1. Функции алгебры логики и их представления

1.1. Элементарные функции

Функция алгебры логики $f(x_1,\ldots,x_n)$ от n переменных полностью задается таблицей 1, где $x_1,\ldots,x_n$ – переменные, независимо друг от друга пробегающие значения 0 и 1, сама функция принимает тоже два значения 0 или 1. Короче, говоря алгебраическим языком, функция $f(x_1,\ldots,x_n)$ выполняет отображение декартова произведения $\{0,1\}^n$ в множество $\{0,1\}$.

Таблица 1

x_1 …… x_n	$f(x_1,$ …… $,x_n)$
0 …… 0	f(0, …… , 0)
0 … 0 1	f(0, ……, 0, 1)
0 … 1 1	f(0, ……, 1, 1)
……………	……………
σ_1 …… σ_n	$f(\sigma_1,$ …… $,\sigma_n)$
……………	……………
1 … 1 0	f(1, ……, 1, 0)
1 …… 1	f(1, …… , 1)

Введем сокращенные записи:
$(0,\ldots,0)=\tilde{0}$, $(1,\ldots,1)=\tilde{1}$, $(\sigma_1,\ldots,\sigma_n)=\tilde{\sigma}$,
$f(x_1,\ldots,x_n)=f(\tilde{x})$; $f(\sigma_1,\ldots,\sigma_n)=\alpha$ читается как «функция f принимает значение α на наборе $\tilde{\sigma}$» (см. табл. 1). Два набора $(\sigma_1,\ldots,\sigma_{i-1},0,\sigma_{i+1},\ldots,\sigma_n)$ и $(\sigma_1,\ldots,\sigma_{i-1},1,\sigma_{i+1},\ldots,\sigma_n)$ называются соседними по i-й компоненте; наборы $(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ и $(\beta_1,\ldots,\beta_n)$, где $\alpha_i \ne \beta_i$, $i=\overline{1,n}$, называются противоположными.

В табл. 2 приведены элементарные функции алгебры логики.

Таблица 2

x, y	$x \& y$	$x \vee y$	$x \oplus y$	$x \to y$	$x \sim y$	$x \mid y$	$x \uparrow y$	$\bar{x}$	$\bar{y}$	x	y	0	1
00	0	0	0	1	1	1	1	1	1	0	0	0	1
01	0	1	1	1	0	1	0	1	0	0	1	0	1
10	0	1	1	0	0	1	0	0	1	1	0	0	1
11	1	1	0	1	1	0	0	0	0	1	1	0	1

Функция $x \& y$ называется конъюнкцией двух переменных. Другие записи: $x \cdot y, xy$. Значок & иногда называют логической операцией «и» или логическим умножением.

Функция $x \vee y$ называется дизъюнкцией двух переменных. Значок $\vee$ иногда называют логической операцией «или» или логическим сложением.

Функция $x \oplus y \quad (\mathrm{mod}\, 2)$ называется суммой по модулю 2 от двух переменных. Значок $\oplus$ иногда называют операцией «исключенное или» из-за «близости» функции $x \oplus y$ к дизъюнкции $x \vee y$ (см. табл. 2).

Функция $x \to y$ называется импликацией, но может быть прочтена как «из x следует y» или «если x, то y».

Функция $x \sim y$ называется эквиваленцией или равносильностью, но может быть прочтена как «x тогда и только тогда, когда y» или «для x необходимо и достаточно y»; в дальнейшем мы используем обозначение x^y.

Функция $x \mid y$ называется функцией Шеффера от двух переменных или «штрих Шеффера», техническое название «и-не».

Функция $x \uparrow y$ называется стрелкой Пирса, техническое название «или-не».

Функции $\bar{x}$, $\bar{y}$ называются инверсиями или отрицаниями соответствующих переменных x и y, читаются «не-икс», «не-игрек».

Функции x, y называются селекторными или тождественными функциями.

Константы 0, 1 здесь рассматриваются как константные функции переменных x, y.

Переменная x_i называется существенной переменной функции $f(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n)$, если существует пара соседних наборов по i-й компоненте, на которых функция принимает различные значения; в противном случае, т.е. когда выполнено

$$f(x_1, \ldots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \ldots, x_n) \equiv f(x_1, \ldots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \ldots, x_n),$$

переменная x_i называется фиктивной.

Так, например, в табл. 2 функция $x \cdot y$ существенно зависит от переменной x, так как на соседних наборах (0, 1) и (1, 1) по координате x имеем $0 \cdot 1 \neq 1 \cdot 1$; функция $\overline{x}$ существенно зависит от переменной x и фиктивно от переменной y; константные функции 0 и 1 фиктивно зависят от переменных x, y.

Условимся считать, что коль скоро нам задана функция f, то вместе с ней заданы все функции, отличающиеся от f добавлением или изъятием фиктивных переменных. Две функции f и g будем называть равными, если после изъятия у них фиктивных переменных они имеют одну и ту же табл. 1. Это соглашение позволяет считать, что если задана система функций $f_1, \ldots, f_r$, то можно считать, что все функции системы зависят от одного и того же списка переменных.

