

7629

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
РЯЗАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ РАДИОТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМ. В.Ф. УТКИНА

ПРЕДЕЛЫ И НЕПРЕРЫВНОСТЬ

Рязань 2023

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Рязанский государственный радиотехнический университет
им. В.Ф. Уткина

ПРЕДЕЛЫ И НЕПРЕРЫВНОСТЬ

Методические указания

Рязань 2023

УДК 517.912

Пределы и непрерывность: методические указания/ Рязан. гос. радиотехн. ун-т; сост.: Ю.С. Кострова, С.В. Богатова. - Рязань, 2023. – 40 с.

Содержат большое количество задач с подробным решением по темам: «Предел числовой последовательности», «Предел функции», «Непрерывность функций».

Предназначены для студентов направления 11.03.04 «Электроника и наноэлектроника», также может быть использовано студентами всех направлений подготовки при изучении раздела «Пределы и непрерывность».

Ил. 3. Библиогр.: 3 назв.

Математический анализ, предел числовой последовательности, предел функции, непрерывность функций, первый замечательный предел, второй замечательный предел, раскрытие неопределенностей

Печатается по решению редакционно-издательского совета Рязанского государственного радиотехнического университета им. В.Ф. Уткина.

Рецензент: кафедра высшей математики Рязанского государственного радиотехнического университета им. В.Ф. Уткина (зав. кафедрой канд. физ.-мат. наук, доц. К.В. Бухенский)

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие.....	4
Предел числовой последовательности.....	5
Предел функции	16
Неопределенность вида $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$	16
Неопределенность вида $\left(\frac{0}{0}\right)$	19
Первый замечательный предел и следствия из него.....	22
Второй замечательный предел.....	27
Непрерывность функции.....	31
Библиографический список.....	39

ПРЕДИСЛОВИЕ

Понятие предела является одним из базовых в математическом анализе, поэтому важно научиться вычислять пределы числовых последовательностей и функций, определять непрерывность функции и находить точки разрыва.

Данные методические указания содержат большое количество примеров, каждый из которых сопровождается подробным решением. Рассматриваются различные подходы к раскрытию неопределенностей, возникающих при вычислении пределов.

Методические указания ставят своей целью помочь студентам направления 11.03.04 «Электроника и наноэлектроника» в освоении темы «Пределы и непрерывность» и построены таким образом, что могут быть использованы как на практических занятиях, так и для самостоятельной работы студентов.

ПРЕДЕЛ ЧИСЛОВОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

Пример 1. Вычислить $\lim_{n \rightarrow 0} \frac{n^2 + 5n - 2}{n + 1}$.

Решение

Подставив предельное значение $n = 0$ в числитель и знаменатель дроби, получим значение предела

$$\lim_{n \rightarrow 0} \frac{n^2 + 5n - 2}{n + 1} = \frac{0 + 0 - 2}{0 + 1} = -2.$$

Ответ: -2.

Часто при вычислении пределов могут появляться выражения, значение которых не определено. Они называются неопределенностями. К основным видам неопределенностей относятся:

$$\left(\frac{\infty}{\infty}\right), \left(\frac{0}{0}\right), (0 \cdot \infty), (\infty - \infty), (1^\infty), (0^\infty), (\infty^0).$$

Раскрывать данные неопределенности позволяет преобразование выражений, стоящих под знаком предела, с помощью формул сокращенного умножения, вынесения общего множителя с последующим сокращением и др.

Далее будем использовать значения пределов числовых последовательностей:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} = 0, \dots, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^\alpha} = 0, \text{ где } \alpha = 1, 2, 3, \dots$$

Пример 2. Вычислить $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^3 + 3n^2 - 2n + 1}{3n^3 - 4n}$.

Решение

При $n \rightarrow \infty$ имеем неопределенность вида $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$. Для устранения неопределенности разделим числитель и знаменатель дроби на наивысшую степень, то есть в нашем случае на n^3 .

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^3 + 3n^2 - 2n + 1}{3n^3 - 4n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{5n^3 + 3n^2 - 2n + 1}{n^3}}{\frac{3n^3 - 4n}{n^3}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5 + \frac{3}{n} - \frac{2}{n^2} + \frac{1}{n^3}}{3 - \frac{4}{n^2}} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(5 + \frac{3}{n} - \frac{2}{n^2} + \frac{1}{n^3}\right)}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(3 - \frac{4}{n^2}\right)} = \\ &= \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} 5 + 3 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} - 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^3}}{\lim_{n \rightarrow \infty} 3 - 4 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2}} = \frac{5 + 3 \cdot 0 - 2 \cdot 0 + 1 \cdot 0}{3 - 4 \cdot 0} = \frac{5}{3}. \end{aligned}$$

Ответ: $\frac{5}{3}$.

Пример 3. Вычислить $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+3)^2 - (n-1)^2}{(2-3n)^2}$.

Решение

Имеем неопределенность вида $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$. Для устранения неопределенности применим формулы сокращенного

умножения, приведем подобные слагаемые, а затем разделим числитель и знаменатель на старшую степень.

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+3)^2 - (n-1)^2}{(2-3n)^2} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 6n + 9 - n^2 + 2n - 1}{4 - 12n + 9n^2} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8n + 8}{9n^2 - 12n + 4} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{8n + 8}{n^2}}{\frac{9n^2 - 12n + 4}{n^2}} = \\ &= \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{8}{n} + \frac{8}{n^2} \right)}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(9 - \frac{12}{n} + \frac{4}{n^2} \right)} = \frac{8 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} + 8 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2}}{\lim_{n \rightarrow \infty} 9 - 12 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} + 4 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2}} = \frac{0}{9} = 0.\end{aligned}$$

Ответ: 0.

Пример 4. Вычислить $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2)^3 - n^3}{(n+1)^2 - n^2}$.

Решение

Для устранения неопределенности $\left(\frac{\infty}{\infty} \right)$ применим формулы куба суммы и квадрата суммы, приведем подобные слагаемые и разделим числитель и знаменатель на старшую степень.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2)^3 - n^3}{(n+1)^2 - n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 + 6n^2 + 12n + 8 - n^3}{n^2 + 2n + 1 - n^2} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6n^2 + 12n + 8}{2n + 1} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} 6 + 12 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} + 8 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2}}{2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2}} = \frac{6}{0} = \infty.$$

Ответ: ∞ .

