Рациональные неравенства. Метод интервалов

Неравенства вида $P(x) \geq 0$ ($P(x) \leq 0$), где $P(x)$ – некоторый многочлен, решаются методом интервалов. Содержание метода интервалов и последовательность действий при его выполнении заключаются в следующем.

Находим нули $x_1, x_2, \dots, x_k$ многочлена $P(x)$. Пусть $x_1 < x_2 < \dots < x_k$ и $P(x) = (x - x_1)^{m_1}(x - x_2)^{m_2} \cdots (x - x_k)^{m_k}$, где $m_1, m_2, \dots, m_k$ – натуральные числа – показатели кратности корней $x_1, x_2, \dots, x_k$.

Точки $x_1, x_2, \dots, x_k$ разбивают область допустимых значений неравенства $P(x) \geq 0$ на $k+1$ интервал, на каждом из которых многочлен $P(x)$ сохраняет знак, причем $P(x) > 0$ при $x > x_k$.

Далее, двигаясь справа налево по числовой прямой, расставляем знаки на интервалах, руководствуясь правилом:

если степень m_i множителя $(x - x_i)^{m_i}$ является четным числом, то на интервале слева от точки x_i сохраняется знак предыдущего интервала (при переходе через точку x_i знак не меняется); если же m_i – нечетное число, то знак на интервале слева от точки x_i меняется на противоположный.

Заметим, что при решении рациональных неравенств такое подробное решение не требуется. Необходимо изобразить числовую прямую с нанесенными на нее нулями многочлена $P(x)$ и выделенными интервалами монотонности. Этот рисунок достаточен для записи итоговых результатов.

При решении рациональных неравенств вида $\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)} \geq 0$

можно использовать равносильный переход

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} P_n(x) \geq 0, \\ Q_m(x) \geq 0, \end{cases} \\ \begin{cases} P_n(x) \leq 0, \\ Q_m(x) \leq 0, \end{cases} \end{array}\right.$$

или воспользоваться методом интервалов. При использовании метода интервалов на числовую прямую наносят точки в которых $P_n(x)$ и (или) $Q_m(x)$ обращаются в нуль: точки соответствующие $P_n(x)$ «закрашивают», так как в них левая часть неравенства обращается в нуль; а точки, соответствующие $Q_m(x)$ «выкалывают», так как в этих точках левая часть неравенства не существует. Далее, на полученных интервалах расставляются знаки «+» или «–».

Если неравенство $R(x) \equiv \dfrac{P(x)}{Q(x)} > 0$, ($R(x) < 0$) строгое, то «выкалываем» все нули (и числителя, и знаменателя).

При решении рациональных неравенств $\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)} \geq 0$, $\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)} > 0$ иногда удобно пользоваться равносильными формами записи

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{cases} P_n(x) \cdot Q_m(x) \geq 0 \\ Q_m(x) \neq 0 \end{cases}\right.$$

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} < 0 \Leftrightarrow P_n(x) \cdot Q_m(x) > 0.$$

Пример 1. Решить неравенство $(x-1)^8(2x+3)^2(x-7)^4(3x-5)(x+6)^3 > 0$.

Решение. Обозначим левую часть неравенства $P(x)$ и перепишем его в виде

$$P(x) \equiv (x+6)^3(2x+3)^2(x-1)^8(3x-5)(x-7)^4,$$

отвечающем последовательному расположению нулей многочлена

$$P(x): -6; -\frac{3}{2}; 1; \frac{5}{3}; 7.$$

В соответствии с теоретическими рекомендациями:

Наносим нули на числовую прямую и отмечаем дугами получившиеся интервалы (рис.1).

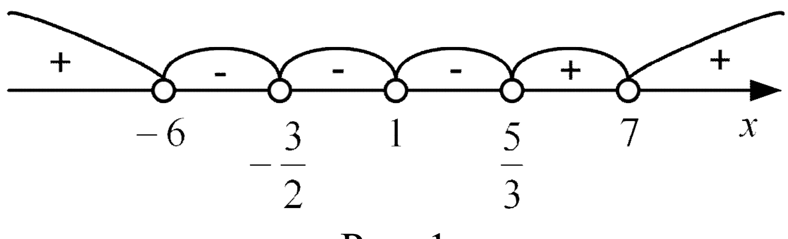

Рис. 1

Ставим знак «+» справа от крайней точки $x = 7$, т.е. $P(x) > 0$ при $x > 7$. При переходе через точку $x = 7$ справа налево знак не изменится, поскольку двучлен $(x-7)$ входит в $P(x)$ в четной степени. Двучлен $(3x-5)$ входит в $P(x)$ в нечетной (первой) степени, поэтому при переходе через точку $x=\frac{5}{3}$ знак $P(x)$ изменится на противоположный (на «-»), т.е. $P(x)<0$ при $x\in\left(1;\,5/3\right)$. Следующим двум точкам $x=1$ и $x=-\frac{3}{2}$ отвечают четные степени $(x-1)^8$ и $(2x+3)^2$. Поэтому при переходе через эти точки сохранится знак «-» многочлена $P(x)$. При переходе через точку $x=-6$ знак $P(x)$ меняется на противоположный «+», т.е. $P(x)>0$ при $x\in(-\infty;-6)$.

