

**Всероссийская студенческая физико-математическая олимпиада
имени Георгия Николаевича Шуппе
Рязанский государственный радиотехнический университет им. В.Ф. Уткина
8-10 апреля 2022 года**

Задача 1. Вычислите предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n \det A}{B}$, где $\det A$ – определитель матрицы n -го порядка

$$a_{ij} = |i^2 - j^2|, \quad B = \prod_{k=1}^{n+2} (4k-2).$$

Решение.

$$\det A = \begin{vmatrix} 1-1 & 4-1 & 9-1 & \dots & n^2-1 \\ 4-1 & 4-4 & 9-4 & \dots & n^2-4 \\ 9-1 & 9-4 & 9-9 & \dots & n^2-9 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ n^2-1 & n^2-4 & n^2-9 & \dots & n^2-n^2 \end{vmatrix}.$$

Вычтем из первой строки вторую, из второй – третью, и так далее.

$$\det A = \begin{vmatrix} -3 & 3 & 3 & \dots & 3 & 3 \\ -5 & -5 & 5 & \dots & 5 & 5 \\ -7 & -7 & -7 & \dots & 7 & 7 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -(2n-1) & -(2n-1) & -(2n-1) & \dots & -(2n-1) & 2n-1 \\ n^2-1 & n^2-4 & n^2-9 & \dots & n^2-(n-1)^2 & n^2-n^2 \end{vmatrix}.$$

$$\det A = (-3)(-5)(-7)\dots(-(2n-1)) \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & \dots & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & \dots & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & -1 & -1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & -1 \\ n^2-1 & n^2-4 & n^2-9 & \dots & n^2-(n-1)^2 & n^2-n^2 \end{vmatrix}.$$

Вычтем из второй строки первую, из третьей – вторую, и так далее.

$$\det A = (-1)^{n-1} 3 \cdot 5 \cdot 7 \dots (2n-1) \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & \dots & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & 0 \\ n^2-1 & n^2-4 & n^2-9 & \dots & n^2-(n-1)^2 & 0 \end{vmatrix}.$$

Раскроем определитель по последнему столбцу.

$$\det A = (-1)^{n-1} 3 \cdot 5 \cdot 7 \dots \cdot (2n-1) \cdot (-1) \cdot (-1)^{n+1} \begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 \\ n^2-1 & n^2-4 & n^2-9 & \dots & n^2-(n-1)^2 \end{vmatrix}.$$

Раскроем определитель по первому столбцу.

$$\det A = -3 \cdot 5 \cdot 7 \dots \cdot (2n-1) (-1)^{n-1+1} (n^2-1) \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 \end{vmatrix}.$$

$$\det A = (-1)^{n-1} 3 \cdot 5 \cdot 7 \dots \cdot (2n-1) (n^2-1) \cdot 2^{n-2}.$$

Вычислим предел.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n \det A}{B} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n (-1)^{n-1} \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \dots \cdot (2n-1) (n^2-1) \cdot 2^{n-2}}{2 \cdot 6 \cdot 10 \cdot 14 \cdot \dots \cdot (4n-2)(4n+2)(4n+6)} =$$

$$= - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n^2-1) \cdot 2^{n-2}}{2^n (4n+2)(4n+6)} = - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n^2-1)}{4(4n+2)(4n+6)} = - \frac{1}{64}.$$

Ответ: $-\frac{1}{64}.$

Задача 2. Решите матричное уравнение $X + AX + XA^2 = A$, где $A^3 = 0$.

Решение.

Из условия задачи: $X = A - AX - XA^2$. (*)

Умножим исходное уравнение слева и справа на A^2 и раскрывая скобки, получим:

$$A^2(X + AX + XA^2)A^2 = A^5.$$

$$A^2XA^2 + A^3XA^2 + A^2XA^4 = A^5.$$

Второе, третье слагаемые и правая часть равны нулевой матрице по условию, следовательно $A^2XA^2 = 0$.

