x)$ и правильной рациональной дроби $\frac{R_r(x)}{Q_n(x)}$, где $r<n$, то есть $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}=L(x)+\frac{R_r(x)}{Q_n(x)}$.

Например, $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}=\frac{x^4-5x+7}{x-2}$ – неправильная рациональная дробь, так как степень числителя (равна 4) больше степени знаменателя (равна 1). Выделим целую часть, для чего разделим числитель на знаменатель «уголком».

$$\begin{array}{r|l}
-\,x^4-5x+7 & x-2 \\ \cline{2-2}
\underline{x^4-2x^3\quad} & x^3+2x^2+4x+3 \\
-\,2x^3-5x+7 & \\
\underline{2x^3-4x^2\quad} & \\
-\,4x^2-5x+7 & \\
\underline{4x^2-8x\quad} & \\
-\,3x+7 & \\
\underline{3x-6} & \\
13 &
\end{array}$$

Частное $L(x)=x^3+2x^2+4x+3$ и остаток $R(x)=13$.

Сл–но, $\dfrac{x^4-5x+7}{x-2}=x^3+2x^2+4x+3+\dfrac{13}{x-2}$.

***Теорема* 1.** *Всякий многочлен с действительными коэффициентами разлагается на линейные и квадратные множители с действительными коэффициентами, то есть многочлен* $Q_n(x)$ *можно представить в виде*

$$Q_n(x)=b_n(x-x_1)^{k_1}(x-x_2)^{k_2}\cdot\ldots\cdot(x-x_r)^{k_r}\cdot$$
$$\cdot\left(x^2+p_1x+q_1\right)^{s_1}\cdot\ldots\cdot\left(x^2+p_lx+q_l\right)^{s_l}.$$

При этом $k_1+k_2+\ldots+k_r+2(s_1+\ldots+s_l)=n$,

$$D_i=p_i^2-4q_i<0,\quad i=\overline{1,l}.$$

***Опр.* 3.** Дроби вида

$$\frac{A}{x-a}, \tag{I}$$

$$\frac{A}{(x-a)^k}\quad(k>1), \tag{II}$$

$$\frac{Mx+N}{x^2+px+q}\quad\left(p^2-4q<0\right), \tag{III}$$

$$\frac{Mx+N}{\left(x^2+px+q\right)^k}\quad\left(k>1,\quad p^2-4q<0\right) \tag{IV}$$

называются *простейшими* соответственно типов I, II, III и IV.

***Теорема* 2.** *Всякую правильную рациональную дробь* $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, *знаменатель которой разложен на множители*

$$Q(x)=(x-x_1)^{k_1}\cdot\ldots\cdot(x-x_r)^{k_r}\left(x^2+p_1x+q_1\right)^{s_1}\cdot\ldots\cdot\left(x^2+p_lx+q_l\right)^{s_l}$$

, можно представить (и притом единственным образом) в виде суммы простейших дробей:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{P(x)}{\underbrace{(x-x_1)^{k_1}}\cdot\ldots\cdot\underbrace{(x-x_r)^{k_r}}\underbrace{\left(x^2+p_1x+q_1\right)^{s_1}}\cdot\ldots\cdot\underbrace{\left(x^2+p_lx+q_l\right)^{s_l}}}=$$

$$=\underbrace{\frac{A_1}{x-x_1}+\frac{A_2}{(x-x_1)^2}+\ldots+\frac{A_{k_1}}{(x-x_1)^{k_1}}}+\ldots+$$

$$+\underbrace{\frac{B_1}{x-x_2}+\frac{B_2}{(x-x_2)^2}+\ldots+\frac{B_{k_2}}{(x-x_2)^{k_2}}}+$$

$$+\underbrace{\frac{C_1x+D_1}{x^2+p_1x+q_1}+\frac{C_2x+D_2}{\left(x^2+p_1x+q_1\right)^2}+\ldots+\frac{C_{s_1}x+D_{s_1}}{\left(x^2+p_1x+q_1\right)^{s_1}}}+$$

$$+\ldots+\underbrace{\frac{M_1x+N_1}{x^2+p_lx+q_l}+\frac{M_2x+N_2}{\left(x^2+p_lx+q_l\right)^2}+\ldots+\frac{M_{s_l}x+N_{s_l}}{\left(x^2+p_lx+q_l\right)^{s_l}}},\tag{2}$$

где $A_1, A_2, \ldots, B_1, B_2, \ldots, C_1, D_1, \ldots, M_1, N_1, \ldots$ – некоторые действительные коэффициенты.

Проиллюстрируем теорему на примерах:

1) $$\frac{x^2+x+1}{(x-1)(x+3)^3}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-3}+\frac{C}{(x-3)^2}+\frac{D}{(x-3)^3};$$

2) $$\frac{x^2+1}{(x-2)\left(x^2+4\right)\left(x^2+x+3\right)^2}=\frac{A}{x-2}+\frac{Bx+C}{x^2+4}+$$

$$+\frac{Dx+E}{x^2+x+3}+\frac{Mx+N}{\left(x^2+x+3\right)^2}.$$

Для нахождения коэффициентов $A_1, A_2, \ldots, B_1, B_2, \ldots$ в равенстве (2) применяют *метод неопределенных коэффициентов* или *метод частных значений*.

Пример 1. Разложить дробь $\dfrac{7x+4}{(x-3)(x+2)}$ на сумму простейших дробей.

◄ На основании теоремы 2:

$$\frac{7x+4}{(x-3)(x+2)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+2}.$$

Для того чтобы найти неизвестные коэффициенты A и B, приведем дроби в правой части равенства к общему знаменателю, откуда

$$\frac{7x+4}{(x-3)(x+2)} = \frac{A(x+2)+B(x-3)}{(x-3)(x+2)}, \text{ то есть}$$

$$7x+4 = A(x+2)+B(x-3). \qquad (3)$$

Из полученного равенства можно найти коэффициенты A и B двумя способами. Рассмотрим их.

1-й способ. (Метод неопределенных коэффициентов)

Раскроем скобки в правой части равенства и сгруппируем члены с одинаковыми степенями:

$$7x+4 = (A+B)x + (2A-3B).$$

Так как многочлены в обеих частях равенства тождественно равны, то у них должны быть равны коэффициенты при одинаковых степенях переменной x, приравнивая которые, получаем систему двух уравнений: $\begin{cases} A+B=7, \\ 2A-3B=4. \end{cases}$

Решив систему, найдем $A=5,\ B=2.$

2-й способ. (Метод частных значений)

Удобнее всего подставлять значения переменной, обращающие в ноль одну из скобок (в нашем случае это $x=3$ и $x=-2$). Придадим неизвестной x в равенстве (3) частное значение $x=3$. Тогда равенство примет вид

$$7\cdot 3+4=A\cdot\left(3+2\right),\text{ то есть } A=5.$$

Теперь подставим в равенство (3) значение $x=-2$:

$$7\cdot\left(-2\right)+4=B\cdot\left(-2-3\right),\text{ откуда } B=2.$$

Т.о., $\dfrac{7x+4}{\left(x-3\right)\left(x+2\right)}=\dfrac{5}{x-3}+\dfrac{2}{x+2}$. ►

Интегрирование простейших дробей

I. $\displaystyle\int\frac{Adx}{x-a}=A\ln\left|x-a\right|+C.$

II. $\displaystyle\int\frac{Adx}{\left(x-a\right)^k}=\frac{A}{1-k}\cdot\frac{1}{\left(x-a\right)^{k-1}}+C.$

III. При интегрировании дроби III типа $\dfrac{Mx+N}{x^2+px+q}$, где $p^2-4q<0$, в первую очередь выделяют в числителе производную знаменателя $\left(\left(x^2+px+q\right)'=2x+p\right)$:

$$Mx+N=\frac{M}{2}\left(2x+p\right)+N-\frac{Mp}{2}.$$

Таким образом,

$$\int\frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx=\int\frac{\frac{M}{2}\left(2x+p\right)+N-\frac{Mp}{2}}{x^2+px+q}dx=$$

$$=\frac{M}{2}\int\frac{\left(2x+p\right)dx}{x^2+px+q}+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int\frac{dx}{x^2+px+q}.$$

Первый из полученных интегралов равен:

$$\int\frac{\left(2x+p\right)dx}{x^2+px+q}=\int\frac{d\left(x^2+px+q\right)}{x^2+px+q}=\ln\left(x^2+px+q\right).$$

Для вычисления второго из интегралов сначала выделим полный квадрат в знаменателе:

$$x^2+px+q=x^2+2\frac{p}{2}x+\frac{p^2}{4}+q-\frac{p^2}{4}=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right).$$

Введем следующие обозначения: $y=x+\dfrac{p}{2}$ $(\Rightarrow dy=dx)$ и $a=\sqrt{q-\dfrac{p^2}{4}}$. Тогда интеграл $\int\dfrac{dx}{x^2+px+q}$ запишется в виде:

$$\int\frac{dx}{x^2+px+q}=\int\frac{dy}{y^2+a^2}=\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{y}{a}=\frac{1}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}\operatorname{arctg}\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}.$$

Окончательно интеграл от простейшей дроби III типа:

$$\int\frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx=\frac{M}{2}\ln\left(x^2+px+q\right)+\frac{N-\frac{Mp}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}\operatorname{arctg}\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}+C.$$

IV. Если требуется проинтегрировать простейшую дробь IV типа $\int\dfrac{Mx+N}{\left(x^2+px+q\right)^k}$, то сначала, как и для дроби III типа, в числителе выделяют производную от квадратного трехчлена:

$$\int\frac{Mx+N}{\left(x^2+px+q\right)^k}=\frac{M}{2}\int\frac{(2x+p)dx}{\left(x^2+px+q\right)^k}+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int\frac{dx}{x^2+px+q}=$$

$$=\frac{M}{2}\int\frac{d\left(x^2+px+q\right)}{\left(x^2+px+q\right)^k}+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int\frac{dy}{\left(y^2+a^2\right)^k}=$$

$$=\frac{M}{2(1-k)}\frac{1}{\left(x^2+px+q\right)^{k-1}}+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int\frac{dy}{\left(y^2+a^2\right)^k}.$$

Последний интеграл считается с помощью рекуррентной формулы, позволяющей свести его к более простому интегралу:

$$\int \frac{dy}{\left(y^2+a^2\right)^k} = \frac{1}{2(k-1)a^2} \frac{y}{\left(y^2+a^2\right)^{k-1}} + \frac{1}{a^2} \frac{2k-3}{2k-2} \int \frac{dy}{\left(y^2+a^2\right)^{k-1}}.$$

Далее к интегралу $\int \frac{dy}{\left(y^2+a^2\right)^{k-1}}$ снова применяется рекуррентная формула, понижающая степень знаменателя подынтегральной дроби, и так далее, пока не получится табличный интеграл $\int \frac{dy}{y^2+a^2} = \frac{1}{a} \cdot arctg \frac{y}{a} + C$.

Пример 2. $\int \frac{4x+3}{x^2-4x+5}$.

◀ Дискриминант квадратного трехчлена в знаменателе $D = 16 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = -4 < 0$, поэтому данная дробь – простейшая третьего типа. Вычислим производную знаменателя: $\left(x^2-4x+5\right)' = 2x-4$. Выделим в числителе подынтегральной дроби производную знаменателя: $4x+3 = 2(2x-4)+11$ и полный квадрат в знаменателе: $x^2-4x+5 = x^2-4x+4+1 = \left(x-2\right)^2+1$. В результате интеграл примет вид

$$\int \frac{4x+3}{x^2-4x+5} = 2\int \frac{(2x-4)dx}{x^2-4x+5} + 11\int \frac{dx}{(x-2)^2+1} =$$

$$= 2\int \frac{d\left(x^2-4x+5\right)}{x^2-4x+5} + 11\int \frac{d(x-2)}{(x-2)^2+1} = 2\ln\left(x^2-4x+5\right) +$$

$$+ 11\mathrm{arctg}(x-2) + C. \blacktriangleright$$

Пример 3. $\int \frac{(6x-5)dx}{\left(x^2+2x+4\right)^2}$.

◀ Дискриминант квадратного трехчлена отрицателен $(D = -12)$, поэтому данная дробь – простейшая четвертого типа. Производная знаменателя равна $\left(x^2+2x+4\right)' = 2x+2$. Выделим в числителе дроби производную знаменателя:

$6x-5=3(2x+2)-11$ и полный квадрат в знаменателе: $x^2+2x+4=x^2+2x+1+3=(x+1)^2+3$. В результате интеграл примет вид

$$\int\frac{(6x-5)dx}{(x^2+2x+4)^2}=3\int\frac{(2x+2)dx}{(x^2+2x+4)^2}-11\int\frac{dx}{((x+1)^2+3)^2}=$$

$$=\begin{vmatrix} y=x+1 \\ dy=dx \end{vmatrix}=3\int\frac{d(x^2+2x+4)}{(x^2+2x+4)^2}-11\int\frac{dy}{(y^2+3)^2}=$$

$$=-3\frac{1}{x^2+2x+4}-11\int\frac{dy}{(y^2+3)^2}.$$

Последний интеграл вычислим с помощью рекуррентной формулы ($k=2,\ a^2=3$):

$$\int\frac{dy}{(y^2+3)^2}=\frac{1}{2\cdot1\cdot3}\frac{y}{(y^2+3)}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\int\frac{dy}{y^2+3}=\frac{y}{6(y^2+3)}+$$

$$+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{y}{\sqrt{3}}=\frac{x+1}{6(x^2+2x+4)^2}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{\sqrt{3}}.$$

Окончательно интеграл равен

$$\int\frac{(6x-5)dx}{(x^2+2x+4)^2}=-3\frac{1}{x^2+2x+4}-$$

$$-11\left(\frac{x+1}{6(x^2+2x+4)^2}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{\sqrt{3}}\right)+C.\blacktriangleright$$

Пример 4. $\int\frac{dx}{(x^2+1)^4}$.

◄ Данный интеграл вычисляется с помощью рекуррентной формулы ($k=4,\ a^2=1$):

$$\int\frac{dx}{(x^2+1)^4}=\frac{1}{2\cdot3\cdot1}\cdot\frac{x}{(x^2+1)^3}+\frac{5}{6}\int\frac{dx}{(x^2+1)^3}=\left|k=3,\ a^2=1\right|=$$

$$=\frac{1}{6}\cdot\frac{x}{\left(x^2+1\right)^3}+\frac{5}{6}\left(\frac{1}{2\cdot 2\cdot 1}\cdot\frac{x}{\left(x^2+1\right)^2}+\frac{3}{4}\int\frac{dx}{\left(x^2+1\right)^2}\right)=\left|k=2,\right.$$

$$\left.a^2=1\right|=\frac{x}{6\left(x^2+1\right)^3}+\frac{5x}{24\left(x^2+1\right)^2}+\frac{15}{24}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{x}{x^2+1}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2+1}\right)=$$

$$=\frac{x}{6\left(x^2+1\right)^3}+\frac{5x}{24\left(x^2+1\right)^2}+\frac{15x}{48\left(x^2+1\right)}+\frac{15}{48}\operatorname{arctg}x+C\,.\blacktriangleright$$

Интегрирование дробно-рациональных функций сводится к выполнению следующих операций:

1) если дробь неправильная, то выделяют целую часть путем деления «уголком» (целая рациональная функция);
2) правильную дробь раскладывают на сумму простейших;
3) вычисляют интегралы от полученной целой рациональной функции (если дробь была неправильной) и от простейших дробей.

Пример 5. $\int\frac{x^4-4x^3+3x^2+3x}{x^2-5x+6}dx$.

◀ Подынтегральная дробь – неправильная, поэтому выделяем целую часть.

Интеграл примет вид

$$\int\frac{x^4-4x^3+3x^2+3x}{x^2-5x+6}dx=\int\left(x^2+x+2+\frac{7x-12}{x^2-5x+6}\right)dx=$$

$$=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+2x+\int\frac{7x-12}{x^2-5x+6}dx\,.$$

Разложим знаменатель подынтегральной дроби на множители, а всю дробь разложим на сумму простейших дробей:

$$\frac{7x-12}{x^2-5x+6}=\frac{7x-12}{(x-2)(x-3)}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-3}\,.$$

Найдем коэффициенты A и B. Для этого приведем правую часть равенства к общему знаменателю и приравняем полученные числители:

$$7x-12=A(x-3)+B(x-2).$$

Применим метод частных значений.

$$\begin{array}{l|l} x=2 & 2=-A \;\Rightarrow\; A=-2, \\ x=3 & 9=B. \end{array}$$

$$\int\frac{7x-12}{x^2-5x+6}dx=-2\int\frac{dx}{x-2}+9\int\frac{dx}{x-3}=-2\ln|x-2|+9\ln|x-3|+C=$$

$$=\ln\left|\frac{(x-3)^9}{(x-2)^2}\right|+C\,.$$

Окончательно

$$\int\frac{x^4-4x^3+3x^2+3x}{x^2-5x+6}dx=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+2x+\ln\left|\frac{(x-3)^9}{(x-2)^2}\right|+C\,.\blacktriangleright$$

Пример 6. $\int\frac{x^2+5x-2}{(x^2-1)(x+1)}dx\,.$

◀ Подынтегральная дробь правильная, но ее знаменатель не до конца разложен на множители. Сначала преобразуем знаменатель

$$\int\frac{x^2+5x-2}{(x^2-1)(x+1)}dx=\int\frac{x^2+5x-2}{(x-1)(x+1)^2}dx\,.$$

Потом разложим дробь на сумму простейших:

$$\frac{x^2+5x-2}{(x-1)(x+1)^2}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{(x+1)^2}\,.$$

Приводя к общему знаменателю и избавляясь от знаменателей, приходим к равенству

$$x^2+5x-2=A(x+1)^2+B(x-1)(x+1)+C(x-1)\,.$$

Воспользуемся методом частных значений.

При $x=1$: $\quad 4=4A \;\Rightarrow\; A=1\,.$

При $x=-1$: $\quad -6=-2C \;\Rightarrow\; C=3\,.$

Осталось найти коэффициент B. Так как “удобных” частных значений не осталось, дадим переменной x какое-нибудь значение, приводящее к не очень громоздким вычислениям при подстановке.

При $x=0$: $-2=A-B-C \Rightarrow -2=1-B-3 \Rightarrow B=0$.

Интеграл примет вид

$$\int \frac{x^2+5x-2}{(x^2-1)(x+1)}dx=\int \frac{dx}{x-1}+3\int \frac{dx}{(x+1)^2}=\ln|x-1|-\frac{3}{x+1}+C. \blacktriangleright$$

Пример 8. $\int \frac{x^5+2x^3+4x+4}{x^4+2x^3+2x^2}dx$.

◄ Подынтегральная дробь – неправильная, поэтому выделяем целую часть.

Получаем: $\int \frac{x^5+2x^3+4x+4}{x^4+2x^3+2x^2}dx=$

$$=\int \left(x-2+\frac{4x^3+4x^2+4x+4}{x^4+2x^3+2x^2} \right)dx=\frac{x^2}{2}-2x+\int \frac{4x^3+4x^2+4x+4}{x^4+2x^3+2x^2}dx.$$

Разложим правильную рациональную дробь на простейшие:

$$\frac{4x^3+4x^2+4x+4}{x^4+2x^3+2x^2}=\frac{4x^3+4x^2+4x+4}{x^2(x^2+2x+2)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{Cx+D}{x^2+2x+2}$$

Приведем дроби в правой части к общему знаменателю, приравняем числители дробей в обеих частях и найдем *A, B, C, D* методом неопределенных коэффициентов.

$$4x^3+4x^2+4x+4=$$
$$=Ax(x^2+2x+2)+B(x^2+2x+2)+(Cx+D)x^2=$$
$$=(A+C)x^3+(2A+B+D)x^2+(2A+2B)x+2B.$$

Отсюда следует, что

$$\begin{array}{c|c} x^3 & A+C=4, \\ x^2 & 2A+B+D=4, \\ x^1 & 2A+2B=4, \\ x^0 & 2B=4. \end{array}$$

Находим: $B=2,\quad A=0,\quad C=4,\quad D=2$.

$$\int \frac{x^5+2x^3+4x+4}{x^4+2x^3+2x^2}dx = \frac{x^2}{2} - 2x + \int\left(\frac{2}{x^2} + \frac{4x+2}{x^2+2x+2}\right)dx =$$

$$= \frac{x^2}{2} - 2x - \frac{2}{x} + \int \frac{2(2x+2)-2}{x^2+2x+2}dx = \frac{x^2}{2} - 2x - \frac{2}{x} + 2\int \frac{(2x+2)dx}{x^2+2x+2} -$$

$$-2\int \frac{dx}{(x+1)^2+1} = \frac{x^2}{2} - 2x - \frac{2}{x} + 2\int \frac{d(x^2+2x+2)}{x^2+2x+2} -$$

$$-2\int \frac{d(x+1)}{(x+1)^2+1} = \frac{x^2}{2} - 2x - \frac{2}{x} + 2\ln(x^2+2x+2) -$$

$$-2\operatorname{arctg}(x+1) + C. \blacktriangleright$$

§ 5. Интегрирование тригонометрических функций

5.1. Интеграл вида $\int R(\sin x, \cos x)dx$, где $R(\sin x, \cos x)$ – рациональная функция относительно переменных $\sin x$ и $\cos x$, сводится к интегралу от рациональной дроби с помощью *универсальной тригонометрической подстановки* $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$. Тогда

$$x = 2\operatorname{arctg} t, \qquad dx = \frac{2dt}{1+t^2},$$

$$\sin x = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2}} = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\operatorname{tg}^2\frac{x}{2} + 1} = \frac{2t}{t^2+1},$$

$$\cos x = \frac{\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2}} = \frac{1 - \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{\operatorname{tg}^2\frac{x}{2} + 1} = \frac{1-t^2}{t^2+1}.$$

Пример 1. $\int \frac{dx}{3 + \sin x + \cos x}$.

$$◀\ \int\frac{dx}{3+\sin x+\cos x}=\int\frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{3+\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}}=$$

$$=\int\frac{2dt}{3\left(1+t^2\right)+2t+1-t^2}=\int\frac{dt}{t^2+t+2}=\int\frac{dt}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}}=$$

$$=\frac{2}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{2\left(t+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{7}}+C=\frac{2}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1}{\sqrt{7}}+C\ .▶$$

5.2. $\int R(\sin x)\cos x dx=\begin{vmatrix} t=\sin x \\ dt=\cos x dx\end{vmatrix}=\int R(t)dt$.

$$\int R(\cos x)\sin x dx=\begin{vmatrix} t=\cos x \\ dt=-\sin x dx\end{vmatrix}=-\int R(t)dt\ .$$

Пример 2. $\int\frac{\sin^3 x dx}{\cos x-3}$.

◀ Данный интеграл легко сводится к виду $\int R(\cos x)\sin x dx$:

$$\int\frac{\sin^3 x dx}{\cos x-3}=\int\frac{\sin^2 x\cdot\sin x\, dx}{\cos x-3}=\int\frac{\left(1-\cos^2 x\right)\cdot\sin x\, dx}{\cos x-3}=$$

$$=\begin{vmatrix} t=\cos x \\ dt=-\sin x dx\end{vmatrix}=\int\frac{\left(t^2-1\right)}{t-3}dt=\int\left(t+3+\frac{8}{t-3}\right)dt=$$

$$=\frac{t^2}{2}+3t+8\ln|t-3|+C=\frac{\cos^2 x}{2}+3\cos x+8\ln|\cos x-3|+C\ .$$

▶

5.3. $\int R(\operatorname{tg}x)dx$ или подынтегральная функция содержит $\cos x$ и $\sin x$ только в четных степенях, то применяется подстановка

$$t=\mathrm{tg}x \Rightarrow x=\mathrm{arctg}t \Rightarrow dx=\frac{dt}{1+t^2},$$

$$\cos^2 x=\frac{1}{1+\mathrm{tg}^2 x}=\frac{1}{1+t^2},$$

$$\sin^2 x=\frac{\mathrm{tg}^2 x}{1+\mathrm{tg}^2 x}=\frac{t^2}{1+t^2}.$$

После подстановки получим интеграл от рациональной функции.

Пример 3. $\int\frac{dx}{1+\sin^2 x}$.

$$◀\ \int\frac{dx}{1+\sin^2 x}=\left|\begin{array}{ll} t=\mathrm{tg}x & \sin^2 x=\dfrac{t^2}{1+t^2} \\ x=\mathrm{arctg}t & dx=\dfrac{dt}{1+t^2}\end{array}\right|=$$

$$=\int\frac{dt}{(1+t^2)\left(1+\dfrac{t^2}{1+t^2}\right)}=\int\frac{dt}{2t^2+1}=\int\frac{dt}{\left(\sqrt{2}t\right)^2+1}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{arctg}\left(\sqrt{2}t\right)+C=\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{arctg}\left(\sqrt{2}\mathrm{tg}x\right)+C\ ►$$

Замечание. В частности, данную подстановку целесообразно применять к интегралам вида

$$\int\frac{dx}{a\sin^2 x+b\sin x\cos x+c\cos^2 x+d}.$$

5.4. Рассмотрим интеграл вида $\int\sin^m x\cos^n x dx\ \ (m,n\in\mathbf{Z})$.

Возможны три различных случая.

1. $\int\sin^m x\cos^n x dx$, где m и n таковы, что по крайней мере одно из них нечетное. Для определенности пусть n – нечетное, то есть его можно записать в виде $n=2p+1,\ p\in\mathbf{Z}$. Преобразуем интеграл:

$$\int \sin^m x \cos^n x dx = \int \sin^m x \cos^{2p+1} x dx = \int \sin^m x \cos^{2p} x \cos x dx =$$

$$= \int \sin^m x \left(1-\sin^2 x\right)^p \cos x dx = \begin{vmatrix} t = \sin x \\ dt = \cos x dx \end{vmatrix} = \int t^m \left(1-t^2\right)^p dt .$$

Последний интеграл есть интеграл от рациональной функции переменной t.

Пример 4. $\int \frac{\sin^5 x dx}{\cos^2 x}$.

$$◄ \int \frac{\sin^5 x dx}{\cos^2 x} = \int \frac{\sin^4 x \sin x dx}{\cos^2 x} = \int \frac{\left(1-\cos^2 x\right)^2 \sin x dx}{\cos^2 x} =$$

$$= \begin{vmatrix} t = \cos x \\ dt = -\sin x dx \end{vmatrix} = -\int \frac{\left(1-t^2\right)^2 dt}{t^2} = -\int \left(\frac{1}{t^2} - 2 + t^2\right) dt =$$

$$= \frac{1}{t} + 2t - \frac{t^3}{3} + C = \frac{1}{\cos x} + 2\cos x - \frac{\cos^3 x}{3} + C . ►$$

2. $\int \sin^m x \cos^n x dx$, где $m = 2p, n = 2q, \quad p, q \in \mathbf{N} \cup \{0\}$. Для вычисления интеграла используем формулы понижения степени:

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}, \quad \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2} .$$

Подставим эти выражения в интеграл:

$$\int \sin^{2p} x \cos^{2q} x dx = \int \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^p \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^q dx .$$

Возводя в степень и раскрывая скобки, получаем члены, содержащие $\cos 2x$ в четных и нечетных степенях. Члены с нечетными показателями интегрируются, как показано в п. **1**, а слагаемые с четными степенями опять преобразуются по формулам понижения степени.

Пример 5. $\int \sin^6 x dx$.

$$◄ \int \sin^6 x dx = \int \left(\sin^2 x\right)^3 dx = \frac{1}{8} \int \left(1-\cos 2x\right)^3 dx =$$

$$=\frac{1}{8}\int\left(1-3\cos 2x+3\cos^2 2x-\cos^3 2x\right)dx=\frac{x}{8}-\frac{3}{8}\cdot\frac{\sin 2x}{2}+$$

$$+\frac{3}{8}\cdot\frac{1}{2}\int(1+\cos 4x)dx-\frac{1}{8}\int\left(1-\sin^2 2x\right)\cos 2xdx=\frac{x}{8}-\frac{3\sin 2x}{16}+$$

$$+\frac{3x}{16}+\frac{3}{16}\cdot\frac{\sin 4x}{4}-\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{2}\int\left(1-\sin^2 2x\right)d(\sin 2x)=\frac{5x}{16}-\frac{3\sin 2x}{16}+$$

$$+\frac{3\sin 4x}{64}-\frac{1}{16}\sin 2x+\frac{1}{16}\cdot\frac{\sin^3 2x}{3}+C=\frac{5x}{16}-\frac{\sin 2x}{4}+\frac{3\sin 4x}{64}+$$

$$+\frac{\sin^3 2x}{48}+C.\blacktriangleright$$

3. $\int\sin^m x\cos^n xdx$. Оба показателя четные, но хотя бы один из них отрицательный. В этом случае делают замену $t=\text{tg}x$.

Пример 6. $\int\frac{\sin^2 xdx}{\cos^4 x}$.

$$\blacktriangleleft\ \int\frac{\sin^2 xdx}{\cos^4 x}=\int\frac{\sin^2 x\cdot 1dx}{\cos^4 x}=\int\frac{\sin^2 x\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)dx}{\cos^4 x}=$$

$$=\int\text{tg}^2x\left(\text{tg}^2x+1\right)dx=\left|\begin{array}{c} t=tgx\\ x=\text{arctg}t\\ dx=\dfrac{dt}{1+t^2}\end{array}\right|=\int t^2\left(t^2+1\right)\frac{dt}{1+t^2}=\int t^2dt=$$

$$=\frac{t^3}{3}+C=\frac{\text{tg}^3x}{3}+C.\blacktriangleright$$

5.5. Интегралы вида: $\int\cos mx\cos nxdx$, $\int\sin mx\sin nxdx$, $\int\cos mx\sin nxdx$, где $m\neq n$, вычисляются с помощью формул тригонометрии:

$$\cos mx\cdot\cos nx=\frac{1}{2}\left(\cos(m+n)x+\cos(m-n)x\right),$$

$$\sin mx \cdot \sin nx = \frac{1}{2}\left(\cos(m-n)x - \cos(m+n)x\right),$$

$$\sin mx \cdot \cos nx = \frac{1}{2}\left(\sin(m+n)x + \sin(m-n)x\right).$$

Пример 7. $\int \cos 5x \cdot \cos 2x dx$.

◄ $\int \cos 5x \cdot \cos 2x dx = \frac{1}{2}\int (\cos 7x + \cos 3x) dx = \frac{1}{14}\sin 7x +$

$+\frac{1}{6}\sin 3x + C$.►

§ 6. Интегрирование иррациональных функций

Основным методом вычисления интегралов от иррациональных функций является сведение их к интегралам от рациональных функций.

6.1. Интегралы вида $\int \frac{Mx+N}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx$.

В первую очередь выделяют в числителе производную знаменателя $\left(\left(ax^2+bx+c\right)' = 2ax+b\right)$: $Mx+N = \frac{M}{2a}(2ax+b) + N - \frac{Mb}{2a}$.

Т.о., $\int \frac{Mx+N}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx = \int \frac{\frac{M}{2a}(2ax+b) + N - \frac{Mb}{2a}}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx =$

$$= \frac{M}{2a}\int \frac{(2ax+b)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} + \left(N - \frac{Mb}{2a}\right)\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}.$$

Первый из полученных интегралов равен:

$$\int \frac{(2ax+p)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \int \frac{d\left(ax^2+bx+c\right)}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = 2\sqrt{ax^2+bx+c}.$$

Для вычисления второго из интегралов сначала выделяем полный квадрат в знаменателе. С помощью замены переменной

$z = x + \dfrac{b}{2a}$ второй интеграл приводится к одному из двух табличных интегралов: $\int \dfrac{dz}{\sqrt{z^2 \pm a^2}}$, $\int \dfrac{dz}{\sqrt{a^2 - z^2}}$.

Пример 1. $\int \dfrac{x+4}{\sqrt{6-2x-x^2}}dx$.

◄ $$\int \frac{x+4}{\sqrt{6-2x-x^2}}dx = \left| \left(6-2x-x^2\right)' = -2-2x \right| =$$

$$= -\frac{1}{2}\int \frac{-2-2x-6}{\sqrt{6-2x-x^2}}dx = -\frac{1}{2}\int \frac{(-2-2x)dx}{\sqrt{6-2x-x^2}} + 3\int \frac{dx}{\sqrt{6-2x-x^2}} =$$

$$= -\frac{1}{2}\int \frac{d\left(6-2x-x^2\right)}{\sqrt{6-2x-x^2}} + 3\int \frac{dx}{\sqrt{7-\left(x^2+2x+1\right)}} = -\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{6-2x-x^2} +$$

$$+ 3\int \frac{dx}{\sqrt{7-(x+1)^2}} = -\sqrt{6-2x-x^2} + 3\arcsin\frac{x+1}{\sqrt{7}} + C. \text{►}$$

6.2. Интеграл вида $\int R\left(x, x^{\frac{k}{r}}, x^{\frac{p}{q}}, \ldots, x^{\frac{h}{s}}\right)dx$,

где $k, r, p, q, \ldots, s \in \mathbf{Z}$. Для вычисления интеграла используется замена: $x = t^n$, где n – наименьшее общее кратное чисел $r, q, \ldots, s$ (иначе: n – наименьший общий знаменатель дробей $\dfrac{k}{r}, \dfrac{p}{q}, \ldots, \dfrac{h}{s}$). Тогда $dx = nt^{n-1}dt$. В результате подстановки получим интеграл от дробно-рациональной функции.

Пример 2. $\int \dfrac{\sqrt{x}-1}{2\sqrt{x}-x}dx$.

◄ Интеграл зависит от x и от $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$, поэтому применим подстановку: $x = t^2$.

$$\int \frac{\sqrt{x}-1}{2\sqrt{x}-x}dx = \begin{vmatrix} x = t^2 \\ dx = 2tdt \end{vmatrix} = \int \frac{(t-1)2tdt}{2t-t^2} = -2\int \frac{t^2-t}{t^2-2t}dt =$$

$$= -2\int \left(1+\frac{t}{t^2-2t}\right)dt = -2\frac{t^2}{2} - 2\int \frac{dt}{t-2} = -t^2 - 2\ln|t-2| + C =$$

$$= -x - 2\ln\left|\sqrt{x}-2\right| + C\ .\blacktriangleright$$

6.3. Интеграл вида

$$\int R\left[x, (ax+b)^{\frac{k}{r}}, (ax+b)^{\frac{p}{q}}, \ldots, (ax+b)^{\frac{h}{s}}\right]dx,$$

где $k, r, p, q, \ldots, s \in \mathbf{Z}$. Для вычисления интеграла используется замена: $ax+b=t^n$, где n – наименьшее общее кратное чисел $r, q, \ldots, s$.

Пример 3. $\int \frac{x+\sqrt{x+1}}{\sqrt[3]{x+1}}dx$.

◄ Подынтегральное выражение зависит от $\sqrt{x+1} = (x+1)^{\frac{1}{2}}$ и $\sqrt[3]{x+1} = (x+1)^{\frac{1}{3}}$. Наименьшим общим кратным чисел 2 и 3 является число 6, поэтому применим замену: $x+1=t^6$.

$$\int \frac{x+\sqrt{x+1}}{\sqrt[3]{x+1}}dx = \begin{vmatrix} x+1 = t^6 \\ dx = 6t^5dt \end{vmatrix} = \int \frac{t^6-1+t^3}{t^2}6t^5dt =$$

$$= 6\int \left(t^9+t^6-t^3\right)dt = 6\left(\frac{t^{10}}{10}+\frac{t^7}{7}-\frac{t^4}{4}\right) + C = 6t^4\left(\frac{t^6}{10}+\frac{t^3}{7}-\frac{1}{4}\right) +$$

$$+ C = 6\sqrt[3]{(x+1)^2}\left(\frac{x+1}{10}+\frac{\sqrt{x+1}}{7}-\frac{1}{4}\right) + C\ .\blacktriangleright$$

6.4. Интеграл вида

$$\int R\left[x,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{k}{r}},\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p}{q}},\ldots,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{h}{s}}\right]dx,$$

где $k,r,p,q,\ldots,s\in\mathbf{Z}$. Для вычисления интеграла используется замена: $\dfrac{ax+b}{cx+d}=t^n$, где n – наименьшее общее кратное чисел $r,q,\ldots,s$.

Пример 4. $\displaystyle\int\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\frac{dx}{(1-x)^2}$.

◀ Для нахождения интеграла воспользуемся заменой $\dfrac{1+x}{1-x}=t^2$. Выразим x: $1+x=t^2-t^2x\Rightarrow x\left(1+t^2\right)=t^2-1\Rightarrow$ $\Rightarrow x=\dfrac{t^2-1}{t^2+1}$. Найдем dx: $dx=\dfrac{2t\left(t^2+1\right)-2t\left(t^2-1\right)}{\left(t^2+1\right)^2}dt=\dfrac{4tdt}{\left(t^2+1\right)^2}$.

Тогда $\displaystyle\int\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\frac{dx}{(1-x)^2}=\int\frac{t\cdot 4tdt}{\left(1-\dfrac{t^2-1}{t^2+1}\right)^2\left(t^2+1\right)^2}=$

$$=4\int\frac{t^2dt}{\dfrac{\left(t^2+1-t^2+1\right)^2}{\left(t^2+1\right)^2}\left(t^2+1\right)^2}=\int t^2dt=\frac{t^3}{3}+C==\sqrt{\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^3}+C.$$

▶

6.5. Если подынтегральное выражение представляет собой *дифференциальный бином*, то есть имеет вид $x^m\left(a+bx^n\right)^p dx$, где $m,n,p\in\mathbf{Q}$, то данный интеграл сводится к интегралу от рациональной дроби в следующих трех случаях (подстановки П.Л. Чебышева):

1) $p \in \mathbf{Z}$; тогда интеграл можно рационализовать с помощью подстановки $x = t^k$, где k – наименьший общий знаменатель дробей m и n;

2) $\frac{m+1}{n} \in \mathbf{Z}$; тогда интеграл рационализуется с помощью подстановки $a + bx^n = t^k$, где k – знаменатель числа p;

3) $\left(\frac{m+1}{n} + p\right) \in \mathbf{Z}$; в этом случае рационализация достигается подстановкой $a + bx^{-n} = t^k$, где k – знаменатель числа p.

Пример 5. $\int \frac{x^2 dx}{\left(1+\sqrt{x}\right)^2}$.

◄ $\int \frac{x^2 dx}{\left(1+\sqrt{x}\right)^2} = \int x^2 \left(1+\sqrt{x}\right)^{-2} dx$.