Пользуясь табл. 2, можно проверить тождества:

1) $x \& y = y \& x, \quad x \vee y = y \vee x, \quad x \oplus y = y \oplus x,$

$x | y = y | x, \quad x \uparrow y = y \uparrow x, \quad x^y = y^x$ (коммутативность);

2) $(x \& y) \& z = x \& (y \& z), \quad (x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z),$

$(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z)$ (ассоциативность);

3) $(x \vee y) \& z = (x \& z) \vee (y \& z),$

$(x \oplus y) \& z = (x \& z) \oplus (y \& z),$

$(x \& y) \vee z = (x \vee z) \& (y \vee z)$ (дистрибутивность);

4) $x \& x = x, \quad x \vee x = x$ (идемпотентность);

5) $x \oplus x = 0, \quad x \mid x = \bar{x}, \quad x \uparrow x = \bar{x}$;

6) $\overline{x \,\&\, y} = \bar{x} \vee \bar{y}, \quad \overline{x \vee y} = \bar{x} \,\&\, \bar{y}$ (законы де Моргана);

7) $\bar{\bar{x}} = x$ (закон двойного отрицания);

8) $x \,\&\, 0 = 0$ (в конъюнкции константа 0 «подавляет» переменную x), $x \vee 1 = 1$ (в дизъюнкции константа 1 «подавляет» переменную x);

9) $x \,\&\, 1 = x, \quad x \vee 0 = x, \quad x \oplus 0 = x, \quad x \oplus 1 = \bar{x}$;

10) $x \vee \bar{x} = 1$ (закон исключенного третьего),

$x \,\&\, \bar{x} = 0$ (закон противоречия);

11) $\bar{0} = 1, \quad \bar{1} = 0$;

12) $x \mid y = \overline{x \,\&\, y}, \quad x \uparrow y = \overline{x \vee y}, \quad x \to y = \bar{x} \vee y$.

Если в формулах ввести приоритетность операций: $\bar{\ }, \&, \mid, \uparrow, \vee, \to, \sim$, то в сочетании с законами ассоциативности мы получаем возможность более компактной записи формул. Например:

$$(x \vee y)z = xz \vee yz, \quad (x \,\&\, y) \,\&\, z = xyz,$$

$$(x \,\&\, y) \to \bar{z} = xy \to \bar{z},$$

$$(x \to \bar{y}) \sim ((y \,\&\, z) \to \bar{x}) = x \to \bar{y} \sim yz \to \bar{x};$$

13) $xy \vee x = x, \quad (x \vee y)x = x$ (законы полного поглощения);

14) $x \vee \bar{x}y = x \vee y, \quad x(\bar{x} \vee y) = xy$ (законы сокращения),

$(x \vee \bar{y})(x \vee y) = x, \quad x\bar{y} \vee xy = x$ (склейка);

15) $f \vee g = fg \oplus f \oplus g$, в частности $f \vee g = f \oplus g$, если $fg = 0$ (если f и g ортогональны).

Некоторые формулы легче просто доказать вместо того, чтобы сравнивать таблицы левых и правых частей тождеств. Например,

$$xy \vee x = x(y \vee 1) = x \cdot 1 = x,$$

$$x \vee \bar{x}y = x \vee (\bar{x}y) = (x \vee \bar{x})(x \vee y) = 1(x \vee y) = x \vee y.$$

$$(x \vee \bar{y})(x \vee y) = x \vee (\bar{y}y) = x \vee 0 = x.$$

Пример. Представление функций алгебры логики в виде таблиц 1 довольно громоздко и практически эффективно только для $n = 2, 3$. Более экономно функцию $f(x_1,\ldots,x_n)$ представлять таблицей с двумя входами. Введем параметр k, $0 < k < n$. Значение функции $f(x_1,\ldots,x_n)$ в наборе $(\sigma_1,\ldots,\sigma_k,\sigma_{k+1},\ldots,\sigma_n) = \tilde{\sigma}$ в таблице будет находиться на пересечении строки $(\sigma_1,\ldots,\sigma_k)$ и столбца $(\sigma_{k+1},\ldots,\sigma_n)$:

x_1 $\ldots$ x_{k-1} x_k	0 σ_n 1 $\vdots$ $\ldots$ $\ldots$ $\vdots$ $\ldots$ $\ldots$ $\vdots$ 0 σ_{k+1} 1	x_n $\vdots$ x_{k+1}
0 $\ldots$ 0 0 0 $\ldots$ 0 1 $\ldots$ $\ldots$ $\ldots$ $\ldots$ σ_1 $\ldots$ σ_{k-1} σ_k $\ldots$ $\ldots$ $\ldots$ $\ldots$ 1 $\ldots$ 1 1	$f(\tilde{0})$ $\ldots$ $\ldots$ $\ldots$ $\vdots$ $\vdots$ $\vdots$ $\ldots$ $\ldots$ $f(\tilde{\sigma})$ $\ldots$ $\vdots$ $\vdots$ $\ldots$ $\ldots$ $\ldots$ $f(\tilde{1})$	

(сравните также с изображением графика функции в декартовой системе координат в непрерывной математике). Такое представление экономнее примерно в $n+1$ раз.