Умножим исходное уравнение слева на A^2 и раскрывая скобки, получим::

$$A^2(X + AX + XA^2) = A^3 = 0.$$

$$A^2X + A^3X + A^2XA^2 = 0.$$

$$\text{Откуда } A^2X = 0.$$

Умножим исходное уравнение справа на A^2 и раскрывая скобки, получим::

$$(X + AX + XA^2)A^2 = A^3 = 0.$$

$$XA^2 + AXA^2 + XA^4 = 0.$$

$$\text{Откуда } XA^2 = 0.$$

Так как с учетом условия задачи и полученных «нулей»:

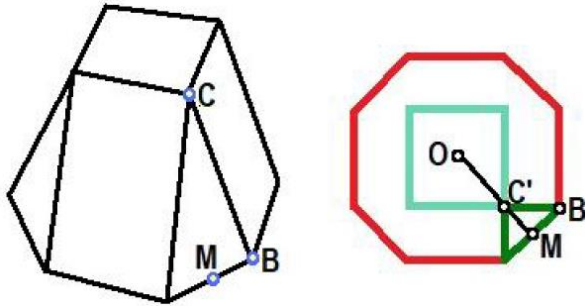
$$AX = AX + A^2X + AXA^2 = A(X + AX + XA^2) = A^2, \text{ то подставляя в } (*), \text{ получим:}$$

$$X = A - A^2.$$

Задача 3. Выпуклый 10-гранник имеет два горизонтальных основания: правильный 8-угольник со стороной 1 и квадрат со стороной 1; боковые грани – чередующиеся прямоугольники 2×1 и равнобедренные треугольники. Найти угол α между треугольной гранью и 8-угольным основанием.

Решение.

Рассмотрим проекцию на горизонтальную плоскость.



Из прямоугольного равнобедренного $\triangle BMC'$ получаем $C'M = \frac{1}{2}$, из прямоугольного $\triangle BMC$

получаем $MC = \sqrt{2^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{15}}{2}$. Тогда искомый угол равен

$$\alpha = \arccos \frac{C'M}{CM} = \arccos \frac{1}{\sqrt{15}} = \arctan \sqrt{14} \approx 75^\circ.$$

Задача 4. Найти 2022-ю производную функции $f(x) = e^x \sin((2 - \sqrt{3})x)$.

Решение.

Данная функция равна мнимой части функции $g(x) = e^{\gamma x}$, где $\gamma = 1 + (2 - \sqrt{3})i$. Получаем $g^{(n)}(x) = \gamma^n e^{\gamma x}$.

Возведем число γ в 2022-ю степень. $|\gamma| = \sqrt{1^2 + (2 - \sqrt{3})^2} = \sqrt{8 - 4\sqrt{3}} = 2\sqrt{2 - \sqrt{3}}$.

$$\varphi = \arg \gamma = \arctan(2 - \sqrt{3}) = \frac{\pi}{12}, \text{ т. к. } \tan 2\varphi = \frac{2 \tan \varphi}{1 - \tan^2 \varphi} = \frac{2(2 - \sqrt{3})}{1 - (2 - \sqrt{3})^2} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \tan \frac{\pi}{6}, \quad 0 < \varphi < \frac{\pi}{2}.$$

Отсюда $|\gamma^{2022}| = |\gamma|^{2022} = 2^{2022} (2 - \sqrt{3})^{1011}$, $\arg(\gamma^{2022}) = 2022\varphi = \frac{2022\pi}{12} = 168\pi + \frac{\pi}{2}$. Тогда

$$\gamma^{2022} = i \cdot 2^{2022} (2 - \sqrt{3})^{1011}. \text{ Тогда } f^{(2022)}(x) = \operatorname{Im} \left\{ i \cdot 2^{2022} (2 - \sqrt{3})^{1011} \exp((1 + (2 - \sqrt{3})i)x) \right\},$$

$$f^{(2022)}(x) = 2^{2022} (2 - \sqrt{3})^{1011} \operatorname{Re} \left\{ \exp((1 + (2 - \sqrt{3})i)x) \right\}, \quad f^{(2022)}(x) = 2^{2022} (2 - \sqrt{3})^{1011} e^x \cos((2 - \sqrt{3})x).$$

Задача 5. Исследовать дифференцируемость функций: а) $f(x, y) = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$;

б) $f(x, y) = \sqrt[3]{x^3 + y^4}$ в точке $(0, 0)$.

Решение.

По определению, если функция дифференцируема в точке $(0, 0)$, то полное приращение в этой точке, представимо в виде $f(x, y) - f(0, 0) = Ax + By + o(\rho)$,

$$\text{где } \rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad A = \frac{\partial f(0, 0)}{\partial x}, \quad B = \frac{\partial f(0, 0)}{\partial y}.$$

$$a) f(x, y) = \sqrt[3]{x^3 + y^3}, \quad f(0, 0) = 0,$$

$$A = \frac{\partial f(0, 0)}{\partial x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x} = 1, \quad B = \frac{\partial f(0, 0)}{\partial y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y} = 1.$$

То есть, $\sqrt[3]{x^3 + y^3} = x + y + o(\sqrt{x^2 + y^2})$. Пусть $x = y > 0$, тогда $(\sqrt[3]{2} - 2)x = o(x)$, при $x \rightarrow 0$ – неверно.