Так как $p = -2$, имеем случай 1. Применим замену: $x = t^2$ ($m = 2, n = \frac{1}{2}$, наименьший знаменатель этих чисел $k = 2$). Тогда $dx = 2tdt$.

$$\int \frac{x^2 dx}{\left(1+\sqrt{x}\right)^2} = 2\int \frac{t^5 dt}{(t+1)^2} = 2\int \left(t^3 - 2t^2 + 3t - 4 + \frac{5t+4}{(t+1)^2}\right) dt =$$

$$= \frac{t^4}{2} - \frac{4t^3}{3} + 3t^2 - 8t + 2\int \left(\frac{5}{t+1} - \frac{1}{(t+1)^2}\right) dt = \frac{t^4}{2} - \frac{4t^3}{3} + 3t^2 -$$

$$- 8t + 10\ln|t+1| + \frac{2}{t+1} + C = \frac{x^2}{2} - \frac{4\sqrt{x^3}}{3} + 3x - 8\sqrt{x} +$$

$$+ 10\ln\left(\sqrt{x}+1\right) + \frac{2}{\sqrt{x}+1} + C. \blacktriangleright$$

Замечание 1. При $p \in \mathbf{N}$ интеграл от дифференциального бинома приводится к интегралам от степенных функций путем возведения в степень и раскрытия скобок.

Пример 6. $\int \sqrt{x}\left(2+\sqrt[3]{x}\right)^2 dx$.

◀ $p=2$. Возведем сумму $2+\sqrt[3]{x}$ в квадрат и умножим на $\sqrt{x}$. Тогда

$$\int \sqrt{x}\left(2+\sqrt[3]{x}\right)^2 dx = \int \left(4\sqrt{x}+4\sqrt[6]{x^5}+\sqrt[6]{x^7}\right)dx = \frac{8}{3}\sqrt{x^3}+\frac{24}{11}\sqrt[6]{x^{11}}+$$
$$+\frac{6}{13}\sqrt[6]{x^{13}}+C.$$ ▶

Пример 7. $\int \frac{dx}{x\sqrt[4]{1+x^3}}$.

◀ $\int \frac{dx}{x\sqrt[4]{1+x^3}} = \int x^{-1}\left(1+x^3\right)^{-\frac{1}{4}} dx$,

$m=-1,\ n=3,\ p=-\frac{1}{4},\ \frac{m+1}{n}=0$ – целое число. Имеем случай **2)**. Делаем подстановку: $1+x^3=t^4$. Тогда $x=\sqrt[3]{t^4-1}$ и $dx=\frac{4t^3}{3\sqrt[3]{\left(t^4-1\right)^2}}dt$. В результате интеграл примет вид:

$$\int \frac{dx}{x\sqrt[4]{1+x^3}} = \int \frac{4t^3}{3\sqrt[3]{\left(t^4-1\right)^2}\sqrt[3]{t^4-1}\,t}dt = \frac{4}{3}\int \frac{t^2dt}{t^4-1} =$$

$$=\frac{2}{3}\int \frac{2t^2dt}{\left(t^2-1\right)\left(t^2+1\right)} = \frac{2}{3}\int \frac{\left(t^2+1\right)+\left(t^2-1\right)}{\left(t^2-1\right)\left(t^2+1\right)}dt = \frac{2}{3}\int \frac{dt}{t^2-1}+$$

$$+\frac{2}{3}\int \frac{dt}{t^2+1} = \frac{1}{3}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + \frac{2}{3}\operatorname{arctg} t + C = \frac{1}{3}\ln\left|\frac{\sqrt[4]{x^3+1}-1}{\sqrt[4]{x^3+1}+1}\right|+$$

$$+\frac{2}{3}\operatorname{arctg}\sqrt[4]{x^3+1}+C\,.\blacktriangleright$$

Пример 8. $\int\frac{dx}{x^2\sqrt{\left(1+x^2\right)^3}}$.

$$\blacktriangleleft\ \int\frac{dx}{x^2\sqrt{\left(1+x^2\right)^3}}=\int x^{-2}\left(1+x^2\right)^{-\frac{3}{2}}dx\,,$$

$m=-2,\,n=2,\,p=-\frac{3}{2},\quad \frac{m+1}{n}+p=-2\in\mathbf{Z}$. Имеем случай **3**).

Делаем подстановку: $1+x^{-2}=t^2$. Откуда $x^2=\frac{1}{t^2-1}$ и $2xdx=\frac{-2tdt}{\left(t^2-1\right)^2}$. Преобразуем интеграл:

$$\int\frac{dx}{x^2\sqrt{\left(1+x^2\right)^3}}=\int x^{-2}\left(1+x^2\right)^{-\frac{3}{2}}dx=\int x^{-2}\left(1+x^{-2}\right)^{-\frac{3}{2}}x^{-3}dx=$$

$$=\int x^{-6}\left(1+x^{-2}\right)^{-\frac{3}{2}}xdx=\int\left(t^2-1\right)^3t^{-3}\frac{-tdt}{\left(t^2-1\right)^2}=-\int\frac{\left(t^2-1\right)dt}{t^2}=$$

$$=\int\frac{dt}{t^2}-\int dt=-\frac{1}{t}-t+C=-\frac{1}{\sqrt{1+x^{-2}}}-\sqrt{1+x^{-2}}+C=$$

$$=-\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}-\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}+C\,.\blacktriangleright$$

Пример 9. $\int x^2\sqrt{1+x^4}\,dx$.

$\blacktriangleleft$ $m=2,\,n=4,\,p=\frac{1}{2}$ – не целое число, первый случай не подходит, $\frac{m+1}{n}=\frac{3}{4}$ – не целое и $\frac{m+1}{n}+p=\frac{5}{4}$ – не целое, поэтому второй и третий случаи не подходят тоже. Интеграл не может быть выражен через элементарные функции.▶

6.6. Интеграл вида

$$\int \frac{P_n(x)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}, \tag{4}$$

где $P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$.

Применяется формула:

$$\int \frac{P_n(x)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = Q_{n-1}(x)\sqrt{ax^2+bx+c} + \lambda \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}, \tag{5}$$

где $Q_{n-1}(x) = b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \ldots + b_1 x + b_0$.

Чтобы найти коэффициенты $b_{n-1}, b_{n-2}, \ldots, b_1, b_0, \lambda$, записывают для интеграла (4) равенство (5) с неопределенными коэффициентами и дифференцируют его. Полученное выражение умножают на $\sqrt{ax^2+bx+c}$. Тем самым освобождаются от дробей и корней. Затем приравнивают коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и правой частях равенства. Решая полученную систему, находят коэффициенты

$$b_{n-1}, b_{n-2}, \ldots, b_1, b_0, \lambda.$$

Пример 10. $\int \frac{(x^2+1)dx}{\sqrt{x^2+2x+2}}$.

◀ По формуле (5) получим равенство:

$$\int \frac{(x^2+1)dx}{\sqrt{x^2+2x+2}} = (ax+b)\sqrt{x^2+2x+2} + \lambda \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+2}}. \tag{6}$$

Дифференцируем его:

$$\frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+2x+2}} = a\sqrt{x^2+2x+2} + \frac{(ax+b)(x+1)}{\sqrt{x^2+2x+2}} + \frac{\lambda}{\sqrt{x^2+2x+2}}.$$

Умножим обе части последнего равенства на $\sqrt{x^2+2x+2}$:

$$x^2+1 = a(x^2+2x+2) + (ax+b)(x+1) + \lambda.$$

Приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях x слева и справа:

$$\begin{array}{c|c} x^2 & 1 = 2a, \\ x^1 & 0 = 3a + b, \\ x^0 & 1 = 2a + b + \lambda. \end{array}$$

Решая систему, находим $a = \frac{1}{2}$, $b = -\frac{3}{2}$, $\lambda = \frac{3}{2}$. Подставляем найденные коэффициенты в (6):

$$\int \frac{\left(x^2+1\right)dx}{\sqrt{x^2+2x+2}} = \left(\frac{1}{2}x - \frac{3}{2}\right)\sqrt{x^2+2x+2} + \frac{3}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+2}} =$$

$$= \left(\frac{1}{2}x - \frac{3}{2}\right)\sqrt{x^2+2x+2} + \frac{3}{2}\int \frac{d(x+1)}{\sqrt{(x+1)^2+1}} =$$

$$= \left(\frac{1}{2}x - \frac{3}{2}\right)\sqrt{x^2+2x+2} + \frac{3}{2}\ln\left|x+1+\sqrt{x^2+2x+2}\right| + C. ►$$

Замечание 2. Интеграл вида $\int P_n(x)\sqrt{ax^2+bx+c}\,dx$ приводится к интегралу (4) умножением и делением на $\sqrt{ax^2+bx+c}$.

6.7. Интеграл вида

$$\int \frac{P_n(x)dx}{(x-\alpha)^m\sqrt{ax^2+bx+c}}, \tag{7}$$

где $P_n(x)$ – многочлен степени n. Возможны два случая:

1) $n < m$. Интеграл приводится к виду (4) с помощью подстановки $x - \alpha = \frac{1}{t}$;

2) $n \geq m$. У дроби $\frac{P_n(x)}{(x-\alpha)^m}$ выделяется целая часть, после чего получаем интегралы вида (4) и (7) в случае $n < m$.

Пример 11. $\int \frac{x^2dx}{(x-1)\sqrt{x^2+2x+3}}$.

◀ $n=2, m=1, n>m$. Выделяем целую часть у дроби $\frac{x^2}{x-1}=\frac{x^2-1+1}{x-1}=x+1+\frac{1}{x-1}$. Тогда интеграл примет вид:

$$\int \frac{x^2dx}{(x-1)\sqrt{x^2+2x+3}}=\int \frac{(x+1)dx}{\sqrt{x^2+2x+3}}+\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2+2x+3}}.$$

Первый интеграл вычисляется как в п. **6.1**:

$$\int \frac{(x+1)dx}{\sqrt{x^2+2x+3}}=\left|\left(x^2+2x+3\right)'=2x+2\right|=\frac{1}{2}\int \frac{d\left(x^2+2x+3\right)}{\sqrt{x^2+2x+3}}=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{x^2+2x+3}+C=\sqrt{x^2+2x+3}+C.$$

Второй интеграл с помощью замены $x-1=\frac{1}{t}$

$\left(x=\frac{t+1}{t}\Rightarrow dx=-\frac{dt}{t^2}\right)$ приводится к виду:

$$\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2+2x+3}}=-\int \frac{dt}{\sqrt{6t^2+4t+1}},$$

который выделением полного квадрата приводится к таблично-му интегралу:

$$\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2+2x+3}}=-\int \frac{dt}{\sqrt{6t^2+4t+1}}=-\frac{1}{\sqrt{6}}\int \frac{dt}{\sqrt{t^2+\frac{2}{3}t+\frac{1}{6}}}=$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{6}}\int \frac{dt}{\sqrt{\left(t+\frac{1}{3}\right)^2+\frac{1}{18}}}=-\frac{1}{\sqrt{6}}\ln\left|t+\frac{1}{3}+\sqrt{\left(t+\frac{1}{3}\right)^2+\frac{1}{18}}\right|+C=$$

$$-\frac{1}{\sqrt{6}}\ln\left|\frac{1}{x-1}+\frac{1}{3}+\sqrt{\left(\frac{1}{x-1}+\frac{1}{3}\right)^2+\frac{1}{18}}\right|+C.$$

Окончательно

$$\int\frac{x^2dx}{(x-1)\sqrt{x^2+2x+3}}=\sqrt{x^2+2x+3}-$$
$$-\frac{1}{\sqrt{6}}\left(\ln\left|x+2+\sqrt{3x^2+6x+9}\right|-\ln|3(x-1)|\right)+C. \blacktriangleright$$

6.8. Тригонометрические подстановки.

Интегралы типа

$$\int R\left(x,\sqrt{a^2-x^2}\right)dx,\ \int R\left(x,\sqrt{a^2+x^2}\right)dx,\ \int R\left(x,\sqrt{x^2-a^2}\right)dx$$

приводятся к интегралам от функций, рационально зависящих от тригонометрических функций, с помощью *тригонометрических подстановок*: для первого интеграла – $x=a\sin t$ (или $x=a\cos t$); для второго – $x=a\,\mathrm{tg}t$ (или $x=a\,\mathrm{ctg}t$) и для третьего – $x=\dfrac{a}{\sin t}$ (или $x=\dfrac{a}{\cos t}$).

6.9. Интегралы типа $\int R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$.

Выделив под радикалом полный квадрат и сделав замену $t=x+\dfrac{b}{2a}$ $(\Rightarrow dx=dt)$, интегралы указанного типа приводим к интегралам вида $\int R\left(x,\sqrt{a^2-x^2}\right)dx$, $\int R\left(x,\sqrt{a^2+x^2}\right)dx$, $\int R\left(x,\sqrt{x^2-a^2}\right)dx$. Эти интегралы вычисляются с помощью соответствующих тригонометрических подстановок.

Пример 12. $\displaystyle\int\frac{\sqrt{x^2-4x-5}}{(x-2)}dx$.

$$\blacktriangleleft\ \int\frac{\sqrt{x^2-4x-5}}{(x-2)}dx=\int\frac{\sqrt{(x-2)^2-9}}{(x-2)}dx=\begin{vmatrix}t=x-2\\ dt=dx\end{vmatrix}=$$

$$= \int \frac{\sqrt{t^2-9}}{t}\,dt = \left| \begin{array}{c} t = \dfrac{3}{\cos z} \\ dt = \dfrac{3\sin z}{\cos^2 z}\,dz \\ z = \arccos\dfrac{3}{t} \end{array} \right| = 3\int \frac{\sin^2 z dz}{\cos^2 z} = 3\int \frac{1-\cos^2 z dz}{\cos^2 z} =$$

$$= 3\int \frac{dz}{\cos^2 z} - 3\int dz = 3\mathrm{tg}z - 3z + C = 3\mathrm{tg}\left(\arccos\frac{3}{t}\right) - 3\arccos\frac{3}{t} +$$

$$+ \tilde{N} = \sqrt{t^2-9} - 3\arccos\frac{3}{t} + C =$$

$$= \sqrt{x^2-4x-5} - 3\arccos\frac{3}{x-2} + C\ .\blacktriangleright$$

О «неберущихся» интегралах

До сих пор рассматривались классы интегрируемых функций. Но можно привести многочисленные примеры интегралов от элементарных функций, которые существуют, но не выражаются через элементарные функции. Например,

$\int e^{-x^2}dx$ – интеграл Пуассона,

$\int \frac{\sin x}{x}dx$ – интегральный синус,

$\int \frac{\cos x}{x}dx$ – интегральный косинус,

$\int \frac{dx}{\ln x}$ – интегральный логарифм,

$\left.\begin{array}{l} \int \cos x^2 dx \\ \int \sin x^2 dx \end{array}\right\}$ – интегралы Френеля,

$\int \sqrt{1-k^2\sin^2 x}dx, \quad k \neq 0;1.$

Обобщим результаты интегрирования иррациональных выражений в табл. 3.

Таблица 3

Интегрирование иррациональных варажений

Вид выражения. Метод интегрирования
$\int \frac{Mx+N}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$ Выделить в числителе производную знаменателя $\left(\left(ax^2+bx+c\right)'=2ax+b\right)\quad Mx+N=\frac{M}{2a}(2ax+b)+N-\frac{Mb}{2a}$
$\int R\left(x, x^{\frac{k}{r}}, x^{\frac{p}{q}}, \ldots, x^{\frac{h}{s}}\right)dx$, $k, r, p, q, \ldots, s \in \mathbf{Z}$ Замена $x=t^n$, где n – НОК чисел $r, q, \ldots, s$
$\int R\left[x, (ax+b)^{\frac{k}{r}}, (ax+b)^{\frac{p}{q}}, \ldots, (ax+b)^{\frac{h}{s}}\right]dx$, $k, r, p, q, \ldots, s \in \mathbf{Z}$ Замена $ax+b=t^n$, где n – НОК чисел $r, q, \ldots, s$
$\int R\left[x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{k}{r}}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p}{q}}, \ldots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{h}{s}}\right]dx$, $k, r, p, q, \ldots, s \in \mathbf{Z}$ Замена $\frac{ax+b}{cx+d}=t^n$, где n – НОК чисел $r, q, \ldots, s$
$\int x^m\left(a+bx^n\right)^p dx$, $m, n, p \in \mathbf{Q}$ 1) $p \in \mathbf{Z}$; подстановка $x=t^k$, где k – наименьший общий знаменатель дробей m и n;   2) $\frac{m+1}{n} \in \mathbf{Z}$; подстановка $a+bx^n=t^k$, где k – знаменатель числа p;

Окончание таблицы 3

<table>
<tr><td>3) $\left(\dfrac{m+1}{n}+p\right)\in \mathbf{Z}$; подстановка $a+bx^{-n}=t^{k}$, где k – знаменатель числа p</td></tr>
<tr><td>$\int \dfrac{P_n(x)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$, где $P_n(x)=a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1 x+a_0$
Применяется формула:
$\int \dfrac{P_n(x)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = Q_{n-1}(x)\sqrt{ax^2+bx+c}+\lambda\int \dfrac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$,
где $Q_{n-1}(x)=b_{n-1}x^{n-1}+b_{n-2}x^{n-2}+\ldots+b_1 x+b_0$ – многочлен с неопределенными коэффициентами</td></tr>
<tr><td>$\int \dfrac{P_n(x)dx}{(x-\alpha)^m\sqrt{ax^2+bx+c}}$,
где $P_n(x)$ – многочлен степени n
1) $n<m$ – подстановка $x-\alpha=\dfrac{1}{t}$;
2) $n\ge m$ – у дроби $\dfrac{P_n(x)}{(x-\alpha)^m}$ выделить целую часть</td></tr>
<tr><td>$\int R\left(x,\sqrt{a^2-x^2}\right)dx$, $\int R\left(x,\sqrt{a^2+x^2}\right)dx$, $\int R\left(x,\sqrt{x^2-a^2}\right)dx$
Подстановока: для первого интеграла – $x=a\sin t$ (или $x=a\cos t$); для второго – $x=a\,\mathrm{tg}t$ (или $x=a\,\mathrm{ctg}t$) и для третьего – $x=\dfrac{a}{\sin t}$ (или $x=\dfrac{a}{\cos t}$)</td></tr>
<tr><td>$\int R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$
Выделив под радикалом полный квадрат и сделать замену
$t=x+\dfrac{b}{2a}$</td></tr>
</table>

Представление о том, как с помощью элементарных функций можно представить и вычислить «неберущиеся» интегралы можно будет получить в разделе «Ряды».

§ 7. Определенный интеграл. Свойства определенного интеграла. Формула Ньютона - Лейбница

7.1. Понятие определенного интеграла

Пусть функция $y = f(x)$ определена и ограничена на отрезке $[a,b]$ и на этом отрезке произвольно выбраны точки $x_0, x_1, \ldots, x_n$ так, что $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$, то есть выбрано разбиение отрезка $[a,b]$ на n частей. В каждом отрезке $[x_{i-1}, x_i]$ $\left(i = \overline{1,n}\right)$ произвольным образом выбрана точка ξ_i $\left(i = \overline{1,n}\right)$.

***Опр.* 1.** Сумма вида $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$, где $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, называется *интегральной суммой* функции $y = f(x)$ на отрезке $[a,b]$.

Величина интегральной суммы зависит от способа разбиения отрезка $[a,b]$ на части и от выбора точек ξ_i. Пусть $\lambda = \max\limits_{1 \le i \le n}\{|\Delta x_i|\}$.

***Опр.* 2.** Если предел интегральной суммы при $\lambda \to 0$ существует и не зависит от способа разбиения отрезка $[a,b]$ на части и от выбора точек ξ_i, то функция $y = f(x)$ называется *интегрируемой* на отрезке $[a,b]$. Величина этого предела называется *определенным интегралом* от $f(x)$ на отрезке $[a,b]$ и обозначается: $\int\limits_a^b f(x)dx$. Число a называется *нижним пределом* интегрирования, b – *верхним пределом* интегрирования, x – переменная интегрирования, $f(x)$ – подынтегральная функция, $f(x)dx$ – подынтегральное выражение.

Замечание. Величина определенного интеграла не зависит от того, как обозначена переменная интегрирования:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(z)dz .$$

Теорема. *Если функция* $y = f(x)$ *непрерывна на отрезке* $[a,b]$*, то определенный интеграл* $\int_a^b f(x)dx$ *существует.*

Отметим, что непрерывность функции является достаточным условием ее интегрируемости. Однако определенный интеграл может существовать и для некоторых разрывных функций, в частности для всякой ограниченной на отрезке функции, имеющей на нем конечное число точек разрыва.

7.2. Геометрический смысл определенного интеграла

Определенный интеграл есть алгебраическая сумма площадей фигур, ограниченных линиями: $y = f(x)$, $x = a$, $x = b$, $y = 0$. Площади фигур, расположенных выше оси OX, берутся со знаком плюс, а расположенных ниже оси OX – со знаком минус.

7.3. Основные свойства определенных интегралов

Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на отрезке $[a,b]$. Тогда справедливы следующие свойства определенных интегралов:

1. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$.

2. $\int_a^a f(x)dx = 0$.

3. $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$.

4. $\int\limits_a^b cf(x)dx = c\int\limits_a^b f(x)dx$, где $c = const$.

5. $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx$, где $a < c < b$.

6. Если $f(x) \geq 0$ на отрезке $[a,b]$, где $a < b$, то $\int\limits_a^b f(x)dx \geq 0$. Если $f(x) \leq 0$ на отрезке $[a,b]$, то $\int\limits_a^b f(x)dx \leq 0$.

7. Если $f(x) \leq g(x)$ на отрезке $[a,b]$, то $\int\limits_a^b f(x)dx \leq \int\limits_a^b g(x)dx$.

8. Если M – наибольшее значение и m – наименьшее значение функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$, то

$$m(b-a) \leq \int\limits_a^b f(x)dx \leq M(b-a).$$

9. Если $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$, то существует точка $c \in [a,b]$ такая, что $\int\limits_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$. (Теорема о среднем.)

***Опр.* 3.** Величина $\frac{1}{b-a} \cdot \int\limits_a^b f(x)dx$ называется *средним значением* функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$.

10. Если $f(x)$ – четная функция, то $\int\limits_{-a}^a f(x)dx = 2\int\limits_0^a f(x)dx$.

11. Если $f(x)$ – нечетная функция, то $\int\limits_{-a}^a f(x)dx = 0$.

12. Если $f(x)$ – периодическая функция с периодом T, то интеграл по любому отрезку, длина которого равна T, имеет всегда одно и то же значение, то есть: $\int\limits_0^T f(x)dx = \int\limits_\lambda^{\lambda+T} f(x)dx$.

7.4. Формула Ньютона - Лейбница

Если для непрерывной на отрезке $[a,b]$ функции $f(x)$ может быть найдена ее первообразная $F(x)$, то простым и удобным методом вычисления определенного интеграла является *формула Ньютона - Лейбница*:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Пример 1. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx$.

◀ Функция $F(x) = \sin x$ является первообразной для функции $f(x) = \cos x$, так как $(\sin x)' = \cos x$. Тогда по формуле Ньютона - Лейбница имеем

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \sin\frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1 - 0 = 1. \blacktriangleright$$

Пример 2. $\int_{-1}^{7} \sqrt{2+x}dx$.

◀ Применяем метод подведения функции под знак дифференциала.

$$\int_{-1}^{7} \sqrt{2+x}dx = \int_{-1}^{7} \sqrt{2+x}d(x+2) = \frac{2}{3}\sqrt{(2+x)^3}\Big|_{-1}^{7} = \frac{2}{3}\sqrt{9^3} - \frac{2}{3}\sqrt{1^3} =$$

$$= \frac{2}{3}(27-1) = \frac{52}{3}. \blacktriangleright$$

Пример 3. $\int_{-4}^{4} \sin(x^3 - x)dx$.

◀ $f(x) = \sin(x^3 - x)$,

$$f(-x) = \sin((-x)^3 - (-x)) = \sin(-x^3 + x) =$$

$$= \sin(-(x^3 - x)) = -\sin(x^3 - x) = -f(x).$$

Функция $f(x)=\sin\left(x^3-x\right)$ – нечетная. Тогда по свойству *11* : $\int\limits_{-4}^{4}\sin\left(x^3-x\right)dx=0$.►

Пример 4. $\int\limits_{-2}^{2}\left(x^4+x^2\right)dx$.

◄ $f(x)=x^4+x^2$,

$$f(-x)=(-x)^4+(-x)^2=x^4+x^2=f(x).$$

Функция $f(x)=x^4+x^2$ – четная. Тогда по свойству *10*:

$$\int\limits_{-2}^{2}\left(x^4+x^2\right)dx=2\int\limits_{0}^{2}\left(x^4+x^2\right)dx=2\left(\frac{x^5}{5}+\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^2=2\left(\frac{32}{5}+\frac{8}{3}\right)=$$

$$=\frac{272}{15}.►$$

Пример 5. $\int\limits_{1}^{4}\frac{dx}{8x+3}$.

◄ $$\int\limits_{1}^{4}\frac{dx}{8x+3}=\frac{1}{8}\int\limits_{1}^{4}\frac{d(8x+3)}{8x+3}=\frac{1}{8}\ln|8x+3|\Big|_1^4=$$

$$=\frac{1}{8}(\ln 35-\ln 11)=\frac{1}{8}\ln\frac{35}{11}.►$$

Пример 6. $\int\limits_{1}^{2}\frac{dx}{x^2-2x+2}$.

◄ $$\int\limits_{1}^{2}\frac{dx}{x^2-2x+2}=\int\limits_{1}^{2}\frac{d(x-1)}{(x-1)^2+1}=\operatorname{arctg}(x-1)\Big|_1^2=$$

$$=\operatorname{arctg}1-\operatorname{arctg}0=\frac{\pi}{4}-0=\frac{\pi}{4}.►$$

Пример 7. $\int\limits_{4}^{6}\frac{2dx}{(x-3)(x-1)}$.

◄ Разложим подынтегральную дробь на сумму простейших:

$$\int_4^6 \frac{2dx}{(x-3)(x-1)} = \int_4^6 \left[\frac{1}{(x-3)} - \frac{1}{(x-1)}\right]dx = \int_4^6 \frac{dx}{(x-3)} - \int_4^6 \frac{dx}{(x-1)} =$$

$$= \left(\ln|x-3| - \ln|x-1|\right)\Big|_4^6 = \ln\left|\frac{x-3}{x-1}\right|\Bigg|_4^6 = \ln\frac{3}{5} - \ln\frac{1}{3} = \ln\frac{9}{5}. ►$$

§ 8. Методы интегрирования подстановкой и по частям для определенного интеграла

8.1. Интегрирование подстановкой

При вычислении определенных интегралов часто используется метод подстановки, или метод замены переменной интегрирования.

***Теорема* 1.** *Пусть функция* $y = f(x)$ *непрерывна на сегменте* $[a,b]$ *и функция* $x = \varphi(t)$ *непрерывна вместе со своей производной* $\varphi'(t)$ *на отрезке* $[\alpha,\beta]$*. Кроме того, при* $t \in [\alpha,\beta]$*:* $a \le \varphi(t) \le b$*;* $\varphi(\alpha) = a$ *и* $\varphi(\beta) = b$*. Тогда справедлива формула:*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt. \tag{8}$$

Формула (8) называется *формулой замены переменной* в определенном интеграле.

Замечание 1. После замены переменной ***изменяются пределы интегрирования!*** Новые пределы интегрирования находятся из соотношений $\varphi(\alpha) = a$ и $\varphi(\beta) = b$.

Отметим, что:

1) функцию $x = \varphi(t)$ следует подобрать так, чтобы, подставив ее вместо x в подынтегральное выражение, получить более простой интеграл;
2) при вычислении определенного интеграла методом подстановки возвращаться к старой переменной не требуется (в отличие от неопределенного интеграла);
3) вместо подстановки $x = \varphi(t)$ применяют и подстановку $t = \psi(x)$.

Пример 1. $\int\limits_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$.

◄ $\int\limits_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \left| \begin{matrix} x=\sin t \Rightarrow & dx=\cos t\,dt \\ \sin\alpha=0\Rightarrow\alpha=0, & \sin\beta=1\Rightarrow\beta=\dfrac{\pi}{2} \end{matrix} \right|.$

На промежутке $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ функция $\sin t$ возрастает и выполняется условие: $0\le\sin t\le 1$. Т. о.,

$$\int\limits_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 t}\,\cos t dt = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos 2t)dt =$$

$$= \frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\pi}{2}-0\right)+\frac{1}{2}(\sin\pi-\sin 0)\right] = \frac{\pi}{4}.$$ ►

Пример 2. $\int\limits_1^9 \dfrac{dx}{5+2\sqrt{x}}$.

◄ Применим подстановку $\sqrt{x}=t$. Эта функция является монотонной на сегменте $[1;9]$.

$$\int\limits_1^9 \frac{dx}{5+2\sqrt{x}} = \left| \begin{matrix} \sqrt{x}=t\Rightarrow x=t^2 & t(1)=\sqrt{1}=1 \\ dx=2tdt & t(9)=\sqrt{9}=3 \end{matrix} \right| =$$

$$= \int\limits_1^3 \frac{2tdt}{5+2t} = \int\limits_1^3 \frac{2t+5-5}{5+2t}dt = \int\limits_1^3 \left(1-\frac{5}{5+2t}\right)dt = \left(t-5\cdot\frac{1}{2}\ln|2t+5|\right)\Bigg|_1^3 =$$

$$= 3-1-\frac{5}{2}(\ln 11-\ln 7) = 2-\frac{5}{2}\ln\frac{11}{7}.$$ ►

Пример 3. $\int\limits_2^3 x(3-x)^5\,dx$.

◄ Полагая $t=3-x$, которая монотонна на отрезке $[2;3]$, получаем $x=3-t$, $dx=-dt$, пределы интегрирования: $t(2)=1$, $t(3)=0$.

$$\int_2^3 x(3-x)^5\,dx = \int_1^0 (3-t)t^5(-dt) = \int_1^0 \left(t^6 - 3t^5\right)dt = \left.\left(\frac{t^7}{7} - \frac{t^6}{2}\right)\right|_1^0 =$$

$$= 0 - \frac{1}{7} - 0 + \frac{1}{2} = \frac{5}{14}. \blacktriangleright$$

Пример 4. $\displaystyle\int_1^{\sqrt{2}} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$.

$$\blacktriangleleft \int_1^{\sqrt{2}} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \left| \begin{array}{c} x = \dfrac{1}{t} \Rightarrow t = \dfrac{1}{x} \Rightarrow dx = -\dfrac{dt}{t^2} \\ t(1) = 1 \\ t\left(\sqrt{2}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{array} \right| =$$

$$= -\int_1^{\sqrt{2}/2} \frac{dt}{t^2 \frac{1}{t}\sqrt{\frac{1}{t^2} - 1}} = -\int_1^{\sqrt{2}/2} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = -\arcsin t\Big|_1^{\frac{\sqrt{2}}{2}} =$$

$$= -\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}. \blacktriangleright$$

Замечание 2. Если функция $x = \varphi(t)$ не монотонная, то уравнениям $\varphi(\alpha) = a$ и $\varphi(\beta) = b$ могут удовлетворять несколько различных пар значений α и β. В этом случае можно взять любую пару указанных значений, удовлетворяющих условиям теоремы 1.

Пример 5. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{3 + 2\cos x}$.

◄ Применим подстановку $t = \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$. Тогда $x = 2\operatorname{arctg} t$, $dx = \dfrac{2dt}{1+t^2}$ и $\cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$. Пересчитаем пределы интегрирования: $t(0)=\mathrm{tg}0=0$ и $t\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\mathrm{tg}\dfrac{\pi}{4}=1$. Сл-но,

$$\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{3+2\cos x}=\int_0^1\frac{2dt}{\left(1+t^2\right)\left(3+2\dfrac{1-t^2}{1+t^2}\right)}=2\int_0^1\frac{dt}{t^2+5}=$$

$$=2\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}\mathrm{arctg}\frac{t}{\sqrt{5}}\bigg|_0^1=\frac{2}{\sqrt{5}}\mathrm{arctg}\frac{1}{\sqrt{5}}\ .\blacktriangleright$$

8.2. Интегрирование по частям

Теорема 2. *Пусть функции* $u(x)$ *и* $v(x)$ *непрерывны на отрезке* $[a,b]$ *вместе со своими производными* $u'(x)$ *и* $v'(x)$. *Тогда имеет место* ***формула интегрирования по частям***:

$$\int_a^b u\,dv=uv\Big|_a^b-\int_a^b v\,du\ .$$

Замечание 3. При вычислении по формуле интегрирования по частям всегда берут только одну первообразную v.

Пример 6. $\int_0^{\pi}(x+2)\cos x\,dx$.

$$\blacktriangleleft\ \int_0^{\pi}(x+2)\cos x\,dx=\left|\begin{matrix}u=x+2 & du=dx\\ dv=\cos x\,dx & v=\int\cos x\,dx=\sin x\end{matrix}\right|=$$

$$=(x+2)\sin x\Big|_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\sin x\,dx=(\pi+2)\sin\pi-2\sin 0+\cos x\Big|_0^{\pi}=$$

$$=\cos\pi-\cos 0=-1-1=-2\ .\blacktriangleright$$

Пример 7. $\int_0^{\pi/2}x^2\sin x\,dx$.

$$\blacktriangleleft\ \int_0^{\pi/2}x^2\sin x\,dx=\left|\begin{matrix}u=x^2 & du=2x\,dx\\ dv=\sin x\,dx & v=-\cos x\end{matrix}\right|=-x^2\cos x\Big|_0^{\pi/2}+$$

$$+2\int_0^{\pi/2} x\cos x dx = -\frac{\pi^2}{4}\cos\frac{\pi}{2} + 0 + 2\int_0^{\pi/2} x\cos x dx = 2\int_0^{\pi/2} x\cos x dx =$$

$$= \begin{vmatrix} u = x & du = dx \\ dv = \cos x dx & v = \sin x \end{vmatrix} = 2\left(x\sin x\Big|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2}\sin x dx \right) =$$

$$= 2\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2} - 0 + 2\cos x\Big|_0^{\pi/2} = \pi + 2\cos\frac{\pi}{2} - 2\cos 0 = \pi - 2 . \blacktriangleright$$

Пример 8. $\int_1^2 x^3 \ln x dx$.

$$\blacktriangleleft \int_1^2 x^3 \ln x dx = \begin{vmatrix} u = \ln x & du = \dfrac{dx}{x} \\ dv = x^3 dx & v = \dfrac{x^4}{4} \end{vmatrix} = \frac{x^4 \ln x}{4}\Bigg|_1^2 - \frac{1}{4}\int_1^2 x^4 \frac{dx}{x} =$$

$$= 4\ln 2 - 0 - \frac{1}{4}\int_1^2 x^3 dx = 4\ln 2 - \frac{x^4}{16}\Bigg|_1^2 = 4\ln 2 - 1 + \frac{1}{16} =$$

$$= 4\ln 2 - \frac{15}{16} . \blacktriangleright$$

Пример 9. $\int_0^1 \mathrm{arctg} x dx$.

$$\blacktriangleleft \int_0^1 \mathrm{arctg} x dx = \begin{vmatrix} u = \mathrm{arctg} x & du = \dfrac{dx}{1+x^2} \\ dv = dx & v = x \end{vmatrix} = x\,\mathrm{arctg} x\Big|_0^1 -$$

$$-\int_0^1 \frac{x dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{4} - 0 - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{d\left(x^2+1\right)}{1+x^2} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)\Big|_0^1 =$$

$$= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2 + \frac{1}{2}\ln 1 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2 . \blacktriangleright$$

Пример 10. $\int\limits_0^{\pi/2} e^x \sin x dx$.

$$◀ I = \int\limits_0^{\pi/2} e^x \sin x dx = \begin{vmatrix} u = \sin x & du = \cos x dx \\ dv = e^x dx & v = e^x \end{vmatrix} = e^x \sin x \Big|_0^{\pi/2} -$$

$$- \int\limits_0^{\pi/2} e^x \cos x dx = \begin{vmatrix} u = \cos x & du = -\sin x dx \\ dv = e^x dx & v = e^x \end{vmatrix} = e^{\frac{\pi}{2}} \sin \frac{\pi}{2} -$$

$$- e^0 \sin 0 - \left(e^x \cos x \Big|_0^{\pi/2} + \int\limits_0^{\pi/2} e^x \sin x dx \right) = e^{\frac{\pi}{2}} - e^{\frac{\pi}{2}} \cos \frac{\pi}{2} +$$

$+ e^0 \cos 0 - I = e^{\frac{\pi}{2}} + 1 - I$, где $I = \int\limits_0^{\pi/2} e^x \sin x dx$ – искомый интеграл.

Из полученного алгебраического уравнения $I = e^{\frac{\pi}{2}} + 1 - I$ найдем $\int\limits_0^{\pi/2} e^x \sin x dx = \dfrac{1}{2}\left(e^{\frac{\pi}{2}} + 1 \right)$.▶

§ 9. Приложения определенного интеграла

Все подынтегральные функции, встречающиеся в этом параграфе, предполагаются непрерывными.