Пусть

$F(x_1,x_2,x_3,x_4) = x_1x_2\bar{x}_3(\bar{x}_4 \vee x_1x_2) \vee \bar{x}_1\bar{x}_2x_3(x_4 \vee \bar{x}_2x_3)$. Вычислим подфункции от двух переменных: $F(x_1,x_2,0,0) = x_1x_2$, $F(x_1,x_2,0,1) = x_1x_2$, $F(x_1,x_2,1,0) = \bar{x}_1\bar{x}_2 = x_1 \uparrow x_2$, $F(x_1,x_2,1,1) = x_1 \uparrow x_2$ и по таблице 2 отмечаем столбцы значений функций x_1x_2, $x_1 \uparrow x_2$ и проставляем их в таблицу:

x_1	x_2	0	1	0	1	x_4
		0	0	1	1	x_3
0	0	0	0	1	1	
0	1	0	0	0	0	
1	0	0	0	0	0	
1	1	0	0	1	1	

1.2. Представления функций алгебры логики

Приведем ряд примеров, где рождаются функции алгебры логики.

Пример 1. Опишем логическую функцию взаимодействия двух зарядов. Пусть x и y – булевы переменные, где $x = 0$ – положительный заряд, $x = 1$ – отрицательный заряд. Аналогично $y = 0$ – положительный, $y = 1$ – отрицательный заряд; пусть $\varphi = 0$ – притяжение зарядов, $\varphi = 1$ – отталкивание зарядов. Тогда функция $\varphi(x, y) = x \oplus y \oplus 1$ выражает логическую функцию взаимодействия двух зарядов, т.к. если $x = y$, то есть заряды одноименные, то $\varphi = 1$, и заряды отталкиваются; если $x \neq y$, заряды разноименные, $\varphi = 0$, заряды притягиваются.

Пример 2. Гайка и болт; пусть $x = 0$ – гайка нестандартная, $x = 1$ – гайка стандартная; $y = 0$ – болт нестандартный, $y = 1$ – болт стандартный; $z = 0$ – болт не подходит гайке при условии, что болт и гайка нестандартные; $z = 1$ – болт подходит гайке при условии, что болт и гайка нестандартные; $\varphi = 0$ – гайка не подходит к болту, $\varphi = 1$ – гайка подходит к болту.

Тогда $\varphi(x, y, z) = x\,y\,\bar{z} \vee (x \oplus y \oplus 1)z$ – есть логическая функция отношения гайка – болт.

Пример 3. Системы неравенств. Число неравенств в системе определяет сложность системы. Упростить систему (сложность системы 3):

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a \le b \\ c < d + 1 \end{cases} \\ a > b. \end{array}\right. \qquad (1)$$

Введем булевы переменные: $x = 0$, если выполнено $a > b$, в противном случае $x = 1$; $y = 0$, если выполнено $c \ge d + 1$, в противном случае $y = 1$. Отсюда имеем логическую функцию системы (1): $x\,y \vee \bar{x}$. Используя закон сокращения, имеем

$x\,y \vee \bar{x} = y \vee \bar{x}$, что соответствует новой эквивалентной системе сложности 2:

$$\left[\begin{array}{l} c < d + 1 \\ a > b. \end{array}\right.$$

Пример 4. Упростить систему неравенств (сложность системы 7):

$$\left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{ll} x + 2y \le 0 & \qquad A \\ y > 1 & \qquad B \\ x > 2 & \qquad C \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{ll} x + 2y \le 0 & \qquad A \\ \left\{\begin{array}{ll} \left[\begin{array}{ll} x + 2y > 0 & \qquad \bar{A} \\ x > 2 & \qquad C \end{array}\right. \\ y \le 1 & \qquad \bar{B} \end{array}\right. \end{array}\right. \end{array}\right.$$

Обозначим неравенства переменными $A, B, C, A, \bar{A}, C, \bar{B}$ соответственно; запишем логическую функцию системы и упростим ее

$$(A \vee B \vee C)\left(A \vee (\bar{A} \vee C)\bar{B}\right) = (A \vee B \vee C)\left(A \vee \bar{A}\,\bar{B} \vee C\bar{B}\right) =$$
$$= (A \vee B \vee C)\left(\left(A \vee \bar{A}\bar{B}\right) \vee C\bar{B}\right) = (A \vee B \vee C)\left(\left(A \vee \bar{B}\right) \vee C\bar{B}\right) =$$
$$= (A \vee B \vee C)\left(A \vee \left(\bar{B} \vee C\bar{B}\right)\right) = (A \vee B \vee C)\left(A \vee \bar{B}\right) =$$
$$= A \vee (B \vee C)\bar{B} = A \vee B\bar{B} \vee C\bar{B} = A \vee C\bar{B}.$$

Таким образом, мы пришли к новой эквивалентной системе сложности 3:

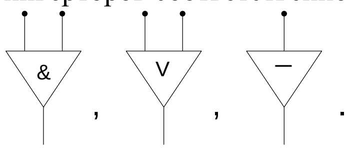
$$\left[\begin{array}{l} x + 2y \le 0 \\ \left\{\begin{array}{l} x > 2 \\ y \le 1. \end{array}\right. \end{array}\right.$$

