

Студенческая Олимпиада РГРТУ по математике. 26 марта 2022 года.

Задание № 1. Дана матрица $A = (a_{ij})$ размера 2021×2021 с общим членом $a_{ij} = i \cdot j$. Пусть $f(x)$ – определитель матрицы $A + xE$, где E – единичная матрица размера

$$2021 \times 2021. \text{ Вычислите } \left(\frac{f(x)}{2021x^{2021}} \right)'_x.$$

Задание № 2. Вычислить площадь треугольника, образованного биссектрисами внешних углов треугольника, стороны которого заданы уравнениями:

$$3x + 3y - 5 = 0, \quad x - y - 1 = 0, \quad 7x + y + 1 = 0.$$

Задание № 3. При каком натуральном n выполняется равенство:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1+x^2} + x)^n - (\sqrt{1+x^2} - x)^n}{\sin x + \sin 2x + \dots + \sin nx} = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1 + 11 + 111 + \dots + \overbrace{111\dots 1}^m}{10^m},$$

Задание № 4. Принимает ли функция $f(x) = e^x + 3\cos \pi x$ на отрезке $x \in [0, 1]$ значения $-0,51, -0,32, 2,89, 4,05, 4,36$.

Задание №5. Найти интеграл: $\int \frac{(x^2 \operatorname{tg} x - x^3) dx}{(1 + x \operatorname{tg} x)(1 + x^2)}$.

Задание №6. Решить дифференциальное уравнение

$$3y' + x^2(3y + xy')y' = -(x^3y + x)y'', \text{ если } y'(1) = -1; y(1) = 1.$$

Задание №7. Найти сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2 + 10n + 10 + \sum_{k=1}^n [4k(k^2 + 1) - (6k^2 + 1)]}{(n^4 + 4)2^n}$.

Задание № 8. Случайная величина x распределена нормально с параметрами $(0, \sigma)$, где σ – среднеквадратичное отклонение. Найдите дисперсию случайной величины $y = x \cdot e^{-x^2/2}$.

Задание № 9. Галя и Федя собирали грибы. До обеда Галя собрала на 25% грибов меньше, чем Федя, зато после обеда на 20% больше, чем Федя. По итогам дня оказалось, что Галя собрала на 10% грибов больше, чем Федя. Общее количество собранных ребятами грибов оказалось меньше 250. Сколько грибов собрал Федя?

Задание № 10. Вычислите $\log_2(\sin 1^\circ \cdot \sin 3^\circ \cdot \dots \cdot \sin 87^\circ \cdot \sin 89^\circ)$.

Задание № 11. Известны стороны треугольника a и b и угол между ними γ . Найти наименьшую длину отрезка, который проходит через две эти стороны и делит треугольник на две равновеликие части.

Задание № 12. Найдите целую часть числа $\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2022}}$.

Задание № 13. Доказать, что $f(x)$ периодична, если

$$f'(x) + \frac{1}{3!} f'''(x) + \frac{1}{5!} f^{(5)}(x) + \dots = 0, \text{ и найти период.}$$

Студенческая Олимпиада РГРТУ по математике. 26 марта 2022 года.

Задание № 1. Дана матрица $A = (a_{ij})$ размера 2021×2021 с общим членом $a_{ij} = i \cdot j$. Пусть $f(x)$ – определитель матрицы $A + xE$, где E – единичная матрица размера

$$2021 \times 2021. \text{ Вычислите } \left(\frac{f(x)}{2021x^{2021}} \right)'_x.$$

Задание № 2. Вычислить площадь треугольника, образованного биссектрисами внешних углов треугольника, стороны которого заданы уравнениями:

$$3x + 3y - 5 = 0, \quad x - y - 1 = 0, \quad 7x + y + 1 = 0.$$

Задание № 3. При каком натуральном n выполняется равенство:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1+x^2} + x)^n - (\sqrt{1+x^2} - x)^n}{\sin x + \sin 2x + \dots + \sin nx} = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1 + 11 + 111 + \dots + \overbrace{111\dots 1}^m}{10^m},$$

Задание № 4. Принимает ли функция $f(x) = e^x + 3\cos \pi x$ на отрезке $x \in [0, 1]$ значения $-0,51, -0,32, 2,89, 4,05, 4,36$.

Задание № 5. Найти интеграл: $\int \frac{(x^2 \operatorname{tg} x - x^3) dx}{(1 + x \operatorname{tg} x)(1 + x^2)}$.

Задание № 6. Решить дифференциальное уравнение

$$3y' + x^2(3y + xy')y' = -(x^3y + x)y'', \text{ если } y'(1) = -1; y(1) = 1.$$

Задание № 7. Найти сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2 + 10n + 10 + \sum_{k=1}^n [4k(k^2 + 1) - (6k^2 + 1)]}{(n^4 + 4)2^n}$.

Задание № 8. Случайная величина x распределена нормально с параметрами $(0, \sigma)$, где σ – среднеквадратичное отклонение. Найдите дисперсию случайной величины $y = x \cdot e^{-x^2/2}$.

Задание № 9. Галя и Федя собирали грибы. До обеда Галя собрала на 25% грибов меньше, чем Федя, зато после обеда на 20% больше, чем Федя. По итогам дня оказалось, что Галя собрала на 10% грибов больше, чем Федя. Общее количество собранных ребятами грибов оказалось меньше 250. Сколько грибов собрал Федя?

Задание № 10. Вычислите $\log_2(\sin 1^\circ \cdot \sin 3^\circ \cdot \dots \cdot \sin 87^\circ \cdot \sin 89^\circ)$.

Задание № 11. Известны стороны треугольника a и b и угол между ними γ . Найти наименьшую длину отрезка, который проходит через две эти стороны и делит треугольник на две равновеликие части.

Задание № 12. Найдите целую часть числа $\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2022}}$.

Задание № 13. Доказать, что $f(x)$ периодична, если

$$f'(x) + \frac{1}{3!} f'''(x) + \frac{1}{5!} f^{(5)}(x) + \dots = 0, \text{ и найти период.}$$