9.1. Вычисление площади плоской фигуры

Вычисление площадей плоских фигур основано на геометрическом смысле определенного интеграла. Площадь *криволинейной трапеции*, ограниченной сверху графиком функции $y = f(x)$ $\left(f(x) \geq 0\right)$, слева и справа – соответственно прямыми $x = a$ и $x = b$, снизу – отрезком $[a, b]$ оси OX (см. рис. 1), вычисляется по формуле

$$S = \int\limits_a^b f(x) dx. \qquad (9)$$

Если $f(x) \le 0$ при $x \in [a,b]$ (см. рис. 2), то

$$S = -\int_a^b f(x)dx\,. \qquad (10)$$

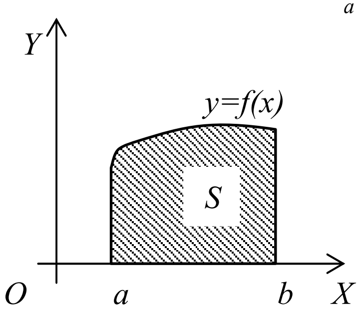


Рис. 1

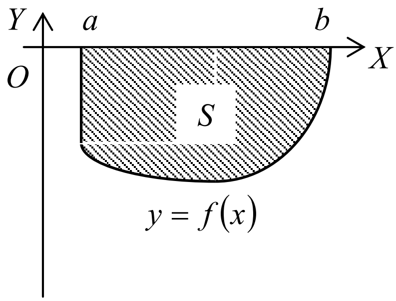


Рис. 2

Формулы (9) и (10) можно объединить в одну:

$$S = \int_a^b |f(x)|dx\,. \qquad (11)$$

Если плоская фигура ограничена кривыми $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$, причем $f_1(x) \le f_2(x)$, прямыми $x = a$ и $x = b$, то ее площадь находится по формуле

$$S = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)]dx\,. \qquad (12)$$

Пусть криволинейная трапеция ограничена кривой $x = \varphi(y)$, прямыми $y = c$ и $y = d$ и отрезком $[c,d]$ оси OY. Тогда площадь этой трапеции вычисляется по формуле

$$S = \int_c^d \varphi(y)dy\,. \qquad (13)$$

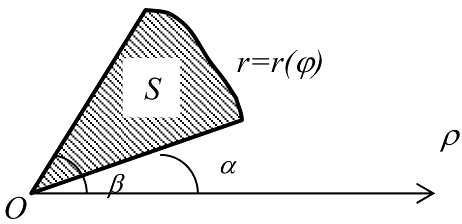
Если криволинейная трапеция ограничена сверху *кривой, заданной параметрическими уравнениями*

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \quad y(t) \ge 0, \quad t \in [t_1, t_2],$$

прямыми $x = a$ и $x = b$ и отрезком $[a,b]$ оси Ox, то ее площадь вычисляется по формуле

$$S=\int_{t_1}^{t_2} y(t)x'(t)dt\,, \qquad (14)$$

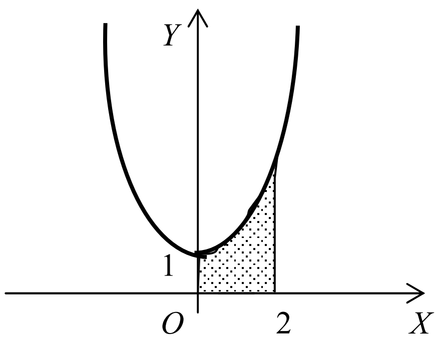
где t_1 и t_2 определяются из уравнений: $x(t_1)=a$ и $x(t_2)=b$. Предполагается, что на отрезке $[t_1,t_2]$ функции $y(t)$ и $x'(t)$ непрерывны.



Площадь *криволинейного сектора*, ограниченного кривой, заданной в полярных координатах уравнением $r=r(\varphi)$ и двумя лучами $\varphi=\alpha$ и $\varphi=\beta$ $(\alpha<\beta)$ вычисляется по формуле

$$S=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi)d\varphi\,. \qquad (15)$$

Пример 1. Найти площадь фигуры, ограниченной параболой $y=x^2+1$ и прямыми $x=0$, $x=2$ и $y=0$.



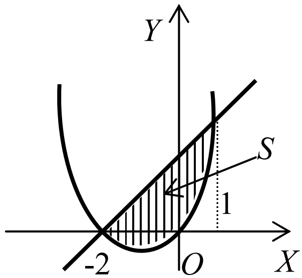
◀ Сделаем чертеж заданной фигуры. Так как $y=x^2+1>0$ на сегменте $[0,2]$, то для вычисления площади применяем формулу (9):

$$S=\int_0^2\left(x^2+1\right)dx=\left(\frac{x^3}{3}+x\right)\Bigg|_0^2=\frac{8}{3}+2=\frac{14}{3}\,.$$ ▶

Пример 2. Найти площадь фигуры, ограниченной параболой $y=x^2+2x$ и прямой $y=x+2$.

◀ Найдем абсциссы точек пересечения данных линий:

$$x^2+2x=x+2 \Rightarrow x^2+x-2=0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x_1=-2,\ x_2=1$$

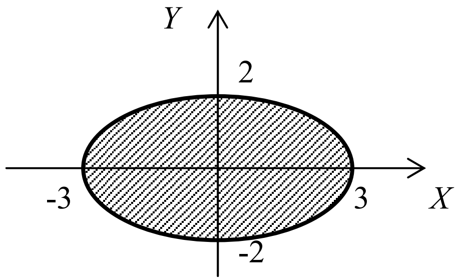


На отрезке $[-2,1]$ $x+2 \geq x^2+2x$, сл-но, по формуле (12)

$$S=\int_{-2}^{1}\left(x+2-x^2-2x\right)dx=$$

$$=\int_{-2}^{1}\left(2-x^2-x\right)dx=\left(2x-\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{-2}^{1}==2-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+4-\frac{8}{3}+2=\frac{9}{2}.$$ ▶

Пример 3. Найти площадь фигуры, ограниченной эллипсом $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$.



◀ Оси координат совпадают с осями симметрии заданного эллипса и делят его на четыре равные части. Т. о., для нахождения искомой площади достаточно найти площадь части фигуры, расположенной в первой четверти ($x \geq 0$, $y \geq 0$), и умножить полученный результат на четыре.

Параметрические уравнения эллипса имеют вид:

$$x=3\cos t,\ y=2\sin t,\ t\in[0,2\pi].$$

Найдем пределы изменения переменной t:

$$0 \leq x \leq 3,\quad x=0 \Rightarrow 3\cos t=0 \Rightarrow t=\frac{\pi}{2},$$

$$x=3 \Rightarrow 3\cos t=3 \Rightarrow \cos t=1 \Rightarrow t=0.$$

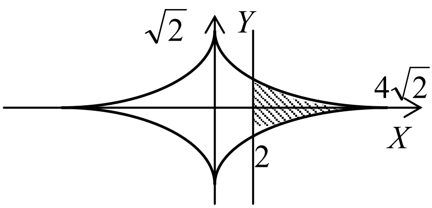
Применим формулу (14):

$$S=4\int\limits_{\pi/2}^{0}2\sin t\left(3\cos t\right)'dt=-24\int\limits_{\pi/2}^{0}\sin^2 tdt=12\int\limits_{0}^{\pi/2}\left(1-\cos 2t\right)dt=$$

$$=12\left(t-\frac{\sin 2t}{2}\right)\Bigg|_0^{\pi/2}=6\pi-6\sin\pi=6\pi\,.\blacktriangleright$$

Пример 4. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями, заданными уравнениями:

$$\begin{cases}x=4\sqrt{2}\cos^3 t,\\ y=\sqrt{2}\sin^3 t,\end{cases}\quad x=2\quad\left(x\geq 2\right).$$



◀ Для вычисления площади воспользуемся симметрией фигуры относительно оси OX. Сначала найдем пределы интегрирования:

$$2\leq x\leq 4\sqrt{2}\,,$$

$$x_1=2\Rightarrow 4\sqrt{2}\cos^3 t=2\Rightarrow\cos t=\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow t_1=\frac{\pi}{4},$$

$$x_2=4\sqrt{2}\Rightarrow 4\sqrt{2}\cos^3 t=4\sqrt{2}\Rightarrow\cos t=1\Rightarrow t_2=0\,.$$

Для нахождения половины площади заданной фигуры применим формулу (14):

$$S=2\int\limits_{\pi/4}^{0}\sqrt{2}\sin^3 t\left(4\sqrt{2}\cos^3 t\right)'dt=-24\int\limits_{\pi/4}^{0}\sin^4 t\cos^2 tdt=$$

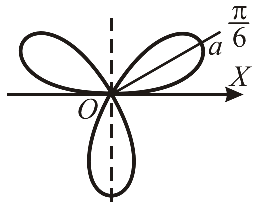
$$=6\int\limits_{0}^{\pi/4}\sin^2 t\sin^2 2tdt=\frac{3}{2}\int\limits_{0}^{\pi/4}\left(1-\cos 2t\right)\left(1-\cos 4t\right)dt=$$

$$=\frac{3}{2}\int\limits_{0}^{\pi/4}\left(1-\cos 2t-\cos 4t+\cos 2t\cdot\cos 4t\right)dt=\frac{3}{2}t\Bigg|_0^{\pi/4}-\frac{3\sin 2t}{4}\Bigg|_0^{\pi/4}-$$

$$-\frac{3\sin 4t}{8}\Bigg|_0^{\pi/4}+\frac{3}{4}\int_0^{\pi/4}(\cos 6t+\cos 2t)dt=\frac{3\pi}{8}-\frac{3}{4}+\frac{\sin 6t}{8}\Bigg|_0^{\pi/4}+$$

$$+\frac{3\sin 2t}{8}\Bigg|_0^{\pi/4}=\frac{3\pi}{8}-\frac{3}{4}-\frac{1}{8}+\frac{3}{8}=\frac{3\pi-4}{8}.\blacktriangleright$$

Пример 5. Найти площадь фигуры, ограниченной “трехлепестковой розой” $\rho=\sin 3\varphi$.



◄ Так как $\rho\geq 0$, то $\sin 3\varphi\geq 0$, сл–но, $2\pi n\leq 3\varphi\leq\pi+2\pi n,\ n\in\mathbf{N}$, $\frac{2\pi n}{3}\leq\varphi\leq\frac{\pi}{3}+\frac{2\pi n}{3},\ n\in\mathbf{N}$. При $n=0$ получаем пределы для первого “лепестка”: $0\leq\varphi\leq\frac{\pi}{3}$.

По формуле (15) найдем третью часть искомой площади и тогда площадь “розы” равна:

$$S=3\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\pi/3}\sin^2 3\varphi d\varphi=$$

$$=\frac{3}{4}\int_0^{\pi/3}(1-\cos 6\varphi)d\varphi=\frac{3\varphi}{4}\Bigg|_0^{\pi/3}-\frac{\sin 6\varphi}{24}\Bigg|_0^{\pi/3}=\frac{\pi}{4}.\blacktriangleright$$

9.2. Вычисление длины дуги кривой

Пусть кривая на плоскости задана уравнением $y=f(x)$, где $f(x)$ – непрерывно дифференцируемая функция для всех $x\in[a,b]$. Тогда длина l дуги кривой, заключенной между точками с абсциссами, равными a и b, вычисляется по формуле:

$$l=\int_a^b\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx. \qquad (16)$$

В случае задания кривой уравнением $x=\varphi(y)$, где $c\le y\le d$, длина l дуги кривой, заключенной между точками с ординатами равными, c и d, вычисляется по формуле:

$$l=\int_c^d\sqrt{1+[\varphi'(y)]^2}\,dy. \qquad (17)$$

Если кривая задана *параметрическими уравнениями*

$$\begin{cases} x=x(t), \\ y=y(t), \end{cases} \quad t\in[t_1,t_2],$$

где $x(t)$ и $y(t)$ – непрерывные вместе со своими производными функции и $x(t_1)=a,\ x(t_2)=b$, то длина дуги кривой находится по формуле:

$$l=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\,dt. \qquad (18)$$

Пусть кривая задана уравнением в полярных координатах $r=r(\varphi),\ \alpha\le\varphi\le\beta$. Предполагаем, что $r(\varphi)$ и $r'(\varphi)$ непрерывны на сегменте $[\alpha,\beta]$. В этом случае длина кривой вычисляется по формуле:

$$l=\int_\alpha^\beta\sqrt{r^2+[r']^2}\,d\varphi. \qquad (19)$$

Пример 6. Вычислить длину дуги кривой $y=\ln\sin x$ от $x_1=\dfrac{\pi}{2}$ до $x_2=\dfrac{2\pi}{3}$.

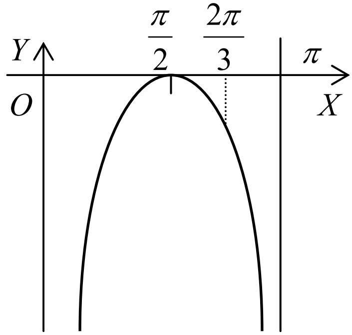
◄ Изобразим часть графика заданной функции при $x\in(0,\pi)$. Воспользуемся формулой (16).

Прежде чем записать интеграл, найдем выражение $\sqrt{1+[f'(x)]^2}$:

$f(x) = \ln \sin x$,

$f'(x) = \dfrac{\cos x}{\sin x} = \mathrm{ctg}x$,

$\sqrt{1+[f'(x)]^2} = \sqrt{1+\mathrm{ctg}^2 x} = \dfrac{1}{\sin x}$.



Для вычисления интеграла используем универсальную тригонометрическую подстановку $t = \mathrm{tg}\dfrac{x}{2}$:

$$l = \int\limits_{\pi/2}^{2\pi/3} \frac{dx}{\sin x} = \left| \begin{array}{c} t = \mathrm{tg}\dfrac{x}{2} \Rightarrow x = 2\mathrm{arctg}t \Rightarrow dx = \dfrac{2dt}{1+t^2} \\ \sin x = \dfrac{2t}{1+t^2} \\ t\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1 \quad t\left(\dfrac{2\pi}{3}\right) = \sqrt{3} \end{array} \right| =$$

$$= \int\limits_1^{\sqrt{3}} \frac{2dt}{\left(1+t^2\right)\dfrac{2t}{1+t^2}} = \int\limits_1^{\sqrt{3}} \frac{dt}{t} = \ln|t|\Big|_1^{\sqrt{3}} = \ln\sqrt{3} - \ln 1 = \ln\sqrt{3}\,. \blacktriangleright$$

Пример 7. Найти длину кривой $\begin{cases} x = \dfrac{1}{6}t^6, \\ y = 2 - \dfrac{1}{4}t^4, \end{cases}$ между точками пересечения ее с осями координат.

◄ Найдем параметры точек пересечения с осями:

с осью OY – $x = 0 \quad \Rightarrow \quad t = 0$,

с осью OX – $y = 0 \quad \Rightarrow \quad 2 - \dfrac{1}{4}t^4 = 0 \quad \Rightarrow \quad t = \sqrt[4]{8}$.

Тогда по формуле (18) длина дуги равна:

$$l=\int_0^{\sqrt[4]{8}}\sqrt{\left[\left(\frac{1}{6}t^6\right)'\right]^2+\left[\left(2-\frac{1}{4}t^4\right)'\right]^2}\,dt=\int_0^{\sqrt[4]{8}}\sqrt{\left(t^5\right)^2+\left(-t^3\right)^2}\,dt=$$

$$=\int_0^{\sqrt[4]{8}}t^3\sqrt{t^4+1}\,dt=\frac{1}{4}\int_0^{\sqrt[4]{8}}\sqrt{t^4+1}\,d\left(t^4+1\right)=\frac{1}{4}\cdot\frac{2\left(\sqrt{t^4+1}\right)^3}{3}\Bigg|_0^{\sqrt[4]{8}}=$$

$$=\frac{1}{6}(27-1)=\frac{13}{3}.►$$

Пример 8. Найти длину дуги кривой $r=6\sin\varphi$, $0\le\varphi\le\frac{\pi}{3}$.

◄ Для вычислений воспользуемся формулой (19):

$$l=\int_0^{\pi/3}\sqrt{[6\sin\varphi]^2+\left[(6\sin\varphi)'\right]^2}\,d\varphi=6\int_0^{\pi/3}\sqrt{\sin^2\varphi+\cos^2\varphi}\,d\varphi=$$

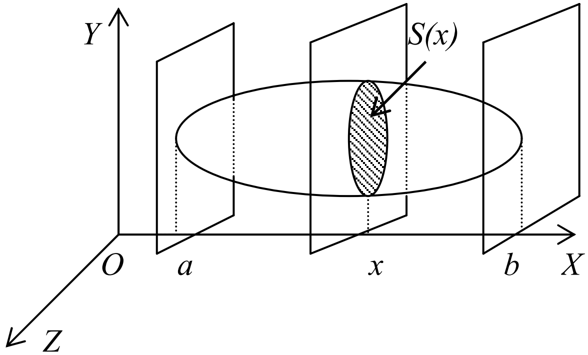
$$=6\int_0^{\pi/3}d\varphi=6\varphi\Bigg|_0^{\pi/3}=2\pi.►$$

9.3. Объем тела

1. *Вычисление объема тела по известным площадям поперечных сечений*

Пусть в пространстве задано тело и построены его сечения плоскостями, параллельными оси OX и проходящими через точки $x\in[a,b]$ на ней. Площадь фигуры в сечении зависит от точки x, определяющей площадь сечения. Если эта зависимость известна и задана непрерывной на $[a,b]$ функцией $S(x)$, то объем тела, заключенного между плоскостями $x=a$ и $x=b$, вычисляется по формуле:

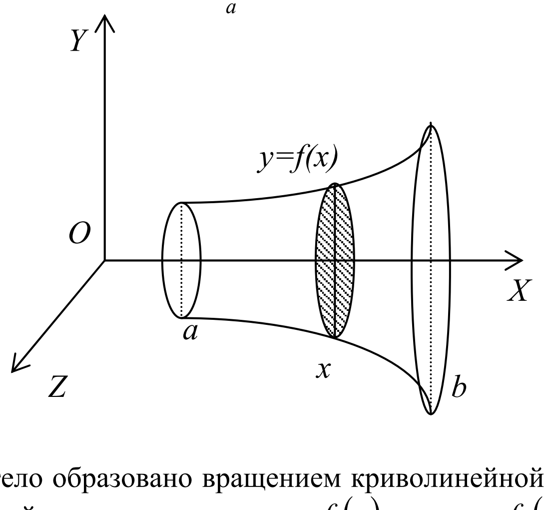
$$V=\int_a^b S(x)dx. \tag{20}$$



2. *Объем тела вращения*

Если тело образовано вращением криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y = f(x)$ $\left(f(x) \geq 0\right)$ и прямыми $y = 0$, $x = a$ и $x = b$, вокруг оси OX, то его объем вычисляется по формуле:

$$V = \pi \int_a^b \left[f(x)\right]^2 dx. \tag{21}$$



Если тело образовано вращением криволинейной трапеции, ограниченной кривыми $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$, где $f_2(x) \geq f_1(x) \geq 0$, и прямыми $x = a$ и $x = b$, вокруг оси OX, то его объем вычисляется по формуле:

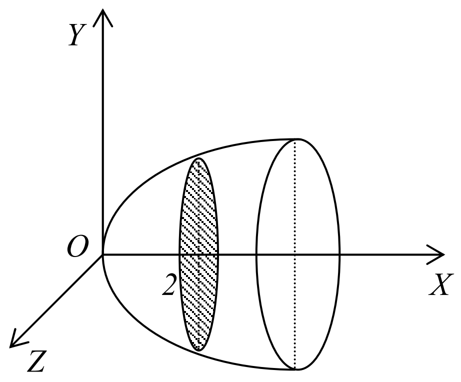
$$V = \pi \int_a^b \left([f_2(x)]^2 - [f_1(x)]^2 \right) dx . \qquad (22)$$

Если тело образовано вращением криволинейной трапеции, ограниченной кривой $x = \varphi(y)$ $(\varphi(y) \geq 0)$ и прямыми $x = 0$, $y = c$ и $y = d$, вокруг оси OY, то его объем вычисляется по формуле:

$$V = \pi \int_c^d [\varphi(y)]^2 \, dy . \qquad (23)$$

Пример 9. Найти объем тела, ограниченного эллиптическим параболоидом $x = \dfrac{y^2}{2} + \dfrac{z^2}{4}$ и плоскостью $x = 2$.

◄Любое сечение эллиптического параболоида плоскостью, перпендикулярной к оси OX $(0 \leq x \leq 2)$, есть эллипс, уравнение которого имеет вид $\dfrac{y^2}{2x} + \dfrac{z^2}{4x} = 1$. Из уравнения видно, что

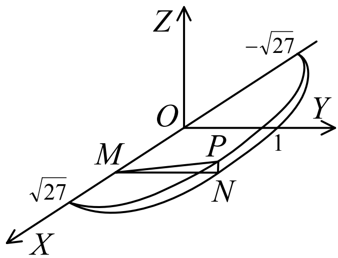


что полуоси эллипса равны $a = \sqrt{2x}$ и $b = \sqrt{4x} = 2\sqrt{x}$. Так как площадь эллипса вычисляется по формуле $S = \pi ab$, то $S(x) = \pi\sqrt{2x} \cdot 2\sqrt{x} = 2\sqrt{2}\pi x$, где $0 \leq x \leq 2$. Искомый объем вычисляем по формуле (20):

$$V=\int_a^b S(x)dx=2\sqrt{2}\pi\int_0^2 xdx=2\sqrt{2}\pi\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^2=4\sqrt{2}\pi\ .►$$

Пример 10. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $\frac{x^2}{27}+y^2=1$, $z=\frac{y}{\sqrt{3}}$, $z=0$ $(y\geq 0)$.

◄ Изобразим заданное тело.



Любое сечение этого тела плоскостью, перпендикулярной оси OX $\left(-\sqrt{27}\leq x\leq\sqrt{27}\right)$, есть прямоугольный треугольник ΔMNP. Для него $M(x_M,0,0)\in OX$, $N(x_N,y_N,0)$ лежит на эллиптическом цилиндре $\frac{x^2}{27}+y^2=1$, то есть $\frac{x_N^2}{27}+y_N^2=1$, $P(x_P,y_P,z_P)$ лежит и на цилиндре и на секущей плоскости $z=\frac{y}{\sqrt{3}}$, то есть $z_P=\frac{y_P}{\sqrt{3}}$ и $y_P=y_N$. Можно также отметить, что $-\sqrt{27}\leq x_M=x_N=x_P\leq\sqrt{27}$.

Площадь полученного сечения можно вычислить по формуле: $S(\Delta MNP)=\frac{1}{2}\cdot MN\cdot NP$, где $MN=y_N=\sqrt{1-\frac{x^2}{27}}$ $(y\geq 0)$, $NP=z_P=\frac{y_P}{\sqrt{3}}=\frac{y_N}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{1-\frac{x^2}{27}}}{\sqrt{3}}=\sqrt{\frac{1}{3}-\frac{x^2}{81}}$. Тогда площадь сечения:

$$S(\Delta MNP)=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{1-\frac{x^2}{27}}\cdot\sqrt{\frac{1}{3}-\frac{x^2}{81}}=\frac{1}{2\sqrt{3}}\left(1-\frac{x^2}{27}\right),$$

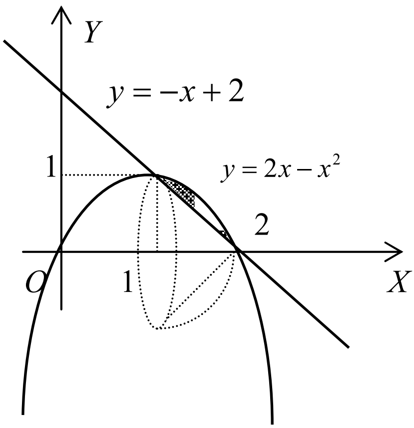
причем $-\sqrt{27} \le x \le \sqrt{27}$.

В итоге искомый объем вычисляем по формуле (20):

$$V = \int_a^b S(x)dx = \frac{1}{2\sqrt{3}} \cdot \int_{-\sqrt{27}}^{\sqrt{27}} \left(1 - \frac{x^2}{27}\right)dx =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{3}}\left(x - \frac{x^3}{81}\right)\Bigg|_{-\sqrt{27}}^{\sqrt{27}} = 2 .\blacktriangleright$$

Пример 11. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси OX фигуры, ограниченной графиками функций $y = 2x - x^2$ и $y = -x + 2$.



◄ Графики пересекаются в точках $(1,1)$ и $(2,0)$.

Используя формулу (22), находим объем тела вращения:

$$V = \pi\int_1^2 \left[\left(2x - x^2\right)^2 - \left(-x + 2\right)^2\right]dx =$$

$$= \int_1^2 \left(x^4 - 4x^3 + 3x^2 + 4x - 4\right)dx =$$

$$= \left(\frac{x^5}{5} - x^4 + x^3 + 2x^2 - 4x\right)\Bigg|_1^2 = \frac{1}{5}.$$

►

§ 10. Несобственные интегралы

При определении интеграла $\int_a^b f(x)dx$ предполагалось, что отрезок $[a,b]$ конечен и функция $f(x)$ на нем определена и ограничена.

Рассмотрим так называемые *несобственные интегралы*, то есть определенный интеграл от непрерывной функции с бесконечным промежутком интегрирования или определенный интеграл с конечным промежутком интегрирования, но подынтегральная функция не ограничена на нем (имеет на нем бесконечный разрыв).

10.1. Интегралы с бесконечным промежутком интегрирования (несобственные интегралы I рода)

***Опр.* 1.** Пусть функция $f(x)$ определена на промежутке $[a,+\infty)$ и интегрируема на любом промежутке $[a,b]$, принадлежащем этому промежутку. Если существует конечный предел: $\lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_a^b f(x)dx$, то этот предел называется *несобственным интегралом I рода* от функции $f(x)$ по промежутку $[a,+\infty)$ и обозначается $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$.

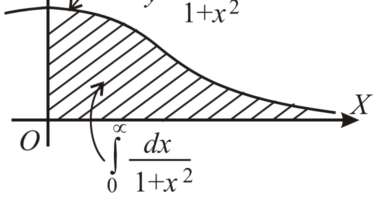
Таким образом,

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}\int\limits_a^b f(x)dx. \qquad (24)$$

***Опр.* 2.** Несобственный интеграл I рода называется *сходящимся*, если предел конечен. Если же предел бесконечен или не существует, то несобственный интеграл называется *расходящимся*.

Геометрический смысл несобственного интеграла в случае $f(x)\geq 0$ – это площадь неограниченной области, заключенной между линиями $y=f(x)$, $x=a$ и $y=0$ (ось OX).

Например $\int\limits_0^{\infty}\dfrac{dx}{1+x^2}=\lim\limits_{b\to\infty}\int\limits_0^b\dfrac{dx}{1+x^2}=\lim\limits_{b\to\infty}\operatorname{arctg}x\Big|_0^b=\dfrac{\pi}{2}$.



Пример 1. $\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{dx}{x^3}$.

$$◀ \int\limits_{1}^{+\infty}\frac{dx}{x^3}=\lim_{b\to+\infty}\int\limits_{1}^{b}\frac{dx}{x^3}=\lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{1}{2x^2}\right)\Bigg|_1^b=\lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{1}{2b^2}+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}.$$

Несобственный интеграл сходится. ▶

Пример 2. $\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{dx}{x}$.

$$◀ \int\limits_{1}^{+\infty}\frac{dx}{x}=\lim_{b\to+\infty}\int\limits_{1}^{b}\frac{dx}{x}=\lim_{b\to+\infty}\left(\ln|x|\right)\Big|_1^b=\lim_{b\to+\infty}\left(\ln|b|-\ln 1\right)=$$

$$=\lim_{b\to+\infty}\left(\ln|b|\right)=+\infty.$$

Интеграл расходится. ▶

Замечание 1. Можно показать, что интеграл $\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{dx}{x^k}$ сходится при $k>1$ и расходится при $k\le 1$.

***Опр.* 3.** Пусть функция $f(x)$ определена на промежутке $(-\infty,b]$ и интегрируема на любом промежутке $[a,b]$, принадлежащем этому промежутку. Если существует конечный предел: $\lim\limits_{a\to-\infty}\int\limits_{a}^{b}f(x)dx$, то этот предел называется *несобственным интегралом II рода* от функции $f(x)$ по промежутку $(-\infty,b]$ и обозначается $\int\limits_{-\infty}^{b}f(x)dx$.

Имеем

$$\int\limits_{-\infty}^{b}f(x)dx=\lim_{a\to-\infty}\int\limits_{a}^{b}f(x)dx. \tag{25}$$

Если функция $f(x)$ определена на промежутке $(-\infty,+\infty)$ и интегрируема на любом промежутке $[a,b]$, принадлежащем этому промежутку, полагаем

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int\limits_{a}^{c} f(x)dx + \lim_{b\to+\infty}\int\limits_{c}^{b} f(x)dx\,,\ \tilde{n}\in(a,b) \quad (26)$$

Иногда будем записывать: $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim\limits_{\substack{a\to-\infty\\ b\to+\infty}}\int\limits_{a}^{b} f(x)dx$.

Замечание 2. В равенстве (26) $|a|\to+\infty$ и $b\to+\infty$ неодинаково (по разным произвольным законам).

Замечание 3. Равенство (26) следует понимать в том смысле, что если каждый из несобственных интегралов, стоящих в правой части равенства, сходится, то сходится и интеграл в левой части.

Пример 3. $\int\limits_{-\infty}^{-2}\dfrac{dx}{x^2}$.

◄ $$\int\limits_{-\infty}^{-2}\frac{dx}{x^2} = \lim_{a\to-\infty}\int\limits_{a}^{-2}\frac{dx}{x^2} = \lim_{a\to-\infty}\left(-\frac{1}{x}\right)\Bigg|_{a}^{-2} = \lim_{a\to-\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{a}\right) = \frac{1}{2}.$$

Интеграл сходится. ►

Пример 4. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{dx}{1+x^2}$.

◄ $$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2} = \lim_{a\to-\infty}\int\limits_{a}^{0}\frac{dx}{1+x^2} + \lim_{b\to+\infty}\int\limits_{0}^{b}\frac{dx}{1+x^2} = \lim_{a\to-\infty} arctgx\Big|_{a}^{0} +$$

$$+\lim_{b\to+\infty} arctgx\Big|_{0}^{b} = \lim_{a\to-\infty}\left(0-arctga\right) + \lim_{b\to+\infty}\left(arctgb-0\right) =$$

$$= \frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2} = \pi\,.$$ ►

Пример 5. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} xdx$.

◄ $$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} xdx = \lim_{\substack{a\to-\infty\\ b\to+\infty}}\int\limits_{a}^{b} xdx = \lim_{\substack{a\to-\infty\\ b\to+\infty}}\frac{x^2}{2}\Bigg|_{a}^{b} = \lim_{\substack{a\to-\infty\\ b\to+\infty}}\left(\frac{b^2}{2}-\frac{a^2}{2}\right).$$

Полученный предел не существует (получаем неопределенность $\infty - \infty$). Интеграл расходится. ►

Замечание 4 (к примеру 5). Так как a и b неограниченно возрастают по абсолютной величине по разным законам, то будем получать различные значения предела. Например, если $a = -k,\quad b = k^2,\quad k \to +\infty$, то

$$\lim_{\substack{a\to-\infty\\ b\to+\infty}}\left(\frac{b^2}{2}-\frac{a^2}{2}\right) = \frac{1}{2}\lim_{k\to+\infty}\left(k^4 - k^2\right) = \frac{1}{2}\lim_{k\to+\infty}\left[k^2\left(k^2-1\right)\right] = +\infty .$$

Если $a = -k^2,\quad b = k,\quad k \to +\infty$, то

$$\lim_{\substack{a\to-\infty\\ b\to+\infty}}\left(\frac{b^2}{2}-\frac{a^2}{2}\right) = \frac{1}{2}\lim_{k\to+\infty}\left(k^2 - k^4\right) = \frac{1}{2}\lim_{k\to+\infty}\left[k^2\left(1-k^2\right)\right] = -\infty .$$

Если $a = -k,\quad b = k,\quad k \to +\infty$, то

$$\lim_{\substack{a\to-\infty\\ b\to+\infty}}\left(\frac{b^2}{2}-\frac{a^2}{2}\right) = \frac{1}{2}\lim_{k\to+\infty}\left(k^2 - k^2\right) = 0 .$$

Пример 6. $\int\limits_{-\infty}^{0} x\cos x dx$.

◄ $$\int\limits_{-\infty}^{0} x\cos x dx = \lim_{a\to-\infty}\int\limits_{a}^{0} x\cos x dx = \begin{vmatrix} u = x & du = dx \\ dv = \cos x dx & v = \sin x \end{vmatrix} =$$

$$= \lim_{a\to-\infty}\left(x\sin x \left.\vphantom{\int}\right|_{a}^{0} - \int\limits_{a}^{0}\sin x dx \right) = \lim_{a\to-\infty}\left(x\sin x \left.\vphantom{\int}\right|_{a}^{0} + \cos \left.\vphantom{\int}\right|_{a}^{0} \right) =$$

$$= 0 - \lim_{a\to-\infty} a\sin a + 1 - \lim_{a\to-\infty}\cos a .$$

Интеграл расходится, так как $\lim\limits_{a\to-\infty} a\sin a$ и $\lim\limits_{a\to-\infty}\cos a$ не существуют. ►

***Опр.* 4.** Величина

$$\lim_{a\to\infty}\left(\int_{-a}^{c} f(x)dx+\int_{c}^{a} f(x)dx\right)=V.P.\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx\,,\ \tilde{n}\in(-a,a),\quad (27)$$

(в случае его существования) называется *главным значением* несобственного интеграла $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$. Справа в формуле (27) написано обозначение главного значения.

К примеру, $V.P.\int_{-\infty}^{+\infty} xdx=\lim_{a\to\infty}\left(\int_{-a}^{0} xdx+\int_{0}^{a} xdx\right)=\lim_{a\to\infty}\left(\frac{a^2}{2}-\frac{a^2}{2}\right)=0.$

Замечание 5. Если несобственный интеграл сходится, то его значение совпадает с его главным значением.

10.2. Признаки сходимости несобственных интегралов с бесконечными пределами

***Теорема* 1.** *Пусть на промежутке* $[a,+\infty)$ *каждая из функций* $f(x)$ *и* $\varphi(x)$ *удовлетворяет условиям определения 1 и для всех* x $(x\ge a)$ *выполняется неравенство:*

$$0\le f(x)\le\varphi(x).$$

Тогда: 1) из сходимости интеграла $\int_{a}^{+\infty}\varphi(x)dx$ *следует сходимость интеграла* $\int_{a}^{+\infty} f(x)dx$*, при этом* $\int_{a}^{+\infty} f(x)dx\le\int_{a}^{+\infty}\varphi(x)dx$*;*

2) из расходимости интеграла $\int_{a}^{+\infty} f(x)dx$ *следует расходимость интеграла* $\int_{a}^{+\infty}\varphi(x)dx$.

Пример 7. Исследовать на сходимость $\int_{1}^{+\infty}\frac{dx}{x^2\left(3+e^x\right)}$.

◀ При $x \ge 1$ имеем $\dfrac{1}{x^2\left(3+e^x\right)} \le \dfrac{1}{x^2}$.

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2} = \lim_{b\to+\infty}\int_1^b\frac{dx}{x^2} = \lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{1}{x}\right)\Bigg|_1^b = \lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{1}{b}+1\right) = 1.$$

Сл–но, по теореме 1 интеграл $\int\limits_1^{+\infty}\dfrac{dx}{x^2\left(3+e^x\right)}$ сходится и его значение меньше 1. ▶

Пример 8. Исследовать на сходимость интеграл $\int\limits_9^{+\infty}\dfrac{x^2+3}{\sqrt{x^5}}dx$.

◀ При $x \ge 9$ $\dfrac{x^2+3}{\sqrt{x^5}} \ge \dfrac{x^2}{\sqrt{x^5}} = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

$$\int_9^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{b\to+\infty}\int_9^b\frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\lim_{b\to+\infty}\sqrt{x}\Big|_9^b = 2\lim_{b\to+\infty}\left(\sqrt{b}-3\right) = +\infty.$$

Тогда по теореме 1 интеграл $\int\limits_9^{+\infty}\dfrac{x^2+3}{\sqrt{x^5}}dx$ расходится. ▶

Теорема 2. *Если интеграл* $\int\limits_a^{+\infty}\left|f(x)\right|dx$ *сходится, то сходится и интеграл* $\int\limits_a^{+\infty}f(x)dx$.

В этом случае интеграл $\int\limits_a^{+\infty}f(x)dx$ называется *абсолютно сходящимся*.

Пример 9. Исследовать на сходимость интеграл $\int\limits_1^{+\infty}\dfrac{\sin x}{x^3}dx$.

◀ Подынтегральная функция – знакопеременная. Кроме того: $\left|\dfrac{\sin x}{x^3}\right| \le \dfrac{1}{x^3}$ для всех $x \in [1,+\infty)$. Но интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \dfrac{dx}{x^3}$ сходится (см. пример 1). Тогда по теореме 1 сходится интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \left|\dfrac{\sin x}{x^3}\right| dx$, сл–но, сходится и интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \dfrac{\sin x}{x^3} dx$.▶

10.3. Интегралы от неограниченных функций (несобственные интегралы II рода)

***Опр.* 5.** Пусть функция $f(x)$ определена на промежутке $[a,b)$, интегрируема на любом промежутке $[a,b-\varepsilon]$, принадлежащем промежутку $[a,b)$ $(\varepsilon > 0)$, и неограничена в окрестности точки b. Если существует конечный предел $\lim\limits_{\varepsilon\to+0} \int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$, то этот предел называется *несобственным интегралом* от функции $f(x)$ на промежутке $[a,b)$ и обозначается $\int\limits_a^b f(x)dx$.

Т.о. имеем:

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to+0} \int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)dx. \tag{28}$$

Если существует конечный предел $\lim\limits_{\varepsilon\to+0} \int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$, то говорят, что интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ *сходится*, в противном случае – *расходится*.

***Опр.* 6.** Если функция $f(x)$ определена на промежутке $(a,b]$, интегрируема на любом промежутке $[a-\varepsilon,b]$, принадлежащем промежутку $(a,b]$ $(\varepsilon > 0)$, и неограничена в окрестности точки a, то полагаем

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to +0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx. \tag{29}$$

***Опр.* 7.** Если функция $f(x)$ определена на промежутках $[a,c)$ и $(c,b]$, интегрируема на отрезках $[a,c-\varepsilon_1]$ и $[c-\varepsilon_2,b]$, принадлежащих промежуткам $[a,c)$ и $(c,b]$ соответственно $(\varepsilon_1 > 0,\ \varepsilon_2 > 0)$, и неограничена в окрестности точки c, то полагаем

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon_1 \to +0} \int_a^{c-\varepsilon_1} f(x)dx + \lim_{\varepsilon_2 \to +0} \int_{c+\varepsilon_2}^b f(x)dx.$$

Пример 10. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$.

◄ $$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = \lim_{\varepsilon \to +0} \int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = -2 \lim_{\varepsilon \to +0} \sqrt{1-x}\Big|_0^{1-\varepsilon} =$$

$$= -2 \lim_{\varepsilon \to +0} \left(\sqrt{\varepsilon} - 1\right) = 2.$$ ►

Пример 11. $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2}$.