Пример 5. Пусть требуется разместить в коробке $\le n$ предметов, имеющих следующие параметры: вес – p_i, стоимость – s_i, объем – v_i. Пусть x_i – булево переменное: $x_i = 0$, если i-й предмет не кладется в коробку; $x_i = 1$, если i-й предмет кладется в коробку. Тогда система неравенств

$$\begin{cases} s_1 x_1 + \ldots + s_n x_n \le S \\ v_1 x_1 + \ldots + v_n x_n \le V \\ p_1 x_1 + \ldots + p_n x_n \le P, \end{cases}$$

(где S – ограничение на стоимость, P – ограничение на вес, V – объем коробки) определяет логическую функцию $f(x_1, \ldots, x_n)$ от переменных $\tilde{x}$, где $f(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) = 1$ тогда и только тогда, когда при $\tilde{x} = \tilde{\sigma}$ все неравенства системы удовлетворены.

Пример 6. Функцию алгебры логики, заданную формулой над системой функций $x \,\&\, y,\ x \vee y,\ \bar{x}$, можно представить схемой из функциональных элементов (СФЭ): конъюнкторов, дизъюнкторов и инверторов соответственно

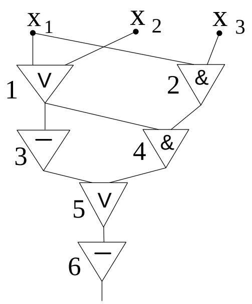


(2)

Под сложностью схемы понимается число операндов (2) в схеме. Правила соединения: выход операнда подсоединяется к входу другого операнда. Входы операндов, к которым не подсоединены выходы других операндов, автоматически являются входами схемы, допускается склеивание входов, не допускается подсоединение нескольких выходов операндов к одному входу другого операнда; не допускается обратная связь, т.е. подсоединение выхода операнда к входу схемы. Входам схемы приписаны переменные: различным входам схемы – различные переменные.

Перейдем к задаче упрощения схем из функциональных элементов.

а)



1. $x_1 \vee x_2$
2. $x_1 x_3$
3. $\overline{x_1 \vee x_2}$
4. $(x_1 \vee x_2)(x_1 x_3)$
5. $\overline{x_1 \vee x_2} \vee (x_1 \vee x_2) x_1 x_3$
6. $\overline{\overline{x_1 \vee x_2} \vee (x_1 \vee x_2) x_1 x_3}$

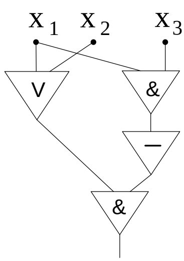
(сложность 6).

На концевом элементе схемы реализуется ее логическая функция. Упрощаем ее:

$$\overline{\overline{x_1 \vee x_2} \vee (x_1 \vee x_2) x_1 x_3} = \overline{\overline{x_1 \vee x_2} \vee x_1 x_3} =$$

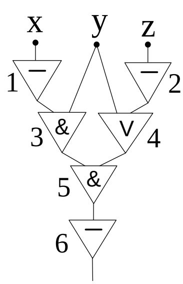
$$= (x_1 \vee x_2)\overline{x_1 x_3}.$$

Упрощенная схема имеет вид



(сложность 4).

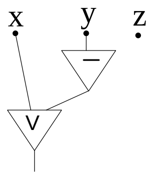
б)



1. $\bar{x}$
2. $\bar{z}$
3. $\bar{x} y$
4. $y \vee \bar{z}$
5. $\bar{x}\, y (y \vee \bar{z})$
6. $\overline{\bar{x}\, y (y \vee \bar{z})}$

(сложность 6).

После упрощения $\overline{\overline{x}\,y\left(y \vee \overline{z}\right)} = \overline{\overline{x}y \vee \overline{x}y\overline{z}} = \overline{\overline{x}\,y} = x \vee \overline{y}$ схема будет иметь вид



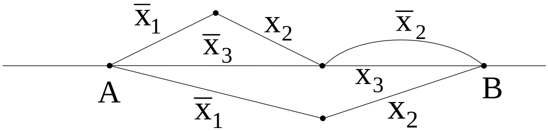
(сложность 2).

Пример 7. Другую интерпретацию формул дают контактные схемы. Контакт – проводник, находящийся в двух состояниях: замыкания и размыкания, в случае замыкания контакт проводит ток, при размыкании – не проводит. Контакты управляются с помощью обмотки реле. Контакты бывают двух видов: замыкающие и размыкающие. Если обмотка возбуждена, то замыкающие контакты проводят ток, а размыкающие – не проводят. В случае если обмотка реле не возбуждена, все происходит наоборот: замыкающие контакты разомкнуты, размыкающие контакты проводят ток. Контакты соединяются между собой концами, образуя контактную сеть. Контактная схема – это контактная сеть, в которой имеются два полюса - отмеченные концы контактов. Реле с номером i приписывается булева переменная x_i алфавита переменных $x_1, \ldots, x_n$, которая ставится у замыкающих контактов реле, и $\overline{x}_i$, ставящейся у размыкающих контактов реле. Для фиксированного контакта правильной схемы существует цепь от полюса к полюсу последовательно соединенных контактов, проходящая через данный контакт. Каждой цепи длины r (число контактов цепи) отвечает конъюнкция

$$x_{i_1}^{\sigma_{i_1}} \cdots x_{i_r}^{\sigma_{i_r}} = K_i .$$

Дизъюнкция по всем цепям $\underset{i}{\vee} K_i$ есть функция проводимости контактной схемы. Сложность контактной схемы – число контактов схемы.