Пример 5 (общий случай).

Вычислить $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_k n^k + a_{k-1} n^{k-1} + \dots + a_1 n + a_0}{b_m n^m + b_{m-1} n^{m-1} + \dots + b_1 n + b_0}.$

Решение

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_k n^k + a_{k-1} n^{k-1} + \dots + a_1 n + a_0}{b_m n^m + b_{m-1} n^{m-1} + \dots + b_1 n + b_0} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right).$$

Рассмотрим 3 случая.

1. $k = m$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_k n^k + a_{k-1} n^{k-1} + \dots + a_1 n + a_0}{b_m n^k + b_{m-1} n^{k-1} + \dots + b_1 n + b_0} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{a_k n^k + a_{k-1} n^{k-1} + \dots + a_1 n + a_0}{n^k}}{\frac{b_m n^k + b_{m-1} n^{k-1} + \dots + b_1 n + b_0}{n^k}} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_k + \frac{a_{k-1}}{n} + \dots + \frac{a_1}{n^{k-1}} + \frac{a_0}{n^k}}{b_m + \frac{b_{m-1}}{n} + \dots + \frac{b_1}{n^{k-1}} + \frac{b_0}{n^k}} = \frac{a_k}{b_m}.$$

Таким образом, если старшие степени числителя и знаменателя равны, то предел равен отношению коэффициентов при старших степенях.

2. $k < m$. Разделим числитель и знаменатель на старшую степень, т.е. на n^m .

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_k n^k + a_{k-1} n^{k-1} + \dots + a_1 n + a_0}{b_m n^m + b_{m-1} n^{m-1} + \dots + b_1 n + b_0} &= \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{a_k n^k + a_{k-1} n^{k-1} + \dots + a_1 n + a_0}{n^m}}{\frac{b_m n^m + b_{m-1} n^{m-1} + \dots + b_1 n + b_0}{n^m}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{a_k}{n^{m-k}} + \frac{a_{k-1}}{n^{m-k+1}} + \dots + \frac{a_1}{n^{m-1}} + \frac{a_0}{n^m}}{b_m + \frac{b_{m-1}}{n} + \dots + \frac{b_1}{n^{m-1}} + \frac{b_0}{n^m}} = \frac{0}{b_m} = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, если старшая степень числителя меньше старшей степени знаменателя, то предел равен 0.

3. $k > m$. Разделим числитель и знаменатель на старшую степень, т.е. на n^k .

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_k n^k + a_{k-1} n^{k-1} + \dots + a_1 n + a_0}{b_m n^m + b_{m-1} n^{m-1} + \dots + b_1 n + b_0} &= \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{a_k n^k + a_{k-1} n^{k-1} + \dots + a_1 n + a_0}{n^k}}{\frac{b_m n^m + b_{m-1} n^{m-1} + \dots + b_1 n + b_0}{n^k}} = \end{aligned}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_k + \frac{a_{k-1}}{n} + \dots + \frac{a_1}{n^{k-1}} + \frac{a_0}{n^k}}{\frac{b_m}{n^{k-m}} + \frac{b_{m-1}}{n^{k-m+1}} + \dots + \frac{b_1}{n^{k-1}} + \frac{b_0}{n^k}} = \frac{a_k}{0} = \infty.$$

Таким образом, если старшая степень числителя больше старшей степени знаменателя, то предел равен ∞ .

В дальнейшем для вычисления предела будем пользоваться данным выводом:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_k n^k + a_{k-1} n^{k-1} + \dots + a_1 n + a_0}{b_m n^m + b_{m-1} n^{m-1} + \dots + b_1 n + b_0} = \begin{cases} \frac{a_k}{b_m}, & \text{если } k = m, \\ 0, & \text{если } k < m, \\ \infty, & \text{если } k > m. \end{cases}$$

Пример 6. Вычислить $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n(n-2)} - \sqrt{n^2 - 3}$.

Решение

При $n \rightarrow \infty$ выражение, стоящее под знаком предела, дает неопределенность вида $(\infty - \infty)$. Для раскрытия неопределенности необходимо избавиться от радикалов. Умножим и разделим выражение, стоящее под знаком предела, на сопряженное к нему, то есть $\sqrt{n(n-2)} + \sqrt{n^2 - 3}$. Затем в числителе воспользуемся формулой разности квадратов: $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n(n-2)} - \sqrt{n^2 - 3} = (\infty - \infty) =$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n(n-2)} - \sqrt{n^2-3})(\sqrt{n(n-2)} + \sqrt{n^2-3})}{\sqrt{n(n-2)} + \sqrt{n^2-3}} = \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n-2) - n^2 + 3}{\sqrt{n(n-2)} + \sqrt{n^2-3}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - 2n - n^2 + 3}{\sqrt{n(n-2)} + \sqrt{n^2-3}} = \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-2n + 3}{\sqrt{n(n-2)} + \sqrt{n^2-3}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{-2n+3}{n}}{\frac{\sqrt{n(n-2)}}{n} + \frac{\sqrt{n^2-3}}{n}} = \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-2 + \frac{3}{n}}{\sqrt{\frac{n^2-2n}{n^2}} + \sqrt{\frac{n^2-3}{n^2}}} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(-2 + \frac{3}{n}\right)}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{1 - \frac{2}{n}} + \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{1 - \frac{3}{n^2}}} = -2.
\end{aligned}$$

Ответ: -2.

Пример 7. Вычислить $\lim_{n \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+n^2}-1}{n}$.

Решение

Выражение, стоящее под знаком предела при $n \rightarrow 0$, дает неопределенность вида $\left(\frac{0}{0}\right)$. Для ее устранения умножим числитель и знаменатель дроби на выражение, сопряженное числителю, то есть $\sqrt{1+n^2}+1$.

$$\lim_{n \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+n^2}-1}{n} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{n \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1+n^2}-1)(\sqrt{1+n^2}+1)}{n(\sqrt{1+n^2}+1)} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow 0} \frac{1+n^2-1}{n(\sqrt{1+n^2}+1)} = \lim_{n \rightarrow 0} \left(\frac{n}{\sqrt{1+n^2}+1} \right) = \frac{0}{\sqrt{1+0}+1} = \frac{0}{2} = 0.$$

Ответ: 0.