◄ $$\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2} = \lim_{\varepsilon_1 \to +0} \int_{-1}^{-\varepsilon_1} \frac{dx}{x^2} + \lim_{\varepsilon_2 \to +0} \int_{\varepsilon_2}^1 \frac{dx}{x^2} = -\lim_{\varepsilon_1 \to +0} \frac{1}{x}\Big|_{-1}^{-\varepsilon_1} - \lim_{\varepsilon_2 \to +0} \frac{1}{x}\Big|_{\varepsilon_2}^1.$$

Каждый из двух полученных пределов равен ∞:

$$-\lim_{\varepsilon_1 \to +0} \frac{1}{x}\Big|_{-1}^{-\varepsilon_1} = \infty \quad \text{и} \quad -\lim_{\varepsilon_2 \to +0} \frac{1}{x}\Big|_{\varepsilon_2}^1 = \infty.$$

Сл–но, первый интеграл расходится на промежутке $[-1,0]$, а второй – на отрезке $[0,1]$. Окончательно имеем: интеграл $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2}$ расходится на всем отрезке $[-1,1]$. ►

Замечание 6. Если функция $f(x)$, определенная на отрезке $[a,b]$, имеет внутри этого отрезка конечное число точек разрыва

$a_1, a_2, \ldots, a_n$, то интеграл от функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$ определяется следующим образом:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^{a_1} f(x)dx + \int_{a_1}^{a_2} f(x)dx + \ldots + \int_{a_n}^{b} f(x)dx,$$

если каждый из несобственных интегралов в правой части равенства сходится. Если хотя бы один из этих интегралов расходится, то и $\int_a^b f(x)dx$ называется *расходящимся*.

***Опр.* 8.** Если функция $f(x)$ удовлетворяет условиям определения 7, то величина

$$\lim_{\varepsilon \to +0} \left(\int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \int_{c+\varepsilon}^{b} f(x)dx \right) = V.P.\int_a^b f(x)dx$$

(если предел существует) называется *главным значением* несобственного интеграла $\int_a^b f(x)dx$ (см. определение 7; $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon$).

Пример 12. Найти главное значение интеграла $\int_1^3 \frac{dx}{x-2}$.

◀

$$\int_1^3 \frac{dx}{x-2} = \lim_{\varepsilon_1 \to +0} \int_1^{2-\varepsilon_1} \frac{dx}{x-2} + \lim_{\varepsilon_1 \to +0} \int_{2+\varepsilon_2}^{3} \frac{dx}{x-2} = \lim_{\varepsilon_1 \to +0} \ln|x-2| \Big|_1^{2-\varepsilon_1} +$$

$$+ \lim_{\varepsilon_2 \to +0} \ln|x-2| \Big|_{2-\varepsilon_2}^{3} = \lim_{\substack{\varepsilon_1 \to +0 \\ \varepsilon_2 \to +0}} \left(\ln\varepsilon_1 - \ln 1 + \ln 1 - \ln\varepsilon_2 \right) = \lim_{\substack{\varepsilon_1 \to +0 \\ \varepsilon_2 \to +0}} \ln\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}.$$

Величина предела зависит от того, по какому закону стремятся к нулю ε_1 и ε_2, следовательно, интеграл расходится. Если же взять $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon$, то $V.P.\int_1^3 \frac{dx}{x-2} = \ln 1 = 0$. ▶

10.4. Признаки сходимости несобственных интегралов II рода

Теорема 3. *Пусть на отрезке* $[a,b)$ *каждая из функций* $f(x)$ *и* $\varphi(x)$ *удовлетворяет условиям определения 5 и условию:* $0 \le f(x) \le \varphi(x)$. *Тогда*

1) *из сходимости* $\int_a^b \varphi(x)dx$ *следует сходимость интеграла* $\int_a^b f(x)dx$*;*

2) *из расходимости* $\int_a^b f(x)dx$ *следует расходимость интеграла* $\int_a^b \varphi(x)dx$.

Теорема 4. *Пусть на отрезке* $[a,b)$ *функция* $f(x)$ *удовлетворяет условиям определения 5. Тогда из сходимости интеграла* $\int_a^b |f(x)|dx$ *следует сходимость интеграла* $\int_a^b f(x)dx$.

В этом случае интеграл $\int_a^b f(x)dx$ называется *абсолютно сходящимся*.

Замечание 7. Аналогичные теоремы справедливы для функций, удовлетворяющих определению 6.

Замечание 8. В качестве функций, с которыми удобно сравнивать функции, стоящие под знаком несобственного интеграла, часто берут $\frac{1}{(c-x)^{\alpha}}$. Легко проверить, что $\int_a^c \frac{dx}{(c-x)^{\alpha}}$ сходится при $\alpha < 1$, расходится при $\alpha \ge 1$. Это же относится и к интегралам $\int_a^c \frac{dx}{(x-a)^{\alpha}}$.

Пример 13. $\int_0^1 \frac{xdx}{\sqrt{1-x^3}}$.

◀ Подынтегральная функция имеет разрыв в точке $x=1$ на промежутке $[0,1)$. Справедливы следующие неравенства:

$$x<1, \quad x^3<x, \quad \frac{x}{\sqrt{1-x^3}}<\frac{1}{\sqrt{1-x}}.$$

Интеграл $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$ сходится (по замеч. 8 при $\alpha=\frac{1}{2}<1$).

Тогда по теореме 3 сходится и интеграл $\int_0^1 \frac{xdx}{\sqrt{1-x^3}}$.▶

10.5. Значения некоторых несобственных интегралов

Гамма–функция $\Gamma(x)$:

$$\Gamma(x)=\int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}dt \text{ – сходится при } x>0,$$

$$\Gamma(x)>0;\ \Gamma(x+1)=x\Gamma(x) \text{ при } x>0,$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi};\ \Gamma(1)=1;\ \Gamma(n+1)=n!,\ n\in\mathbf{N},$$

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx=2, \qquad \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=\frac{\pi}{2},$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}dx=1, \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}dx=\pi,$$

$$\int_0^{+\infty} e^{-a^2x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2a},\ a>0, \qquad \int_0^{+\infty} \frac{\sin ax}{x}dx=\frac{\pi}{2},\ a>0,$$

$$\int_0^{+\infty} e^{-ax}\sin nx dx=\frac{n}{a^2+n^2},\ a>0.$$

ГЛАВА 3. ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ (ФНП)

§ 1. Понятие ФНП. Элементы топологии в R^n

Представление о функции нескольких переменных могут дать простые примеры. Площадь прямоугольника $S = x \cdot y$. Если длины сторон x и y рассматривать как независимые переменные, то S – функция этих переменных. Площадь треугольника $S = \frac{1}{2} xy \sin\varphi$ (x и y – стороны треугольника, φ – угол между ними) можно рассматривать как функцию трех независимых переменных.

Рассмотрим некоторое множество точек D из плоскости $R^2 = \mathbf{R} \times \mathbf{R}$, и если каждой точке $M \in D$, имеющей координаты (x, y), в силу некоторого закона f приведено в соответствие число z, то говорят, что на множестве D задана функция двух переменных $z = f(x, y)$. Множество D называется *областью определения* функции $f(x, y)$.

Функцию $z = f(x, y)$ от двух переменных можно изобразить в трехмерном пространстве, где задана прямоугольная декартова система координат $OXYZ$ в виде геометрического места точек $(x, y, f(x, y))$, а область определения – на плоскости XOY.

Пример 1. Геометрическим местом точек для функции $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ является верхняя половина шаровой поверхности (рис. 3). Область определения находится, исходя из условия неотрицательности подкоренного выражения (рис. 4):

$$D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \le 1\}$$

(если граница области не включается, то изображается пунктирной линией).

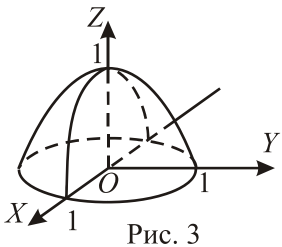


Рис. 3

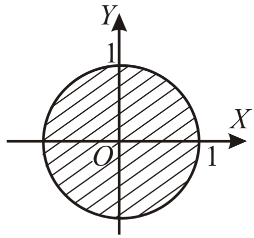


Рис. 4

Не всегда удается изобразить график функции. Построение графиков упрощается с помощью линий уровня.

***Опр.* 1.** *Линией уровня* называется множество точек (x, y), в которых функция $z = f(x, y)$ принимает одинаковые значения.

Пример 2. Построить линии уровня функции

$$z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}\,.$$

◄ Согласно определению линии уровня: $\sqrt{1 - x^2 - y^2} = C$ при $C = const$, откуда $x^2 + y^2 = 1 - C^2$. Это уравнение определяет окружности радиуса $1 - C^2$ ($|C| \le 1$) с центром в начале координат (рис. 5). При $C = 1$ линия уровня вырождается в точку $O(0,0)$.►

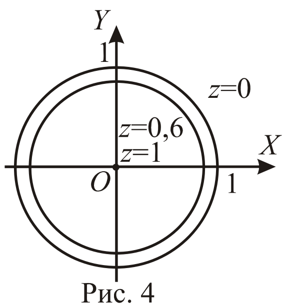


Рис. 4

ФНП, которую можно записать в виде $z = f(x_1, ..., x_n)$, определяется аналогично.

При $n \ge 3$ это определение лишено наглядности изображения. При $n = 3$ область определения функции можно представить в пространстве. В этом случае вместо линий уровня вводится понятие поверхностей уровня. Они точно так же могут вырождаться в какую–либо кривую или точку.

Для определения дальнейших понятий ФНП необходимы некоторые сведения, связанные с геометрией на плоскости и в пространстве. Введем топологию в пространстве R^2 и по аналогии в R^n.

Точки на плоскости R^2 обозначаются $M(x, y)$ или просто (x, y), где x и y называются координатами точки M. Расстояние между точками (x_1, y_1) и (x_2, y_2) определяется формулой

$$\rho(M_1, M_2) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}.$$

Для удобства перехода к n-мерному пространству R^n точки на плоскости R^2 можно обозначить $X(x_1, x_2)$, где x_1 и x_2 будут называться координатами точки X, а расстояние между точками (x_1, x_2) и $(y_{1,} y_2)$ будет определяться формулой

$$\rho(X_1, X_2) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}.$$

В n-мерном евклидовом пространстве R^n расстояние между точками $(x_1, ..., x_n)$ и $(y_1, ..., y_n)$ вычисляется аналогично:

$$\rho = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (x_k - y_k)^2}.$$

***Опр.* 2.** Множество точек $(x_1, x_2) \in R^2$, координаты которых удовлетворяют неравенству

$$(x_1 - x_1^0)^2 + (x_2 - x_2^0)^2 < r^2 \quad (r > 0),$$

называется *открытым кругом* радиуса r с центром в точке (x_1^0, x_2^0).

***Опр.* 3.** Любой открытый круг радиуса $\delta > 0$ с центром в точке (x_1^0, x_2^0) называется δ - *окрестностью* этой точки.

***Опр.* 4.** *Окрестностью точки* "∞" называется множество всех точек (x_1, x_2) таких, что

$$x_1^{\ 2} + x_2^{\ 2} > r^2 \,.$$

***Опр.* 5.** Множество точек $(x_1,...,x_n) \in R^n$, для которых выполняется неравенство

$$\sum_{k=1}^{n} (x_k - x_k^0)^2 < r \quad (r > 0),$$

называется n -*мерным открытым шаром* радиуса r с центром в точке $(x_1^0,...,x_n^0)$.

***Опр.* 6.** Любой открытый n-мерный шар радиуса δ с центром в точке $(x_1^0,...,x_n^0)$ называется n-мерной δ-*окрестностью* этой точки.

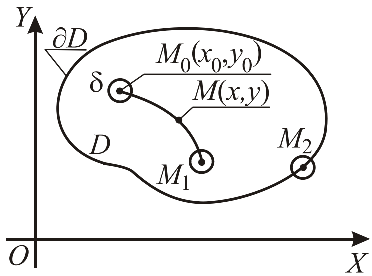


Рис. 6

Пусть D – некоторое множество точек пространства R^n.

***Опр.* 7.** Точка $M \in D$ называется *внутренней* точкой множества D, если существует δ-окрестность $U_\delta(M)$ точки M такая, что она полностью включается в множество D: $U_\delta \subset D$

(на рисунке 6 это точки M_0, M_1, M).

***Опр.* 8.** Точка M называется *граничной* точкой множества D, если в любой ее δ-окрестности содержатся как точки из множества D, так и точки, не принадлежащие множеству D (на рисунке 6 это точка M_2). Совокупность граничных точек называется *границей* и обозначается ∂D или Γ, т.е. $\Gamma = \partial D$.

***Опр.* 9.** Множество D называется *замкнутым*, если $\partial D \subset D$, т.е. любая граничная точка включается в множество D (в пространстве R^3 это шар).

***Опр.* 10.** Множество D называется *открытым*, если все его точки внутренние (в пространстве R^3 это внутренность шара).

***Опр.* 11.** Множество D называется *связным*, если любые его две точки можно соединить непрерывной кривой, принадлежащей D (на рисунке 6 множество D связное).

***Опр.* 12.** Связное открытое множество называется *областью*.

***Опр.* 13.** Множество D называется *ограниченным*, если существует такая δ-окрестность начала координат $O(0,0)$, что все точки множества D принадлежат ей.

§ 2. Предел функции

Пусть функция $z = f(x, y)$ определена в некоторой δ-окрестности точки (x_0, y_0) за исключением, быть может, самой этой точки.

***Опр.* 1.** Число A называется *пределом* функции $z = f(x, y)$ при стремлении точки (x, y) к точке (x_0, y_0), если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что из условия

$$0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta$$

следует $\left|f(x, y) - A\right| < \varepsilon$.

Предел функции обозначается так:

$$A = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y).$$

Пример 1. Доказать, что функция

$$f(x, y) = (x^2 + y^2) \cdot \sin\frac{1}{x^2 + y^2}$$

имеет предел, равный нулю, в начале координат $O(0,0)$.

◄ Функция не определена в точке $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, но имеет предел в этой точке.

Зададим произвольное $\varepsilon > 0$. Тогда если $M(x, y) \in U_\delta(0,0)$, то по определению из того, что $\sqrt{x^2 + y^2} < \delta$ следует

$$\left|\sin\frac{1}{x^2+y^2}\right| \le 1,\ x^2+y^2 \ge 0 \Rightarrow |f(x,y)-0| =$$

$$= \left|(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}\right| < \delta^2.$$

Положив $\varepsilon = \sqrt{\delta}$, получаем необходимое неравенство.►

Пример 2. Вычислить $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}}\frac{\sin xy}{xy}$.

◄ Функция не определена на оси абсцисс, но в точке $(0;2)$ имеет предел. В самом деле, сделав замену $z = xy$, имеем

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}}\frac{\sin xy}{xy} = \lim_{z\to 0}\frac{\sin z}{z} = 1\,.►$$

Пример 3. Рассмотрим функцию $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{y}{x^2-y}$. Пусть точка $M(x,y)$ стремится к $O(0,0)$ по параболе $y = kx^2$, где $k = const$. Тогда

$$\frac{y}{x^2-y} = \frac{kx^2}{x^2-kx^2} = \frac{k}{1-k},$$

т.е. подходя к точке $O(0,0)$ по различным параболам $y = kx^2$ (для различных k *),* получаем различные пределы. А это означает отсутствие предела.►

***Опр.* 2.** Пусть функция $z = f(x,y)$ определена в окрестности точки "∞" $U_R(\infty)$. Число A называется *пределом функции* $z = f(x,y)$ при $x,y\to\infty$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что из условия

$$\sqrt{x^2+y^2} > \delta$$

следует, что $|f(x,y)-A| < \varepsilon$.

Пример 4. Показать, что $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}} \dfrac{x+y}{x^2+y^2} = 0$.

◄ Зададимся *п* произвольными $\varepsilon > 0$. Если $M(x,y) \in U_R(\infty)$, то $\sqrt{x^2+y^2} > \delta$ или $x^2+y^2 > \delta^2$ и $\dfrac{1}{x^2+y^2} < \dfrac{1}{\delta^2}$; далее, очевидно, что $2xy \le x^2+y^2$ или $\dfrac{2xy}{x^2+y^2} \le 1$, поэтому $\dfrac{2xy}{(x^2+y^2)^2} < \dfrac{1}{\delta^2}$ и, следовательно,

$$\left|f(x,y)-0\right| = \sqrt{\frac{1}{x^2+y^2} + \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}} < \frac{\sqrt{2}}{\delta}.$$

Положив $\delta = \dfrac{\sqrt{2}}{\varepsilon}$, получим необходимые неравенства.►

Пример 5. Вычислить $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}} (x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}$.

◄ Введем полярные координаты $x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi$, тогда $(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2} = r^2\sin\dfrac{1}{r^2}$.

Из условия $x, y \to \infty$, вытекает, что $r \to \infty$ и $\lim\limits_{r\to\infty} r^2 \sin\dfrac{1}{r^2} = \lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{\sin t}{t} = 1$. Здесь произвели замену переменной $r^2 = \dfrac{1}{t}$, откуда если $r \to \infty$, то $t \to 0$.►

§ 3. Непрерывность функции

Пусть функция $z = f(x,y)$ определена в некоторой δ-окрестности точки (x_0,y_0), в том числе в самой точке (x_0,y_0).

***Опр.* 1.** Функция $z = f(x,y)$ называется *непрерывной в точке* (x_0,y_0) , если предел функции $z = f(x,y)$ в точке

(x_0, y_0) существует и равен значению функции в этой точке, т.е. $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y) = f(x_0, y_0)$.

***Опр.* 2.** Функцию $z = f(x,y)$ называют *непрерывной на множестве* D, если она непрерывна в каждой точке этого множества.

Условие непрерывности $f(x,y)$ в точке (x_0, y_0) можно записать в эквивалентной форме:

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) = f(x_0, y_0).$$

Можно ввести приращение Δz функции $z = f(x,y)$:

$$\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y).$$

Это означает, что условие непрерывности функции в точке (x,y) эквивалентно выполнению равенства

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \Delta z = 0.$$

Понятие предела и непрерывности для ФНП аналогичны соответствующим понятиям для функции одной переменной, поэтому основные теоремы для непрерывных функций одной переменной остаются справедливыми и для функции нескольких переменных, при этом роль отрезка играет замкнутое множество.

Точка множества, в которой функция не является непрерывной, называется *точкой разрыва* функции. Точки разрыва могут быть изолированными, образовывать линии разрыва, поверхности разрыва (для $n > 3$) и т.д.

Пример 1. Функция $z = xy + x + y + 1$ непрерывна при любых значениях x и y, т.е. в любой точке плоскости OXY. Действительно, преобразовав функцию

$$z = xy + x + y + 1 = (x+1)(y+1),$$

найдем приращение функции

$$\Delta z = (x+\Delta x+1)(y+\Delta y+1) - (x+1)(y+1) =$$
$$= (y+1)\Delta x + (x+1)\Delta y + \Delta x\Delta y,$$

сл-но, $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \Delta z = 0$. Т.о., функция $z = xy + x + y + 1$ непрерывна на R^2.►

Пример 2. Найти точки разрыва функции

$$z = f(x,y) = \frac{x+y-2}{xy-1}.$$

◄ Заметим, что разрыв в точке (a,a), где $a=1$ можно устранить, положив

$$f(a,a)\big|_{a=1} = \frac{2}{a+1}\Big|_{a=1} = 1,$$

т.е. точка $(1,1)$ – точка устранимого разрыва. ►

Пример 3. Найти точки разрыва функции

$$z = \frac{x^2k^2}{x^4+y^4}.$$

◄ Функция определена всюду, кроме точки $(0,0)$. Рассмотрим значение z вдоль прямой $y = kx\ (k = const)$:

$$z = \frac{x^4k^2}{x^4 + x^4k^4} = \frac{k^2}{1+k^4}.$$

Подходя к точке $(0,0)$ по различным прямым, мы будем получать различные предельные значения, зависящие от k. Это значит, что функция не имеет предела в точке $(0,0)$. Функцию нельзя доопределить в этой точке так, чтобы она стала непрерывной. Сл-но, эта точка является точкой неустранимого разрыва. ►

§ 4. Частные производные. Полный дифференциал

Пусть функция $z = f(x,y)$ определена в некоторой δ-окрестности точки (x_0, y_0). Если дать независимой переменной x приращение $\Delta x = x - x_0$, то функция z получит приращение, которое называют *частным приращением* функции z по аргументу x и обозначают символом $\Delta_x z$, так что

$$\Delta_x z = f(x+\Delta x, y) - f(x, y).$$

Аналогично определяется частное приращение z по y:

$$\Delta_y z = f(x, y+\Delta y) - f(x, y).$$

Наконец, сообщив аргументу x приращение $\Delta x = x - x_0$, а аргументу y – приращение $\Delta y = y - y_0$, можно получить для z новое приращение Δz, которое называется *полным приращением* функции z, определяемое формулой

$$\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y).$$

Надо заметить, что, вообще говоря, полное приращение не равно сумме частных приращений, т.е. $\Delta z \neq \Delta_x z + \Delta_y z$.

Например, для функции $z = xy$ имеем

$$\Delta_x z = (x+\Delta x)y - xy = y \cdot \Delta x,\ \Delta_y z = x(y+\Delta y) - xy = x \cdot \Delta y$$

$$\Delta z = (x+\Delta x)(y+\Delta y) - xy = y \cdot \Delta x + x \cdot \Delta y - \Delta x \cdot \Delta y.$$

Аналогичным образом определяются частные и полное приращения функции любого числа переменных.

***Опр.* 1.** *Частной производной* по x (по y) от функции $z = f(x, y)$ называется предел отношения частного приращения $\Delta_x z$ по x ($\Delta_y z$ по y) к приращению Δx (Δy) при стремлении Δx (Δy) к нулю и обозначается одним из символов

$$z'_x = z'_x(x, y) = \frac{\partial z}{\partial x} \quad \left(z'_y = z'_y(x, y) = \frac{\partial z}{\partial y} \right).$$

Т.о., по определению,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}.$$

Как это видно, правила вычисления частных производных совпадают с правилами, указанными для функций одной переменной, но здесь необходимо помнить, по какой переменной ищется производная. При этом другая переменная полагается постоянной.

Частные производные функции любого числа переменных определяются аналогично.

Пример 1. Для функции $f(x,y,z)=xyz+3y^2-z^3$ найти $f'_x(x,y),\ f'_y(x,y),\ f'_z(x,y)$.

$$◀\ \frac{\partial f}{\partial x}=yz\,;\ \frac{\partial f}{\partial y}=xz+6y\,;\ \frac{\partial f}{\partial z}=-3z^2\,.▶$$

***Опр.* 2.** Функция $z=f(x,y)$ называется *дифференцируемой в точке* $(x,y)\in R^2$, если ее полное приращение в этой точке может быть представлено в виде

$$\Delta z=\frac{\partial z}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial z}{\partial y}\Delta y+o(\rho)\,,$$

где

$$\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2};\ \lim_{\rho\to 0}\frac{o(\rho)}{\rho}=0;$$

$$o(\rho)=\alpha(\Delta x,\Delta y)\cdot\Delta x+\beta(\Delta x,\Delta y)\cdot\Delta y.$$

***Опр.* 3.** Главная часть приращения дифференцируемой функции, линейная относительно приращений аргументов, называется *полным дифференциалом* функции $z=f(x,y)$ и обозначается dz :

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy.$$

***Теорема* 1** (необходимое условие дифференцируемости). *Если функция $z=f(x,y)$ дифференцируема в точке (x,y) то она непрерывна в этой точке и обладает частными производными по всем переменным.*

***Теорема* 2** (достаточное условие дифференцируемости). *Если у функции $z=f(x,y)$ в некоторой δ-окрестности точки (x,y) существуют частные производные по всем переменным, которые непрерывны в точке (x,y), то функция дифференцируема в этой точке.*

Как и в случае функции одной переменной, дифференциал можно применить для приближенного вычисления значения ФНП:

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y) \approx f(x,y) + \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\Delta y$$

(с точностью до бесконечно малых высшего порядка относительно Δx и Δy).

§ 5. Касательная плоскость и нормаль к поверхности

Пусть поверхность задана уравнением $F(x,y,z)=0$. Прямая называется *касательной к поверхности* в точке $M_0(x_0,y_0,z_0)$, если она является касательной к какой–либо кривой, лежащей на поверхности и проходящей через точку M_0.

Если в точке M_0 все три производные F'_x, F'_y, F'_z равны нулю или хотя бы одна из них не существует, то точка M_0 называется *особой точкой* поверхности. Если в точке M_0 все три производные существуют и непрерывны, причем хотя бы одна из них отлична от нуля, то точка M_0 называется *обыкновенной точкой* поверхности. Можно показать, что все касательные прямые к данной поверхности в ее обыкновенной точке лежат в одной плоскости, называемой *касательной плоскостью* к поверхности в точке M_0 (в особых точках поверхности касательная плоскость может не существовать).

Касательная плоскость перпендикулярна вектору нормали $\vec{N} = \frac{\partial F}{\partial x}\Big|_{M_0} \cdot \vec{i} + \frac{\partial F}{\partial y}\Big|_{M_0} \cdot \vec{j} + \frac{\partial F}{\partial z}\Big|_{M_0} \cdot \vec{k}$ и её уравнение имеет вид

$$F'_x\Big|_{M_0} \cdot (x-x_0) + F'_y\Big|_{M_0} \cdot (y-y_0) + F'_z\Big|_{M_0} \cdot (z-z_0) = 0.$$

Если уравнение поверхности задано в виде $z = f(x,y)$, то уравнение касательной плоскости примет вид:

$$z - z_0 = f'_x\Big|_{M_0} \cdot (x-x_0) + f'_y\Big|_{M_0} \cdot (y-y_0).$$

Прямая, проведенная через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ поверхности перпендикулярно касательной плоскости, называется *нормалью к поверхности*. Ее направление определяется вектором $\vec{N}$ $\bar{\ }$и канонические уравнения примут вид:

$$\frac{x-x_0}{F_x'\big|_{M_0}} = \frac{y-y_0}{F_y'\big|_{M_0}} = \frac{z-z_0}{F_z'\big|_{M_0}},$$

а если уравнение поверхности задано в виде $z = f(x, y)$, то

$$\frac{x-x_0}{f_x'\big|_{M_0}} = \frac{y-y_0}{f_y'\big|_{M_0}} = \frac{z-z_0}{-1}.$$

Геометрический смысл частных производных

Рассмотрим функцию $z = f(x, y)$ ($F(x, y, z) = 0$). Проведем через точку $P_0(x_0, y_0, z_0)$ плоскость $x = x_0$. В сечении ее поверхностью $z = f(x, y)$ (см. рис. 7) получим линию L_x.

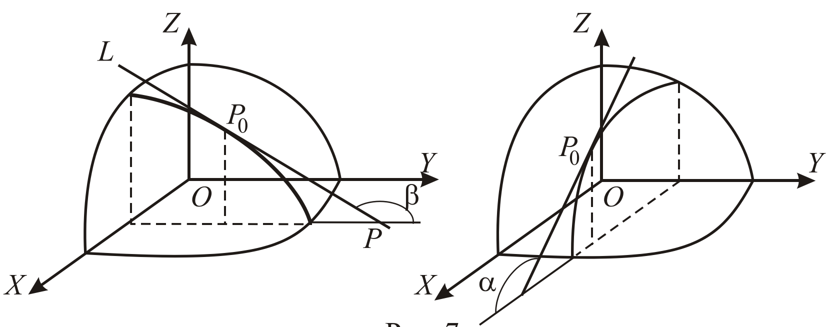


Рис. 7

Если дать приращение $\Delta y = MN$ переменной y (при неизменном x), функция получит приращение $\Delta_y z = RS$. Очевидно, предел $\lim\limits_{\Delta y \to 0} \dfrac{\Delta z}{\Delta y} = \dfrac{\partial z}{\partial y} = \operatorname{tg}\beta$, где β – угол, образуемый касательной PP_0 к кривой L_x в точке P_0 с положительным направлением оси OY. Аналогично, $\frac{\partial z}{\partial x} = \operatorname{tg}\alpha$, где α – угол, образуемый касательной к сечению поверхности $z = f(x, y)$ плоскостью $y = y_0$ с положительным направлением оси OX.

§ 6. Частные производные высших порядков

Частные производные $\frac{\partial z}{\partial x} = f'_x(x, y)$ и $\frac{\partial z}{\partial y} = f'_y(x, y)$, вообще говоря, являются функциями переменных x и y, поэтому можно поставить вопрос о нахождении от них производных.

***Опр.* 1.** Если у функции $\frac{\partial z}{\partial x}$ (у функции $\frac{\partial z}{\partial y}$) существует частная производная по переменной x (по переменной y), то ее называют *частной производной второго порядка* от функции $z = f(x, y)$ по переменной x (по переменной y) и обозначают $z''_{xx} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ ($z''_{yy} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$).

Таким образом,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right); \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right).$$

***Опр.* 2.** Если существует частная производная от функции $\frac{\partial z}{\partial x}$ (от функции $\frac{\partial z}{\partial y}$) по переменной y (по переменной x), то эту производную называют *смешанной частной производной второго порядка* от функции $z = f(x, y)$ и обозначают символом $z''_{xy} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ ($z''_{yx} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$).

Таким образом,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right); \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right).$$

Как это видно для функции от двух переменных $f(x,y)$, можно рассматривать четыре производных второго порядка.

Производные второго порядка можно снова дифференцировать как по x, так и по y. Получим частные производные третьего порядка. Их будет уже восемь:

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}, \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}, \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial x}, \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}, \frac{\partial^3 z}{\partial y^2 \partial x}, \frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x \partial y}, \frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x^2}, \frac{\partial^3 z}{\partial y^3}.$$

Вообще, частная производная n-го порядка есть первая производная от производной ($n-1$)-го порядка. Например,

$$\frac{\partial^4 z}{\partial x^3 \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}\right).$$

Естественно возникает вопрос, будут ли равны между собой частные производные, если они взяты по одним и тем же переменным одно и то же число раз, но в разном порядке. Например, равны ли z'''_{xxy} и z'''_{yxx} и z'''_{zyx}?

В общем случае скажем: если нарушается непрерывность в точке (x,y) у этих производных, то ответ на этот вопрос отрицательный.

Например, если

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^2}, & x^2+y^2 \neq 0, \\ 0, & x = y = 0, \end{cases}$$

то

$$f'_x(x,y) = \frac{(y^2-x^2)y^2}{(x^2+y^2)^2}; \quad f'_y(x,y) = \frac{2x^3 y}{(x^2+y^2)^2}; \quad x^2+y^2 \neq 0;$$

$$f'_x(0,0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\Delta x, 0) - f(0,0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{0-0}{\Delta x} = 0;$$

$$f'_y(0,0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(0, \Delta y) - f(0,0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{0-0}{\Delta y} = 0.$$

Аналогично вычисляются смешанные производные:

$$f''_{xy}(0{,}0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f'_x(0,\Delta y)-f'_x(0{,}0)}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{1-0}{\Delta y}=\infty;$$

$$f''_{yx}(0{,}0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f'_y(\Delta x,0)-f'_y(0{,}0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{0-0}{\Delta x}=0.$$

Т.о., $f''_{xy}(0{,}0)\neq f''_{yx}(0{,}0)$.

Теорема (о смешанных производных). *Пусть функция* $z=f(x,y)$ *определена вместе со своими частными производными* $z'_x, z'_y, z''_{xy}, z''_{yx}$ *в некоторой* δ *-окрестности точки* (x_0,y_0), *причем* z''_{xy}, z''_{yx} *непрерывны в этой точке, тогда результат дифференцирования не зависит от порядка дифференцирования.*

Например, если $z=xy+\dfrac{y}{x},\ \ x\neq 0$, то

$$z'_x=y-\frac{y}{x^2};\ \ z''_{xy}=1-\frac{1}{x^2};$$

$$z'_y=x+\frac{1}{x};\ z''_{yx}=1-\frac{1}{x^2};$$

как видно, $z''_{xy}=z''_{yx}$.

§ 7. Дифференцирование функции

Дифференцирование суммы, произведения, частного функции нескольких переменных производится по обычным правилам дифференцирования.

Полный дифференциал сложной функции

Если у функции $z=f(x,y)$ каждая переменная в свою очередь является функцией одной или нескольких независимых переменных, то полный дифференциал этой сложной функции вычисляется по той же формуле, что и для функции независимых переменных

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy.$$

В этом проявляется *инвариантность формы* первого дифференциала.

Дифференциал высшего порядка
функции нескольких независимых переменных

Пусть функция $z = f(x, y)$ имеет вторые непрерывные частные производные. Второй дифференциал от нее определяется равенством

$$d^2z = d(dz)$$

при этом дифференциалы dx, dy рассматриваются как независящие от x и y и дифференциал 2-го порядка функции z вычисляется по формуле

$$d^2z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2 .$$

Для функции большего числа переменных $z = f(x_1, ..., x_n)$ с использованием сокращенного обозначения символа суммирования получим следующую формулу

$$d^2z = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 z}{\partial x_i \partial x_j}dx_i dx_j .$$

Так как $z''_{ij} = z''_{ji}$, то второй дифференциал от нее представляет собой квадратичную форму относительно независимых дифференциалов $dx_k : k = \overline{1, n}$.

Для дифференциала n-го порядка функции двух независимых переменных $z = f(x, y)$ при наличии соответствующих производных справедлива следующая символическая формула:

$$d^n z = \left(dx\frac{\partial}{\partial x} + dy\frac{\partial}{\partial y} \right)^n z ,$$

которая формально развертывается по биномиальному закону. Вообще, дифференциал произвольного порядка от функции z для независимых дифференциалов $dx_k : k = \overline{1, n}$ определяется по индукции при помощи рекуррентного соотношения

$$d^k z = d(d^{k-1}z),$$

где d^k, d, d^{k-1} берутся для независимых дифференциалов dx_k, которые к тому же рассматриваются при вычислениях как постоянные. В многомерном случае имеет место аналогичная символическая формула

$$d^m z = \left(\sum_{i=1}^{n} dx_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right)^m z .$$

Дифференциал высшего порядка ФНП

Если $z = f(x, y)$, где аргументы есть функции одной переменной или нескольких зависимых переменных, то при наличии соответствующих производных для дифференциала 2-го порядка справедлива формула

$$d^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2 + \frac{\partial z}{\partial x} d^2 x + \frac{\partial z}{\partial y} d^2 y.$$

Если $z = f(x_1, ..., x_n)$, то этой формуле можно придать следующую символическую форму:

$$d^2 z = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 z}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial z}{\partial x_i} d^2 x_i.$$

Вычисление дифференциалов более высоких порядков через зависимые переменные x_k производится подобным образом последовательно, учитывая рекуррентное соотношение

$$d^n z = d^{n-1}(dz),$$

основные правила дифференцирования и зависимость производных от аргументов.

Производная сложной функции одной независимой переменной

Если $z = f(x, y)$ есть дифференцируемая функции аргументов x и y, которые в свою очередь являются дифференцируемыми функциями независимой переменной t:

$$x = \varphi(t),\ y = \phi(t),$$

то имеет место формула

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}.$$

В частности, если $t=x$, то «полная» производная функции z по x равна

$$\frac{dz}{dx}=\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}.$$

Пример 1. $z=xy$; $x=\dfrac{t^2+1}{2}$; $y=\ln t$. $\dfrac{dz}{dt}=?$

$$◄\ \frac{dz}{dt}=y\cdot t+x\cdot\frac{1}{t}=t\cdot\ln t+\frac{t^2+1}{2t}.\ ►$$

Пример 2. $z=\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$; $y=e^x$. $\dfrac{dz}{dx}=?$

$$◄\ \frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{1+\dfrac{y^2}{x^2}}\cdot\frac{-y}{x^2}=\frac{-y}{x^2+y^2}=\frac{-e^x}{x^2+e^{2x}};$$

$$\frac{dz}{dx}=\frac{-e^x}{x^2+e^{2x}}+\frac{x}{x^2+e^{2x}}\cdot e^x=\frac{(x-1)e^x}{x^2+e^{2x}}.\ ►$$

Производная сложной функции нескольких независимых переменных

Если $z=f(x,y)$, где $x=\varphi(u,v)$, $y=\phi(u,v)$ есть дифференцируемые функции, u,v – независимые переменные, то частные производные выражаются так:

$$\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u};\qquad \frac{\partial z}{\partial v}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}.$$

В частности, если $x=y$, то $z=f(x)$, где $x=\varphi(u,v)$ и частные производные равны

$$\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u};\qquad \frac{\partial z}{\partial v}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v}.$$

Пример 3. $z=\sqrt{x^2+y^2}$; $x=u\sin v$; $y=u\cos v$.
$\frac{\partial z}{\partial u}=?$ $\frac{\partial z}{\partial v}=?$

◀ $\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\sin v+\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\cos v=$

$=\sin^2 v+\cos^2 v=1$;

$\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot u\cdot\cos v-\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot u\cdot\sin v=$

$=(\sin v\cdot\cos v-\cos v\cdot\sin v)\cdot u=0$.▶

Пример 4. $z=\frac{1}{2}e^{2x}$; $x=\ln\sqrt{u^2+v^2}$. $\frac{\partial z}{\partial u}=?$ $\frac{\partial z}{\partial v}=?$

◀ $\frac{\partial z}{\partial u}=e^{2x}\cdot\frac{1}{\sqrt{u^2+v^2}}\cdot\frac{u}{\sqrt{u^2+v^2}}=(u^2+v^2)\cdot\frac{u}{u^2+v^2}=u$;

$\frac{\partial z}{\partial v}=e^{2x}\cdot\frac{1}{\sqrt{u^2+v^2}}\cdot\frac{v}{\sqrt{u^2+v^2}}=(u^2+v^2)\cdot\frac{v}{u^2+v^2}=v$.▶

Производная неявной функции

Если уравнение $F(x,y,z)=0$ определяет z как функцию независимых переменных x и y , где $F(x,y,z)$ – дифференцируемая функция всех своих переменных $F'_z(x,y,z)\neq 0$, то частные производные этой неявно заданной функции находятся по формулам

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F'_x(x,y,z)}{F'_z(x,y,z)};\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F'_y(x,y,z)}{F'_z(x,y,z)}.$$

Если $F(x,y)=0$, то неявная функция имеет только одну независимую переменную и её производная равна

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)}.$$

Пример 5. $e^z - \cos x \cdot \sin y = 0$. $\frac{\partial z}{\partial x} = ?$ $\frac{\partial z}{\partial y} = ?$

◄ $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\sin x \cdot \sin y}{e^z} = -\frac{\sin x \cdot \sin y}{\cos x \cdot \sin y} = -\mathrm{tg} x;$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{-\cos x \cdot \cos y}{e^z} = \frac{\cos x \cdot \cos y}{\cos x \cdot \sin y} = \mathrm{ctg} y. \text{►}$$

Пример 6. $y + x - y^x = 0$. $\frac{dy}{dx} = ?$

◄ $\frac{dy}{dx} = -\frac{1 - y^x \cdot \ln y}{1 - x \cdot y^{x-1}} = \frac{(x+y) \cdot \ln y - 1}{y - (x+y) \cdot x} \cdot y.$ ►

Производные высших порядков сложных и неявных функций

Частные производные высших порядков сложных и неявных функций вычисляются дифференцированием формул, определяющих производные, порядок которых ниже на единицу. Скажем, чтобы найти вторую производную от функции $f(x, y)$, например, f''_{xx}, нужно продифференцировать по x частным образом выражение ранее определенной первой производной f'_x, помня при этом, что фигурирующая в нем функция f зависит от x, т.е. следует применить правило дифференцирования сложной функции.