а) Упростить контактную схему

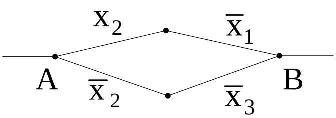


(сложность 7).

Функция проводимости имеет вид: $\bar{x}_1 x_2 \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3 x_3 \vee \bar{x}_3 \bar{x}_2 \vee \bar{x}_1 x_2 \vee \bar{x}_1 x_2 x_3$.

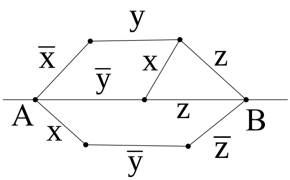
Упрощая, получаем: $\bar{x}_2 \bar{x}_3 \vee \left(\bar{x}_1 x_2 \vee \bar{x}_1 x_2 x_3\right) = \bar{x}_2 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 x_2$.

Новая упрощенная контактная схема имеет вид:



(сложность 4).

б) Упростить контактную схему

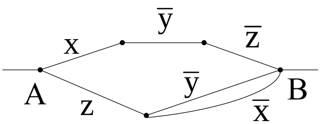


(сложность 9).

Функция проводимости для нее имеет вид: $\bar{x}yz \vee \bar{x}yxz \vee \bar{y}xz \vee \bar{y}z \vee x\bar{y}\bar{z}$.

Упрощая, получаем: $z\left(\bar{x}y \vee \bar{y}\right) \vee x\bar{y}\bar{z} = z\left(\bar{x} \vee \bar{y}\right) \vee x\bar{y}\bar{z}$.

Упрощенная схема имеет вид:



(сложность 6).

Пример 8. В теории множеств $A \subseteq B$ означает, что для всякого элемента x из A следует $x \in B$. Введем булевы переменные x_A, x_B, где $x_A = 1$ означает выполнимость $x \in A$, $x_B = 1$ – выполнимость $x \in B$, $x_A = 0$ и $x_B = 0$ соответственно означает $x \notin A$, $x \notin B$.

Для произвольного элемента x на диаграмме Венна (рис. 1)

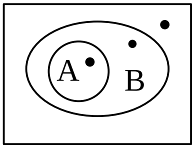


Рис. 1

выполнимы три возможности:

1) $x \in A$; 2) $x \in B$, но $x \notin A$; 3) $x \notin B$ (см. рис. 1), и отсутствует возможность, когда $x \in A$, но $x \notin B$. Введем функцию $\varphi(x_A, x_B)$, где $\varphi = 0$, когда $x_A = 1$, $x_B = 0$ и на диаграмме отсутствуют интерпретирующие точки x, $\varphi = 1$ – в остальных случаях, когда на диаграмме находятся интерпретирующие точки. Такая функция $\varphi(x_A, x_B)$ является логической функцией отношения включения, $\varphi(x_A, x_B) = x_A \to x_B$.

Основные операции над множествами: пересечение, объединение, дополнение имеют своими логическими эквивалентами логические функции: $x_A \,\&\, x_B$, $x_A \vee x_B$, $\bar{x}_A$ $(\bar{x}_B)$ соответственно.

Пример 9. Логическая модель пропускного автомата метро. Автомат имеет два входа: человек и жетон. Сопоставим им булевские переменные $x_{\text{чел}}$ и $x_{\text{жет}}$; пусть $x_{\text{чел}}=1$, $x_{\text{жет}}=1$, если в наличии есть человек или жетон соответственно, иначе $x_{\text{чел}}=0$, $x_{\text{жет}}=0$ соответственно. Створки автомата закрываются, т.е. $\varphi(x_{\text{чел}}, x_{\text{жет}}) = 0$, перед человеком только тогда, когда человек намерен пройти ($x_{\text{чел}} = 1$) без жетона ($x_{\text{жет}} = 0$), в остальных случаях створки открыты и $\varphi(x_{\text{чел}}, x_{\text{жет}}) = 1$. Таким образом, логическая функция есть импликация $\varphi = x_{\text{чел}} \to x_{\text{жет}}$.

Пример 10. Арифметические автоматы, реализующие сложение $x + y$, умножение $x \cdot y$ целых чисел, функцию следования $x + 1$ имеют логические функции (соответственно): $\text{четн}(x) \oplus \text{четн}(y)$, $\text{четн}(x) \,\&\, \text{четн}(y)$, $\text{четн}(x) \oplus 1$, если принять $\text{четн}(x)=0$, если x – четно; $\text{четн}(x)=1$ – в противном случае.

2. Нормальные формы

2.1. Совершенная дизъюнктивная нормальная форма

Фиксируем алфавит булевых переменных $\{x_1,\ldots,x_n\}=X$.