Пример 8. Вычислить $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)!-n!}{n!+(n+1)!}$.

Решение

Выразим факториал $(n+1)!$ через $n!$:

$$(n+1)! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n \cdot (n+1) = n! \cdot (n+1).$$

Тогда

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)!-n!}{n!+(n+1)!} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! \cdot (n+1) - n!}{n! + n! \cdot (n+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n![(n+1)-1]}{n![1+(n+1)]} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+2} = 1. \end{aligned}$$

Ответ: 1.

Пример 9. Вычислить $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2(n-1)!-(n+1)!}{n!+(n-1)!}$.

Решение

Для раскрытия неопределенности $\left(\frac{\infty}{\infty} \right)$ выразим

факториалы в числителе и знаменателе дроби через факториал с наименьшим номером, то есть через $(n-1)!$:

$$(n+1)! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n \cdot (n+1) = (n-1)! \cdot n \cdot (n+1).$$

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n = (n-1)! \cdot n.$$

Получаем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2(n-1)! - (n+1)!}{n! + (n-1)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2(n-1)! - (n-1)! \cdot n \cdot (n+1)}{(n-1)! \cdot n + (n-1)!}.$$

Вынесем за скобки общий множитель $(n-1)!$ и сократим на него:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2(n-1)! - (n-1)! \cdot n \cdot (n+1)}{(n-1)! \cdot n + (n-1)!} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-1)! [2 - n \cdot (n+1)]}{(n-1)! [n + 1]} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 - n \cdot (n+1)}{n + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 - n^2 - n}{n + 1} = \infty. \end{aligned}$$

Ответ: ∞ .

Пример 10. Вычислить предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^n + 3^{n+1}}{5^{n+1} - 3^n}$.

Решение

Для раскрытия неопределенности $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ вынесем в числителе и знаменателе за скобки показательное выражение с наибольшим основанием, то есть 5^n , и затем сократим на него.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^n + 3^{n+1}}{5^{n+1} - 3^n} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^n + 3^n \cdot 3}{5^n \cdot 5 - 3^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^n \cdot \left(1 + 3 \left(\frac{3}{5}\right)^n\right)}{5^n \cdot \left(5 - \left(\frac{3}{5}\right)^n\right)} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 3\left(\frac{3}{5}\right)^n}{5 - \left(\frac{3}{5}\right)^n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} 1 + 3 \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{5}\right)^n}{\lim_{n \rightarrow \infty} 5 - \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{5}\right)^n} = \frac{1 + 0}{5 - 0} = \frac{1}{5}.$$

При решении учли, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{5}\right)^n = 0$, так как числовая

последовательность с общим членом $a_n = q^n = \left(\frac{3}{5}\right)^n$ является бесконечно малой.

Ответ: $\frac{1}{5}$.

Пример 11. Вычислить предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{5n}$.

Решение

Для устранения неопределенности вида (1^∞) воспользуемся

определением числа e : $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$.

Предварительно преобразуем степень. Возведем выражение $\left(1 + \frac{1}{2n}\right)$ в степень $2n$ и обратную ей: $\frac{1}{2n}$. Так как $2n \cdot \frac{1}{2n} = 1$, то данное преобразование не повлияет на результат.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{5n} = (1^\infty) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{\frac{2n}{2n} \cdot 5n} = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{2n} \right)^{\frac{5}{2}} = e^{\frac{5}{2}}.$$

Ответ: $e^{\frac{5}{2}}$.

Пример 12. Вычислить предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+3}{n+2} \right)^{5n}$.

Решение

Выражение, стоящее под знаком предела, при $n \rightarrow \infty$ дает неопределенность вида (1^∞) . Для ее устранения представим основание степени в виде суммы единицы и бесконечно малой величины

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+3}{n+2} \right)^{5n} = (1^\infty) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n+2} \right)^{5n}.$$

Преобразуем степень. Возведем выражение $\left(1 + \frac{1}{n+2} \right)$ в степень $(n+2)$, а затем в степень, обратную данной, т.е. $\frac{1}{n+2}$ (таким образом, их произведение даст единицу и преобразования не повлияют на результат).

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n+2} \right)^{5n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n+2} \right)^{(n+2) \cdot \frac{1}{n+2} \cdot 5n}.$$

Затем воспользуемся определением числа e :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = e.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n+2} \right)^{(n+2) \cdot \frac{1}{n+2} \cdot 5n} = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n+2} \right)^{n+2} \right)^{\frac{5n}{n+2}} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n}{n+2}} = e^5.$$

Ответ: e^5 .

ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ

Пример 1. Вычислить $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x-3}{\sqrt{x^3+9}}$.

Решение

Подставим предельное значение, т.е. $x=0$, в функцию, стоящую под знаком предела.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x-3}{\sqrt{x^3+9}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5 \cdot 0 - 3}{\sqrt{0^3+9}} = \frac{-3}{3} = -1.$$

Ответ: -1.

Рассмотрим примеры, когда подстановка предельного значения приводит к неопределенности.

В дальнейшем будем учитывать, что функции $\frac{1}{x}, \frac{1}{x^2}, \dots, \frac{1}{x^n}$ являются бесконечно-малыми, то есть

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0, \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2} = 0, \dots, \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^n} = 0.$$

Неопределенность вида $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$

Пример 2. Вычислить $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 2x + 1}{4x^2 - x + 2}$.

Решение

При подстановке $x = \infty$ в функцию получим неопределенность вида $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$. Для ее устранения разделим

числитель и знаменатель дроби на наивысшую степень, то есть в нашем случае на x^2 .

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 2x + 1}{4x^2 - x + 2} &= \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{3x^2 - 2x + 1}{x^2}}{\frac{4x^2 - x + 2}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{3x^2}{x^2} - \frac{2x}{x^2} + \frac{1}{x^2}}{\frac{4x^2}{x^2} - \frac{x}{x^2} + \frac{2}{x^2}} = \\ &= \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} \left(3 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} \right)}{\lim_{x \rightarrow \infty} \left(4 - \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} \right)} = \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} 3 - 2 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2}}{\lim_{x \rightarrow \infty} 4 - \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} + 2 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2}} = \frac{3 - 0 + 0}{4 - 0 + 0} = \frac{3}{4}.\end{aligned}$$

Ответ: $\frac{3}{4}$.