В результате выражение для f''_{xx} может содержать производную f'_x. Последнюю следует заменить уже найденным для нее значением.

Пример 7. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$ $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = ?$ $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - ?$

◄ Введем обозначение: $F(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1$.

Тогда

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F'_x}{F'_z}=-\frac{c^2}{a^2}\cdot\frac{x}{z}; \qquad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F'_y}{F'_z}=-\frac{c^2}{b^2}\cdot\frac{y}{z}.$$

Далее, определим вторые производные

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=-\frac{c^2}{a^2}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{z}\right)=-\frac{c^2}{a^2}\cdot\frac{z-\dfrac{\partial z}{\partial x}\cdot x}{z^2}=$$

$$=-\frac{c^2}{a^2}\cdot\frac{z+\dfrac{c^2}{a^2}\cdot\dfrac{x}{z}\cdot x}{z^2}=-\frac{c^2}{a^4}\cdot\frac{a^2\cdot z^2+c^2\cdot x^2}{z^3};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=-\frac{c^2}{a^2}\cdot\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{z}\right)=-\frac{c^2}{a^2}\cdot x\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{z}\right)=$$

$$=-\frac{c^2}{a^2}\cdot x\cdot\left(-\frac{1}{z^2}\right)\cdot\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{c^2}{a^2}\cdot\frac{x}{z^2}\left(-\frac{c^2}{b^2}\cdot\frac{y}{z}\right)=-\frac{c^4xy}{a^2b^2z^3}. \blacktriangleright$$

§ 8. Производная по направлению. Поверхности и линии уровня. Градиент скалярного поля

Если в каждой точке области D пространства R^n определено значение некоторой величины, то говорят, что задано *поле* данной величины.

Поле называется *скалярным,* если рассматриваемая величина есть числовая функция.

Примерами скалярных полей являются: поле электрического потенциала, давление в атмосфере, поле температур и другие.

Если в пространстве R^n введена декартова система координат, то скалярное поле можно задать функцией

$$U=f(x,y,z).$$

Геометрической характеристикой скалярного поля служат поверхности уровня – геометрические места точек, в которых скалярная функция поля принимает одно и то же значение.

Поверхности уровня данного скалярного поля определяются уравнением.

$$f(x,y,z)=C=const.$$

Пример 1. Найти поверхности уровня скалярного поля

$$U = \arcsin\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

◀ Область определения данного скалярного поля находится из неравенства

$$\left|\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| \le 1, \text{ т.е. } \frac{z^2}{x^2+y^2} \le 1 \Rightarrow z^2 \le x^2+y^2.$$

Неравенство показывает, что поле определено вне кругового конуса $z^2 = x^2 + y^2$ и на нем самом, кроме его вершины $O(0,0)$. Поверхности уровня определяются уравнением

$$\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}, \text{ где } -\frac{\pi}{2} \le 0 \le \frac{\pi}{2}, \text{ т.е}$$

$$\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}} = \sin C \text{ или } z^2 = (x^2+y^2)\cdot\sin^2 C.$$

Это есть семейство круговых конусов, расположенных вне конуса, с общей осью симметрии OZ с общей вершиной $O(0,0,0)$, в которой данное поле не определено, причем сам конус также входит в это семейство.▶

***Опр.* 1.** Скалярное поле называется *плоским*, если существует декартова система координат, в которой поле задается числовой функцией от ($n-1$) переменных.

Для R^3 это будет $U = f(x,y,z)$.

Геометрической характеристикой плоских скалярных полей служат линии уровня — геометрические места точек, в которых скалярная функция имеет одно и то же значение.

Линии уровня определяются уравнением $f(x,y) = C$, где $C = const$.

Пример 2. Написать уравнение линии уровня скалярного поля U, проходящей через точку $M(2;-1)$, если поле задано неявно уравнением

$$x\ln u + y = 0.$$

◀ Линии уровня данного скалярного поля определяются уравнением

$$x\ln C + y = 0, \text{ или } y = -x\ln C.$$

Учитывая тот факт, что $y = -1$, при $x = 2$ найдем:

$$\ln C = 0{,}5.$$

Следовательно, уравнение линии уровня запишется в виде $y = 0{,}5x.$ ▶

Производная от функции по данному направлению

Пусть скалярное поле $u = f(M)$ определено в области $D \in R^n$.

Зафиксируем точку $M_0 \in D$ и выберем некоторое направление, определяемое вектором $\vec{l}$; если существует предел $\dfrac{\partial u}{\partial \vec{l}} = \lim\limits_{\Delta l \to 0} \dfrac{\Delta u}{\Delta l}$, то его называют *производной функции* $u = f(M)$ *по данному направлению* $\vec{l}$ *в заданной точке* M_0, где

$$\Delta u = f(M) - f(M_0), \;\; \Delta l = \left|\overrightarrow{MM_0}\right|, \quad MM_0 \parallel \vec{l}.$$

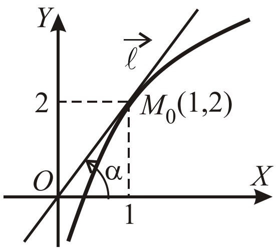
Пусть в пространстве R^3 введена декартова система координат, тогда $f(M) = f(x, y, z)$. Пусть функция $u = f(x, y, z)$ дифференцируема в точке M_0. Производную функции $u = f(x, y, z)$ в точке M_0 по направлению вектора $\vec{l} = (l_x, l_y, l_z)$ вычисляют по формуле

$$\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_{M_0} = \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{M_0} \cdot \cos\alpha + \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{M_0} \cdot \cos\beta + \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{M_0} \cdot \cos\gamma,$$

где $\cos\alpha = \dfrac{l_x}{|\vec{l}|}, \cos\beta = \dfrac{l_y}{|\vec{l}|}, \cos\gamma = \dfrac{l_z}{|\vec{l}|}$ – направляющие косинусы вектора $\vec{l}$.

Пример 3. Вычислить производную скалярного поля $z = \ln(x^2 + y^2)$ в точке $M_0(1;2)$ параболы $y^2 = 4x$ по направлению кривой (в направлении возрастания абсцисс).

◄ Пусть касательная к кривой в точке M_0 образует с осью OX угол α:



$$\operatorname{tg}\alpha = y'\big|_{x=1} = \left.\frac{1}{\sqrt{x}}\right|_{x=1} = 1 \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4}.$$

Тогда $\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$;

$$\cos\beta = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}};$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{M_0} = \left.\frac{2x}{x^2 + y^2}\right|_{\substack{x=1\\y=2}} = \frac{2}{5};\quad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{M_0} = \left.\frac{2y}{x^2 + y^2}\right|_{\substack{x=1\\y=2}} = \frac{4}{5}.$$

Производная по направлению для плоского скалярного поля будет равна

$$\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_{M_0} = \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{M_0} \cdot \cos\alpha + \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{M_0} \cdot \cos\beta = \frac{2}{5}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{4}{5}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{3}{5}\sqrt{2}\,.$$ ►

Градиент скалярного поля

***Опр.* 2.** *Градиентом* скалярного поля $u = f(M)$ в данной точке M_0 называется вектор

$$\operatorname{grad} u\big|_{M_0} = \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{M_0} \cdot \vec{i} + \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{M_0} \cdot \vec{j} + \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{M_0} \cdot \vec{k}.$$

Градиент и производная по направлению связаны формулой

$$\operatorname{grad} u \cdot \frac{\partial u}{\partial l} = (\vec{G} \cdot \vec{l}\,),$$

где $\vec{G} = \operatorname{grad} u$; $(\vec{G} \cdot \vec{l}\,) = \left|\vec{G}\right| \cdot \left|\vec{l}\right| \cdot \cos\left(\widehat{\vec{G} \cdot \vec{l}}\right)$.

Замечание 1. $\text{Grad}u$ по величине и направлению дает наибольшую скорость изменения функции $u = f(x, y, z)$.

Замечание 2. $\text{Grad}u$ в данной точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ направлен по нормали к поверхности уровня, проходящей через точку M_0.

§ 9. Экстремум функции нескольких переменных

9.1. Локальный экстремум

Пусть функция $z = f(x_1,..., x_n)$ определена в некоторой δ -окрестности точки $M_0(x_1^0,..., x_n^0)$. Говорят, что функция $z = f(x_1,..., x_n)$ имеет в точке $M_0(x_1^0,..., x_n^0)$ *локальный максимум* (*минимум*), если существует такая ε-окрестность U_ε точки $M_0(x_1^0,..., x_n^0)$; $\varepsilon < \delta,$ что для любой точки $M(x_1,..., x_n) \in U_\varepsilon(x_1^0,..., x_n^0)$ выполняется неравенство

$$f(x_1,..., x_n) \le f(x_1^0,..., x_n^0) \quad (f(x_1,..., x_n) \ge f(x_1^0,..., x_n^0)).$$

Локальный максимум и локальный минимум объединяются общим названием *локальный экстремум*.

Необходимое условие локального экстремума

***Теорема* 1.** *Если функция $z = f(x_1,..., x_n)$ в точке $M_0(x_1^0,..., x_n^0)$ имеет локальный экстремум и в этой точке существуют частные производные 1-го порядка по всем переменным, то все эти частные производные равны нулю:* $f'_{x_i} = 0, (i = \overline{1, n})$.

Если функция $z = f(x_1,..., x_n)$ дифференцируема в точке $M_0(x_1^0,..., x_n^0)$, то соотношение $df(x_1,..., x_n) = 0$ также является необходимым условием локального экстремума.

Точки, в которых выполняются эти равенства, называются *стационарными*. Функция может принимать локальный экстремум только в стационарных точках или в точках, в которых частные производные первого порядка не существуют. Все такие точки называют *критическими*.

Достаточное условие локального экстремума

Теорема 2. *Пусть в некоторой окрестности стационарной точки* $M_0(x_1^0,...,x_n^0)$ *функция* $z = f(x_1,...,x_n)$ *дважды дифференцируемая и все частные производные второго порядка* $a_{ij} = f''_{x_i x_j}, (i, j = \overline{1,n})$ *непрерывны в точке* $M_0(x_1^0,...,x_n^0)$.

Если в этой точке второй дифференциал $d^2 f(x_1^0,...,x_n^0)$ *представляет собой знакоопределенную квадратичную форму от дифференциалов* $dx_1,...,dx_n$ *независимых переменных, то в точке* $M_0(x_1^0,...,x_n^0)$ *функция* $z = f(x_1,...,x_n)$ *имеет локальный экстремум. При этом если* $d^2 f(x_1^0,...,x_n^0) > 0$ $(d^2 f(x_1^0,...,x_n^0) < 0)$ *и* $dx_1^2 + ... + dx_n^2 > 0$, *то в этой точке* $M_0(x_1^0,...,x_n^0)$ *функция* $z = f(x_1,...,x_n)$ *имеет локальный минимум (максимум). Этот случай соответствует условию:* $\Delta_k > 0, ((-1)^k \Delta_k > 0);\ k = \overline{1,n}$.

Здесь $\Delta_k = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kk} \end{vmatrix}$ *– минор* k *-го порядка.*

Если в точке M_0 *второй дифференциал представляет собой не строгую определенную квадратичную форму, т.е.* $d^2 f(x_1^0,...,x_n^0) \geq 0$ *или* $d^2 f(x_1^0,...,x_n^0) \leq 0$, *что соответствует условию:* $\Delta_k \geq 0$ *или* $(-1)^k \Delta_k \geq 0$, *и имеется* m, *при котором* $\Delta_m = 0$, *то требуется дальнейшее исследование, и вопрос о существовании экстремума в точке* $M_0(x_1^0,...,x_n^0)$ *решается с помощью приращений функции в окрестности критической точки.*

Во всех остальных случаях в точке M_0 заведомо нет экстремума.

Пример 1. Исследовать на локальный экстремум функцию

$$f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy.$$

◀ Область определения данной функции – вся плоскость OXY. Определим, в каких точках области определения данной функции выполняются необходимые условия существования экстремума. Частные производные функции:

$$f'_x = 3x^2 - 3y,\ f'_y = 3y^2 - 3x.$$

Для определения координат стационарных точек функции составляем систему уравнений

$$\begin{cases} 3x^2 - 3y = 0, \\ 3y^2 - 3x = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0, \\ y_1 = 0, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x_2 = 1, \\ y_2 = 1. \end{cases}$$

Отсюда $M_1(0,0)$ и $M_2(1,1)$ – стационарные точки. Проверим выполнение достаточных условий существования экстремума в точках M_1, M_2, т.е. знакоопределенность второго дифференциала

$$d^2 f_M(x,y) = f''_{xx}dx^2 + 2f''_{xy}dxdy + f''_{yy}dy^2,$$

который представлен квадратичной формой от дифференциалов dx, dy.

Вторые частные производные данной функции:

$$f''_{xx} = 6x,\ f'' = -3,\ f''_{yy} = 6y.$$

Рассмотрим точку $M_1(0,0)$. Поскольку

$$a_{11} = f''_{xx}(0,0) = 6 \cdot 0 = 0;\ \ a_{12} = f''_{xy}(0,0) = -3;$$

$$a_{22} = f''_{yy}(0,0) = 6 \cdot 0 = 0,$$

то $\Delta_1 = 0$; $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} = -9 < 0$ – этот случай соответствует третьему условию. Сл–но, точка $M_1(0,0)$ не является экстремальной.

В точке $M_2(1,1)$ найдем значения частных производных:

$$a_{11} = f''_{xx}(1,1) = 6 \cdot 1 = 6; \ a_{12} = f''_{xy}(1,1) = -3;$$

$$a_{22} = f''_{yy}(1,1) = 6 \cdot 1 = 6,$$

отсюда $\varDelta_1 = 6 > 0; \varDelta_2 = \begin{vmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{vmatrix} = 27 > 0$, т.е. выполняется первое условие. Сл–но, $M_2(1,1)$ – точка минимума функции, причем

$$f(1,1) = f_{\min} = -1 .►$$

Пример 2. Исследовать на экстремум функцию $z = (x - 2y - 1)^2$.

◄ Необходимые условия существования экстремума выполняются в тех точках области определения данной функции, координаты которых удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} z'_x = 0, \\ z'_y = 0, \end{cases} \text{т.е.} \begin{cases} 2(x - 2y - 1) = 0, \\ 4(-x + 2y + 1) = 0. \end{cases}$$

Отсюда, геометрическое место критических точек есть прямая $x - 2y - 1 = 0$, $a_{11} = 2, a_{12} = -4, a_{22} = 8.$ Так как $\varDelta_1 = 2, \varDelta_2 = 0$ во всех точках прямой $x - 2y - 1 = 0$, то нужно исследовать функцию на экстремум, исходя из определения.

Определим знак приращения функции $z = (x - 2y - 1)^2$ в точках найденной прямой:

$$\Delta z = (x + \Delta x - 2y - 2\Delta y - 1)^2 - (x - 2y - 1)^2 =$$

$$= \left[(x - 2y - 1) - (\Delta x - 2\Delta y)\right]^2 - (x - 2y - 1)^2 =$$

$$= 2(x - 2y - 1) \cdot (\Delta x - 2\Delta y) + (\Delta x - 2\Delta y)^2.$$

Поскольку $x - 2y - 1 = 0$, то $\Delta z = (\Delta x - 2\Delta y)^2$.

Так как $\Delta z \geq 0$, то в точках прямой $x - 2y - 1 = 0$ (а не в одной точке) функция $z = (x - 2y - 1)^2$ имеет нестрогий минимум.►

9.2. Условный экстремум

Опр. Функция $z = f(x_1,...,x_n)$ имеет *условный максимум* (*условный минимум*) в точке $M_0(x_1^0,...,x_n^0)$, если существует такая окрестность точки M_0, для всех точек M которой $f(x_1,...,x_n) \neq f(x_1^0,...,x_n^0)$ удовлетворяющих уравнениям связи

$$\varphi_k(x_1,...,x_n) = 0, \text{ где } k = \overline{1,m};\ m < n,$$

выполняется неравенство

$$f(x_1^0,...,x_n^0) > f(x_1,...,x_n).$$

(соответственно $f(x_1^0,...,x_n^0) < f(x_1,...,x_n)$).

Задача нахождения условного экстремума сводится к исследованию на обычный экстремум *функции Лагранжа*:

$$F(x_1,...,x_n,\lambda_1,...,\lambda_m) = f(x_1,...,x_n) + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \varphi_k(x_1,...,x_n);$$

постоянные λ_k называются *множителями Лагранжа*.

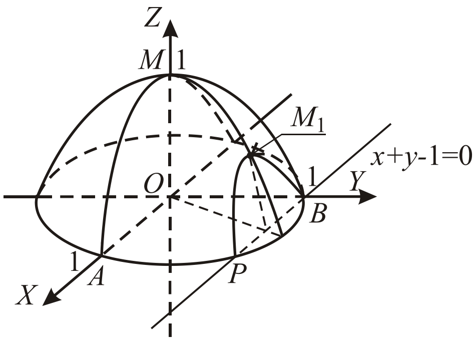
При этом знак второго дифференциала d^2F в стационарной точке $M_0(x_1^0,...,x_n^0)$ определяет характер экстремума при условии, что дифференциалы $dx_1, dx_2,..., dx_n$ связаны соотношениями

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \varphi_k(x_1^0,...,x_n^0)}{dx_i} dx_i = 0,$$

где $k = \overline{1,m}$ при $dx_1^2 + dx_2^2 + ... + dx_n^2 \neq 0$.

Пример 3. Исследовать на экстремум функцию $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$, если переменные x и y связаны уравнением $x + y - 1 = 0$.

◄ *1 способ*. Графиком функции $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ служит верхняя часть сферы. Эта функция имеет максимум в начале координат, $z_{\max}(0,0) = 1$, если уравнение прямой AB есть $x + y - 1 = 0$, то геометрически ясно, что для точек этой прямой



наибольшее значение функции достигается в точке P, лежащей посередине между A и B. Точка $P\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ – точка условного экстремума (максимума) функции $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ на данной прямой, а ей соответствует точка M_1 на полусфере, аппликата которой $z\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}$.

2-й способ. Решим эту задачу через функцию Лагранжа

$$F(x,y,\lambda)=\sqrt{1-x^2-y^2}+\lambda(x+y-1)$$

и исследуем ее на безусловный экстремум.

Стационарные точки функции $F(x,y,\lambda)$ определяются из системы уравнений

$$\begin{cases} F'_x=\dfrac{-x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}+\lambda=0, \\ F'_y=\dfrac{-y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}+\lambda=0, \\ F'_\lambda=x+y-1=0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0=\dfrac{1}{2}, \\ y_0=\dfrac{1}{2}, \\ \lambda=\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \end{cases}$$

т.е. условный экстремум исследуемой функции совпадает с безусловным экстремумом функции $F(x,y,\lambda)$.

Проверим выполнение достаточных условий существования экстремума. С этой целью найдем второй дифференциал функции Лагранжа и выясним его знак в стационарной точке $P\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ при условии $x+y-1=0$.

$$d^2F = F''_{xx}dx^2 + F''_{yy}dy^2 + F''_{\lambda\lambda}d\lambda^2 + 2F''_{xy}dx\,dy + 2F''_{x\lambda}dx\,d\lambda + 2F''_{y\lambda}dy\,d\lambda =$$

$$= \frac{y^2-1}{\left(1-x^2-y^2\right)^{\frac{3}{2}}}dx^2 + \frac{x^2-1}{\left(1-x^2-y^2\right)^{\frac{3}{2}}}dy^2 + 0\cdot d\lambda^2 +$$

$$+2\cdot\frac{-xy}{\left(1-x^2-y^2\right)^{\frac{3}{2}}}dx\,dy + 2\cdot 1\cdot dx\,d\lambda + 2\cdot 1\cdot dy\,d\lambda\,.$$

Продифференцируем условие связи $x+y-1=0$ и получим:

$$x+y-1=0 \;\Rightarrow\; dx+dy=0 \;\Rightarrow\; dx=-dy\,.$$

Подставим найденную зависимость между дифференциалами dx и dy во второй дифференциал функции Лагранжа:

$$d^2F = \frac{y^2-1+x^2-1-2xy}{\left(1-x^2-y^2\right)^{\frac{3}{2}}}\cdot dx^2 + dx\,d\lambda\cdot(2-2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; d^2F = \frac{(x-y)^2-2}{\left(1-x^2-y^2\right)^{\frac{3}{2}}}\cdot dx^2\,.$$

Выясним знак найденного второго дифференциала функции Лагранжа в стационарной точке $P\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$:

$$d^2F(P) = \frac{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)^2-2}{\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}\cdot dx^2 = -4dx^2 < 0\,,$$

т.е. точка $P\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ является точкой максимума функции $F(x,y,\lambda)$, сл–но, точкой условного максимума функции $z(x,y)$, причем $z\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}$. ►

9.3. Задачи на наибольшее и наименьшее значения функции

Если функция $z=f(x_1,\ldots,x_n)$ определена и непрерывна в некоторой ограниченной и замкнутой области D и за исключением, быть может, отдельных точек имеет в этой области конечные частные производные, то в этой области найдется точка $(x_1^0,\ldots,x_n^0)$, в которой функция получает наибольшее и наименьшее из всех значений.

Для того, чтобы найти наибольшее или наименьшее значение функции в замкнутой области, нужно найти все критические точки внутри этой области, а также критические точки функции на границе области. Наибольшее из всех этих чисел и будет наибольшим значением, а наименьшее – наименьшим.

В задачах на отыскание наибольшего и наименьшего значений функции в замкнутой области приходится находить экстремальные значения функции на границе этой области, т.е. на некоторой линии, решая задачу исследования функции на условный экстремум.

Приведем план решения задач на отыскание наибольшего и наименьшего значения ФНП $z(x,y)$ в замкнутой области $D \subset XOY$.

1) Найти критические точки функции $z(x,y)$ внутри заданной области D, т.е. найти такие решения (x_0,y_0) системы $\begin{cases} z'_x = 0, \\ z'_y = 0, \end{cases}$ которые принадлежат внутренней части области D.

2) Найти критические точки функции $z(x,y)$ на границе области D. Если выяснять этот вопрос с помощью функции Лагранжа $F(x,y,\lambda)= z(x,y)+\lambda\,\varphi_D(x,y)$, где $\varphi_D(x,y)$ – граница области D, то необходимо найти решения следующей системы:

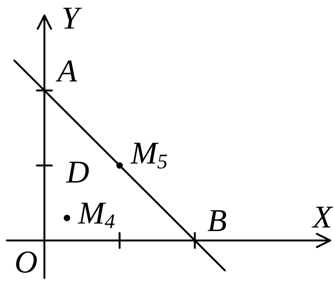
$$\begin{cases} F'_x = 0, \\ F'_y = 0, \\ F'_\lambda = 0. \end{cases}$$

3) Найти «угловые» точки области D.

4) Найти значения функции $z(x,y)$ в найденных (п.1–3) точках и выбрать среди этих значений наибольшее $\max\limits_{(x,y)\in D} z(x,y)$ и наименьшее $\min\limits_{(x,y)\in D} z(x,y)$.

Пример 4. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $z(x,y)=xy(1-x-y)$ в области D: $x+y\le 2$, $x\ge 0$, $y\ge 0$ (исследование на границе провести методом Лагранжа).

◄ Преобразуем функцию: $z(x,y)=xy-x^2y-xy^2$. Изобразим заданную область D, на которую будем наносить все найденные точки.



1) Найдем критические точки функции $z(x,y)$ внутри области D:

$$\begin{cases} z'_x = y-2xy-y^2=0, \\ z'_y = x-x^2-2xy=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y(1-2x-y)=0, \\ x(1-x-2y)=0. \end{cases}$$

Решив последнюю систему, получим точки $M_1(0,0)$, $M_2(0,1)$, $M_3(1,0)$, $M_4\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$, но только последняя точка лежит внутри области D, причем $z(M_4)=z\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{27}$.

2) Найдем критические точки функции $z(x,y)$ на границе области D.

а) Граница $x+y=2$ или $\varphi: x+y-2=0$. Критические точки найдем, используя функцию Лагранжа:

$$F(x,y,\lambda)=z(x,y)+\lambda\varphi(x,y)=xy-x^2y-xy^2+\lambda(x+y-2).$$

$$\begin{cases} F'_x = y-2xy-y^2+\lambda=0, \\ F'_y = x-x^2-2xy+\lambda=0, \\ F'_\lambda = x+y-2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1, \\ y=1, \\ \lambda=3. \end{cases}$$

Значит, получили точку $M_5(1,1)$ на границе $\varphi: x+y-2=0$, причем $z(M_5)=z(1,1)=-1$.

б) Граница $x=0$, на ней $z(x,y)=z(0,y)\equiv 0$.

в) Граница $y=0$, на ней $z(x,y)=z(x,0)\equiv 0$.

3) Найдем угловые точки области D:

$A(0,2)$, причем $z(A)=z(0,2)=0$,

$B(2,0)$, причем $z(B)=z(2,0)=0$,

$O(0,0)$, причем $z(O)=z(0,0)=0$.

4) Из всех найденных в п. 1 – 3 значений функции $z(x,y)$ выберем наибольшее и наименьшее:

$$\max_{(x,y)\in D} z(x,y)=z\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{27},\ \min_{(x,y)\in D} z(x,y)=z(1,1)=-1.$$ ►

ГЛАВА 4. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

В приложениях математики к техническим наукам дифференциальные уравнения занимают особо важное место. Многие прикладные процессы с их помощью описываются проще и полнее.

Они дают возможность решать многие вопросы общетехнических и специальных прикладных дисциплин: физики, теоретической механики, электротехники, радиотехники, сопротивления материалов, гидравлики, теории машин и механизмов, химии, технологии производств, финансово-экономических дисциплин и др. – и часто сами возникают при решении этих проблем.

§ 1. Обыкновенные дифференциальные уравнения первого порядка

1.1. Общие понятия

***Опр.* 1.** *Обыкновенным дифференциальным уравнением* (*ОДУ*) *первого порядка* называется уравнение вида

$$F(x, y, y') = 0\,, \tag{1}$$

где x – независимая переменная; y – искомая функция этой переменной; y' – производная от y по x; F – заданная функция своих аргументов.

***Опр.* 2.** Непрерывно дифференцируемая на некотором интервале (a,b) $(-\infty < a < b < +\infty)$ функция $y = y(x)$, которая при подстановке в уравнение (1) обращает его в тождество по x на (a,b), называется *решением* этого уравнения.

График решения $y = y(x)$ ОДУ (1) есть его *интегральная кривая.*

Если уравнение (1) удается записать в виде

$$y' = f(x, y), \tag{2}$$

то последнее называют ОДУ, *разрешенным* относительно производной. В настоящем учебном пособии рассматриваются, как правило, именно такие уравнения.

Часть D плоскости OXY, в которой функция $f(x, y)$ непрерывна, называется *областью задания* ОДУ (2).

***Опр.* 3.** *Задачей Коши* для уравнения (2) называется задача отыскания решения $y = y(x)$ этого уравнения, удовлетворяющего условию:

$$y(x_0) = y_0, \quad (x_0, y_0) \in D. \qquad (3)$$

Условие (3) — *начальное* условие, а числа x_0, y_0 – *начальные* данные задачи Коши (2) – (3).

Геометрическая интерпретация задачи Коши – найти интегральную кривую ОДУ (2), проходящую через точку $(x_0, y_0) \in D$.

Говорят, что решение задачи Коши для уравнения (2) с начальным условием (3) *единственно,* если существует такая окрестность точки x_0, что

1) в этой окрестности определено решение с начальными данными x_0, y_0;

2) не существует другого решения с начальными данными x_0, y_0 определенного в той же окрестности.

Имеет место следующая теорема существования и единственности решения задачи Коши (2) – (3).

Теорема. *Если в области D плоскости OXY функция $f(x, y)$ и ее частная производная $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ непрерывны по совокупности аргументов, то существует единственное решение $y = y(x)$ уравнения (2), удовлетворяющее начальному условию*

$$y\big|_{x=x_0} = y_0,\ (x_0, y_0) \in D.$$

Пусть D есть область в плоскости OXY, через каждую точку которой проходит одна и только одна интегральная кривая ОДУ (2). В дальнейшем такую область условимся называть областью существования и единственности решения задачи Коши или, более кратко, областью существования и единственности рассматриваемого уравнения.

***Опр.* 4.** Функция

$$y = \varphi(x, C), \qquad (4)$$

определенная в некоторой области изменения переменных x и C и непрерывно дифференцируемая по x, называется *общим решением* уравнения (2) в области D, если

1) равенство (4) разрешимо в D относительно C:

$$C = \psi(x, y), \tag{5}$$

2) функция (4) является решением ОДУ (2) при всех значениях C, определяемых формулой (5), когда точка (x, y) пробегает область D.

Переменная C в (4) называется *произвольной постоянной* (константой).

***Опр.* 5.** Равенство $\Phi(x, y, C) = 0$, неявно задающее общее решение, называется *общим интегралом* ОДУ (2).

Решение $y = y(x)$ уравнения (2) называется *частным,* если в каждой точке соответствующей ему интегральной кривой сохраняется единственность решения задачи Коши. Через каждую точку (x_0, y_0) такой кривой проходит единственная интегральная кривая уравнения (2).

***Опр.* 6.** Решение $y = \varphi(x, C_0)$, получающееся из общего решения (4) фиксированием произвольной константы C, есть *частное* решение.

***Опр.* 7.** Говорят, что решение $y = y(x)$ уравнения (2) *особое,* если в каждой точке соответствующей ему интегральной кривой нарушается единственность решения задачи Коши.

Если функция $f(x, y)$ в правой части ОДУ (2) непрерывна по x, y и имеет частную производную по y (ограниченную или нет), то особыми решениями могут быть только те кривые, во всех точках которых

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \infty .$$

Если в некоторых точках плоскости OXY функция $f(x, y)$ обращается в бесконечность, то в окрестности таких точек рассматривают перевернутое по отношению к (2) уравнение

$$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{f(x,y)}, \tag{6}$$

в котором считают x функцией от y. Совокупность таких точек присоединяют к области задания уравнения (2), а решения $x=x(y)$ уравнения (6) – к решениям ОДУ (2).

Уравнениям (2) и (6) равносильно ОДУ первого порядка в дифференциальной форме вида

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0. \tag{7}$$

Оно не задано в тех точках (x,y), где непрерывные функции M и N обращаются в нуль одновременно. В уравнение (7) переменные x и y входят равноправно. При решении конкретных уравнений вида (7) часто бывает удобно в отличие от традиционных обозначений рассматривать переменную величину x как функцию от y.

1.2. Уравнения с разделенными и разделяющимися переменными

***Опр.* 8.** Уравнение *с разделенными переменными* — это уравнение вида

$$M(x)dx+N(y)dy=0 \text{ или } M(x)dx=N(y)dy, \tag{8}$$

где $M(x)$ и $N(y)$ функции, зависящие только от x и y соответственно, являющиеся непрерывными при рассматриваемых значения x и y.

Общим интегралом такого уравнения является равенство

$$\int M(x)dx+\int N(y)dy=C \text{ или } \int M(x)dx=\int N(y)dy+C,$$

в котором под выражениями $\int M(x)dx,\ \int N(y)dy$ понимаются произвольные первообразные функций M и N, соответственно, C – произвольная постоянная.

Пример 1. Проверить, что общим интегралом ОДУ $x\,dx+y\,dy=0$ в области $|x|<+\infty, |y|<+\infty,$ является равенство

$$x^2+y^2=C. \tag{9}$$

◄ Действительно, проинтегрировав его левую часть, получим

$$\int x\,dx + \int y\,dy = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2},$$

сл-но, общим интегралом рассматриваемого уравнения является соотношение

$$\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = C_1,$$

откуда, в силу произвольности константы C_1, следует (9), где $C = 2C_1$.►

Пример 2. Уравнение $e^{-x}dx = y^{-1}dy$ при $y \neq 0$ – интегрируется так:

$$\int e^{-x}dx = \int \frac{dy}{y} \Rightarrow -\int e^{-x}d(-x) = \ln|y| + C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -e^{-x} = \ln|y| + C \text{ или } e^{-x} + \ln|y| = \overline{C},$$

где $\overline{C} = -C$ сл-но, общий интеграл имеет вид

$$e^{-x} + \ln|y| = \overline{C},$$

где $\overline{C}$ – произвольная константа.

***Опр.* 9.** Уравнение вида

$$M_1(x)N_1(y)dx + M_2(x)N_2(y)dy = 0, \tag{10}$$

в котором коэффициенты при дифференциалах распадаются на множители, зависящие только от x и только от y, называется уравнением с *разделяющимися переменными.*

Умножением обеих частей этого уравнения на функцию

$$\frac{1}{M_2(x)N_1(y)} \qquad (M_2(x)N_1(y) \neq 0), \tag{11}$$

оно приводится к уравнению (8) с разделенными переменными. Поэтому общий интеграл ОДУ (10) есть

$$\int \frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx + \int \frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy = C. \tag{12}$$

Если уравнения $M_2(x) = 0,\ N_1(y) = 0$ имеют действительные решения $x = a$, и $y = b$, то функции

$x = x(y) = a\ (y \neq b)$, $y = y(x) = b\ (x \neq a)$, являясь решением (10), могут не входить в общий интеграл (12) ни при каком конечном значении C, хотя при этом среди них могут быть частные решения (10), то есть последние при интегрировании оказываются потерянными. Точки вида $x = a$, $y = b$ исключаются из интегральных кривых, соответствующих решениям $x = x(y) = a$, $y = y(x) = b$, так как в этих точках уравнение (10) не задано. Необходимо отметить также, что среди решений $x = x(y) = a\ (y \neq b)$, $y = y(x) = b\ (x \neq a)$, могут быть и особые решения ОДУ (10).

Пример 3. Проинтегрировать уравнение

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}. \tag{13}$$

◄ Обе части уравнения умножим на функцию $\dfrac{1}{y}$ $y \neq 0$, тогда его можно записать в дифференциальной форме

$$\frac{1}{y}dy + \frac{1}{x}dx = 0. \tag{14}$$

Получили уравнение с разделенными переменными. Его общий интеграл при при $x \neq 0$, $y \neq 0$ есть соотношение

$$\ln|y| + \ln|x| = C_1,$$

где C_1 – произвольная постоянная. Константу C_1 представим в виде $C_1 = \ln|C|$, $(C \neq 0)$, тогда $\ln|y| + \ln|x| = \ln|C|$, откуда имеем $\ln|y| = \ln\left|\dfrac{C}{x}\right|$ или $|y| = \left|\dfrac{C}{x}\right|$. В последнем соотношении, в силу произвольности C, знаки модуля можно опустить. Сл-но,

$$y = \frac{C}{x},\ C \neq 0. \tag{15}$$

Очевидно, решение $y = y(x) = 0\ \ (x \neq 0)$ уравнения (13) не входит в последнюю формулу ни при каком значении $C \neq 0$, хотя соответствующая ему интегральная кривая лежит в областях существования и единственности решения задачи Коши этого уравнения, то есть решение $y = y(x) = 0$ $(x \neq 0)$ оказалось потерянным. Однако оно входит в формулу (15) при $C = 0$. Поэтому, допуская в (15) $C = 0$, получаем, что общее решение уравнения (13) при $(x \neq 0)$ имеет вид

$$y = \frac{C}{x},$$

где C – произвольная постоянная.

Заметим, что функция $x = x(y) = 0$ $(y \neq 0)$ является решением "перевернутого" по отношению к (13) уравнения

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{x}{y}. \blacktriangleright$$

Пример 4. Найти решение дифференциального уравнения $y' = 2\sqrt{y}$, удовлетворяющее начальному условию $y\big|_{x=1} = 2$.

◀ Разделим переменные, умножив обе части уравнения на $\dfrac{dx}{2\sqrt{y}}$ $(y \neq 0)$. Имеем $\dfrac{dy}{2\sqrt{y}} = dx.$

Интегрируя последнее уравнение, получаем

$$\int \frac{dy}{2\sqrt{y}} = \int dx + C \text{ или } \sqrt{y} = x + C.$$

Так как $\sqrt{y} > 0$, то в последнем соотношении $x + C > 0$. Отсюда находим общее решение данного уравнения в области $|x| < +\infty,\ y > 0$:

$$y = (x + C)^2,\ x > -C.$$

Выделим частное решение, удовлетворяющее начальному условию $y\big|_{x=1} = 2$. Для этого в формуле общего решения положим $x = 1,\ y = 2$, получим уравнение для определения значения константы C: $2 = (1 + C)^2$. Из него находим $C = \pm\sqrt{2} - 1$. Из двух значений выбираем $C=\sqrt{2}-1$, так как точка $(1;2)$ не лежит на кривой $y=\left(x-\sqrt{2}-1\right)^2$, $x>\sqrt{2}+1$.

Итак, искомое решение есть

$$y=\left(x+\sqrt{2}-1\right)^2,\ x>1-\sqrt{2}. \blacktriangleright$$

Пример 5. Найти общий интеграл уравнения

$$2y\sqrt{x}dy+\left(1-y^2\right)dx=0. \tag{16}$$

◀ ОДУ (16) – это уравнение с разделяющимися переменными. Умножив обе части его на функцию

$$\frac{1}{\left(1-y^2\right)\sqrt{x}} \quad (x\neq 0,\ y\neq \pm 1),$$

получим уравнение с разделенными переменными

$$\frac{dx}{\sqrt{x}}+\frac{2y}{1-y^2}dy=0. \tag{17}$$

Общим интегралом последнего является соотношение

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x}}+\int\frac{2y}{1-y^2}dy=C$$

или

$$2\sqrt{x}-\ln\left|1-y^2\right|=C. \tag{18}$$

Сл-но, (18) есть общий интеграл ОДУ (16).