Следовательно, функция $f(x, y) = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$ недифференцируема в точке $(0, 0)$.

$$б) f(x, y) = \sqrt[3]{x^3 + y^4}, \quad f(0, 0) = 0,$$

$$A = \frac{\partial f(0, 0)}{\partial x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x} = 1, \quad B = \frac{\partial f(0, 0)}{\partial y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y} = 0.$$

То есть, $\sqrt[3]{x^3 + y^4} = x + o(\sqrt{x^2 + y^2})$. при $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ – верно.

Следовательно, функция $f(x, y) = \sqrt[3]{x^3 + y^4}$ дифференцируема в точке $(0, 0)$.

Задача 6. Исследовать на сходимость интеграл $\int_0^{+\infty} (-1)^{[x^2]} dx$, где $[y]$ – целая часть числа y .

Решение.

Пусть $F(t) = \int_0^t (-1)^{[x^2]} dx$. Функция F имеет максимумы в точках $t = \sqrt{2k+1}$ и минимумы в точках

$t = \sqrt{2k}$, $k \in \mathbb{N}$. Между этими точками функция монотонна. Поэтому для доказательства сходимости нам достаточно доказать, что существует $\lim_{m \rightarrow \infty} F(\sqrt{m}) \in \mathbb{R}$, где $m \in \mathbb{N}$. Поскольку

$$a_m = F(\sqrt{m+1}) - F(\sqrt{m}) = (-1)^m (\sqrt{m+1} - \sqrt{m}), \quad F(\sqrt{m}) = \sum_{k=1}^m a_k, \text{ экстремальные значения функции } F$$

являются частичными суммами ряда, сходящегося по признаку Лейбница: знаки a_k чередуются, $a_k \rightarrow 0$, $|a_{k+1}| < |a_k|$.

Задача 7. Доказать сходимость произведения и найти его.

$$\sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2}}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2}}}} \dots$$

Решение.

Преобразуем бесконечное произведение к виду

$$S = \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2}}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2}}}} \dots = \cos \frac{\pi}{4} \cdot \cos \frac{\pi}{8} \cdot \cos \frac{\pi}{16} \dots = \prod_{n=1}^{\infty} \cos \frac{\pi}{2^{n+1}}$$

Так как сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\cos \frac{\pi}{2^{n+1}} - 1 \right)$, то сходится и бесконечное произведение.

$$\text{Далее, рассмотрим последовательность } S_k = \cos \frac{\pi}{4} \cdot \cos \frac{\pi}{8} \cdot \cos \frac{\pi}{16} \dots \cos \frac{\pi}{2^{k+1}} = \prod_{n=1}^k \cos \frac{\pi}{2^{n+1}}.$$

$$\cos \frac{\pi}{4} \cdot \cos \frac{\pi}{8} \cdot \cos \frac{\pi}{16} \dots \cos \frac{\pi}{2^{k+1}} = \frac{\cos \frac{\pi}{4} \cdot \cos \frac{\pi}{8} \cdot \cos \frac{\pi}{16} \dots \cos \frac{\pi}{2^{k+1}} \cdot \sin \frac{\pi}{2^{k+1}}}{\sin \frac{\pi}{2^{k+1}}} =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\cos \frac{\pi}{4} \cdot \cos \frac{\pi}{8} \cdot \cos \frac{\pi}{16} \dots \cos \frac{\pi}{2^k} \cdot \sin \frac{\pi}{2^k}}{2 \cdot \sin \frac{\pi}{2^{k+1}}} = \frac{\cos \frac{\pi}{4} \cdot \cos \frac{\pi}{8} \cdot \cos \frac{\pi}{16} \dots \cos \frac{\pi}{2^{k-1}} \cdot \sin \frac{\pi}{2^{k-1}}}{2^2 \cdot \sin \frac{\pi}{2^{k+1}}} = \dots = \\
&= \frac{\cos \frac{\pi}{2^2} \cdot \sin \frac{\pi}{2^2}}{2^{k-1} \cdot \sin \frac{\pi}{2^{k+1}}} = \frac{\sin \frac{\pi}{2}}{2^k \cdot \sin \frac{\pi}{2^{k+1}}} = \frac{1}{2^k \cdot \sin \frac{\pi}{2^{k+1}}}.
\end{aligned}$$

Тогда $S = \lim_{k \rightarrow \infty} S_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{2^k \cdot \sin \frac{\pi}{2^{k+1}}} = \left| \frac{t = 2^{-k}}{t \rightarrow 0} \right| = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\sin \frac{\pi t}{2}} = \frac{2}{\pi}.$

Задача 8. Дан многочлен $P(x)$ 4-го порядка. Известно, что для всех x выполняется $P(x) \geq x^2 - 1$. $P(1) = 0$, $P(2) = A$. $P(3) = 8$, $P(4) = B$. а) Вычислить B при $A = 4$. б) Пусть A может принимать случайное значение из интервала $(10; 20)$. Найти вероятность того, что B будет принимать значение из интервала $(100; 200)$.