Пример 3. Вычислить $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^2 - 3x + 2}{2x^3 + 5x^2 + 1}$.

Решение

Для раскрытия неопределенности $\left(\frac{\infty}{\infty} \right)$, которая получается при подстановке предельного значения в функцию, разделим числитель и знаменатель на старшую степень, т.е. на x^3 .

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^2 - 3x + 2}{2x^3 + 5x^2 + 1} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{7x^2 - 3x + 2}{x^3}}{\frac{2x^3 + 5x^2 + 1}{x^3}} =$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{7}{x} - \frac{3}{x^2} + \frac{2}{x^3} \right)}{\lim_{x \rightarrow \infty} \left(2 + \frac{5}{x} + \frac{1}{x^3} \right)} = \frac{7 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} - 3 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2} + 2 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^3}}{\lim_{x \rightarrow \infty} 2 + 5 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^3}} = \\
 &= \frac{0 - 0 + 0}{2 + 0 + 0} = \frac{0}{2} = 0.
 \end{aligned}$$

Ответ: 0.

Пример 4. Вычислить $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 3x + 1}{x + 1}$.

Решение

Для устранения неопределенности $\left(\frac{\infty}{\infty} \right)$ разделим числитель и знаменатель на x^2 .

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 3x + 1}{x + 1} &= \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2x^2 + 3x + 1}{x^2}}{\frac{x + 1}{x^2}} = \\
 &= \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} 2 + 3 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2}}{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2}} = \frac{2 + 0 + 0}{0 + 0} = \left[\frac{2}{0} \right] = \infty.
 \end{aligned}$$

Запись $\left[\frac{2}{0} \right]$ подразумевает деление не на ноль, а на бесконечно малое число.

Ответ: ∞ .

Таким образом, при раскрытии неопределенности вида $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ возможны 3 случая:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_k x^k + a_{k-1} x^{k-1} + \dots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0} = \begin{cases} a_k / b_m, & \text{если } k = m, \\ 0, & \text{если } k < m, \\ \infty, & \text{если } k > m. \end{cases}$$

Неопределенность вида $\left(\frac{0}{0}\right)$

Пример 5. Вычислить $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 - x}$.

Решение

При подстановке $x = 1$ в функцию, стоящую под знаком предела, получим неопределенность вида $\left(\frac{0}{0}\right)$. Многочлены

$x^2 + 2x - 3$ и $x^2 - x$ обращаются в ноль в точке $x = 1$, то есть содержат множитель $x - 1$. Для устранения неопределенности разложим числитель и знаменатель дроби на простейшие множители, выделив общий множитель $x - 1$.

$$x^2 + 2x - 3 = (x - 1)(x + 3),$$

$$x^2 - x = x(x - 1).$$

Сократив дробь на $x - 1$ и подставив предельное значение $x = 1$, получим ответ.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 - x} = \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+3)}{x(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+3}{x} = \frac{4}{1} = 4.$$

Ответ: 4.

Пример 6. Вычислить $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x^3 + 3x^2 + x + 6}{x^3 + 8}.$

Решение

При подстановке предельного значения в числитель и знаменатель дроби, получаем неопределенность $\left(\frac{0}{0} \right)$. То есть

$x = -2$ является корнем данных многочленов, и они делятся на $(x + 2)$ без остатка. Разделим числитель столбиком на $(x + 2)$, а знаменатель разложим по формуле суммы кубов.

$$\begin{array}{r|l} 2x^3 + 3x^2 + x + 6 & x + 2 \\ \hline 2x^3 + 4x^2 & 2x^2 - x + 3 \\ \hline -x^2 + x & \\ \hline -x^2 - 2x & \\ \hline 3x + 6 & \\ \hline 3x + 6 & \\ \hline 0, & \end{array}$$

$$2x^3 + 3x^2 + x + 6 = (x + 2)(2x^2 - x + 3),$$

$$x^3 + 8 = (x + 2)(x^2 - 4x + 4).$$

Затем в пределе сократим на общий множитель $(x + 2)$ и тем самым избавимся от неопределенности.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x^3 + 3x^2 + x + 6}{x^3 + 8} &= \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x+2)(2x^2 - x + 3)}{(x+2)(x^2 - 4x + 4)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x^2 - x + 3}{x^2 - 4x + 4} = \frac{8 + 2 + 3}{4 + 8 + 4} = \frac{13}{16}.\end{aligned}$$

Ответ: $\frac{13}{16}$.

Пример 7. Вычислить $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+7} - 3}{x - 2}$.

Решение

Для раскрытия неопределенности $\left(\frac{0}{0} \right)$ необходимо избавиться от радикалов. Применим метод сопряженных выражений. Умножим и разделим дробь, стоящую под знаком предела, на выражение, сопряженное к числителю, то есть $\sqrt{x+7} + 3$. Затем в числителе воспользуемся формулой разности квадратов $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+7} - 3}{x - 2} &= \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(\sqrt{x+7} - 3)(\sqrt{x+7} + 3)}{(x-2)(\sqrt{x+7} + 3)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x + 7 - 9}{(x-2)(\sqrt{x+7} + 3)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{\sqrt{x+7} + 3} = \frac{1}{6}.\end{aligned}$$

Ответ: $\frac{1}{6}$.

Пример 8. Вычислить $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2 - \sqrt{x+3}}{\sqrt{x} - 1}$.

Решение

Для устранения неопределенности применим метод сопряженных выражений к числителю (умножим и разделим дробь на выражение $2 + \sqrt{x+3}$) и к знаменателю (умножим и разделим дробь на выражение $\sqrt{x} + 1$).