Заметим, что формула (18) получена в предположении, что $(x\neq 0,\ y\neq \pm 1)$. Функции $y=y(x)=\pm 1\ (x\neq 0)$ и $x=x(y)=0\ (y\neq \pm 1)$ являются, очевидно, решениями (16) и они не входят в (18) ни при каком конечном значении константы C. Покажем, что функции $y=y(x)=\pm 1\ (x\neq 0)$ являются частными решениями, а функция $x=x(y)=0\ (y\neq \pm 1)$ – особым решением уравнения (16).

Действительно, полупрямые $y=y(x)=\pm 1\ (x\neq 0)$ лежат в областях существования и единственности уравнения

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y^2-1}{2y\sqrt{x}}, \tag{19}$$

получающегося из (16) разрешением относительно $\dfrac{dy}{dx}$. Значит, эти полупрямые есть частные решения ОДУ (1.19), а, следовательно, и (16). Записав общий интеграл (18) в иной форме, выделим из него эти частные решения. Положим в (18) $C = -\ln\left|\overline{C}\right|$, где $\overline{C} \neq 0$ – произвольная константа, тогда (18) перепишется так:

$$\ln\left|1 - y^2\right| = 2\sqrt{x} + \ln\left|\overline{C}\right| \text{ или } \ln\left|1 - y^2\right| = \ln\left|\overline{C}\right| + \ln e^{2\sqrt{x}}.$$

Отсюда имеем $\left|1 - y^2\right| = \left|\overline{C}\right| e^{2\sqrt{x}}$ и, в силу произвольности $\overline{C}$,

$$1 - y^2 = \overline{C} e^{2\sqrt{x}}. \qquad (20)$$

Соотношение (20) – также общий интеграл ОДУ (16). Оно получено в предположении $\overline{C} \neq 0$. Очевидно, решения $y = y(x) = \pm 1$ $(x \neq 0)$ уравнения (16) получаются из (20) при значении $\overline{C} = 0$. Но, как мы показали, эти решения – частные, следовательно, в (20) можно допускать и $\overline{C} = 0$. Т. о., частные решения $y = y(x) = \pm 1$ уравнения (16) получаются из общего интеграла (20) этого уравнения при $\overline{C} = 0$.

Покажем сейчас, что функция $x = x(y) = 0$ $(y \neq \pm 1)$ является особым решением уравнения (16). Отметим, во-первых, что соответствующая ей интегральная кривая не лежит в областях существования и единственности уравнения

$$\frac{dx}{dy} = \frac{2y\sqrt{x}}{y^2 - 1},$$

перевернутого по отношению к (19), так как частная производная по x функции $2y\sqrt{x}/\left(y^2 - 1\right)$ в точках прямой $x = 0$ обращается в бесконечность. Убедимся теперь в том, что через каждую точку интегральной кривой $x = x(y) = 0$ $(y \neq \pm 1)$ проходит по крайней мере две интегральные кривые уравнения (16).

Выберем произвольно точку $(0, y_0)$ $(y_0 \neq \pm 1)$ на этой кривой и ее координаты подставим в общий интеграл (20). Будем иметь соотношение для определения $\overline{C}$:

$$1 - y_0^2 = \overline{C} e^{2\sqrt{0}}.$$

Отсюда находится кривая $\overline{C} = 1 - y_0^2$. Т. о., интегральная кривая $1 - y^2 = (1 - y_0^2) e^{2\sqrt{x}}$ также проходит через точку $(0, y_0)$, то есть функция $x = x(y) = 0$ $(y \neq \pm 1)$ – особое решение ОДУ (16). ►

1.3. Однородные уравнения первого порядка

***Опр*. 10.** Функция $F(x, y)$ называется *однородной функцией* k-го *измерения (степени* k*),* если для всех t выполняется соотношение

$$F(tx, ty) = t^k F(x, y).$$

Например, функция $\sqrt{x^4 + y^4}$ – однородная функция 2-го измерения, так как

$$\sqrt{(tx)^4 + (ty)^4} = t^2 \sqrt{x^4 + y^4},$$

а функция $\dfrac{x + y}{x - y}$ – однородная функция нулевого измерения, ибо

$$\frac{tx + ty}{tx - ty} = \frac{x + y}{x - y}.$$

***Опр*. 11.** Уравнение

$$M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0, \qquad (21)$$

где $M(x, y)$ и $N(x, y)$ – однородные функции одного и того же измерения, называется *однородным*.

Однородное уравнение всегда приводится к виду

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right), \qquad (22)$$

где f – функция одной переменной, т.е. правая часть (22) есть однородная функция нулевого измерения.

Однородное уравнение интегрируется посредством подстановки $y = ux$, где u – новая неизвестная функция переменной x, то есть $u = u(x)$, при этом $y' = u'x + u$.

Пример 1. Проинтегрировать уравнение

$$(x + 2y)dx - 2xdy = 0. \tag{23}$$

◄ Здесь функции $M(x, y) = x + 2y$ и $N(x, y) = -2x$ – однородные функции первого измерения, так как

$$M(tx, ty) = tx + 2ty = t(x + 2y) = tM(x, y),$$
$$N(tx, ty) = -2tx = t(-2x) = tN(x, y).$$

Следовательно, (23) – однородное ОДУ. Положим $y = ux$ тогда $dy = xdu + udx$. Подставим y и dy в (23), будем иметь

$$(x + 2ux)dx - 2x(xdu + udx) = 0,$$
$$xdx + 2uxdx - 2x^2du - 2xudx = 0,$$
$$xdx - 2x^2du = 0. \tag{24}$$

Уравнение (24) – это уравнение с разделяющимися переменными. Умножением обеих частей на $-\frac{1}{2x^2}$, $(x \neq 0)$, приведем его к уравнению с разделенными переменным

$$-\frac{1}{2x}dx + du = 0 \;\Rightarrow\; du = \frac{1}{2x}dx.$$

Последнее имеет общее решение

$$u = \frac{1}{2}\ln|x| + C,$$

следовательно, при $x \neq 0$ общее решение уравнения (1.23) есть

$$y = \frac{1}{2}x\ln|x| + Cx. \tag{25}$$

Заметим, что функция $x = x(y) = 0$ $(y \neq 0)$ является решением (23). Она является частным решением рассматриваемого уравнения, так как соответствующие ей полупрямые лежат в областях существования и единственности уравнения

$$\frac{dx}{dy}=\frac{2x}{x+2y},$$

получающегося из (23) разрешением относительно $\dfrac{dx}{dy}$. Решение $x=x(y)=0\ \ (y\neq 0)$ не входит в формулу (25) ни при каком конечном значении произвольной константы C, т.е. оно оказалось потерянным. ►

Пример 2. Найти общий интеграл уравнения

$$y'=\frac{x+y}{x-y}. \tag{26}$$

◄ ОДУ (26) – однородное, так как правая часть его является однородной функцией нулевого измерения. Полагая $y=ux$, где u – новая неизвестная функция от x, найдем производную $\dfrac{dy}{dx}$:

$$\frac{dy}{dx}=x\frac{du}{dx}+u.$$

Подставляя y и $\dfrac{dy}{dx}$ в уравнение (26), получим

$$x\frac{du}{dx}+u=\frac{x+ux}{x-ux},$$

$$x\frac{du}{dx}=\frac{1+u}{1-u}-u,$$

$$xdu=\frac{1+u^2}{1-u}dx. \tag{27}$$

Уравнение (27) – это уравнение с разделяющимися переменными. Разделяя переменные, приведем его к виду

$$\frac{1-u}{1+u^2}du-\frac{dx}{x}=0\ \ (x\neq 0).$$

Общим интегралом последнего уравнения является соотношение

$$\operatorname{arctg} u - \frac{1}{2}\ln(1+u^2) - \ln|x| = C,$$

сл-но, общим интегралом уравнения (26) будет соотношение

$$\operatorname{arctg}\frac{y}{x} - \frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{y^2}{x^2}\right) - \ln|x| = C.$$

При интегрировании (27) мы считали $x \neq 0$, поэтому остается проверить, не являются ли полупрямые $x = x(y) = 0 \ \left(y \neq 0\right)$ интегральными кривыми ОДУ (26). Подставляя $x = x(y) = 0 \ \left(y \neq 0\right)$ в (26) убедимся в том, что эта функция рассматриваемому уравнению не удовлетворяет.►

Уравнение вида

$$y' = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right),$$

где $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$, приводится к однородному уравнению с помощью замены $x = X + \alpha$, $y = Y + \beta$, где $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$.

Числа α и β подбирают так, чтобы $\begin{cases} a_1\alpha + b_1\beta + c_1 = 0, \\ a_2\alpha + b_2\beta + c_2 = 0. \end{cases}$

При этом данное уравнение примет вид:

$$Y' = f\left(\frac{a_1X + b_1Y}{a_2X + b_2Y}\right) \text{ или } Y' = f\left(\frac{a_1 + b_1\frac{Y}{X}}{a_2 + b_2\frac{Y}{X}}\right) = \varphi\left(\frac{Y}{X}\right),$$

которое уже является однородным.

Пример 3. Найти общий интеграл дифференциального уравнения $y' = \dfrac{x + 6y - 7}{8x - y - 7}$.

◄ В данном уравнении выполним замену $x = X + \alpha$, $y = Y + \beta$ (причем $y' = Y'$)

$$Y' = \frac{X + \alpha + 6Y + 6\beta - 7}{8X + 8\alpha - Y - \beta - 7} = \frac{X + 6Y + (\alpha + 6\beta - 7)}{8X - Y + (8\alpha - \beta - 7)}$$

так, чтобы $\begin{cases} \alpha + 6\beta - 7 = 0, \\ 8\alpha - \beta - 7 = 0. \end{cases}$ Отсюда $\alpha = 1$, $\beta = 1$, то есть $x = X + 1$, $y = Y + 1$. В результате такой замены получим уравнение

$$Y' = \frac{X + 6Y}{8X - Y} = \frac{1 + 6 \cdot \dfrac{Y}{X}}{8 - \dfrac{Y}{X}},$$

которое уже является однородным. В нем можно выполнить замену функции $u = \dfrac{Y}{X}$, при этом $Y = u \cdot X$ и $Y' = u' \cdot X + u$. После чего дифференциальное уравнение примет вид:

$$u'X + u = \frac{1 + 6u}{8 - u} \text{ или } u'X = \frac{(u-1)^2}{8 - u}.$$

В полученном уравнении разделим переменные

$$\frac{8 - u}{(u-1)^2} du = \frac{dX}{X},$$

проинтегрируем и получим:

$$\frac{7}{1 - u} - \ln|X(u - 1)| = C, \text{ где } C = const.$$

Выполнив обратную замену $u = \dfrac{Y}{X} = \dfrac{y - 1}{x - 1}$ и $X = x - 1$, найдем общий интеграл исходного дифференциального уравнения:

$$7\frac{x - 1}{x - y} - \ln|y - x| = C.$$

Непосредственной подстановкой в исходное дифференциальное уравнение можно убедиться, что функция $y = x \neq 1$ является его решением. ►

1.4. Линейные уравнения первого порядка

***Опр.* 12.** *Линейным дифференциальным уравнением* (*ЛДУ*) *первого порядка* называется уравнение вида

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x), \tag{28}$$

где $p(x)$, $q(x)$ – непрерывные на некотором интервале (a,b) $(-\infty < a < b < +\infty)$ функции.

По теореме существования и единственности решения задачи Коши через каждую точку полосы

$$\{(x,y): a < x < b,\ |y| < +\infty\}$$

проходит одна и только одна интегральная кривая рассматриваемого уравнения.

Если $q(x) \equiv 0$, то уравнение (28) называется *однородным линейным* дифференциальным уравнением (ЛОДУ).

Это уравнение с разделяющимися переменными, его общее решение есть

$$y = Ce^{-\int p(x)dx}, \tag{29}$$

где C – произвольная постоянная, а $\int p(x)dx$ означает первообразную функцию для функции $p = p(x)$.

При $q(x) \neq 0$, уравнение (28) называется *неоднородным* (ЛНДУ).

Известны два метода решения ЛНДУ: *метод вариации произвольной постоянной* (*метод Лагранжа*) и *метод подстановки* (*метод Бернулли*). Первый метод состоит в том, что общее решение ЛДУ (28) ищут в таком же виде, что и общее решение соответствующего ему ЛОДУ, т.е. в виде (29). Но при этом считают произвольную постоянную $C = C(x)$ *непрерывно дифференцируемой функцией от* x.

Пример 1. Найти общее решение уравнения $y' + 3y = e^{2x}$ двумя методами.

◄ 1) Метод Лагранжа.

Данное уравнение является ЛНДУ. Здесь $p(x)=3$, $q(x)=e^{2x}$. Решаем сначала соответствующее ЛОДУ $y'+3y=0$. Это уравнение является уравнением с разделяющимися переменными.

$$\frac{dy}{dx}+3y=0\Rightarrow\frac{dy}{dx}=-3y\Rightarrow\frac{dy}{y}=-3dx.$$

В последнем уравнении переменные разделены; при этом $y\neq 0$. Решим его.

$$\int\frac{dy}{y}=-3\int dx\Leftrightarrow\ln|y|=-3x+\ln|C|\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\ln|y|=\ln e^{-3x}+\ln|C|\Leftrightarrow y=C\,e^{-3x},$$

здесь $C\neq 0$.

Общее решение ЛНДУ ищем в форме $y=C(x)e^{-3x}$.

Дифференцируя это решение, имеем

$$y'=C'(x)e^{-3x}-3C(x)e^{-3x}.$$

Подставляя в данное уравнение выражения для y и y', получаем дифференциальное уравнение для определения $C(x)$ (при этом слагаемые, содержащие множитель $C(x)$, в сумме дают ноль).

$$C'(x)e^{-3x}-3C(x)e^{-3x}+3C(x)e^{-3x}=e^{2x}\Leftrightarrow C'(x)e^{-3x}=e^{2x}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow C'(x)=e^{5x}\Leftrightarrow\frac{dC(x)}{dx}=e^{5x}\Leftrightarrow dC(x)=e^{5x}dx\Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow C(x)=\int e^{5x}dx=\frac{1}{5}e^{5x}+\tilde{C}$, где $\tilde{C}$ – произвольная постоянная.

Сл–но, общее решение данного уравнения имеет вид

$$y=C(x)e^{-3x}=\left(\frac{1}{5}e^{5x}+\tilde{C}\right)e^{-3x}\ \text{ или }\ y=\frac{1}{5}e^{2x}+\tilde{C}e^{-3x}.$$

2) Метод Бернулли.

Положим $y = u(x)v(x)$, где $u(x)$ и $v(x)$ – неизвестные функции. Подставляя эти выражения в данное уравнение, получим $u'v + uv' + 3u \cdot v = e^{2x}$ или

$$u'v + u(v' + 3v) = e^{2x} \tag{30}$$

Одна из функций $u(x)$ и $v(x)$ может быть выбрана произвольно.

Потребуем, например, чтобы выражение в скобках обратилось в нуль, т.е чтобы $v' + 3v = 0$. Это уравнение с разделяющимися переменными. Решим его.

$$\frac{dv}{dx} + 3v = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{dv}{dx} = -3v \Leftrightarrow \frac{dv}{v} = -3dx \Leftrightarrow \ln|v| = -3x + \ln|C_1| \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow v = C_1 e^{-3x}, \quad C_1 \neq 0.$$

Например, положим $C_1 = 1$, тогда $v = e^{-3x}$.

Подставляя найденное значение v в (30), получим уравнение $u' e^{-3x} = e^{2x}$ – это уравнение с разделяющимися переменными.

$$\frac{du}{dx} = e^{5x} \Leftrightarrow du = e^{5x}dx \Leftrightarrow \int du = \int e^{5x}dx \Leftrightarrow u = \frac{1}{5}e^{5x} + C.$$

Но $y = u \cdot v$, поэтому

$$y = \left(\frac{1}{5}e^{5x} + C\right)e^{-3x} = \frac{1}{5}e^{2x} + C\,e^{-3x}, \quad C \neq 0.$$

Получено общее решение исходного уравнения. ►

Пример 2. Найти интегральную кривую уравнения

$$\left(1 + y^2\right)dx + (xy + 1)dy = 0, \tag{31}$$

проходящую через точку $(1;0)$.

◄ Считая x функцией от y, приведем данное уравнение к линейному относительно x. Для этого обе части (31) умножим на функцию $\dfrac{1}{1 + y^2}$, тогда будем иметь

$$\frac{dx}{dy}+\frac{y}{1+y^2}x=-\frac{1}{1+y^2}. \qquad (32)$$

Уравнение (32) проинтегрируем методом Лагранжа. Общее решение однородного линейного уравнения, соответствующего (32), есть

$$x=Ce^{-\int\frac{y}{1+y^2}dy} \text{ или } x=Ce^{-\frac{1}{2}\ln\left(1+y^2\right)}.$$

Последнее соотношение перепишем в виде

$$x=C\left(1+y^2\right)^{-\frac{1}{2}}. \qquad (33)$$

Общее решение ЛДУ (32) также будем искать в виде (33), при этом считаем $C=C(y)$. С учетом последнего из (33) находим $\frac{dx}{dy}$:

$$\frac{dx}{dy}=C'(y)\left(1+y^2\right)^{-\frac{1}{2}}+C(y)\left(-\frac{1}{2}\right)\left(1+y^2\right)^{-\frac{3}{2}}\cdot 2y.$$

Подставим x и $\frac{dx}{dy}$ в (32), получим дифференциальное уравнение для определения $C(y)$:

$$C'(y)(1+y^2)^{-\frac{1}{2}}-C(y)y(1+y^2)^{-\frac{3}{2}}+\frac{y}{1+y^2}C(y)(1+y^2)^{-\frac{1}{2}}=$$

$$=-\frac{1}{1+y^2}$$

или

$$C'(y)=-\frac{1}{\sqrt{1+y^2}}.$$

Из последнего уравнения находим

$$C(y)=-\ln\left|y+\sqrt{1+y^2}\right|+\widetilde{C},$$

где $\widetilde{C}$ – произвольная постоянная. Подставим $C(y)$ вместо C в (33), найдем общее решение уравнения (32)

$$x=\left(\widetilde{C}-\ln\left|y+\sqrt{1+y^2}\right|\right)\left(1+y^2\right)^{-\frac{1}{2}}. \qquad (34)$$

Ясно, что (34) есть общий интеграл и уравнения (31). Выделим из него частное решение ОДУ (31), удовлетворяющее начальным данным $x_0=1,\ y_0=0.$ Для этого положим в (34) $x=1$, $y=0$, тогда имеем $\widetilde{C}=1$. Сл–но, искомая интегральная кривая уравнения (31) задается уравнением

$$x=\left(1-\ln\left|y+\sqrt{1+y^2}\right|\right)\left(1+y^2\right)^{-\frac{1}{2}}. \blacktriangleright$$

Пример 3. Нестационарный процесс в последовательной цепи, состоящей из индуктивности L и активного сопротивления R (рис. 8) при замыкании цепи определяется дифференциальным уравнением $L\dfrac{di}{dt}+R_i=E$. Найти общее решение этого уравнения и частное решение, удовлетворяющее начальному условию $i(0)=0,$ построить график нестационарного процесса.

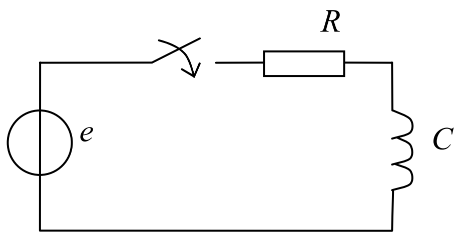


Рис. 8

$\blacktriangleleft$ Уравнение $L\dfrac{di}{dt}+R_i=E$ – ЛНДУ первого порядка. Применим для его решения метод подстановки (метод Бернулли). Решение ищем в виде

$$i(t)=u(t)\cdot v(t)\Leftrightarrow\frac{di}{dt}=u'\cdot v+u\cdot v'\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow L(u'\cdot v+u\cdot v')+R\cdot u\cdot v=E\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow Lu' \cdot v + u \cdot \left(Lv' + Rv\right) = E\ . \qquad (35)$$

Выражение в скобках приравняем к нулю:

$$Lv' + Rv = 0.$$

Данное уравнение является уравнением с разделяющимися переменными.

$$L\frac{dv}{dt} = -Rv \Leftrightarrow \frac{dv}{v} = -\frac{R}{L}dt \Leftrightarrow \int \frac{dv}{v} = -\frac{R}{L}\int dt \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ln|v| = -\frac{R}{L}t + \ln|C|, \quad C \neq 0.$$

Окончательно $v = Ce^{-\frac{R}{L}t}$ – общее решение.

Положим $C = 1$, тогда $v = e^{-\frac{R}{L}t}$.

Подставим $v = e^{-\frac{R}{L}t}$ в уравнение (35).

$$L \cdot u' \cdot e^{-\frac{R}{L}t} = E \Leftrightarrow u' = \frac{E}{L}e^{\frac{R}{L}t} \Leftrightarrow \frac{du}{dt} = \frac{E}{L}e^{\frac{R}{L}t} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow du = \frac{E}{L}e^{\frac{R}{L}t}dt \Leftrightarrow \int du = \int \frac{E}{L}e^{\frac{R}{L}t}dt \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow u = \frac{E}{L} \cdot \frac{L}{R}e^{\frac{R}{L}t} + C \Leftrightarrow u = \frac{E}{R}e^{\frac{R}{L}t} + C.$$

Запишем общее решение данного уравнения:

$$i = u \cdot v = \left(\frac{E}{R}e^{\frac{R}{L}t} + C\right) \cdot e^{-\frac{R}{L}t} = \frac{E}{R} + Ce^{-\frac{R}{L}t}.$$

Найдем значение произвольной постоянной C, используя начальные данные $t_0 = 0,\ i_0 = 0$:

$$0 = \frac{E}{R} + Ce^{-\frac{R}{L}t\cdot 0}; \quad 0 = \frac{E}{R} + C; \quad C = -\frac{E}{R}.$$

Частное решение имеет вид: $i = \frac{E}{R} - \frac{E}{R}e^{-\frac{R}{L}t} = \frac{E}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right).$

График нестационарного процесса представлен на рис. 9.

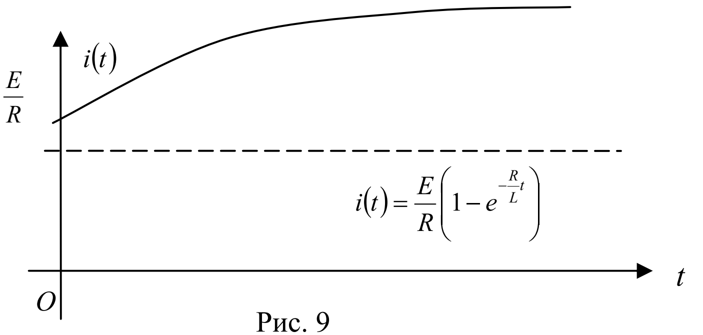
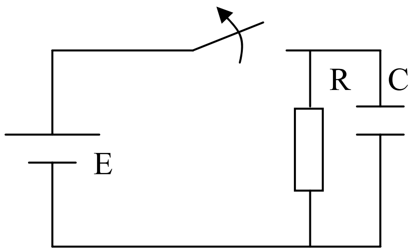


Рис. 9

▶

Пример 4. Расчет нестационарного процесса в параллельной RC - цепи.



Нестационарный процесс в параллельной цепи, состоящей из емкости C и активного сопротивления R, определяется дифференциальным уравнением

$$C\frac{du}{dt}+\frac{1}{R}u=0 .$$

Найдем общее и частное решение при начальных данных $u(0)=E$. Параметры RC-цепи: $R=10кОм=10^4 Ом$, $C=0{,}082мкФ=82\cdot 10^{-9}Ф$, $U_0=10В$.

Решим уравнение

$$C\frac{du}{dt}+\frac{1}{R}u=0, \qquad u(0)=U_0$$

в общем виде.

Это дифференциальное уравнение первого порядка с разделяющимися переменными. После разделения переменных и интегрирования, получаем:

$$u = C_1 \cdot e^{-\frac{t}{RC}}, \tag{36}$$

где C_1 – произвольная постоянная.

Определим C_1, подставляя начальные данные $t = 0,\ u = U_0$ в (36):

$$U_0 = C_1 \cdot e^{-\frac{0}{RC}} = C_1, \text{ откуда } C_1 = U_0.$$

Окончательно получим закон изменения напряжения в параллельной RC-цепи:

$$u = U_0 \cdot e^{-\frac{t}{RC}}. \tag{37}$$

Подставим в (37) значения параметров цепи:

$R = 10\textit{кОм} = 10^4\,\textit{Ом}$, $C = 0{,}082\textit{мкФ} = 82 \cdot 10^{-9}\textit{Ф}$, $U_0 = 10\text{В}$.

Тогда

$$u = 10 \cdot e^{-\frac{t}{10^4 \cdot 82 \cdot 10^{-9}}} = 10 \cdot e^{-\frac{10^5}{82}t} = 10 \cdot e^{-1819{,}5t}. ►$$

1.5. Уравнение Бернулли

***Опр.* 13.** Уравнение вида

$$y' + p(x)y = q(x)y^n, \tag{38}$$

где $p = p(x),\ q = q(x)$ – непрерывные на некотором интервале (a,b) $(-\infty < a < b < +\infty)$ функции, n – действительное число, отличное от 0 и 1, называется *уравнением Бернулли.*

Делением обеих частей на y^n и подстановкой $y^{1-n} = z$, где z – новая неизвестная функция, это уравнение приводится к линейному уравнению

$$z' + (1-n)p(x)z = (1-n)q(x).$$

Заметим, что при делении обеих частей уравнения (38) на y^n при $n > 0$ возможна потеря решения $y = 0$. Это решение является *частным,* если $n > 1$, и *особым,* если $0 < n < 1$.

Пример 1. Решить уравнение $\frac{dy}{dx}+2xy=-2x^3y^2$.

◀ Обе части уравнения разделим на y^2 $\left(y\neq 0\right)$, тогда будем иметь:

$$y^{-2}\frac{dy}{dx}+2xy^{-1}=-2x^3. \qquad (39)$$

Положим $y^{-1}=z$, откуда $z'=-y^{-2}y'$. В силу введенной подстановки уравнение (39) можно записать сл. обр.:

$$-z'+2xz=-2x^3$$

или

$$z'-2xz=2x^3. \qquad (40)$$

Последнее уравнение – линейное относительно функции z. Его общее решение есть

$$z=-\left(x^2+1\right)+\widetilde{C}e^{x^2},$$

где $\widetilde{C}$ – произвольная константа. Отсюда, учитывая, что $z=y^{-1}$, записываем общий интеграл исходного уравнения

$$\frac{1}{y}=-\left(x^2+1\right)+\widetilde{C}e^{x^2} \quad \left(y\neq 0\right).$$

Так как показатель степени y в правой части нашего уравнения равен 2, то потерянное при интегрировании решение $y=0$ является частным. ▶

Замечание. При интегрировании уравнения Бернулли можно также непосредственно применить подстановку $y=uv$ или метод *вариации произвольной постоянной*.

Пример 2. Проинтегрировать уравнение

$$y'-\frac{y}{x}=xy^{\frac{1}{2}}. \qquad (41)$$

◀ Уравнение (41) – это уравнение Бернулли. Положим $y=uv$, тогда (41) запишется в виде

$$u'v+uv'-\frac{uv}{x}=xu^{\frac{1}{2}}v^{\frac{1}{2}} \text{ или } \left(u'-\frac{u}{x}\right)v+uv'=xu^{\frac{1}{2}}v^{\frac{1}{2}}.$$

Функцию u выберем так, чтобы $u' - \frac{u}{x} = 0$. Например, пусть $u = x$. Подставив x вместо u в последнее уравнение и учитывая, что $u' = x' = 1$, для определения v будем иметь уравнение

$$xv' = x^{\frac{3}{2}} v^{\frac{1}{2}}. \qquad (42)$$

Последнее уравнение – это уравнение с разделяющимися переменными, его общий интеграл есть

$$2v^{\frac{1}{2}} - \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} = C \text{, откуда } v = \left(C_1 + \frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}} \right)^2,$$

где C_1 $\left(C_1 = \frac{C}{2} \right)$ – произвольная константа. Сл–но, общее решение ЛДУ (41) есть

$$y = x\left(C_1 + \frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}} \right)^2. \qquad (43)$$

Заметим, что при интегрировании уравнения (42) методом разделения переменных мы теряем решение $v = 0$, это ведет к потере решения $y = y(x) = 0$ $(x \neq 0)$ уравнения (41). Так как в правой части (41) стоит степень y с показателем $\frac{1}{2}$, то теряемое решение является особым.

Рассмотрим другой способ решения уравнения (41), а именно проинтегрируем его методом вариации произвольной постоянной. Запишем ЛОДУ, соответствующее (41):

$$y' - \frac{y}{x} = 0.$$

Его общее решение есть $y = Cx$. Пусть $C = C(x)$, тогда общее решение (1 .41) будем искать в виде

$$y = C(x)x. \qquad (44)$$

Подставив $y = C(x)x$ и $y' = C'(x)x + C(x)$, в уравнение (41), будем иметь:

$$C'(x)x + C(x) - \frac{1}{x}C(x)x = x[C(x)]^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}},$$

или

$$C'(x) = [C(x)]^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} \Rightarrow \frac{dC(x)}{dx} = [C(x)]^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow [C(x)]^{-\frac{1}{2}} dC(x) = x^{\frac{1}{2}} dx.$$

Проинтегрировав последнее уравнение, находим

$$2[C(x)]^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + \widetilde{C}, \text{ или } C(x) = \left(\frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}} + C_1\right)^2,$$

где C_1 – произвольная константа, $C_1 = \dfrac{\widetilde{C}}{2}$. Подставляя $C(x)$ в (44) получаем общее решение уравнения (44) в форме (43)

$$y = x\left(\frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}} + C_1\right)^2. ►$$

1.6. Уравнения в полных дифференциалах

***Опр.* 14.** Дифференциальное уравнение вида

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \tag{45}$$

называется *уравнением в полных дифференциалах*, если его левая часть представляет собой полный дифференциал некоторой функции $U(x, y)$ независимых переменных x, y.

Общий интеграл такого уравнения имеет вид

$$U(x, y) = C.$$

Следующая теорема дает признак того, что уравнение вида (45) является уравнением в полных дифференциалах.

Теорема. *Если функции $M(x, y)$ и $N(x, y)$ непрерывны вместе с частными производными $\dfrac{\partial M(x, y)}{\partial y}$ и $\dfrac{\partial N(x, y)}{\partial x}$ в не-*

которой односвязной области D плоскости OXY, то левая часть $M(x,y)dx+N(x,y)dy$ уравнения (45) будет являться полным дифференциалом некоторой функции $U(x,y)$ т. и т. т., когда выполняется равенство

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial N(x,y)}{\partial x},\ (x,y)\in D. \qquad (46)$$

Интегрирование уравнения в полных дифференциалах сводится к нахождению по функциям $M(x,y)$ и $N(x,y)$ соответствующей функции $U(x,y)$. Особые решения отсутствуют.

Пример 1. Проинтегрировать уравнение

$$2xydx+\left(x^2-y^2\right)dy=0.$$

◄ Данное уравнение есть уравнение в полных дифференциалах, так как функции $M(x,y)=2xy$ и $N(x,y)=x^2-y^2$ непрерывны во всей плоскости вместе со своими частными производными, при этом выполняется условие (46):

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(2xy)=2x=\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2-y^2\right)=\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}.$$

Т. о., левая часть данного уравнения является полным дифференциалом некоторой функции $U(x,y)$. Так как

$dU=\dfrac{\partial U}{\partial x}dx+\dfrac{\partial U}{\partial y}dy,$ то имеем соотношения

$$\frac{\partial U}{\partial x}=2xy,\quad \frac{\partial U}{\partial y}=x^2-y^2.$$

Из первого, интегрированием по x, получаем

$$U(x,y)=\int 2xydx+\varphi(y)$$

или

$$U(x,y)=x^2y+\varphi(y). \qquad (47)$$

Здесь $\varphi(y)$ – непрерывно дифференцируемая функция, постоянная интегрирования. Считаем ее зависящей от y, ибо интегрирование производилось по x. Из (47) находим

$$\frac{\partial U}{\partial y} = x^2 + \varphi'(y).$$

Т. к., с другой стороны,

$$\frac{\partial U}{\partial y} = x^2 - y^2,$$

то имеем следующее уравнение для определения φ:

$$x^2 + \varphi'(y) = x^2 - y^2, \text{ или } \varphi'(y) = -y^2.$$

Отсюда находим

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = -y^2 \Rightarrow d\varphi = -y^2 dy \Rightarrow \int d\varphi = -\int y^2 dy,$$

то есть

$$\varphi(y) = -\frac{y^3}{3} + \widetilde{C}, \tag{48}$$

где $\widetilde{C}$ – произвольная константа. Подставляя (48) в (47), имеем семейство функций

$$U(x, y) = x^2 y - \frac{y^3}{3} + \widetilde{C},$$

для которых левая часть данного уравнения является полным дифференциалом. Т. о., наше уравнение можно записать в виде

$$d\left(x^2 y - \frac{y^3}{3}\right) = 0,$$

откуда его общий интеграл есть

$$x^2 y - \frac{y^3}{3} = C. \blacktriangleright$$

Обобщим сведения о дифференциальных уравнениях 1 порядка в табл. 4.

Таблица 4

Решение уравнений первого порядка

№ п/п	Вид уравнения	Тип уравнения	Метод решения
1.	$P(x)dx + Q(y)dy = 0$	С разде-ляющимися переменны-ми	Непосредствен-ное интегрирова-ние
2.	$y' = f\left(\dfrac{y}{x}\right)$	Однородное	$u = \dfrac{y}{x}, y = ux,$ $y' = u'x + u$
3.	$y' = f\left(\dfrac{a_1x + b_1y + C_1}{a_2x + b_2y + C_2}\right),$ где $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$	Обобщенное однородное	$\begin{cases} x = X + \alpha, \\ y = Y + \beta; \end{cases}$ $\begin{cases} a_2\alpha + b_2\beta + C_2 = 0, \\ a_1\alpha + b_1\beta + C_1 = 0; \end{cases}$ $y' = Y' = \dfrac{dY}{dX}$
4.	$y' = p(x)y + q(x)$	Линейное по $y(x)$	а) метод Бернул-ли $y = uv,$ $y' = uv' + u'v$ б) метод вариа-ции (Лагранжа)
5.	$x' = p(y)x + q(y)$	Линейное по $x(y)$	$x = uv,$ $x' = u'v + uv'$

Окончание таблицы 4

6.	$y' + p(x)y = q(x)y^n$	Бернулли	$y = uv$ или $z = y^{1-n}$
7.	$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ $dU(x,y) = 0$	Уравнение в полных дифферен-циалах	Интегрирование системы $\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial x} = M(x,y), \\ \frac{\partial U}{\partial y} = N(x,y) \end{cases}$

§ 2. Дифференциальные уравнения высших порядков

2.1. Основные понятия

***Опр.* 1.** *Обыкновенным дифференциальным уравнением* n*-го порядка* называется уравнение

$$F\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = 0 \qquad (49)$$

или, в разрешенном относительно старшей производной $y^{(n)}$, виде

$$y^{(n)} = f\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}\right). \qquad (50)$$

***Опр.* 2.** Всякая функция $y = y(x)$, имеющая непрерывные производные до порядка n и удовлетворяющая уравнению (49) или (50), называется *решением (частным решением) этого уравнения.*

***Опр.* 3.** Задача нахождения решений дифференциального уравнения называется задачей *интегрирования дифференциального уравнения.*

***Опр.* 4.** *Задачей Коши* для дифференциального уравнения (50) называется задача отыскания решения $y(x)$, удовлетворяющего *начальным условиям*

$$y(x) = y_0,\ y'(x_0) = y_0', \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}, \qquad (51)$$

где $y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}$ – заданные числа.

***Опр.* 5.** Общим решением уравнения (49) или (50) называется такая функция, $y=\varphi\left(x, C_1, C_2, \ldots, C_n\right)$, которая при любых допустимых значениях параметров $C_1, C_2, \ldots, C_n$ является решением этого дифференциального уравнения, и для любой задачи Коши с условиями (51) найдутся постоянные $C_1, C_2, \ldots, C_n$, определяемые из системы уравнений

$$\begin{cases} y_0=\phi(x_0, C_1, \ldots, C_n), \\ y_0'=\phi'(x_0, C_1, \ldots, C_n), \\ y_0''=\phi''(x_0, C_1, \ldots, C_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ {y^{(n-1)}}_0=\phi^{(n-1)}(x_0, C_1, \ldots, C_n). \end{cases}$$

***Опр.* 6.** Уравнение

$$\Phi(x, y, C_1, \ldots, C_n)=0,$$

определяющее общее решение уравнения (49) или (50) как неявную функцию, называется *общим интегралом* дифференциального уравнения.

Пример 1. Показать, что функция $y=C_1 e^{C_2 x}$, $C_1, C_2 \in \mathbf{R}$, является решением дифференциального уравнения $y \cdot y''=y'^2$.

◄ Найдем y' и y'': $y'=C_1 \cdot C_2 e^{C_2 x}$, $y''=C_1 \cdot C_2^2 e^{C_2 x}$. Подставив выражения для y, y', y'' в данное уравнение, получим тождество

$$C_1 e^{C_2 x} \cdot C_1 \cdot C_2^2 e^{C_2 x} \equiv \left(C_1 C_2 e^{C_2 x}\right)^2.$$

Сл–но, функция $y=C_1 e^{C_2 x}$ есть решение данного уравнения.►

***Опр.* 7.** Решение уравнения (49) или (50), в каждой точке которого нарушается единственность решения задачи Коши, называется *особым решением*.

Особое решение не может быть получено из общего ни при каких значениях $\tilde{N}$ (включая и $\pm\infty$).

2.2. Уравнения, допускающие понижение порядка

Рассмотрим три наиболее распространенных вида дифференциальных уравнений n-го поряда, допускающих понижение порядка.