Напомним, что $x^{\sigma}=\begin{cases} x, & \text{если } \sigma=1,\\ \bar{x}, & \text{если } \sigma=0.\end{cases}$

Определение 1. *Элементарной конъюнкцией ранга* r *относительно алфавита* X *назовем форму*

$$x_{i_1}^{\sigma_{i_1}} \,\&\, x_{i_2}^{\sigma_{i_2}} \,\&\ldots\&\, x_{i_r}^{\sigma_{i_r}},$$

где $1\le i_1<\ldots<i_r\le n$. *При* $r=n$ *конъюнкция называется совершенной.*

Определение 2. *Дизъюнктивной нормальной формой (ДНФ) относительно алфавита* X *называется любая дизъюнкция элементарных конъюнкций. Совершенной дизъюнктивной нормальной формой относительно алфавита* X *называется любая дизъюнкция различных совершенных конъюнкций (СДНФ).*

Отметим все важные свойства совершенных конъюнкций:

а) произведение двух различных совершенных конъюнкций равно 0;

б) в совершенной дизъюнктивной нормальной форме относительно алфавита X при подстановке фиксированного набора $\tilde{x}=\tilde{\sigma}$ либо все совершенные конъюнкции равны нулю, либо равна 1 одна единственная конъюнкция.

Действительно, при $\tilde{x}\ne\tilde{\sigma}$ произведение

$$x_1^{\sigma_1}\ldots x_n^{\sigma_n}\,x_1^{\tau_1}\ldots x_n^{\tau_n} \qquad (1)$$

содержит для некоторого $i\,(1\le i\le n)$ множители x_i и $\bar{x}_i$, отсюда $x_i\bar{x}_i=0$, и поэтому произведение (1) равно 0. Далее для любого набора $\tilde{\sigma}$ уравнение $x_1^{\sigma_1}\ldots x_n^{\sigma_n}=1$ влечет $x_1=\sigma_1,\ldots,x_n=\sigma_n$ – единственно возможное решение, т.к.

если для некоторого i имеем $x_i \neq \sigma_i$, то $x_i^{\sigma_i} = 0$ и нулю равна вся конъюнкция.

Теорема. *Всякая функция алгебры логики* $f(\tilde{x}) \neq 0$ *представима совершенной дизъюнктивной нормальной формой относительно алфавита своих переменных* $x_1, \ldots, x_n$.

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \bigvee_{\tilde{\sigma}: f(\tilde{\sigma})=1} x_1^{\sigma_1} \ldots x_n^{\sigma_n} \qquad (2)$$

Дизъюнкция идет по всем наборам, в которых функция равна 1. Формула (2) следует непосредственно из свойств совершенных конъюнкций.

Пример 1. Совершенные ДНФ для элементарных функций (табл. 2): для конъюнкции: xy; для дизъюнкции: $x \vee y = x\bar{y} \vee \bar{x}y \vee xy$; для сложения по mod 2: $x \oplus y = \bar{x}y \vee x\bar{y}$; для импликации: $x \to y = \bar{x}\bar{y} \vee \bar{x}y \vee xy$; для эквиваленции: $x \sim y = xy \vee \bar{x}\bar{y}$; для штриха Шеффера: $x|y = \bar{x}\bar{y} \vee \bar{x}y \vee x\bar{y}$; для «стрелки Пирса»: $x \uparrow y = \bar{x}\bar{y}$; для отрицания $\bar{x}$: $\bar{x} = \bar{x}y \vee \bar{x}\bar{y}$; для отрицания $\bar{y}$: $\bar{y} = x\bar{y} \vee \bar{x}\bar{y}$; для селекторной функции x: $x = xy \vee x\bar{y}$; для селекторной функции y: $y = xy \vee \bar{x}y$; для константы 1: $1 = xy \vee \bar{x}y \vee x\bar{y} \vee \bar{x}\bar{y}$; константа 0 не имеет СДНФ.

Пример 2. Написать СДНФ относительно алфавита x, y, z для функции голосования от трех переменных, заданной таблично (см. табл. 3).

Таблица 3

x, y, z	000	001	010	011	100	101	110	111
$h_2(x, y, z)$	0	0	0	1	0	1	1	1

СДНФ для h_2 содержит четыре совершенные конъюнкции (по числу единиц функции)

$$x^0y^1z^1 \vee x^1y^0z^1 \vee x^1y^1z^0 \vee x^1y^1z^1 =$$
$$= \bar{x}yz \vee x\bar{y}z \vee xy\bar{z} \vee xyz.$$

Пример 3. Преобразовать в СДНФ формулу $x\bar{y} \vee z$ относительно алфавита x, y, z. Данная формула $x\bar{y} \vee z$ есть ДНФ, но имеет несовершенные конъюнкции. С помощью преобразований вида $x \vee \bar{x} = 1$ доводим конъюнкции до совершенства:

$$x\bar{y}(z \vee \bar{z}) \vee (x \vee \bar{x})(y \vee \bar{y})z,$$

раскроем скобки

$$x\bar{y}z \vee x\bar{y}\bar{z} \vee xyz \vee x\bar{y}z \vee \bar{x}yz \vee \bar{x}\bar{y}z,$$

собираем подобные члены по правилу $x \vee x = x$:

$$x\bar{y}z \vee x\bar{y}\bar{z} \vee xyz \vee \bar{x}yz \vee \bar{x}\bar{y}z.$$

Это и есть СДНФ.