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2 - \sqrt{x+3}}{\sqrt{x} - 1} &= \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(2 - \sqrt{x+3})(2 + \sqrt{x+3})}{(\sqrt{x} - 1)(2 + \sqrt{x+3})} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{4 - x - 3}{(\sqrt{x} - 1)(2 + \sqrt{x+3})} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(1-x)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x}+1)(2 + \sqrt{x+3})} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-(x-1)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)(2 + \sqrt{x+3})} = - \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x}+1}{2 + \sqrt{x+3}} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Ответ: $\frac{1}{2}$.

Первый замечательный предел и следствия из него

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$	$\lim_{\alpha(x) \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha(x)}{\alpha(x)} = 1$
$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$	$\lim_{\alpha(x) \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} \alpha(x)}{\alpha(x)} = 1$
$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1$	$\lim_{\alpha(x) \rightarrow 0} \frac{\arcsin \alpha(x)}{\alpha(x)} = 1$
$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1$	$\lim_{\alpha(x) \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} \alpha(x)}{\alpha(x)} = 1$

Пример 9. Вычислить $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\operatorname{tg} 5x}$.

Решение

Для устранения неопределенности $\left(\frac{0}{0}\right)$ воспользуемся первым замечательным пределом. В числителе стоит выражение $\sin 2x$, для того, чтобы «подогнать» его под замечательный предел, необходимо разделить его на $2x$. А чтобы преобразование не повлияло на результат, т.е. было тождественным, необходимо умножить выражение на $2x$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\operatorname{tg} 5x} &= \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \cdot \sin 2x}{2x \cdot \operatorname{tg} 5x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{2x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{\operatorname{tg} 5x} = \\ &= 1 \cdot 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\operatorname{tg} 5x} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\operatorname{tg} 5x}. \end{aligned}$$

Рассуждая аналогичным образом, умножим числитель и знаменатель дроби на 5.

$$2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\operatorname{tg} 5x} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5 \cdot x}{5 \cdot \operatorname{tg} 5x} = \frac{2}{5} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x}{\operatorname{tg} 5x} = \frac{2}{5} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\operatorname{tg} 5x}{5x}} = \frac{2}{5}.$$

Ответ: $\frac{2}{5}$.

Пример 10. Вычислить $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\arcsin(x-2)}{x^2-4}$.

Решение

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\arcsin(x-2)}{x^2-4} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\arcsin(x-2)}{(x-2)(x+2)}.$$

Чтобы воспользоваться первым замечательным пределом, необходимо сделать замену переменной таким образом, чтобы новая переменная стремилась к нулю.

Пусть $t = x - 2$. Так как $x \rightarrow 2$, то $t \rightarrow 0$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\arcsin(x-2)}{(x-2)(x+2)} &= \left(\frac{0}{0} \right) = \left| \begin{array}{l} t = x - 2, \\ t \rightarrow 0 \end{array} \right| = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\arcsin t}{t(t+4)} = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\arcsin t}{t} \cdot \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t+4} = 1 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Ответ: $\frac{1}{4}$.

Пример 11. Вычислить $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x - \sin 3x}{\sin x}$.

Решение

Подстановка предельного значения дает неопределенность вида $\left(\frac{0}{0} \right)$, для устранения которой в числителе дроби применим формулу разности синусов:

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}.$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x - \sin 3x}{\sin x} &= \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cos 5x \sin 2x}{\sin x} = \\ &= 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 5x \sin 2x}{\sin x} \cdot \frac{2x}{2x} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{2x} \cdot \frac{x}{\sin x} \cdot \frac{2 \cos 5x}{1} = \\ &= 4 \lim_{x \rightarrow 0} \cos 5x = 4 \cdot \cos 0 = 4. \end{aligned}$$

Ответ: 4.

Пример 12. Вычислить $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{x}$.

Решение

Для устранения неопределенности $\left(\frac{0}{0}\right)$ воспользуемся

формулой тригонометрии: $1 - \cos \alpha = 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{x^2} &= \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 2x}{x^2} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 2x}{x^2} \cdot \frac{4}{4} = \\ &= 8 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin 2x)^2}{(2x)^2} = 8 \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 2x}{2x}\right)^2 = 8. \end{aligned}$$

Ответ: 8.

На практике для раскрытия неопределенности $\left(\frac{0}{0}\right)$ удобнее использовать эквивалентные бесконечно малые функции.

При $\alpha(x) \rightarrow 0$:

$$\sin \alpha(x) \sim \alpha(x),$$

$$\arcsin \alpha(x) \sim \alpha(x),$$

$$\operatorname{tg} \alpha(x) \sim \alpha(x),$$

$$\operatorname{arctg} \alpha(x) \sim \alpha(x),$$

$$1 - \cos \alpha(x) \sim \frac{\alpha^2(x)}{2},$$

$$e^{\alpha(x)} - 1 \sim \alpha(x),$$

$$a^{\alpha(x)} - 1 \sim \alpha(x) \ln a,$$

$$\ln(1 + \alpha(x)) \sim \alpha(x),$$

$$(1 + \alpha(x))^m - 1 \sim m\alpha(x).$$

Пример 13. Вычислить $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 3x}{\ln(1 + 5x)}$.

Решение

При $x \rightarrow 0$ в пределе имеем неопределенность вида $\left(\frac{0}{0}\right)$,

для раскрытия которой воспользуемся эквивалентностями:
 $\arcsin 3x \sim 3x$, $\ln(1+5x) \sim 5x$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 3x}{\ln(1+5x)} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{5x} = \frac{3}{5}.$$

Ответ: $\frac{3}{5}$.

Пример 14. Вычислить $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos \sqrt{x}}{5x}$.

Решение

Для раскрытия неопределенности применим

эквивалентности: $1 - \cos \sqrt{x} \sim \frac{(\sqrt{x})^2}{2} = \frac{x}{2}$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos \sqrt{x}}{5x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x}{2}}{5x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{10x} = \frac{1}{10}.$$

Ответ: $\frac{1}{10}$.

Пример 15. Вычислить $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^2}$.

Решение

Если в числителе или знаменателе дроби, стоящей под знаком предела, стоит сумма (разность) бесконечно малых

функций, то в данном случае нельзя заменять отдельные слагаемые эквивалентными функциями, так как это приведет к неверному результату.