1. $y^{(n)} = f(x)$. (52)

2. $F(x, y^{(k)}, \dots, y^{(n)}) = 0$. (53)

3. $F(y, y', \dots y^{(n)}) = 0$. (54)

Общее решение уравнения (52) получается с помощью n-кратного интегрирования

$$y = \int dx \int dx \dots \int f(x) dx + C_1 x^{n-1} + C_2 x^{n-2} + \dots + C_{n-1} x + C_n,$$

т.е. общий интеграл уравнения (52) есть сумма какого-либо частного решения этого уравнения и многочлена $(n-1)$-ой степени с произвольными постоянными коэффициентами.

Пример 2. Найти общее решение уравнения $y'' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ и его частное решение, удовлетворяющее условиям $y\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\ln 2}{2}$, $y'\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 1$.

◄ Интегрируя первый раз, получим $y' = \int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \mathrm{tg} x + C_1$. После повторного интегрирования будем иметь

$$y = \int (\mathrm{tg} x + C_1) dx = \int \mathrm{tg} x dx + \int C_1 dx =$$

$$= \int \frac{\sin x dx}{\cos x} + C_1 \int dx = -\int \frac{d(\cos x)}{\cos x} + C_1 x + C_2 =$$

$$= -\ln|\cos x| + C_1 x + C_2.$$

Сл-но, $y = -\ln|\cos x| + C_1 x + C_2$ – общее решение.

2) Чтобы найти частное решение, подставим в полученное общее решение и в выражение для первой производной

значения $x=\dfrac{\pi}{4}$; $y=\dfrac{\ln 2}{2}$ и $y'=1$, получим систему двух уравнений с неизвестными C_1 и C_2:

$$\begin{cases}\dfrac{\ln 2}{2}=-\ln\left|\cos\dfrac{\pi}{4}\right|+C_1\dfrac{\pi}{4}+C_2,\\ 1=1+C_1,\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{\ln 2}{2}=-\ln\dfrac{1}{\sqrt{2}}+C_1\dfrac{\pi}{4}+C_2,\\ C_1=0,\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}-\ln 2^{-\frac{1}{2}}=-\ln 2^{-\frac{1}{2}}+C_1\dfrac{\pi}{4}+C_2,\\ C_1=0,\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}C_2=-\dfrac{\pi}{4}\cdot C_1,\\ C_1=0,\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}C_2=0,\\ C_1=0.\end{cases}$$

Подставив найденные C_1 и C_2 в общее решение получим искомое частное решение $y=-\ln\left|\cos x\right|$.►

Уравнение (53) не содержит функции y и ее нескольких последовательных производных $y', y'', ..., y^{(k-1)}$. С помощью замены $z=y^{(k)}$ понизим порядок уравнения на k единиц:

$$\Phi(x,z,z',...,z^{(n-k)})=0 .$$

Предположим, что для полученного уравнения общее решение имеет вид:

$$z=\varphi(x,C_1,C_2,...,C_{n-k}) .$$

Тогда искомая функция $y(x)$ получается с помощью k-кратного интегрирования функции $\varphi(x,C_1,C_2,...,C_{n-k})$.

Пример 3. Найти общее решение уравнения $x^4y'''+2x^3y''=1$.

◄ Данное уравнение не содержит y и y'. Положим $y''=z$, тогда $y'''=\dfrac{dz}{dx}$ и уравнение будет иметь вид:

$$x^4\frac{dz}{dx}+2x^3z=1\Leftrightarrow\frac{dz}{dx}+\frac{2}{x}z=\frac{1}{x^4}.$$

Это линейное уравнение первого порядка. Его общее решение имеет вид $z=-\dfrac{1}{x^3}+\dfrac{C_1}{x^2}$. Так как $z=y''$, то для отыскания искомого общего решения надо проинтегрировать уравнение $y''=-\dfrac{1}{x^3}+\dfrac{C_1}{x^2}$. Т. о.,

$$y'=\int\left(-\frac{1}{x^3}+\frac{C_1}{x^2}\right)dx \Rightarrow y'=\frac{1}{2x^2}-\frac{C_1}{x}+C_2,$$

тогда

$$y=\int\left(\frac{1}{2x^2}-\frac{C_1}{x}+C_2\right)dx.$$

Сл-но, $y=-\dfrac{1}{2x}-C_1\ln x+C_2x+C_3$, где C_1,C_2,C_3 – произвольные постоянные, является общим решением заданного уравнения.►

Уравнение (54) не содержит явно независимую переменную x. В этом случае примем y за независимую переменную и введем новую функцию $p(y)=y'$. Считая, что p есть функция от y, а y зависит от x и, применяя правило дифференцирования сложных функций, получим для производных от y по x выражения

$$y''=\frac{dp}{dx}=\frac{dp}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}=\frac{dp}{dy}\cdot p,$$

$$y'''=\frac{d}{dx}\left(\frac{dp}{dy}\cdot p\right)=\frac{d}{dy}\left(\frac{dp}{dy}\cdot p\right)\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dy}\left(\frac{dp}{dy}\cdot p\right)\cdot p=$$

$$=\frac{d^2p}{dy^2}\cdot p^2+\left(\frac{dp}{dy}\right)^2\cdot p,$$

аналогично вычисляются $y^{(4)},y^{(5)},\ldots,y^{(k-1)}$.

Подставляя в уравнение (54) вместо $y' = p(y),\ \ y'' = p\dfrac{dp}{dy}$ и т.д., увидим, что в новых переменных порядок уравнения будет $(n-1)$, т.е. на единицу ниже.

Если это преобразованное уравнение проинтегрировано и $p = \varphi(y, C_1, C_2, ..., C_{n-1})$ – его решение, то нахождение общего интеграла данного уравнения сводится к интегрированию

$$y' = p(y) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = p(y) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow dy = pdx = \varphi(y, C_1, C_2, ..., C_{n-1})dx \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{dy}{\varphi(y, C_1, C_2, ..., C_{n-1})} = dx.$$

Откуда получаем общее решение ОДУ (54)

$$\int \frac{dy}{\varphi(y, C_1, C_2, ..., C_{n-1})} = x + C_n.$$

Одна из произвольных постоянных C_n входит в качестве слагаемого к x, а это означает, что всякую интегральную кривую можно перемещать параллельно оси OY.

Пример 4. Найти общий интеграл уравнения $y'y''' - 3y''^2 = 0.$

◄ Положим

$$y' = p(y),\ \ y'' = p\frac{dp}{dy},\ \ y''' = p\left(\frac{dp}{dy}\right)^2 + p^2\frac{d^2p}{dy^2}$$

и подставим в исходное уравнение, тогда получим

$$p\left(p\left(\frac{dp}{dy}\right)^2 + p^2\frac{d^2p}{dy^2}\right) - 3p^2\left(\frac{dp}{dy}\right)^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p^3\frac{d^2p}{dy^2} - 2p^2\left(\frac{dp}{dy}\right)^2 = 0.$$

Сократим на p^2, при этом учтем теряемое решение $p=0$ или $y=C$ и получим

$$p\frac{d^2p}{dy^2}-2\left(\frac{dp}{dy}\right)^2=0.$$

Это уравнение рассматриваемого вида, делая ту же замену $z=\frac{dp}{dy}$, $\frac{d^2p}{dy^2}=z\frac{dz}{dp}$, придем к уравнению

$$pz\cdot\frac{dz}{dp}-2z^2=0.$$

Сократив на z (при этом учитываем еще одно решение $z=\frac{dp}{dy}=0$, т.е. $p=C_1$ и $y=C_1x+C_2$), получим

$$\frac{dz}{z}-\frac{2dp}{p}=0\Rightarrow\int\frac{dz}{z}=2\cdot\int\frac{dp}{p}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ln|z|=2\ln|p|+\ln|C_1|\Rightarrow\ln|z|-\ln p^2=\ln|C_1|\Rightarrow$$

$$\Rightarrow z=\frac{dp}{dy}=C_1\cdot p^2.$$

Проинтегрировав уравнение $C_1dy=\frac{dp}{p^2}$, находим

$$-\frac{1}{p}=C_1y+C_2,\ \text{или}\ -\frac{dx}{dy}=C_1y+C_2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow-dx=\left(C_1y+C_2\right)dy\Rightarrow\int dx=-\int\left(C_1y+C_2\right)dy.$$

Окончательно получим

$$x=\overline{C_1}y^2+\overline{C_2}y+C_3,\ \text{где}\ \overline{C_1}=-\frac{C_1}{2};\ \overline{C_2}=-C_2.\ ►$$

§ 3. Линейные дифференциальные уравнения высших порядков

3.1. Линейные однородные дифференциальные уравнения (ЛОДУ)

***Опр.* 1.** *ЛОДУ n-го порядка* называется уравнение вида:

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + p_2(x)y^{(n-2)} + \ldots + p_n(x)y = 0. \qquad (55)$$

***Опр.* 2.** *ЛОДУ второго порядка*, называется уравнение вида

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \qquad (56)$$

Решения ЛОДУ (55) обладают следующим свойством: их можно умножать на произвольные постоянные и складывать, после чего опять получается решение уравнения (55).

Заметим, что уравнения (55) и (56) всегда имеют нулевое решение. В дальнейшем, говоря о решениях уравнения (55) или (56) будем подразумевать, что эти решения отличны от нулевого.

Определитель Вронского. Необходимое и достаточное условие линейной зависимости решений

***Опр.* 3**. Если $y_1(x)$ и $y_2(x)$ – два решения уравнения (56), то выражение, составленное из них

$$\varDelta(y_1, y_2) = W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = y_1(x)y'(x)_2 - y_2(x)y_1'(x), \qquad (57)$$

называется *определителем Вронского* (*вронскиан*).

В дальнейшем будем рассматривать решения уравнения (56) на промежутке I непрерывности коэффициентов $p(x), q(x)$.

***Опр.* 4.** Два решения y_1 и y_2 уравнения (56), отличные от нулевого, называются *линейно независимыми*, если тождество $\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 \equiv 0$ для любого x из промежутка I выполняется только, когда постоянные коэффициенты α_1 и α_2 равны 0.

***Опр.* 5.** Два решения y_1 и y_2 уравнения (57), отличные от нулевого, называются *линейно зависимыми*, если найдутся α_1, α_2 такие, что для любого x из промежутка I выполняется тождество $\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 \equiv 0$, причем хотя бы один из постоянных коэффициентов α_1 и α_2 не равен нулю.

Теорема 1. (необходимое и достаточное условие линейной зависимости решений). *Равенство нулю определителя Вронского $\Delta(y_1, y_2)$ является необходимым и достаточным условием линейной зависимости решений y_1 и y_2, т.е. два решения y_1 и y_2 уравнения (56) линейно независимы тогда и только тогда, когда определитель Вронского $\Delta(y_1, y_2)$ отличен от нуля.*

Теорема 2. *Если y_1 и y_2 – два линейно независимых решения уравнения (56), то формула*

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2,$$

где C_1 и C_2 – произвольные постоянные, дает все решения этого уравнения.

***Опр.* 6.** *Определителем Вронского* (*вронскианом*) системы функций $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$ называется определитель

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & ... & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & ... & y_n'(x) \\ ... & ... & ... & ... \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & ... & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}. \qquad (58)$$

На решения $y_1, y_2, ..., y_n$ уравнения (55) распространяются определения линейной зависимости (независимости) и теорема о необходимом и достаточном условии линейной зависимости решений.

Пример 1. Исследовать на линейную зависимость системы функций:

1) $y_1 = e^{-x}$ и $y_2 = e^{3x}$;

2) $y_1 = x$, $y_2 = 0$, $y_3 = e^x$.

◄ 1) Составим и вычислим определитель Вронского по формуле (57):

$$W(x)=\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} e^{-x} & e^{3x} \\ -e^{-x} & 3e^{3x} \end{vmatrix}=e^{-x}\cdot 3e^{3x}-e^{3x}\left(-e^{-x}\right)=$$

$$=3e^{2x}+e^{2x}=4e^{2x}\neq 0.$$

Так как $W(x)\neq 0$, то система функций $y_1=e^{-x}$ и $y_2=e^{3x}$ линейно независима.

2) Составив и вычислив вронскиан по формуле (58)

$$W(x)=\begin{vmatrix} x & 0 & e^x \\ 1 & 0 & e^x \\ 0 & 0 & e^x \end{vmatrix}=0,$$

получим, что система функций $y_1=x$, $y_2=0$, $y_3=e^x$ линейно зависима.►

***Опр.* 7.** Всякая система из n линейно независимых решений $y_1(x), y_2(x),..., y_n(x)$ уравнения (55) называется *фундаментальной системой решений* этого уравнения.

Если известна фундаментальная система решений уравнения (55), то общее решение этого уравнения имеет вид

$$y(x)=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)+...+C_ny_n(x), \qquad (59)$$

где $C_1, C_2, \ldots, C_n$ – произвольные постоянные.

Пример 2. Функции $y_1(x)=\dfrac{\cos x}{x}$, $y_2(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ образуют фундаментальную систему решений уравнения $y''+\dfrac{2}{x}y'+y=0$. Найти общее решение этого уравнения.

◄ По формуле (59) имеем $y(x)=C_1\dfrac{\cos x}{x}+C_2\dfrac{\sin x}{x}$, где C_1, C_2 – произвольные постоянные.►

3.2. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения (ЛНДУ) второго порядка

***Опр.* 8.** *ЛНДУ второго порядка* называется уравнение вида

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x). \qquad (60)$$

Решение уравнения (60) будем рассматривать на промежутке непрерывности функций $p(x), q(x), f(x)$.

Уравнение

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \qquad (56)$$

называется *ЛОДУ*, *соответствующим уравнению* (60).

Пусть y_1, y_2 – два линейно независимых решения (56), $\bar{y} = C_1 y_1 + C_2 y_2$ – общее решение (56), $\tilde{y}$ – частное решение ЛНДУ (60).

Общее решение ЛНДУ второго порядка равно *сумме* общего решения соответствующего однородного уравнения и какого-либо частного решения неоднородного уравнения.

Т. о., формула общего решения уравнения (60) имеет вид

$$y = \bar{y} + \tilde{y} = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \tilde{y}.$$

Заметим, что это свойство годится для ЛНДУ любого порядка.

Рассмотрим уравнение вида:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f_1(x) + f_2(x). \qquad (61)$$

Теорема 3 (принцип суперпозиции). *Если правая часть ЛНДУ (61) есть сумма двух функций* $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$ *и* $y_1'(x)$ *– частное решение уравнения*

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f_1(x),$$

а $\tilde{y}_2(x)$ *– частное решение уравнения*

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f_2(x),$$

то сумма $\tilde{y}(x) = \tilde{y}_1(x) + \tilde{y}_2(x)$ *есть некоторое частное решение уравнения* (*61*).

Если известно общее решение $\bar{y} = C_1 y_1 + C_2 y_2$ уравнения (56) соответствующего уравнению (60), то для определения частного решения $\tilde{y}(x)$ уравнения (60) можно воспользоваться *методом Лагранжа вариации произвольных постоянных*.

Рассмотрим уравнение (60). Пусть $\tilde{y}(x)$ – какое-либо решение уравнения (60), а y_1, y_2 – линейно независимые решения соответствующего однородного уравнения (56), тогда формула $y = C_1y_1 + C_2y_2 + \tilde{y}$, где C_1, C_2 – произвольные постоянные, дает общее решение уравнения (60).

При этом, если y_1, y_2 известны, то решение уравнения (60) может быть получено по формуле:

$$\tilde{y} = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2,$$

где $C_1(x), C_2(x)$ определяются из системы уравнений первой степени

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2 = 0, \\ C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' = f(x). \end{cases} \tag{62}$$

Система (62) имеет единственное решение $C_1'(x) = \varphi(x), C_2'(x) = \psi(x)$, так как ее определитель – это определитель Вронского $\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} \neq 0$. Т. о.,

$$C_1'(x) = \int \varphi(x)dx, \; C_2'(x) = \int \psi(x)dx.$$

Для ЛНДУ n-го порядка

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_n(x)y = f(x),$$

где $p_1(x), \ldots, p_n(x), f(x)$ – непрерывные на (a,b) функции, общее решение имеет вид

$$y = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2 + \ldots + C_n(x)y_n,$$

где $y_1, \ldots, y_n$ – линейно независимые решения ЛОДУ, соответствующего данному ЛНДУ, а $C_1(x), \ldots, C_n(x)$ – функции, производные которых удовлетворяют системе уравнений:

$$\begin{cases} C_1'y_1 + C_2'y_2 + \ldots + C_n'y_n = 0, \\ C_1'y_1' + C_2'y_2' + \ldots + C_n'y_n' = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ C_1'y_1^{(n-2)} + C_2'y_2^{(n-2)} + \ldots + C_n'y_n^{(n-2)} = 0, \\ C_1'y_1^{(n-1)} + C_2'y_2^{(n-1)} + \ldots + C_n'y_n^{(n-1)} = f(x). \end{cases}$$

Пример 3. Функции $y_1(x) = e^{-x}$, $y_2(x) = e^{3x}$ образуют фундаментальную систему решений уравнения $y'' - 2y' - 3y = 0$. Найти общее решение уравнения $y'' - 2y' - 3y = e^x$.

◄ Общее решение соответствующего однородного уравнения записывается в виде $\overline{y}(x) = C_1e^{-x} + C_2e^{3x}$. Ищем частное решение уравнения $y'' - 2y' - 3y = e^x$ по формуле $\tilde{y} = C_1(x)e^{-x} + C_2(x)e^{3x}$. Для определения $C_1(x)$, $C_2(x)$ составим систему вида (62)

$$\begin{cases} C_1'(x)e^{-x} + C_2'(x)e^{3x} = 0, & (*) \\ C_1'(x)(-e^{-x}) + C_2'(x)(3e^{3x}) = e^x. & (**) \end{cases}$$

Сложив уравнения (*) и (**), получим,

$$C_2'(x) = \frac{e^x}{4e^{3x}} \Rightarrow C_2'(x) = \frac{1}{4}e^{-2x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow dC_2 = \frac{1}{4}e^{-2x}dx \Rightarrow C_2(x) = -\frac{1}{8}e^{-2x}.$$

Подставив найденное $C_2(x)$ в (*), будем иметь

$$C_1'(x)e^{-x} + \frac{1}{4}e^{-2x} \cdot e^{3x} = 0 \Rightarrow dC_1(x) = -\frac{1}{4}e^{2x}dx \Rightarrow C_1(x) = -\frac{1}{8}e^{2x}.$$

Итак, $\tilde{y}=-\frac{1}{8}e^{2x}e^{-x}-\frac{1}{8}e^{-2x}e^{3x}=-\frac{1}{4}e^{x}$. Общее решение уравнения имеет вид $y=\overline{y}+\tilde{y}=C_1e^{-x}+C_2e^{3x}-\frac{1}{4}e^{x}$, где C_1, C_2 – произвольные постоянные.►

3.3. ЛОДУ с постоянными коэффициентами

Общий вид линейного дифференциального уравнения порядка n с постоянными коэффициентами есть

$$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\ldots+a_{n-1}y'+a_ny=0, \tag{63}$$

где $a_i\in\mathbf{R}\ (i=\overline{1,n})$.

***Опр*. 9.** Уравнение

$$\lambda^{(n)}+a_1\lambda^{(n-1)}+\ldots+a_{n-1}\lambda+a_n=0, \tag{64}$$

полученное заменой производных $y^{(k)}\ (k=\overline{0,n})$ искомой функции степенями λ^k, называется *характеристическим уравнением* для уравнения (63).

Каждому действительному корню λ уравнения (64) кратности r соответствуют r линейно независимых решений уравнения (63)

$$e^{\lambda x},\ xe^{\lambda x},\ x^2e^{\lambda x},\ldots,\ x^{r-1}e^{\lambda x}, \tag{65}$$

а каждой паре комплексных корней $\lambda_{1,2}=\alpha\pm i\beta$ кратности s соответствуют s пар линейно независимых решений:

$$\begin{aligned}&e^{\alpha x}\cdot\cos\beta x,\ xe^{\alpha x}\cos\beta x,\ldots,\ x^{s-1}e^{\alpha x}\cos\beta x,\\&e^{\alpha x}\cdot\sin\beta x,\ xe^{\alpha x}\sin\beta x,\ldots,\ x^{s-1}e^{\alpha x}\sin\beta x.\end{aligned} \tag{66}$$

Запишем общее решение для случая $n=2$. Рассмотрим уравнение

$$y''+py'+qy=0, \tag{67}$$

где $p, q\in\mathbf{R}$.

Характеристическое уравнение для (67) имеет вид

$$\lambda^2+p\lambda+q=0. \tag{68}$$

Если квадратное уравнение (68) имеет два различных действительных корня λ_1 и λ_2, то согласно (65) имеем два линейно независимых решения уравнения (67)

$$y_1 = e^{\lambda_1 x},\ \ y_2 = e^{\lambda_2 x}.$$

Общее решение имеет вид

$$\overline{y} = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}, \tag{69}$$

где C_1, C_2 – произвольные постоянные.

Если квадратное уравнение (68) имеет комплексные корни $\lambda_1 = \alpha + i\beta, \lambda_2 = \alpha - i\beta \quad (\beta \neq 0)$, тогда согласно (66) имеем два линейно независимых решения уравнения (67)

$$y_1 = e^{\alpha x} \cdot \cos\beta x,\ \ y_2 = e^{\alpha x} \cdot \sin\beta x.$$

Общее решение имеет вид

$$\overline{y} = C_1 e^{\alpha x} \cos\beta x + C_2 e^{\alpha x} \sin\beta x = e^{\alpha x}\left(C_1 \cos\beta x + C_2 \sin\beta x\right). \tag{70}$$

Если квадратное уравнение (68) имеет два равных действительных корня $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda,$, то согласно (69) имеем два линейно независимых решения уравнения (67).

$$y_1 = e^{\lambda x},\ \ y_2 = xe^{\lambda x}.$$

Общее решение уравнения имеет вид

$$\overline{y} = C_1 e^{\lambda x} + C_2 x e^{\lambda x} = e^{\lambda x}\left(C_1 + C_2 x\right). \tag{71}$$

Примеры

Найти общее решение уравнений:

1. $y'' + 3y' + 2y = 0$;
2. $y'' + 2y' + 5y = 0$;
3. $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0.$

◄ 1. Для уравнения $y'' + 3y' + 2y = 0$ характеристическое уравнение имеет вид: $\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$, корни которого равны $\lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = -2.$ Запишем фундаментальную систему решений $y_1 = e^{-x},\ y_2 = e^{-2x}.$ Сл-но, общее решение имеет вид $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x}.$

2. Для уравнения $y'' + 2y' + 5y = 0$ характеристическое уравнение имеет вид $\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0$, его корни $\lambda_{1,2} = -1 \pm 2i$. Сл-но, функции $y_1 = e^{-x}\cos 2x$, $y_2 = e^{-x}\sin 2x$ составляют фундаментальную систему решений, а общее решение имеет вид $y = e^{-x}\left(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x\right)$.

3. Уравнение $\lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1 = 0$ является характеристическим для $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$, его решением является $\lambda = 1$ кратности $r = 3$. Поэтому фундаментальная система решений имеет вид $y_1 = e^x$, $y_2 = xe^x$, $y_3 = x^2e^x$. Сл-но, общее решение исходного уравнения имеет вид: $y = \left(C_1 + C_2x + C_3x^2\right)e^x$. ►

3.4. ЛНДУ с постоянными коэффициентами

Рассмотрим ЛНДУ второго порядка с постоянными коэффициентами

$$y'' + py' + qy = f(x), \left(f\left(x\right) \neq 0\right), \tag{60}$$

где $p, q \in \mathbf{R}$.

Общее решение этого уравнения записывается в виде

$$y\left(x\right) = \bar{y}\left(x\right) + \tilde{y}\left(x\right),$$

где $\bar{y}\left(x\right)$ – общее решение соответствующего ЛОДУ (56), $\tilde{y}\left(x\right)$ – любое частное решение уравнения (60). Общее решение ЛОДУ имеет вид: $\bar{y}\left(x\right) = C_1y_1 + C_2y_2$, для отыскания $\tilde{y}\left(x\right)$ в общем случае используется метод Лагранжа вариации произвольных постоянных.

Пример 4. Найти общее решение дифференциального уравнения $y''' + y' = \mathrm{tg}x$.

◄ 1. Решим ЛОДУ $y''' + y' = 0$, соотвествующее данному ЛНДУ. Для этого запишем характеристическое уравнение

$$\lambda^3 + \lambda = 0 \Rightarrow \lambda(\lambda^2 + 1) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0, \lambda_2 = i, \lambda_3 = -i.$$

Согласно (65), (66) фундаментальная система решений будет иметь вид $y_1 = e^{ox} = 1,\ y_2 = \cos x,\ y_3 = \sin x,$ сл-но, общее решение ЛОДУ имеет вид:

$$\overline{y} = C_1 + C_2 \cos x + C_3 \sin x.$$

Для нахождения частного решения неоднородного уравнения воспользуемся методом вариации произвольных постоянных. Ищем частное решение в виде $\tilde{u}(x) = C_1(x) + C_2(x)\cos x + C_3(x)\sin x.$ Для определения $C_1(x), C_2(x), C_3(x)$ составим систему

$$\begin{cases} C_1'(x) + C_2' \cos x + C_3' \sin x = 0, & (*) \\ -C_2'(x)\sin x + C_3'(x)\cos x = 0, & (**) \\ -C_2'(x)\cos x - C_3'(x)\sin x = \mathrm{tg}x. & (***) \end{cases}$$

Умножив обе части уравнения (**) на $\sin x$, (***) – на $\cos x$ и сложив их, получим

$$-C_2'(x) = \sin x \Rightarrow C_2'(x) = -\sin x.$$

Подставив $C_2'(x) = -\sin x$ в уравнение (**), получим

$$\sin^2 x + C_3'(x)\cos x = 0 \Rightarrow C_3'(x) = -\frac{\sin^2 x}{\cos x}.$$

Сложив уравнения (*) и (***) будем иметь $C_1'(x) = \mathrm{tg}x.$ Интегрирование дает выражения для $C_1(x), C_2(x), C_3(x)$:

$$C_1(x) = \int \mathrm{tg}x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\int \frac{d\cos x}{\sin x} = -\ln|\cos x|,$$

$$C_2(x) = -\int \sin x dx = \cos x,$$

$$C_3(x) = \int -\frac{\sin^2 x}{\cos x} dx = -\int \frac{1-\cos^2 x}{\cos x} dx =$$

$$= -\int \frac{dx}{\cos x} + \int \cos x dx = -\ln \mathrm{tg}\left|\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right| + \sin x.$$

Итак,

$$C_1(x) = -\ln|\cos x|,\ C_2(x) = \cos x,\ C_3(x) = -\ln \operatorname{tg}\left|\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right| + \sin x.$$

Учитывая, что $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$, получим искомое решение ЛНДУ.

$$y = \overline{y} + \tilde{y} = C_1 + C_2 \cos x + C_3 \sin x - \ln|\cos x| - \sin x \ln \operatorname{tg}\left|\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right|,$$

где C_1, C_2, C_3 произвольные постоянные.►

3.5. ЛНДУ со специальной правой частью

В зависимости от вида правой части уравнения (60) рассмотрим два частных случая:

1) $f_1(x) = P_n(x) \cdot e^{kx}$,

где $P_n(x)$ – многочлен n-й степени, $k \in \mathbf{R}$;

2) $f_2(x) = e^{\alpha x}\left(P_n(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x\right)$,

где $P_n(x)$, $Q_m(x)$ – многочлены степени n и m, соответственно, $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$.

Частное решение $\tilde{y}(x)$ уравнения (60) в этих случаях можно найти методом неопределенных коэффициентов.

Пусть правая часть имеет вид $f(x) = f_1(x) = P_n(x)e^{kx}$. Если k не совпадает ни с одним корнем характеристического уравнения, то частное решение $\tilde{y}(x)$ ищется в виде

$$\tilde{y}(x) = R_n(x) \cdot e^{kx}, \tag{72}$$

где $R_n(x)$ – многочлен той же степени, что и $P_n(x)$, но с неопределенными коэффициентами, которые надо найти. Для этого, вычисляя с помощью (72) $\tilde{y}'(x), \tilde{y}''(x)$, и подставляя в исходное уравнение (60), сокращаем правую и левую части на e^{kx}. Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получим систему уравнений для отыскания неопределенных коэффициентов. Подставив их в (72), будем иметь искомое частное решение $\tilde{y}(x)$.

Если k совпадает с некоторым корнем характеристического уравнения кратности r, то частное решение ищется в виде:

$$\tilde{y}(x) = x^r \cdot R_n(x) \cdot e^{kx}. \tag{73}$$

Дальнейшие действия аналогичны предыдущему случаю.

Пусть теперь правая часть уравнения (60) имеет вид

$$f(x) = f_2(x) = e^{\alpha x}\left(P_n(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x\right).$$

Если число $\alpha + i\beta$ не совпадает ни с одним из корней характеристического уравнения, то частное решение ищется в виде

$$\tilde{y}(x) = e^{\alpha x}\left(L_s(x)\cos\beta x + M_s(x)\sin\beta x\right), \tag{74}$$

где $s = \max(n, m)$, $L_s(x)$и $M_s(x)$ – многочлены одной и той же степени s, но с разными неопределенными коэффициентами, которые находятся так же как и в первом случае.

Если $\alpha + i\beta$ совпадает с некоторым корнем характеристического уравнения кратности r, то выражение для частного решения (74) домножается на x^r, а именно

$$\tilde{y}(x) = x^r \cdot e^{\alpha x}\left(L_s(x)\cos\beta x + M_s(x)\sin\beta x\right), \tag{75}$$

где s, $L_s(x), M_s(x)$ те же, что и выше.

Замечание 1. Если в правой части $f_2(x)$ один из многочленов $P_n(x)$ или $Q_m(x)$ – нулевой (т.е. $f_2(x) = e^{\alpha x} \cdot P_n(x)\cos\beta x$ или $f_2(x) = e^{\alpha x} \cdot Q_m(x)\sin\beta x$), то вид частного решения не меняется т.е. $\tilde{y}(x)$ ищется в форме (74) или (75).

Замечание 2. Многочлены $R_n(x)$ с неопределенными коэффициентами четвертой, третьей, второй, первой, нулевой степени имеют вид:

$n=4:\qquad R_4(x)=Ax^4+Bx^3+Cx^2+Dx+E$,

$n=3:\qquad R_3(x)=Bx^3+Cx^2+Dx+E$,

$n=2:\qquad R_2(x)=Cx^2+Dx+E$,

$n=1:\qquad R_1(x)=Dx+E$,

$n=0:\qquad R_0(x)=E$,

где A, B, C, D, E – неопределенные коэффициенты. Многочлены $L_s(x)$ и $M_s(x)$ ($s=1,2,3,4$) выписываются аналогично $R_n(x)$.

Примеры

1. Для каждого из данных ЛНДУ написать вид его общего и частного решений с неопределенными коэффициентами (числовые значения коэффициентов не находить):

а) $y''-8y'+16y=(1-x)e^{4x}$;

б) $y^{(4)}+4y''+4y=x\sin 2x$.

2. Найти общие решения следующих уравнений:

в) $y''-y=e^{-x}$;

г) $y''-5y'+6y=13\sin 3x$.

◄ а) Рассмотрим уравнение $y''-8y'+16y=(1-x)e^{4x}$. Ищем общее решение в виде $y=\overline{y}+\tilde{y}$. Характеристическое уравнение $\lambda^2-8\lambda+16=0$ имеет корни $\lambda_{1,2}=\dfrac{8\pm\sqrt{64-64}}{2}=4$, т.е. кратность r корня $\lambda=4$ равна 2. Согласно формуле (71) общее решение соответствующего ЛОДУ $\overline{y}=(C_1+C_2x)e^{4x}$.

Для того, чтобы выписать частное решение $\tilde{y}$ проанализируем правую часть $f(x)=(1-x)e^{4x}$, где $P_1(x)=(1-x)$ – многочлен 1-й степени, т.е. $n=1$, тогда $R_1(x)=Dx+E$; $k=4=\lambda_{1,2}=4$, т.е. k совпадает с одним корнем кратности 2 характеристического уравнения, сл-но, имеет место формула (73): $\tilde{y}(x)=x^2(Dx+E)e^{4x}$, где D и E – неопределенные коэффициенты. Общее решение исходного уравнения имеет вид

$$y(x)=(C_1+C_2x)\cdot e^{4x}+\left(Dx^3+Ex^2\right)\cdot e^{4x}=e^{4x}\left(C_1+C_2x+Ex^2+Dx^3\right).$$

б) Для уравнения $y^{(4)}+4y''+4y=x\sin 2x$ соответствующее характеристическое уравнение $\lambda^4+4\lambda^2+4=0$ имеет кратные корни $\lambda_{1,2}=\pm\sqrt{2}i,\lambda_{3,4}=\pm\sqrt{2}i$, т.е. $r=2$. Согласно формуле (70) с учетом кратности корней получим общее решение соответствующего ЛОДУ

$$\begin{aligned}\bar{y}&=C_1\cos\sqrt{2}x+C_2\sin\sqrt{2}x+C_3x\cos\sqrt{2}x+C_4x\sin\sqrt{2}x=\\&=\cos\sqrt{2}x(C_1+C_3x)+\sin\sqrt{2}x(C_2+C_4x).\end{aligned}$$

Для того, чтобы выписать частное решение $\tilde{y}(x)$, анализируем правую часть $f(x)=x\sin 2x$, где $P_n(x)=x$, т.е. $n=1$, $Q_m(x)\equiv 0$, т.е. $m\equiv 0\Rightarrow s=\max(m,n)=1$. Сл-но, многочлены с неопределенными коэффициентами $M_s(x)$ и $N_s(x)$ имеют одну и ту же степень $s=1$, но разные коэффициенты, т.е. $M_1(x)=Ax+B$, $L_1(x)=Cx+D$.

Составим число $\alpha+i\beta$ по виду правой части $\alpha+i\beta=0+2i$ (так как $e^{\alpha x}=e^{0x}$), поскольку $\alpha+i\beta$ не совпадает ни с одним корнем характеристического уравнения, то частное решение $\tilde{y}(x)$ ищем в виде (74) $\tilde{y}(x)=(Ax+B)\cos 2x+(Cx+D)\sin 2x$, а общее решение $y=\bar{y}+\tilde{y}$ есть

$$\begin{aligned}y(x)&=(C_1+C_3x)\cos\sqrt{2}x+(C_2+C_4x)\sin\sqrt{2}x+\\&+(Ax+B)\cos 2x+(Cx+D)\sin 2x.\end{aligned}$$

в) Общее решение уравнения $y'' - y = e^{-x}$ ищется в виде $y = \overline{y} + \tilde{y}$. Характеристическое уравнение $\lambda^2 - 1 = 0$ имеет корни $\lambda_{1,2} = \pm 1$. Общее решение соответствующего ЛОДУ есть $\overline{y} = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$.

Правая часть неоднородного уравнения $f(x) = e^{-x}$, где $P_n(x) = 1$, откуда $n = 0 \Rightarrow R_0(x) = A$; $k = -1$ совпадает с одним корнем характеристического уравнения $\lambda_2 = -1$, сл-но, по формуле (73) частное решение имеет вид: $\tilde{y}(x) = x \cdot A \cdot e^{-x}$, где A – неопределенный коэффициент. Найдем его методом неопределенных коэффициентов, для чего, подставив

$$\tilde{y}(x) = x \cdot A \cdot e^{-x},$$
$$\tilde{y}'(x) = Ae^{-x} - x \cdot A \cdot e^{-x},$$
$$\tilde{y}''(x) = x \cdot A \cdot e^{-x} - 2 \cdot A \cdot e^{-x}$$

в исходное уравнение, будем иметь

$$x \cdot A \cdot e^{-x} - 2 \cdot A \cdot e^{-x} - x \cdot A \cdot e^{-x} = e^{-x}.$$

Сократим последнее уравнение на e^{-x}, получим $-2A = 1$. Откуда $A = -\dfrac{1}{2}$.

Так как неопределенный коэффициент найден, $A = -\dfrac{1}{2}$, то частное решение имеет вид: $\tilde{y}(x) = -\dfrac{1}{2} x e^{-x}$, сл-но, общее решение исходного уравнения запишется в форме:

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} - \frac{1}{2} x e^{-x}.$$

г) Уравнение $y'' - 5y' + 6y = 13\sin 3x$ – это уравнение с правой частью $f(x) = 13\sin 3x$ второго типа, его общее решение ищется в виде $y = \overline{y} + \tilde{y}$.

Характеристическое уравнение $\lambda^2-5\lambda+6=0$ имеет корни $\lambda_1=3,\ \lambda_2=2$.

Общее решение $\overline{y}$ ЛОДУ выписывается по формуле (69):

$$\overline{y}=C_1e^{3x}+C_2e^{2x}.$$

Для отыскания частного решения $\tilde{y}(x)$ анализируем правую часть $f(x)=13\sin 3x$, здесь $P_n(x)=13$, т.е. $n=0$, $Q_m(x)\equiv 0$, т.е. $m=0$; тогда $s=\max(m,n)=0$; число $\alpha+\beta i=0+3i$ не совпадает с корнями характеристического уравнения, сл-но, $\tilde{y}(x)$ выписываем по формуле (74): $\tilde{y}(x)=A\cos 3x+B\sin 3x$.

Неопределенные коэффициенты A и B находятся так:

1) Считаем

$\tilde{y}'(x)=-3A\sin 3x+3B\cos 3x$, $\tilde{y}''(x)=-9A\cos 3x-9B\sin 3x$.

2) Подставляем $\tilde{y}(x),\ \tilde{y}'(x),\ \tilde{y}''(x)$ в исходное уравнение:

$$-9A\cos 3x-9B\sin 3x-5\left(-3A\sin 3x+3B\cos 3x\right)+$$
$$+6\left(A\cos 3x+B\sin 3x\right)=13\sin 3x,$$

или

$$\cos 3x\left(-9A-15B+6A\right)+\sin 3x\left(-9B+15A+6B\right)=13\sin 3x.$$

3) Приравнивая коэффициенты при $\cos 3x$ и $\sin 3x$, стоящие в правой и левой частях последнего уравнения, получаем систему для определения коэффициентов A и B:

$$\begin{cases}-9A-15B+6A=0,\\ -9B+15A+6B=13,\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3A+15B=0,\\ 15A-3B=13,\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}A=-5B,\\ -78B=13,\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}A=-\dfrac{5}{6},\\ B=-\dfrac{1}{6}.\end{cases}$$

4) Итак, частное решение имеет вид

$\tilde{y}(x) = -\dfrac{5}{6}\cos 3x - \dfrac{1}{6}\sin 3x$, сл-но, общее решение исходного уравнения запишется в форме:

$$y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{2x} - \frac{5}{6}\cos 3x - \frac{1}{6}\sin 3x. \blacktriangleright$$

Обобщим сведения § 3 в табл. 5–9.