Замечание. Если функция задана формулой, то можно для функции вычислить таблицу, а затем задача сведется к примеру 2. Однако создание таблицы может оказаться очень трудоемким. Так, например, если алфавит переменных состоит из 10 переменных, то таблица имеет $2^{10} = 1024$ строк, что неприемлемо, так как потребуется много места на доске или бумаге.

2.2. Полином Жегалкина

Элементарные конъюнкции вида $x_{i_1} \& \ldots \& x_{i_r}$, x_1, …, x_n, 1 (конъюнкция нулевого ранга) называются положительными элементарными конъюнкциями. Любая сумма по $\operatorname{mod} 2$ различных положительных конъюнкций называется полиномом Жегалкина. Константу 0 считаем нулевым полиномом Жегалкина. Тогда справедливо утверждение:

Теорема. *Всякая функция алгебры логики представима полиномом Жегалкина единственным образом с точностью до перестановки слагаемых.*

Доказательство. Если $f \neq 0$, то f представима СДНФ

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \bigvee_{\tilde{\sigma}: f(\tilde{\sigma})=1} x_1^{\sigma_1} \ldots x_n^{\sigma_n}. \qquad (3)$$

В силу совокупной ортогональности совершенных конъюнкций в (3) знаки дизъюнкции можно заменить на знаки $\oplus$, что приведет к формуле

$$f(x_1,\ldots,x_n)=\sum_{\tilde{\sigma}:f(\tilde{\sigma})=1} x_1^{\sigma_1}\ldots x_n^{\sigma_n} \quad (\mathrm{mod}\ 2). \qquad (4)$$

Удаляя в (4) отрицания переменных по формуле $\bar{x}=x\oplus 1$, раскрывая скобки и приведя подобные члены по правилу $x\oplus x=0$, мы получим полином Жегалкина. Единственность представления функции полиномом следует из того, что полиномов Жегалкина под алфавитом $x_1,\ldots,x_n$ столько же, сколько и функций от n переменных, 2^{2^n}.▲

Пример 1. Пусть задана функция $h_2(x,y,z)$ таблицей (см. табл.3).

Представим ее СДНФ

$$h_2=\bar{x}yz\vee x\bar{y}z\vee xy\bar{z}\vee xyz.$$

Отсюда имеем

$$h_2=(x\oplus 1)yz\oplus x(y\oplus 1)z\oplus xy(z\oplus 1)\oplus xyz.$$

Раскрываем скобки:

$$h_2=xyz\oplus yz\oplus xyz\oplus xz\oplus xyz\oplus xy\oplus xyz.$$

Приводим подобные члены:

$$h_2=xy\oplus yz\oplus xz.$$

Получили полином Жегалкина.

Пример 2. Пусть задана функция формулой $xz\vee\bar{x}y$. ДНФ $xz\vee\bar{x}y$ состоит из двух ортогональных конъюнкций, поэтому $xz\vee\bar{x}y=xz\oplus\bar{x}y=xz\oplus(x\oplus 1)y=xz\oplus xy\oplus y$. Получили полином Жегалкина.

Пример 3. Для элементарных функций табл. 2 полиномы Жегалкина имеют вид:

а) для конъюнкции – xy;

б) для дизъюнкции – $x\vee y=xy\oplus x\oplus y$;

в) для суммы по $\mathrm{mod}\,2$ – $x\oplus y$;

г) для импликации – $x\to y=xy\oplus x\oplus 1$;

д) для эквиваленции – $x\sim y=x\oplus y\oplus 1$;

е) для «штрих Шеффера» - $x|y=xy\oplus 1$;

ё) для «стрелки Пирса» - $x\uparrow y=xy\oplus x\oplus y\oplus 1$;

ж) для $\bar{x}$: $x \oplus 1 = \bar{x}$, для $\bar{y}$: $\bar{y} = y \oplus 1$;
з) для x, y, 0, 1 – без изменений.

2.3. Теорема двойственности. СКНФ

Функция $f^* = \bar{f}(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)$ называется двойственной к функции $f(x_1, \ldots, x_n)$. Из определения следует, что таблица для двойственной функции f^* может быть получена из таблицы для функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ заменой всех нулей на единицы и всех единиц на нули. Если оказывается, что $f^* = f$, то функция f называется самодвойственной. Самодвойственная функция на противоположных наборах принимает противоположные значения, т.е. $f(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n) \neq f(x_1, \ldots, x_n)$ для любого набора $\tilde{x} = \tilde{\sigma}$. Отношение двойственности симметрично, $f^{**} = f$.