В числителе вынесем $\sin x$ за скобку, а затем применим эквивалентности.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^2} &= \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin x}{\cos x} - \sin x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x \left(\frac{1}{\cos x} - 1 \right)}{x^2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x \left(\frac{1 - \cos x}{\cos x} \right)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x (1 - \cos x)}{x^2 \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \frac{x^2}{2}}{x^2 \cos x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{2 \cos x} = \frac{0}{2} = 0.\end{aligned}$$

Ответ: 0.

Второй замечательный предел

$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x = e$	$\lim_{\alpha(x) \rightarrow 0} \left(1 + \alpha(x) \right)^{\frac{1}{\alpha(x)}} = e$
--	---

Пример 16. Вычислить $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2}{x-1} \right)^x$.

Решение

Выражение, стоящее под знаком предела, при $x \rightarrow \infty$ является неопределенностью вида (1^∞) . Для ее устранения сначала представим основание степени в виде суммы единицы и бесконечно малой величины $\alpha(x)$.

$$\frac{x+2}{x-1} = \frac{x-1+3}{x-1} = 1 + \frac{3}{x-1},$$

$$\alpha(x) = \frac{3}{x-1}, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \alpha(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3}{x-1} = \left(\frac{3}{\infty} \right) = 0.$$

Тогда получим

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2}{x-1} \right)^x = (1^\infty) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{x-1} \right)^x.$$

Чтобы воспользоваться формулой второго замечательного предела, возведем выражение $\left(1 + \frac{3}{x-1} \right)$ в степень $\frac{x-1}{3}$ и в степень, обратную данной $\frac{3}{x-1}$. Тогда преобразования не повлияют на результат, так как их произведение даст единицу.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{x-1} \right)^x &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{x-1} \right)^{\frac{x-1}{3} \cdot \frac{3}{x-1} \cdot x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{3}{x-1} \right)^{\frac{x-1}{3}} \right)^{\frac{3x}{x-1}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{3x}{x-1}} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x}{x-1}} = e^3. \end{aligned}$$

Ответ: e^3 .

Пример 17. Вычислить $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^2+1}{2x^2-3} \right)^{x^2+1}$.

Решение

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^2 + 1}{2x^2 - 3} \right)^{x^2 + 1} &= (1^\infty) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^2 - 3 + 4}{2x^2 - 3} \right)^{x^2 + 1} = \\
&= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{4}{2x^2 - 3} \right)^{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{4}{2x^2 - 3} \right)^{\frac{2x^2 - 3}{4} \cdot \frac{4}{2x^2 - 3} \cdot x^2 + 1} = \\
&= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{4}{2x^2 - 3} \right)^{\frac{2x^2 - 3}{4}} \right)^{\frac{4}{2x^2 - 3} \cdot x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{4}{2x^2 - 3} \cdot x^2 + 1} = \\
&= e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4(x^2 + 1)}{2x^2 - 3}} = e^2.
\end{aligned}$$

Ответ: e^2 .**Пример 18.** Вычислить $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 1}{x^2 - 3x} \right)^{-x}$.**Решение**

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 1}{x^2 - 3x} \right)^{x-5} &= (1^\infty) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 3x + 3x + 1}{x^2 - 3x} \right)^{x-5} = \\
&= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3x + 1}{x^2 - 3x} \right)^{x-5} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3x + 1}{x^2 - 3x} \right)^{\frac{x^2 - 3x}{3x + 1} \cdot \frac{3x + 1}{x^2 - 3x} \cdot (x-5)} =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{3x+1}{x^2-3x} \right)^{\frac{x^2-3x}{3x+1}} \right)^{\frac{3x+1}{x^2-3x} \cdot (x-5)} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{(3x+1)(x-5)}{x^2-3x}} = \\
&= e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2+16x+5}{x^2-3x}} = e^3.
\end{aligned}$$

Ответ: e^3 .

Пример 19. Вычислить $\lim_{x \rightarrow 0} \cos 2x^{\frac{1}{\sin^2 x}}$.

Решение

При подстановке предельного значения получаем неопределенность вида (1^∞) . В основании степени выделим единицу и бесконечно малую величину, а затем воспользуемся формулой для косинуса двойного угла: $\cos 2x = 1 - 2 \sin^2 x$.

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 0} \cos 2x^{\frac{1}{\sin^2 x}} &= (1^\infty) = \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \cos 2x - 1)^{\frac{1}{\sin^2 x}} = \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} (1 + 1 - 2 \sin^2 x - 1)^{\frac{1}{\sin^2 x}} = \lim_{x \rightarrow 0} (1 + (-2 \sin^2 x))^{\frac{1}{\sin^2 x}}.
\end{aligned}$$

Умножим и разделим степень на (-2) , а затем воспользуемся формулой второго замечательного предела.

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + (-2 \sin^2 x))^{\frac{1}{\sin^2 x}} = \lim_{x \rightarrow 0} (1 + (-2 \sin^2 x))^{\frac{1}{-2 \sin^2 x} \cdot (-2)} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{-2} = e^{-2}.$$

Ответ: e^{-2} .

НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ

Если $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$, то функция $f(x)$ называется непрерывной в точке x_0 .

Если $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) = f(x_0)$, то функция непрерывна в точке x_0 .

Если нарушается хотя бы одно равенство, то функция не является непрерывной. В этом случае x_0 называется точкой разрыва.

x_0 – точка разрыва первого рода, если она не является точкой непрерывности и левый и правый пределы существуют и конечны.

Если по крайней мере один из пределов равен $\pm\infty$ или не существует, то x_0 – точка разрыва второго рода.

Среди точек первого рода выделим точки устранимого разрыва:

$$f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) \neq f(x_0).$$

Пример 1. Найти и исследовать точки разрыва функции

$$f(x) = e^{\frac{1}{x-3}}.$$

Решение

Область определения функции $D(f) = (-\infty, 3) \cup (3, +\infty)$.

Функция $f(x)$ элементарная, следовательно, непрерывна на своей области определения.

Функция $f(x)$ не определена в точке $x_0 = 3$, таким образом, $x_0 = 3$ – точка разрыва. Определим ее тип.