Таблица 5

Решение уравнений второго порядка, допускающих понижение порядка

№ п/п	**Вид уравнения**	**Метод решения**
1.	$y^{(n)} = f(x)$	Последовательное интегрирование
2.	$F(x, y^{(k)}, \dots, y^{(n)}) = 0$	$p(x) = y^{(k)},\ p' = y^{(k+1)}, \dots,$ $p^{(n-k)} = y^{(n)}$
3.	$F(y, y', \dots y^{(n)}) = 0$	$p(y) = y',\ y'' = \dfrac{dp}{dy}p, \dots$

Таблица 6

Решение ЛОДУ 2 порядка с постоянными коэффициентами

$$y'' + py' + qy = 0, \quad k^2 + pk + q = 0, \quad D = p^2 - 4q$$

№	**Корни характеристического уравнения**	**Вид общего решения**
1.	$D > 0,\ \lambda_1 \neq \lambda_2$ – действительные, разные	$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$
2.	$D = 0,\ \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ – действительные, равные, кратности два	$y = (C_1 + C_2 x)e^{\lambda x}$
3.	$D < 0,\ \lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ – комплексные	$y = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x +$ $+ C_2 \sin \beta x)$

Таблица 7

Решение ЛОДУ n -го порядка с постоянными коэффициентами

№	**Корни характеристического уравнения**	**Вклад указанных корней в общее решение ДУ**
1.	Действительные, разные $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3 \neq \ldots \neq \lambda_n$	$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} + \ldots$ $+ C_n e^{\lambda_n x}$
2.	Действительные, кратности $r \leq n$, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \ldots =$ $= \lambda_r = \lambda$	$y = (C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + \ldots +$ $+ C_r x^{r-1}) e^{\lambda x}$
3.	Комплексные, разные $\lambda_1 = \alpha_1 \pm i\beta_1$, $\lambda_2 = \alpha_2 \pm i\beta_2, \ldots$, $\lambda_n = \alpha_n \pm i\beta_n$, где $\alpha_1 \neq \alpha_2 \neq \ldots \neq \alpha_n$, $\beta_1 \neq \beta_2 \neq \ldots \neq \beta_n$.	$y = e^{\alpha_1 x}(\tilde{N}_1 \cos\beta_1 x + \tilde{N}_2 \sin\beta_1 x) +$ $+ e^{\alpha_2 x}(\tilde{N}_3 \cos\beta_2 x + \tilde{N}_4 \sin\beta_2 x) +$ $+ \ldots + e^{\alpha_n x}(\tilde{N}_{2n-1} \cos\beta_n x +$ $+ \tilde{N}_{2n} \sin\beta_n x)$
4.	Комплексные, кратности $r = 3$, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \alpha + i\beta$	$y = e^{\alpha x}[(\tilde{N}_1 + \tilde{N}_2 x + \tilde{N}_3 x^2)\cos\beta x +$ $+ (\tilde{N}_4 + \tilde{N}_5 x + \tilde{N}_6 x^2)\sin\beta x]$

Таблица 8

Решение ЛНДУ 2-го порядка
(метод неопределенных коэффициентов)

№	$f(x)$	**Корни характерстического уравнения**	**Вид частного решения**
1.	$P_n(x)$	*а*) 0 – не корень *б*) 0 – корень кратности r $(r=1,2)$	*а*) $\tilde{y}=R_n(x)$ б) $\tilde{y}=x^r R_n(x)$
2.	$e^{kx}P_n(x)$	*а*) k – не корень *б*) k – корень кратности r $(r=1,2)$	*а*) $\tilde{y}=e^{kx}R_n(x)$ *б*) $\tilde{y}=x^r e^{kx}R_n(x)$
3.	$A\cos\beta x+$ $+B\sin\beta x$	*а*) $i\beta$ – не корень *б*) $i\beta$ – корень кратности r $(r=1,2)$	*à*) $\tilde{y}=A_1\cos\beta x+B_1\sin\beta x$ *á*) $\tilde{y}=x^r(A_1\cos\beta x+$ $+B_1\sin\beta x)$
4.	$P_n(x)\cos\beta x+$ $+Q_m(x)\sin\beta x$	*а*) $i\beta$ – не корень *б*) $i\beta$ – корень кратности r $(r=1,2)$	*а*) $\tilde{y}=L_s\cos\beta x+M_s\sin\beta x,$ *б*) $\tilde{y}=x^r(L_s\cos\beta x+$ $+M_s\sin\beta x),$ $s=\max(n,m)$

Окончание таблицы 8

5.	$e^{\alpha x}(P_n(x)\cos\beta x+$ $+Q_m(x)\sin\beta x)$	*а*) $\alpha+i\beta$ – не корень *б*) $\alpha+i\beta$ – корень кратности r $(r=1,2)$	*а*) $\tilde{y}=e^{\alpha x}(L_s\cos\beta x+$ $+M_s\sin\beta x)$, *б*) $\tilde{y}=x^r e^{\alpha x}(L_s\cos\beta x+$ $+M_s\sin\beta x)$, $s=\max(n,m)$

Здесь $R_n(x)$ L_s и M_s – многочлены с неопределенными коэффициентами.

Таблица 9

Решение ЛНДУ n-го порядка
(метод неопределенных коэффициентов)

№	**Вид правой части**	**Корни характестического уравнения**	**Вид частного решения**
1.	$f(x)=P_n(x)$ – многочлен степени n	*а*) 0 – не корень *б*) 0 – корень кратности r	а) $\tilde{y}=R_n(x)$ *б*) $\tilde{y}=x^r R_n(x)$
2.	$f(x)=e^{kx}P_n(x)$	*а*) k – не корень *б*) k – корень кратности r	*а*) $\tilde{y}=e^{kx}R_n(x)$ *б*) $\tilde{y}=x^r e^{kx}R_n(x)$
3.	$f(x)=A\cos\beta x+$ $+B\sin\beta x$	*а*) $i\beta$ – не корень *б*) $i\beta$ – корень кратности r	à) $\tilde{y}=A_1\cos\beta x+$ $+B_1\sin\beta x$ á) $\tilde{y}=x^r(A_1\cos\beta x+$ $+B_1\sin\beta x)$

Оконание таблицы 9

4.	$f(x)=P_n(x)\cos\beta x+$ $+Q_m(x)\sin\beta x$	*а*) $i\beta$ – не корень *б*) $i\beta$ – корень кратности r	*а*) $\tilde{y}=L_s\cos\beta x+$ $+M_s\sin\beta x,$ *б*) $\tilde{y}=x^r(L_s\cos\beta x+$ $+M_s\sin\beta x),$ $s=\max(n,m)$
5.	$f(x)=e^{\alpha x}\cdot$ $\cdot(P_n(x)\cos\beta x+$ $+Q_m(x)\sin\beta x)$	*а*) $\alpha+i\beta$ – не корень *б*) $\alpha+i\beta$ – корень кратности r	*а*) $\tilde{y}=e^{\alpha x}(L_s\cos\beta x+$ $+M_s\sin\beta x),$ *б*) $\tilde{y}=x^r e^{\alpha x}(L_s\cos\beta x+$ $+M_s\sin\beta x),$ $s=\max(n,m)$

§ 4. Системы дифференциальных уравнений

4.1. Нормальная система дифференциальных уравнений

***Опр.* 1.** Система дифференциальных уравнений (СДУ) вида:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = f_1(t, x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ \dfrac{dx_2}{dt} = f_2(t, x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{dx_n}{dt} = f_n(t, x_1, x_2, \ldots, x_n), \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(t, x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ \dot{x}_2 = f_2(t, x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dot{x}_n = f_n(t, x_1, x_2, \ldots, x_n), \end{cases}$$

где $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – неизвестные функции независимой переменной t, называется *нормальной системой*.

Если правые части нормальной СДУ являются линейными функциями относительно $x_1, x_2, \ldots, x_n$, то СДУ называется *линейной*.

Иногда нормальную СДУ удается свести к одному уравнению n–го порядка, содержащему одну неизвестную функцию. Сведение нормальной системы к одному уравнению может быть достигнуто дифференцированием одного из уравнений системы и исключением всех неизвестных, кроме одного (так называемый *метод исключения*).

В некоторых случаях, комбинируя уравнения системы, после несложных преобразований удается получить легко интегрируемые уравнения (так называемый *метод интегрируемых комбинаций*), что позволяет найти решение системы.

Пример 1. Решить СДУ

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x - y \end{cases}$$

при начальных условиях $x(0) = 2,\ y(0) = 0$.

◀ Продифференцируем по t первое уравнение: $\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{dx}{dt}+\frac{dy}{dt}$; исключая из полученного уравнения $\frac{dy}{dt}$ и y, имеем $\frac{d^2x}{dt^2}-2x=0$. Характеристическое уравнение $k^2-2=0$ имеет корни $k_{1,2}=\pm\sqrt{2}$. Сл–но, общее решение для x запишется в виде

$$x=C_1e^{t\sqrt{2}}+C_2e^{-t\sqrt{2}}.$$

Общее решение для y находится из первого уравнения:

$$y=\frac{dx}{dt}-x=C_1(\sqrt{2}-1)e^{t\sqrt{2}}+C_2(\sqrt{2}+1)e^{-t\sqrt{2}}.$$

Воспользуемся начальными условиями для нахождения произвольных постоянных:

$$C_1+C_2=2, \sqrt{2}(C_1-C_2)-(C_1+C_2)=0.$$

Отсюда $C_1=(\sqrt{2}+2)/2, \quad C_2=(2-\sqrt{2})/2$. Т. о., искомое частное решение имеет вид

$$x=(\frac{\sqrt{2}}{2}+1)e^{t\sqrt{2}}+(1-\frac{\sqrt{2}}{2})e^{-t\sqrt{2}},\ y=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{t\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-t\sqrt{2}}.$$ ▶

Пример 2. Решить СДУ

$$\begin{cases}\frac{dx}{dt}=\frac{x}{2x+3y},\\ \frac{dy}{dt}=\frac{y}{2x+3y}\end{cases}$$

при начальных условиях $x(0)=1, y(0)=2$.

◀ Составим первую интегрируемую комбинацию. Разделив первое уравнение на второе, получим

$$\frac{dx}{dy}=\frac{x}{y}; \frac{dx}{x}=\frac{dy}{y}; \ln x=\ln y+\ln C_1, \text{ т.е. } x=C_1y.$$

Составим вторую интегрируемую комбинацию. Сложив удвоенное первое и утроенное второе уравнения, получим

$$2\frac{dx}{dt}+3\frac{dy}{dt}=1;\ 2dx+3dy=dt,\ \text{т.е. } 2x+3y=t+C_2\,.$$

Из системы уравнений $\begin{cases} x=C_1y, \\ 2x+3y=t+C_2 \end{cases}$, находим общее решение исходной системы

$$x=\frac{C_1(t+C_2)}{2C_1+3},\ y=\frac{t+C_2}{2C_1+3}\,.$$

Используя начальные условия, получаем

$$1=\frac{C_1C_2}{2C_1+3},\ 2=\frac{C_2}{2C_2+3},\ \text{т.е. } C_1=\frac{1}{2},\ C_2=8\,.$$

Подставив в общее решение найденные значения C_1 и C_2, получим частные решения, удовлетворяющие начальным условиям: $x=(1/8)t+1,\ y=(1/4)t+2$.►

Пример 3. Решить СДУ $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=-2x-4y+1+4t, \\ \dfrac{dy}{dt}=-x+y+1{,}5t^2. \end{cases}$

◄ Методом исключения сведем эту систему к одному уравнению относительно неизвестной функции $x(t)$.

Для этого продифференцируем 1-е уравнение системы по переменной t и получим: $\dfrac{d^2x}{dt^2}=-2\dfrac{dx}{dt}-4\dfrac{dy}{dt}+4$.

Подставим $\dfrac{dy}{dt}$ из 2-го уравнения системы и получим:

$$\frac{d^2x}{dt^2}=-2\frac{dx}{dt}-4\left(-x+y+1{,}5t^2\right)+4=-2\frac{dx}{dt}+4x-4y-6t^2+4\,.$$

Из 1-го уравнения системы выразим $-4y=\dfrac{dx}{dt}+2x-4t-1$ и подставим в $\dfrac{d^2x}{dt^2}$, после преобразований получим:

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{dx}{dt}-6x=-6t^2-4t+3.$$

Получили ЛНДУ 2-го порядка со специальной правой частью. Характеристическое уравнение $k^2+k-6=0$ имеем решения $k_1=2$ и $k_2=-3$. Поэтому общее решение соответствующего ЛОДУ 2-го порядка имеет вид:

$$\bar{x}=C_1e^{2t}+C_2e^{-3t}, \text{ где } C_1, C_2=const.$$

По виду правой части $f(t)=-6t^2-4t+3$ можно составить вид частного решения ЛНДУ: $\tilde{x}=At^2+Bt+C$. Значения A, B и C найдем методом неопределенных коэффициентов: $A=1$, $B=1$, $C=0$. Поэтому $\tilde{x}=t^2+t$.

Окончательно $x=\bar{x}+\tilde{x}=C_1e^{2t}+C_2e^{-3t}+t^2+t$.

Из 1-го уравнения системы выразим неизвестную функцию y:

$$y=-\frac{1}{4}\left(x'+2x-4t-1\right),$$

и, подставив в нее найденную функцию x, получим:

$$y=-C_1e^{2t}+C_2e^{-3t}-0{,}5t^2.$$ ►

4.2. Решение линейных СДУ с постоянными коэффициентами с помощью матриц

Пусть дана система n линейных дифференциальных уравнений с n неизвестными функциями $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt}=a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n, \\ \dfrac{dx_2}{dt}=a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \dfrac{dx_n}{dt}=a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\ldots+a_{nn}x_n. \end{cases}$$

где $a_{i,j}\in\mathbf{R},\quad i,j=\overline{1,n}$.

Эту систему можно записать в виде одного матричного дифференциального уравнения $\dfrac{dX}{dt} = AX$, где

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \frac{dX}{dt} = \begin{pmatrix} \dfrac{dx_1}{dt} \\ \dfrac{dx_2}{dt} \\ \dots \\ \dfrac{dx_n}{dt} \end{pmatrix}.$$

Ищем решение системы виде

$$x_1 = p_1 e^{\lambda t}, x_2 = p_2 e^{\lambda t}, \dots, x_n = p_n e^{\lambda t},$$

где $\lambda = const,\ p_i = const\ (i = \overline{1,n})$. Подставив значения $x_1, x_2, \dots, x_n$ в СДУ, получим систему линейных алгебраических уравнений относительно $p_1, p_2, \dots, p_n$:

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda) p_1 + a_{12} p_2 + \dots + a_{1n} p_n = 0, \\ a_{21} p_1 + (a_{22} - \lambda) p_2 + \dots + a_{2n} p_n = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1} p_1 + a_{n2} p_2 + \dots + (a_{nn} - \lambda) p_n = 0. \end{cases}$$

Система должна иметь ненулевое решение, поэтому для определения λ получаем уравнение n-ой степени

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

или $|A - \lambda E| = 0$, где E – единичная матрица размером $n \times n$.

Последнее уравнение является характеристическим уравнением матрицы A и в то же время характеристическим уравнением системы.

Предположим, что характеристическое уравнение имеет n различных корней $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, которые являются характеристическими числами матрицы A. Каждому характеристическому числу соответствует свой собственный вектор. Пусть характеристическому числу λ_k соответствует собственный вектор $P_k = (p_{1k}, p_{2k}, \ldots, p_{nk})$, где $k = \overline{1,n}$, который находится из матричного уравнения $\left(A - \lambda_k E\right) \cdot P_k = \theta$, где θ – нулевая матрица размером $n \times 1$.

Тогда СДУ имеет n решений:

1-ое решение, соответствующее корню $\lambda = \lambda_1$:

$$x_{11} = p_{11} e^{\lambda_1 t}, \quad x_{21} = p_{21} e^{\lambda_1 t}, \ldots, x_{n1} = p_{n1} e^{\lambda_1 t};$$

2-ое решение, соответствующее корню $\lambda = \lambda_2$:

$$x_{12} = p_{12} e^{\lambda_2 t}, \quad x_{22} = p_{22} e^{\lambda_2 t}, \ldots, x_{n2} = p_{n2} e^{\lambda_2 t};$$

....

n-ое решение, соответствующее корню $\lambda = \lambda_n$:

$$x_{1n} = p_{1n} e^{\lambda_n t}, \quad x_{2n} = p_{2n} e^{\lambda_n t}, \ldots, x_{nn} = p_{nn} e^{\lambda_n t}.$$

Мы получили фундаментальную систему решений. Общее решение СДУ таково:

$$x_1 = C_1 x_{11} + C_2 x_{12} + \ldots + C_n x_{1n},$$
$$x_2 = C_1 x_{21} + C_2 x_{22} + \ldots + C_n x_{2n},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$x_n = C_1 x_{n1} + C_2 x_{n2} + \ldots + C_n x_{nn}.$$

Случаи комплексных и кратных корней рассмотрим на примерах.

Решение неоднородной СДУ рассмотрим на примере СДУ 2-го порядка вида:

$$\frac{dX}{dt} = AX + F,$$

где $X = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$, $\frac{dX}{dt} = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, $F = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{pmatrix}$.

1) Составим и решим однородную систему $\frac{dX}{dt} = AX$ *методом Эйлера*.

Характеристическое уравнение системы: $|A - \lambda E| = 0$, где E – единичная матрица 2-го порядка. Его решение – собственные числа λ_1 и λ_2.

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda_1 \text{ и } \lambda_2 .$$

Для каждого собственного числа найдем собственный вектор $P_i = \begin{pmatrix} p_{i1} \\ p_{i2} \end{pmatrix}$ из уравнения $(A - \lambda_i E) \cdot P_i = 0$, где $i = 1, 2$.

Тогда частные решения однородной системы ДУ:

$$x_1 = p_{11} e^{\lambda_1 t}, \; x_1 = p_{21} e^{\lambda_2 t},$$
$$y_1 = p_{12} e^{\lambda_1 t}, \; y_2 = p_{22} e^{\lambda_2 t}.$$

Поэтому общее решение однородной системы:

$$\begin{matrix} \bar{x} = C_1 x_1 + C_2 x_2, \\ \bar{y} = C_1 y_1 + C_2 y_2 \end{matrix} \quad \text{или} \quad \overline{X} = W \cdot C,$$

где $W = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = const$.

2) Найдем решение неоднородной СДУ *методом вариации произвольных постоянных*.

Пусть $C(t) = \begin{pmatrix} C_1(t) \\ C_2(t) \end{pmatrix}$. Тогда решение неоднородной СДУ будем искать в виде:

$$\begin{matrix} x = C_1(t) x_1 + C_2(t) x_2, \\ y = C_1(t) y_1 + C_2(t) y_2 \end{matrix} \quad \text{или} \quad X = W \cdot C(t).$$

Для нахождения неизвестных функций $C_1(t)$ и $C_2(t)$ составим и решим систему:

$$\begin{cases} C_1'(t)x_1 + C_2'(t)x_2 = f_1(t), \\ C_1'(t)y_1 + C_2'(t)y_2 = f_2(t) \end{cases} \text{ или } W \cdot C'(t) = F .$$

Решение этой системы можно найти в матричном виде:

$$C'(t) = W^{-1} \cdot F ,$$

где W^{-1} – обратная матрица для W (она существует, так как частные решения однородной системы образуют фундаментальную систему решений, то есть линейно независимы). Поэтому:

$$C(t) = \int W^{-1} \cdot F\,dt + C \text{ или } \begin{matrix} C_1(t) = \int C_1'(t)dt + C_1, \\ C_2(t) = \int C_2'(t)dt + C_2. \end{matrix}$$

Подставляя $C(t)$ в вид общего решения неоднородной СДУ $X = W \cdot C(t)$, получим искомый результат.

Пример 4. Найти общее решение СДУ:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -2x - 4y + 1 + 4t, \\ \dfrac{dy}{dt} = -x + y + 1{,}5t^2. \end{cases}$$

◀ 1) Однородная система имеет вид: $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -2x - 4y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -x + y, \end{cases}$ для нее $A = \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$. Характеристическое уравнение:

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} -2-\lambda & -4 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = -3.$$

Для $\lambda_1 = 2$ найдем $P_1 = \begin{pmatrix} p_{11} \\ p_{12} \end{pmatrix}$ из матричного уравнения $(A - \lambda_1 E) \cdot P_1 = 0$:

$$\begin{cases}(-2-2)p_{11}-4p_{12}=0,\\(-1)p_{11}+(1-2)p_{12}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-4p_{11}-4p_{12}=0,\\-p_{11}-p_{12}=0\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow p_{11}=-p_{12}\Rightarrow P_1=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}.$$

Для $\lambda_2=-3$ найдем $P_2=\begin{pmatrix}p_{21}\\p_{22}\end{pmatrix}$ из матричного уравнения $(A-\lambda_2 E)\cdot P_2=0$:

$$\begin{cases}(-2-(-3))p_{21}-4p_{22}=0,\\(-1)p_{21}+(1-(-3))p_{22}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}p_{21}-4p_{22}=0,\\-p_{21}+4p_{22}=0\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow p_{21}=4p_{22}\Rightarrow P_2=\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}.$$

Найдем решение однородной СДУ:

$$\overline{X}=W\cdot C=\begin{pmatrix}e^{2t} & 4e^{-3t}\\-e^{2t} & e^{-3t}\end{pmatrix}\cdot C=\begin{pmatrix}C_1e^{2t}+4C_2e^{-3t}\\-C_1e^{2t}+C_2e^{-3t}\end{pmatrix}.$$

2) Методом вариации решение неоднородной СДУ будем искать в виде:

$$X=W\cdot C(t)\ \text{или}\ \begin{array}{l}x=C_1(t)e^{2t}+4C_2(t)e^{-3t},\\y=-C_1(t)e^{2t}+C_2(t)e^{-3t}.\end{array}$$

Будем искать неизвестные функции $C_1(t)$ и $C_2(t)$:

$$C'(t)=W^{-1}\cdot F,$$

где $F=\begin{pmatrix}1+4t\\1{,}5t^2\end{pmatrix}$, $W=\begin{pmatrix}e^{2t} & 4e^{-3t}\\-e^{2t} & e^{-3t}\end{pmatrix}$.

Найдем обратную матрицу: $W^{-1}=\frac{1}{5}\cdot\begin{pmatrix}e^{-2t} & -4e^{-2t}\\e^{3t} & e^{3t}\end{pmatrix}$. Тогда:

$$W^{-1}\cdot F=\frac{1}{5}\cdot\begin{pmatrix}e^{-2t} & -4e^{-2t}\\e^{3t} & e^{3t}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1+4t\\1{,}5t^2\end{pmatrix}=\frac{1}{5}\cdot\begin{pmatrix}e^{-2t}\left(-6t^2+4t+1\right)\\e^{3t}\left(1{,}5t^2+4t+1\right)\end{pmatrix}.$$

Поэтому $C'(t) = W^{-1} \cdot F = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} e^{-2t}\left(-6t^2 + 4t + 1\right) \\ e^{3t}\left(1{,}5t^2 + 4t + 1\right) \end{pmatrix}$. После интегрирования получим:

$$C(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} e^{-2t}\left(3t^2 + t\right) + C_1 \\ \frac{1}{10} e^{3t}\left(t^2 + 2t\right) + C_2 \end{pmatrix}.$$

В итоге найдем решение неоднородной СДУ:

$$X = W \cdot C(t) = \begin{pmatrix} e^{2t} & 4e^{-3t} \\ -e^{2t} & e^{-3t} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{5} e^{-2t}\left(3t^2 + t\right) + C_1 \\ \frac{1}{10} e^{3t}\left(t^2 + 2t\right) + C_2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} C_1 e^{2t} + 4C_2 e^{-3t} + t^2 + t \\ -C_1 e^{2t} + C_2 e^{-3t} - 0{,}5t^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}. ▶$$

Пример 5. Найти общее решение СДУ

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 6x - 12y - z, \\ \dfrac{dy}{dt} = x - 3y - z, \\ \dfrac{dz}{dt} = -4x + 12y + 3z. \end{cases}$$

◀ Составим характеристическое уравнение матрицы системы:

$$\begin{vmatrix} 6-\lambda & -12 & -1 \\ 1 & -3-\lambda & -1 \\ -4 & 12 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрывая определитель, находим

$$(6-\lambda)(\lambda^2 - 9) - 48 - 12 + 12 + 4\lambda + 72 - 12\lambda + 36 - 12\lambda = 0,$$

или окончательно $\lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6 = 0$. Это уравнение имеет корни $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3$. Определяем собственные векторы матрицы A.

При $\lambda = 1$ получаем систему уравнений

$$\begin{cases} 5p_1 - 12p_2 - p_3 = 0, \\ p_1 - 4p_2 - p_3 = 0, \\ -4p_1 + 12p_2 + 2p_3 = 0, \end{cases}$$

одно из которых – следствие двух других. Возьмем, например, первые два уравнения:

$$5p_1 - 12p_2 - p_3 = 0, \quad p_1 - 4p_2 - p_3 = 0.$$

Отсюда

$$p_1 = 8C, \quad p_2 = 4C, \quad p_3 = -8C, \ C = const.$$

Приняв $k = 1/4$, получаем собственный вектор $(2;1;-2)$.

При $\lambda = 2$ имеем систему

$$\begin{cases} 4p_1 - 12p_2 - p_3 = 0, \\ p_1 - 5p_2 - p_3 = 0, \\ -4p_1 + 12p_2 + p_3 = 0. \end{cases}$$

Снова используя первые два уравнения (третье – их следствие), находим

$$p_1 = 7C, \quad p_2 = 3C, \quad p_3 = -8C, \ C = const.$$

приняв $k = 1$, получаем собственный вектор $(7;3;-8)$.

При $\lambda = 3$ имеем систему

$$\begin{cases} 3p_1 - 12p_2 - p_3 = 0, \\ p_1 - 6p_2 - p_3 = 0, \\ -4p_1 + 12p_2 = 0. \end{cases}$$

Из последнего уравнения находим $p_1 = 3p_2$. Подставляем это значение p_1 в первое уравнение и находим $p_3 = -3p_2$. Приняв $p_2 = 1$, получаем $p_1 = 3$, $p_3 = -3$, т.е. собственный вектор $(3;1;-3)$.

Фундаментальная система решений:

для $\lambda = 1: x_{11} = 2e^t, x_{21} = e^t, x_{31} = -2e^t$,

для $\lambda = 2: x_{12} = 7e^{2t}, x_{22} = 3e^{2t}, x_{32} = -8e^{2t}$, для $\lambda = 3: x_{13} = 3e^{3t}$, $x_{23} = e^{3t}$, $x_{33} = -3e^{3t}$.

Общее решение записывается в виде

$$x_1 = 2C_1e^t + 7C_2e^{2t} + 3C_3e^{3t},$$
$$x_2 = C_1e^t + 3C_2e^{2t} + C_3e^{3t},$$
$$x_3 = -2C_1e^t - 8C_2e^{2t} - 3C_3e^{3t}. \blacktriangleright$$

Пример 6. Найти общее решение СДУ

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = 4x_1 - 3x_2, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = 3x_1 + 4x_2. \end{cases}$$

◄ Составляем характеристическое уравнение матрицы системы:

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & -3 \\ 3 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0, \ (4-\lambda)^2 = -9, \lambda - 4 = \pm 3i, \lambda = 4 \pm 3i.$$

Определяем собственные векторы.

При $\lambda_1 = 4 + 3i$ получаем систему уравнений

$$\begin{cases} -3ip_1 - 3p_2 = 0, \\ 3p_1 - 3ip_2 = 0. \end{cases}$$

Т.о., $p_1 = ip_2$. Приняв $p_2 = 1$, находим $p_1 = i$, т.е. собственный вектор $(i;1)$.

При $\lambda_2 = 4 - 3i$ получаем систему уравнений

$$\begin{cases} 3ip_1 - 3p_2 = 0, \\ 3p_1 + 3ip_2 = 0. \end{cases}$$

Отсюда находим собственный вектор $(-i;1)$.

Фундаментальная система решений:

для $\lambda_1 = 4 + 3i$:

$$x_{11} = ie^{(4+3i)t} = e^{4t}(-\sin 3t + i\cos 3t),$$
$$x_{21} = e^{(4+3i)t} = e^{4t}(\cos 3t + i\sin 3t);$$

для $\lambda_2 = 4-3i$:

$$x_{12} = -i\,e^{(4-3i)t} = e^{4t}(-\sin 3t - i\cos 3t),$$

$$x_{22} = e^{4t}(\cos 3t - i\sin 3t).$$

Итак, получаем общее решение

$$x_1 = C_1 e^{4t}(-\sin 3t + i\cos 3t) + C_2 e^{4t}(-\sin 3t - i\cos 3t),$$

$$x_2 = C_1 e^{4t}(\cos 3t + i\sin 3t) + C_2 e^{4t}(\cos 3t - i\sin 3t),$$

т.е.

$$x_1 = e^{4t}[-(C_1 + C_2)\sin 3t + (C_1 - C_2)i\cos 3t],$$

$$x_2 = e^{4t}[(C_1 + C_2)\cos 3t + (C_1 - C_2)i\sin 3t].$$

Полагая $(C_1 + C_2) = C_1^*, \quad (C_1 - C_2)i = C_2^*$, получаем

$$x_1 = e^{4t}(-C_1^* \sin 3t + C_2^* \cos 3t),$$

$$x_2 = e^{4t}(C_1^* \cos 3t + C_2^* \sin 3t).$$

Общее решение может быть найдено и иначе. В решениях, соответствующих одному из комплексных характеристических чисел, отделим действительную и мнимую части (сопряженное характеристическое число мы не рассматриваем, так как решения, соответствующие корню $a-bi$, линейно зависимы с решениями корня $a+bi$):

$$ie^{(4+3i)t} = -e^{4t}\sin 3t + ie^{4t}\cos 3t,$$

$$e^{(4+3i)t} = e^{4t}\cos 3t + ie^{4t}\sin 3t.$$

Получаем два линейно независимых частных решения:

$$x_{11} = -e^{4t}\sin 3t,\ x_{21} = e^{4t}\cos 3t,$$

$$x_{12} = e^{4t}\cos 3t,\ x_{22} = e^{4t}\sin 3t.$$

Общее решение

$$x_1 = C_1 x_{11} + C_2 x_{12},\ x_2 = C_1 x_{21} + C_2 x_{22},$$

т.е.

$$x_1 = e^{4t}(-C_1 \sin 3t + C_2 \cos 3t),$$

$$x_2 = e^{4t}(C_1 \cos 3t + C_2 \sin 3t). \blacktriangleright$$

Пример 7. Найти общее решение СДУ

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = x_1 - x_3, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = x_1, \\ \dfrac{dx_3}{dt} = x_1 - x_2. \end{cases}$$

◄ Составляем характеристическое уравнение матрицы системы:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & -1 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 1 & -1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0, \text{ или } (1-\lambda)(1+\lambda^2) = 0 .$$

Характеристические числа: $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = i, \lambda_3 = -i$.

При $\lambda_1 = 1$ для определения собственного вектора получаем систему уравнений

$$\begin{cases} -p_3 = 0, \\ p_1 - p_2 = 0, \\ p_1 - p_2 - p_3 = 0. \end{cases}$$

Эта система определяет собственный вектор $(1;1;0)$.

При $\lambda_2 = i$ для определения собственного вектора получаем систему уравнений

$$\begin{cases} (1-i)p_1 - p_3 = 0, \\ p_1 - ip_2 = 0, \\ p_1 - p_2 - ip_3 = 0. \end{cases}$$

Эта система определяет собственный вектор $(1;-i;1-i)$.

Собственный вектор, соответствующий характеристическому числу $\lambda_3 = -i$, мы рассматривать не будем, так как оно сопряжено с $\lambda_2 = i$.

Значению $\lambda_1 = 1$ соответствуют решения

$$x_{11} = e^t,\ x_{21} = e^t,\ x_{31} = 0.$$

Значению $\lambda_2 = i$ соответствуют решения

$$e^{it} = \cos t + i\sin t, \quad -ie^{it} = \sin t - i\cos t,$$

$$(1-i)e^{it} = (\cos t + \sin t) + i(\sin t - \cos t).$$

Отделяя действительные части, получим решения

$$x_{12} = \cos t,\ x_{22} = \sin t,\ x_{32} = \cos t + \sin t.$$

Отделяя мнимые части, находим решения

$$x_{13} = \sin t,\ x_{23} = -\cos t,\ x_{33} = \sin t - \cos t.$$

Общее решение

$$x_1 = C_1e^t + C_2\cos t + C_3\sin t,$$

$$x_2 = C_1e^t + C_2\sin t - C_3\cos t,$$

$$x_3 = C_2(\cos t + \sin t) + C_3(\sin t - \cos t). \blacktriangleright$$

Пример 8. Найти общее решение СДУ

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = 5x_1 - x_2, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = x_1 + 3x_2. \end{cases}$$

◄ Решаем характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & -1 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0,\ \ (5-\lambda)(3-\lambda)+1 = -9,\ \ \lambda_1 = \lambda_2 = 4.$$

Если λ_1 – корень характеристического уравнения кратности m, то этому корню соответствует решение

$$x_1 = p_1(t)e^{\lambda_1 t}, \quad x_2 = p_2(t)e^{\lambda_1 t}, \ldots, x_n = p_n(t)e^{\lambda_1 t},$$

где $p_1(t),\ p_2(t), \ldots p_n(t),$ – многочлены степени не выше $m-1$.

Т.о., двукратному корню $\lambda = 4$ соответствует решение:

$$x_1 = e^{4t}(a_1t + a_2),\ x_2 = e^{4t}(b_1t + b_2).$$

Дифференцируя x_1 и x_2, получим

$$\frac{dx_1}{dt} = a_1e^{4t} + 4(a_1t + a_2)e^{4t}, \frac{dx_2}{dt} = b_1e^{4t} + 4(b_1t + b_2)e^{4t}.$$

Значения x_1, x_2, $\frac{dx_1}{dt}$, $\frac{dx_2}{dt}$ подставим в систему уравнений. После сокращения на e^{4t} имеем

$$a_1 + 4(a_1 t + a_2) = 5(a_1 t + a_2) - (b_1 t + b_2),$$
$$b_1 + 4(b_1 t + b_2) = a_1 t + a_2 + 3(b_1 t + b_2).$$

Приравнивая коэффициенты при t и свободные члены, получаем системы уравнений:

$$\begin{cases} 4a_1 = 5a_1 - b_1, \\ 4b_1 = a_1 + 3b_1, \end{cases} \quad \begin{cases} a_1 + 4a_2 = 5a_2 - b_2, \\ b_1 + 4b_2 = a_2 + 3b_2. \end{cases}$$

Отсюда следует, что $a_1 = b_1$, $a_2 - b_2 = a_1 = b_1$. Полагая $a_1 = C_1$, $a_2 = C_2$ ($C_1, C_2 = const$), находим $b_1 = C_1$, $b_2 = C_2 - C_1$. Сл–но,

$$x_1 = e^{4t}(C_1 t + C_2), \; x_2 = e^{4t}(C_1 t + C_2 - C_1). \blacktriangleright$$

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

	Тема	ФАИТУ	ФРТ	ФЭ
1	Дифференциальное исчисление функции одной действительной переменной	Иванова Е.Е. Дифференциальное исчисление функций одного переменного. М.:МГТУ, 1998. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления. М., 1985. Т.1	Краснов М.Л., Киселев А.И. и др. Вся высшая математика. М.:УРСС, 2000-2001, Т.1	Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления. М., 1985. Т.1
2	Интегральное исчисление функции одной действительной переменной	Зарубин В.С., Иванова Е.Е., Кувыркин Г.Н. Интегральное исчисление функций одного переменного. М.: МГТУ, 1999. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления. М., 1985. Т.1	Краснов М.Л., Киселев А.И. и др. Вся высшая математика. М.:УРСС, 2000-2001, Т.2	Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления. М., 1985. Т.1
3	Дифференциальное исчисление функции нескольких перемен-	Канатников А.Н., Крищенко А.П., Четвериков В.Н. Дифференциальное исчисление	Краснов М.Л., Киселев А.И. и др. Вся высшая математика. М.:УРСС,	Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления. М., 1985. Т.1

	ных	функций многих переменных. М.: МГТУ, 2000. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления. М., 1985. Т.1	2000-2001, Т.2	
4	Обыкновенные дифференциальные уравнения и их системы	Агафонов С.А., Герман А.Д., Муратова Т.В. Дифференциальные уравнения. М.: МГТУ, 2004. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления. М., 1985. Т.2	Краснов М.Л., Киселев А.И. и др. Вся высшая математика. М.:УРСС, 2000-2001, Т.3	Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления. М., 1985. Т.2

Дополнительная литература

1. Выгодский М.Я. Справочник по ВМ. 13-е изд. М.: Физмат.лит., 1995.
2. Данко П.Е. и др. ВМ в упражнениях и задачах в 2-х частях. М.: Высш. школа, 1996.
3. Зимина О.В., Кириллов А.И., Сальникова Т.А. Высшая математика (Решебник). М., 2005.
4. Краснов М.Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: 1983.
5. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике: полный курс. М., 2006.

6. Справочное пособие по ВМ. Т.1,2 / И.И. Ляшко, А.Н. Боярчук и др. М.:УРСС,1995.
7. Черненко В.Д. Высшая математика в примерах и задачах: учеб. пособие для вузов. В 3 т. СПб., 2003.
8. Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление, 1969.

Б у х е н с к и й Кирилл Валентинович
Е л к и н а Наталья Викторовна
М а с л о в а Наталия Николаевна
Ц и п о р к о в а Ксения Андреевна

Опорные конспекты
по высшей математике
Часть 2

Редактор Р.К. Мангутова
Корректор С.В. Макушина
Подписано в печать 20.07.10. Формат бумаги 60×84 1/16.
Бумага газетная. Печать трафаретная. Усл. печ. л. 15,0.
Тираж 100 экз. Заказ
Рязанский государственный радиотехнический университет.
390005, Рязань, ул. Гагарина, 59/1.
Редакционно-издательский центр РГРТУ.