Из рис.1 следует, что $P(x)>0$ при $x\in(-\infty;-6)\cup\left(\frac{5}{3};7\right)\cup(7;+\infty)$. Отметим, что объединить интервалы $\left(\frac{5}{3};\,7\right)$ и $(7;+\infty)$ нельзя ввиду того, что исходное неравенство является строгим. **Ответ:** $x\in(-\infty;-6)\cup\left(\frac{5}{3};\,7\right)\cup(7;+\infty)$.

Пример 2. Решить неравенство $\frac{(x-3)^6(x+2)^2}{(x+1)^3(x-5)^4}\geq 0$.

Решение. Найдем точки, в которых числитель и знаменатель дроби обращаются в нуль: $3;-2;-1;5$. Обозначим $R(x)$ левую часть неравенства. Имеем $R(x)>0$ при $x>5$ и $R(x)$ сохраняют знак «+» при переходе справа налево через точки $x=5$ и $x=3$. Знак $R(x)$ изменится при переходе через точку $x=-1$ и сохранится таковым ($R(x)<0$) при переходе и через точку $x=-2$, поскольку двучлен $(x+2)$ входит в $R(x)$ в четной степени. В результате получаем (рис.2).

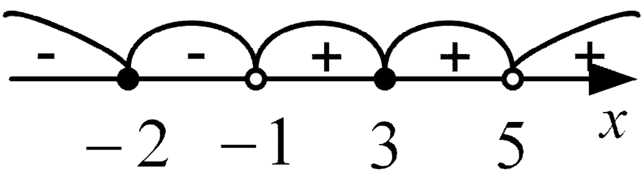

Рис. 2

Точки $x=-1$ и $x=5$ «выколоты», поскольку в них знаменатель дроби обращается в нуль. Напротив, точки $x=-2$ и $x=3$ являются решением неравенства $R(x)\geq 0$. Таким образом, $R(x)\geq 0$ при $x\in\{-2\}\cup(-1;\,3]\cup[3;\,5)\cup(5;+\infty)$.

Поскольку $(-1;\,3]\cup[3;\,5)=(-1;5)$, то окончательно получим $x\in\{-2\}\cup(-1;5)\cup(5;+\infty)$

Ответ: $\{-2\}\cup(-1;\,5)\cup(5;+\infty)$.

Одна из наиболее распространенных ошибок при решении рациональных неравенств вида

$$\frac{P(x)}{Q(x)} \ge T(x) \qquad (1)$$

где $P(x)$, $Q(x)$, $T(x)$ - некоторые многочлены, заключается в замене этого неравенства якобы равносильным ему

$$P(x) \ge Q(x) \cdot T(x) \qquad (2)$$

Неравенство (2) равносильно (1) тогда и только тогда, когда $Q(x) > 0$ при всех $x \in R$.

Неравенство (1) равносильно совокупности

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} Q(x) > 0, \\ P(x) \ge Q(x) \cdot T(x); \end{cases} \\ \begin{cases} Q(x) < 0, \\ P(x) \le Q(x) \cdot T(x). \end{cases} \end{array}\right. \qquad (3)$$

Однако решение совокупности неравенств (3) достаточно трудоемко. Значительно удобнее применение метода интервалов.

Для этого преобразуют неравенство (1) к виду

$$\frac{P(x) - Q(x) \cdot T(x)}{Q(x)} \ge 0. \qquad (4)$$

Неравенство (4) может решаться методом интервалов.

Пример 3. Решить неравенство $\frac{x^3 - 3x^2 + 1}{x^2 - 4x + 3} \le x + 1$.

Решение.

$$\frac{x^3 - 3x^2 + 1}{x^2 - 4x + 3} \le x + 1 \Leftrightarrow \frac{x^3 - 3x^2 + 1 - (x+1)(x^2 - 4x + 3)}{x^2 - 4x + 3} \le 0 \Leftrightarrow \frac{x - 2}{(x-1)(x-3)} \le 0.$$

Полученное неравенство решаем методом интервалов (рис. 3).

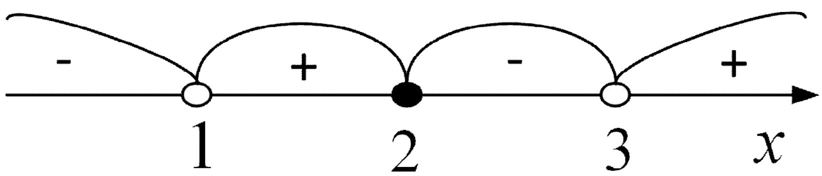

Рис. 3

Ответ: $(-\infty; 1) \cup [2; 3)$.