Вычислим односторонние пределы функции $f(x)$ в данной точке.

$$f(x_0 + 0) = \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3 + 0} e^{\frac{1}{x-3}} = \left[e^{\frac{1}{3+0-3}} \right] = \left[e^{\frac{1}{+0}} \right] = [e^{+\infty}] = +\infty.$$

$$f(x_0 - 0) = \lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3 - 0} e^{\frac{1}{x-3}} = \left[e^{\frac{1}{3-0-3}} \right] = \left[e^{\frac{1}{-0}} \right] = [e^{-\infty}] = 0.$$

Левосторонний и правосторонний пределы функции не равны, кроме того, правосторонний предел равен $+\infty$, следовательно, $x_0 = 3$ – точка разрыва второго рода.

Ответ: $x_0 = 3$ – точка разрыва второго рода.

Пример 2. Найти и исследовать точки разрыва функции

$$f(x) = \begin{cases} \cos x, & x \leq \frac{\pi}{2}, \\ \frac{1}{x - \frac{\pi}{2}}, & x > \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Решение

Область определения функции $D(f) = (-\infty, +\infty)$. На каждом из промежутков $x \leq \frac{\pi}{2}$, $x > \frac{\pi}{2}$ функция $f(x)$ непрерывна. Разрыв может быть только на стыке промежутков. Таким образом, $x_0 = \frac{\pi}{2}$ – точка, подозрительная на разрыв.

Найдем односторонние пределы функции $f(x)$ в данной точке.

$$f(x_0 + 0) = \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2} + 0} \frac{1}{x - \frac{\pi}{2}} = \left[\frac{1}{+0} \right] = +\infty,$$

$$f(x_0 - 0) = \lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2} - 0} \cos x = 0.$$

Лево- и правосторонний пределы не равны, кроме того, правосторонний предел равен $+\infty$, следовательно, $x_0 = \frac{\pi}{2}$ – точка разрыва функции второго рода.

Ответ: $x_0 = \frac{\pi}{2}$ – точка разрыва функции второго рода.

Пример 3. Исследовать функцию $f(x) = \begin{cases} x+1, & x < 1, \\ x^2-1, & x \geq 1 \end{cases}$ на непрерывность, сделать чертеж.

Решение

Область определения функции $D(f) = (-\infty, +\infty)$. Функция состоит из элементарных функций, каждая из которых непрерывна на заданном для нее промежутке. Разрыв может быть только на стыке промежутков. Таким образом, $x_0 = 1$ – точка, подозрительная на разрыв.

Найдем односторонние пределы функции в данной точке.

$$f(x_0 + 0) = \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1 + 0} (x + 1) = 2,$$

$$f(x_0 - 0) = \lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1 - 0} (x^2 - 1) = 0.$$

Лево- и правосторонний пределы не равны, но конечны, следовательно, $x_0 = 1$ – точка разрыва первого рода.

Для построения графика функции проверим наличие горизонтальных асимптот. Для этого найдем пределы функции $f(x)$ при $x \rightarrow +\infty$ и $x \rightarrow -\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - 1) = +\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x + 1) = -\infty.$$

Оба предела не конечны, следовательно, функция не имеет горизонтальных асимптот.

График функции представлен на рис. 1.

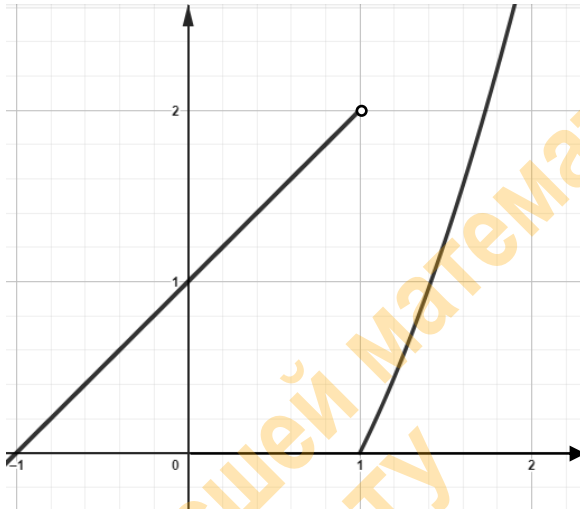


Рис. 1. График функции $f(x) = \begin{cases} x+1, & x < 1, \\ x^2-1, & x \geq 1 \end{cases}$

Ответ: $x_0 = 1$ – точка разрыва первого рода.

Пример 4. Исследовать функцию $f(x) = 2^{\frac{1}{x-1}} - 1$ на непрерывность, сделать схематичный чертёж.

Решение

Область определения функции $D(f) = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$. Функция элементарная, следовательно, непрерывна на своей области определения. Точка $x_0 = 1$, в которой функция не определена, является точкой разрыва. Определим ее тип.

Вычислим односторонние пределы функции в данной точке.

$$\begin{aligned}
 f(x_0 + 0) &= \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1 + 0} \left(2^{\frac{1}{x-1}} - 1 \right) = \lim_{x \rightarrow 1 + 0} 2^{\frac{1}{x-1}} - 1 = \\
 &= \left[2^{\frac{1}{1+0-1}} \right] - 1 = \left[2^{\frac{1}{+0}} \right] - 1 = \left[2^{+\infty} \right] - 1 = +\infty.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f(x_0 - 0) &= \lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1 - 0} \left(2^{\frac{1}{x-1}} - 1 \right) = \lim_{x \rightarrow 1 - 0} 2^{\frac{1}{x-1}} - 1 = \\
 &= \left[2^{\frac{1}{1-0-1}} \right] - 1 = \left[2^{\frac{1}{-0}} \right] - 1 = \left[2^{-\infty} \right] - 1 = 0 - 1 = -1.
 \end{aligned}$$

Левосторонний и правосторонний пределы не равны, кроме того, правосторонний предел равен $+\infty$, следовательно, $x_0 = 1$ – точка разрыва функции второго рода. При этом $x = 1$ – вертикальная асимптота для графика функции $f(x)$.