Решение.

Рассмотрим $Q(x) = P(x) - x^2 + 1$ – многочлен 4-го порядка, $Q(x) \geq 0$ для всех x . Заметим, что $Q(1) = Q(3) = 0$, $Q(2) = P(2) - 3 = 1$. Следовательно, многочлен $Q(x)$ имеет вид $Q(x) = C(x-1)^2(x-3)^2$, $C > 0$. С учетом $Q(2) = P(2) - 3 = A - 3 = C(2-1)^2(2-3)^2 = C$, получим $Q(x) = (A-3)(x-1)^2(x-3)^2$.

$$P(x) = Q(x) + x^2 - 1 = (A-3)(x-1)^2(x-3)^2 + x^2 - 1.$$

$$B = P(4) = (A-3)(4-1)^2(4-3)^2 + 4^2 - 1 = 9A - 27 + 15 = 9A - 12.$$

а) $A = 4$. $B = 9 \cdot 4 - 12 = 36 - 12 = 24$.

б) Для A из интервала $(10; 20)$ B будет принимать значения из интервала $(78; 168)$. Значения $B > 100$ будут достигаться при $A = \frac{B+12}{9} > \frac{100+12}{9} = \frac{112}{9}$. Тогда вероятность нахождения B в интервале $(100; 200)$ будет равна вероятности нахождения A в интервале $\left(\frac{112}{9}; 20\right)$, то есть отношению длин

$$\text{интервалов. Тогда } P = \frac{20 - \frac{112}{9}}{20 - 10} = \frac{34}{45}.$$

$$\text{Ответ: а) } B = 24. \text{ б) } P = \frac{34}{45}.$$

Задача 9. Железный однородный стержень длиной h одним концом прикреплен к полу шарниром без трения. Стержень подняли вертикально и отпустили. С какой скоростью v свободный конец стержня ударится о пол?

Решение.

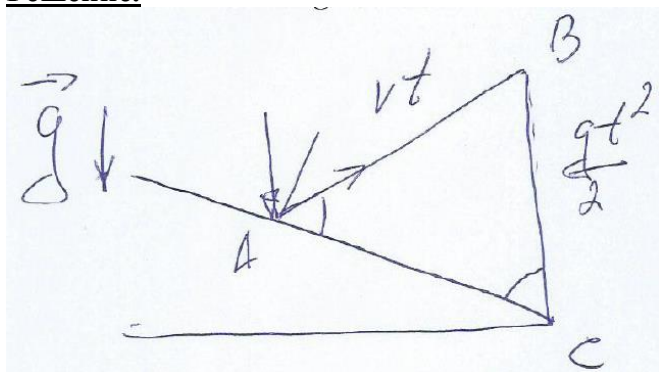
Пусть τ – линейная плотность стержня. Тогда его масса $M = \tau h$. Потенциальная энергия вертикального стержня $E_p = \frac{Mgh}{2} = \frac{g\tau h^2}{2}$. Пусть падающий стержень развил угловую скорость ω .

Тогда его кинетическая энергия будет $E_k = \int_0^h \tau \frac{(\omega x)^2}{2} dx = \frac{\tau \omega^2 h^3}{6}$. Приравнивая эти энергии, получим:

$$\frac{g\tau h^2}{2} = \frac{\tau \omega^2 h^3}{6}, \quad \omega = \sqrt{\frac{3g}{h}}, \quad v = \omega h = \sqrt{3gh}.$$

Задача 10. Шарик падает вертикально на наклонную плоскость со скоростью $v = 20 \text{ м/с}$ и упруго отражается. Определить, через какое время (в секундах) после отражения шарик вновь упадет на наклонную плоскость. Ускорение свободного падения $g = 10 \text{ м/с}^2$.

Решение.



$\mathbf{r} = \mathbf{vt} + \frac{\mathbf{gt}^2}{2}$. $\mathbf{AB} = \mathbf{vt}$, $\mathbf{BC} = \frac{\mathbf{gt}^2}{2}$. Заметим, что $\triangle ABC$ – равнобедренный, следовательно, $AB = BC$,

откуда $vt = \frac{gt^2}{2}$, $t = \frac{2v}{g} = 4 \text{ с}$.