Проверим наличие горизонтальных асимптот. Для этого найдем пределы функции $f(x)$ при $x \rightarrow +\infty$ и $x \rightarrow -\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2^{\frac{1}{x-1}} - 1 \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2^{\frac{1}{x-1}} - 1 = 2^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x-1}} - 1 = 2^0 - 1 = 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(2^{\frac{1}{x-1}} - 1 \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2^{\frac{1}{x-1}} - 1 = 2^{\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x-1}} - 1 = 2^0 - 1 = 0.$$

Оба предела конечны и равны между собой, следовательно, $y = 0$ – горизонтальная асимптота для графика функции $f(x)$.

Выполним чертеж (рис.2).

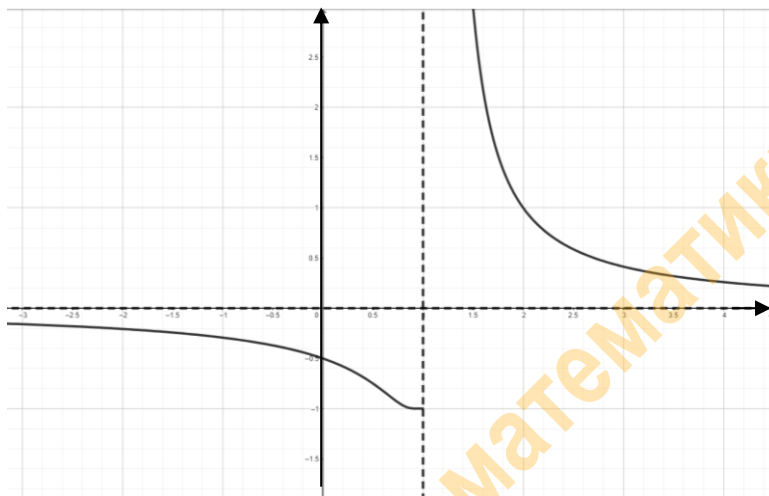


Рис. 2. График функции $f(x) = 2^{\frac{1}{x-1}} - 1$

Ответ: $x_0 = 1$ – точка разрыва второго рода.

Пример 5. Исследовать функцию $f(x)$ на непрерывность, сделать чертеж.

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 0, \\ \sin x, & 0 \leq x < 1, \\ \frac{2}{x+1}, & x \geq 1. \end{cases}$$

Решение

На каждом из промежутков $x < 0$, $0 \leq x < 1$, $x \geq 1$ функция непрерывна. Разрыв может быть только на стыке промежутков, то есть в точках $x_0 = 0$ и $x_0 = 1$.

Таким образом, $x_0 = 0$ и $x_0 = 1$ – точки, подозрительные на разрыв.

Найдем односторонние пределы функции $f(x)$ в точке $x_0 = 0$.

$$f(x_0 + 0) = \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0 + 0} \sin x = 0,$$

$$f(x_0 - 0) = \lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0 - 0} x^2 = 0.$$

Односторонние пределы в точке $x_0 = 0$ равны. Кроме того, $f(x_0) = f(0) = \sin 0 = 0$. Следовательно, функция $f(x)$ непрерывна в точке $x_0 = 0$.

Найдем односторонние пределы функции $f(x)$ в точке $x_0 = 1$.

$$f(x_0 + 0) = \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1 + 0} \frac{2}{x + 1} = 1,$$

$$f(x_0 - 0) = \lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1 - 0} \sin x = \sin 1 \approx 0,84.$$

Левосторонний и правосторонний пределы в точке $x_0 = 1$ не равны, но конечны, следовательно, $x_0 = 1$ – точка разрыва первого рода.

Проверим наличие горизонтальных асимптот. Найдем пределы функции $f(x)$ при $x \rightarrow +\infty$ и $x \rightarrow -\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x + 1} = 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty.$$

При $x \rightarrow +\infty$ предел функции существует и конечен, следовательно, $y = 0$ – горизонтальная асимптота для графика функции $f(x)$.

Построим график функции $f(x)$ (рис.3.).

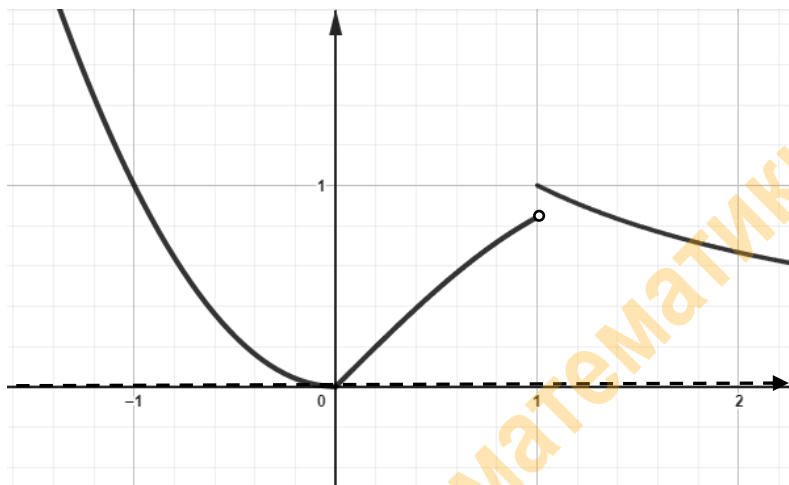


Рис. 3. График функции $f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 0, \\ \sin x, & 0 \leq x < 1, \\ \frac{2}{x+1}, & x \geq 1 \end{cases}$

Ответ: $x_0 = 1$ – точка разрыва первого рода.

Библиографический список

1. Бухенский К.В. Опорные конспекты по высшей математике: учеб. пособие. Ч. 1. – Рязань: РГРТУ, 2010.
2. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления: В 3 т. Т. 1 / Г.М. Фихтенгольц. — М.: Наука, 1970. — 608 с.
3. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа/ Г.Н. Берман. — М.: Наука, 1985. — 384 с.

Пределы и непрерывность

Составители: Кострова Юлия Сергеевна
Богатова Светлана Викторовна

Редактор Р.К. Мангутова
Корректор С.В. Макушина

Подписано в печать 20.05.23. Формат бумаги 60x84 1/16.

Бумага писчая. Печать трафаретная. Усл. печ. л. 2,5.

Тираж 20 экз. Заказ

Рязанский государственный радиотехнический университет.

390005, Рязань, ул. Гагарина, 59/1.

Редакционно-издательский центр РГРТУ.