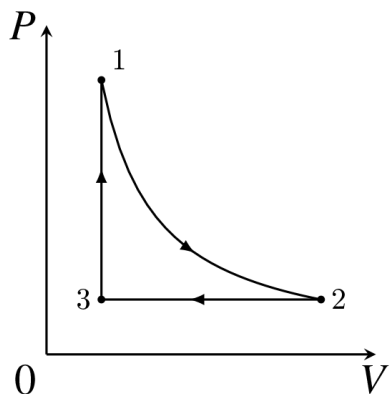
Ответ: 4 с.

Задача 11. Термодинамический цикл состоит из следующих процессов: изотермического расширения 1-2, изобарического сжатия 2-3 и изохорического нагревания 3-1. В качестве рабочего тела используется газ, уравнение состояния которого неизвестно, но известно, что теплоемкости C_p

и C_v постоянны во всех процессах цикла, а показатель адиабаты $\gamma = \frac{5}{4}$. Определить КПД данного цикла, если отношение максимальной и минимальной температуры газа в цикле равно 3.

Решение.

$T_1 = T_2$, так как процесс 1-2 – изотермический.



$$Q_{31} = \nu C_v (T_3 - T_1). \quad Q_{23} = \nu C_p (T_2 - T_3) = -\nu C_p (T_3 - T_1). \quad \frac{T_1}{T_3} = \frac{T_2}{T_3} = 3.$$

$$\oint \frac{\delta Q}{T} = 0. \int_3^1 \frac{\nu C_V dT}{T} + \int_1^2 \frac{\delta Q_{12}}{T} + \int_2^3 \frac{\nu C_p dT}{T} = 0. \nu C_V \int_{T_3}^{T_1} \frac{dT}{T} + \frac{1}{T_1} Q_{12} - \nu C_p \int_{T_3}^{T_1} \frac{dT}{T} = 0.$$

$$Q_{12} = \nu T_1 (C_p - C_V) \ln \frac{T_1}{T_3}.$$

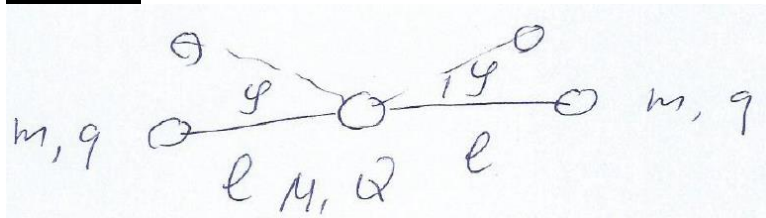
$$\eta = 1 - \frac{Q_{23}}{Q_{31} + Q_{12}} = 1 - \frac{\nu C_p (T_1 - T_3)}{\nu C_V (T_1 - T_3) + \nu T_1 (C_p - C_V) \ln \frac{T_1}{T_3}} = 1 - \frac{\gamma \left(\frac{T_1}{T_3} - 1 \right)}{\left(\frac{T_1}{T_3} - 1 \right) + \frac{T_1}{T_3} (\gamma - 1) \ln \frac{T_1}{T_3}}.$$

$$\eta = 0.115 = 11.5\%.$$

Ответ: $\eta = 0.115 = 11.5\%$.

Задача 12. Система состоит из двух небольших одинаково заряженных тел с массами m и тела массой $M \gg m$ с зарядом Q , соединенных нерастяжимыми невесомыми непроводящими нитями длиной l . В состоянии равновесия потенциальная энергия взаимодействия заряженных тел равна нулю. Определить период малых колебаний системы.

Решение.



В положении равновесия энергия электрического взаимодействия равна 0.

$$k \frac{q^2}{2l} + 2k \frac{qQ}{l} = 0. \text{ Отсюда } q = -4Q, |q| = |-4Q|.$$

Из закона сохранения энергии:

$$2 \frac{mv^2}{2} + k \frac{q^2}{2l \cos \varphi} + 2k \frac{qQ}{l} = \text{const}.$$

$$v = l\dot{\varphi}. ml^2 \dot{\varphi}^2 + \frac{8kQ^2}{l} \frac{1}{\cos \varphi} = \text{const}. ml^2 \dot{\varphi}^2 + \frac{4kQ^2}{l} \varphi^2 = \text{const}. \text{ Тогда } \omega_0^2 = \frac{4kQ^2}{ml^3}. T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{ml^3}{4kQ^2}}.$$

$$\text{Ответ: } T = 2\pi \sqrt{\frac{ml^3}{4kQ^2}}.$$