Пример 1. Двойственные функции к элементарным функциям табл. 1:

$$(x\,y)^* = x \vee y,\ (x \vee y)^* = x\,y,\ (x \oplus y)^* = (x \sim y),$$

$$(x \to y)^* = \bar{x}\,y,\ (x \sim y)^* = x \oplus y,\ (x|y)^* = x \uparrow y,$$

$$(x \uparrow y)^* = x|y,\ (\bar{x})^* = \bar{x},\ (\bar{y})^* = \bar{y},\ x^* = x,\ y^* = y,$$

$$0^* = 1,\ 1^* = 0.$$

Пример 2. Является ли функция $g = x\,y \vee x\,\bar{y} \vee \bar{x}\,\bar{y}$ самодвойственной? Чтобы ответить на этот вопрос, можно составить (вычислить) таблицу и по таблице проверить значения функции на противоположных наборах, и если найдется пара противоположных наборов, на которых функция принимает одинаковые значения, то функция несамодвойственна. Можно также перейти к двойственной функции

$$g^* = \overline{\bar{x}\,\bar{y} \vee \bar{x}\,y \vee x\,y}$$

и вычислять одновременно значения двух функций g и g^*, и как только обнаружится, что на наборе $\tilde{\sigma}$ будем иметь $g(\tilde{\sigma}) \neq g^*(\tilde{\sigma})$, значит, функция g несамодвойственна. В противном случае g - самодвойственна, но цена этому выводу высока – ведь вычислены таблицы двух функций. Наконец, если преобразовать g и g^* к полиномам Жегалкина, и полиномы оказались разные, то $g \neq g^*$ и g - несамодвойственна.

Теорема двойственности. *Пусть имеется формула (тождество)*

$$h(x_1,\ldots,x_n) = f\left(f_1(x_1,\ldots,x_n),\ldots,f_m(x_1,\ldots,x_n)\right),$$

тогда верно тождество

$$h^*(x_1,\ldots,x_n) = f^*\left(f_1^*(x_1,\ldots,x_n),\ldots,f_m^*(x_1,\ldots,x_n)\right).$$

Доказательство.

$$h^*(x_1,\ldots,x_n) = \overline{h}(\overline{x}_1,\ldots,\overline{x}_n) =$$
$$= \overline{f}\left(f_1(\overline{x}_1,\ldots,\overline{x}_n),\ldots,f_m(\overline{x}_1,\ldots,\overline{x}_n)\right) =$$
$$= \overline{f}\left(\overline{\overline{f}}_1(\overline{x}_1,\ldots,\overline{x}_n),\ldots,\overline{\overline{f}}_m(\overline{x}_1,\ldots,\overline{x}_n)\right) =$$
$$= \overline{f}\left(\overline{f}_1^*(x_1,\ldots,x_n),\ldots,\overline{f}_m^*(x_1,\ldots,x_n)\right) =$$
$$= f^*\left(f_1^*(x_1,\ldots,x_n),\ldots,f_m^*(x_1,\ldots,x_n)\right). \blacktriangle$$

С помощью этой теоремы легко доказываются некоторые тождества. Например, из формулы де Моргана $\overline{x\,y} = \overline{x} \vee \overline{y}$ и теоремы двойственности следует другая формула де Моргана, так как $\overline{x\,y}^* = (\overline{x} \vee \overline{y})^*$ влечет $\overline{x \vee y} = \overline{x}\,\overline{y}$;

из формулы $\overline{x}\,y \vee x = x \vee y$ (формула сокращения) следует $((\overline{x}\,y) \vee x)^* = (x \vee y)^*$, по теореме двойственности получаем другую формулу сокращения $(\overline{x} \vee y)x = x\,y$; из формулы $(x \oplus y)z = x\,z \oplus y\,z$ получаем $((x \oplus y)z)^* = ((x\,z) \oplus (y\,z))^*$ и отсюда $x^y \vee z = (x \vee z)^{y \vee z}$.

Замечание. Операция * меняет приоритетность операндов, поэтому во избежание ошибок в начальной формуле надо отменить приоритетность, то есть должны быть расставлены все скобки, выделяющие бинарные операции.

Определение. *Элементарной дизъюнкцией ранга* r *относительно алфавита* $X=\{x_1,\ldots,x_n\}$ *назовем форму*

$$x_{i_1}^{\sigma_{i_1}} \vee \ldots \vee x_{i_r}^{\sigma_{i_r}},$$

где $1 \le i_1 < \ldots < i_r \le n$. *При* $r=n$ *дизъюнкция называется совершенной. Любая конъюнкция элементарных дизъюнкций называется конъюнктивной нормальной формой (КНФ). Любая конъюнкция совершенных дизъюнкций называется совершенной конъюнктивной нормальной формой (СКНФ).*

Теорема. *Всякая функция алгебры логики* $f \ne 1$ *представима совершенной конъюнктивной нормальной формой*

$$f(x_1,\ldots,x_n) = \mathop{\&}_{\tilde{\sigma}: f(\tilde{\sigma})=0} \left(x_1^{\bar{\sigma}_1} \vee \ldots \vee x_n^{\bar{\sigma}_n} \right).$$

Доказательство. Из условия теоремы $f^* \ne 0$ запишем СДНФ для функции f^*

$$f^*(x_1,\ldots,x_n) = \bigvee_{\tilde{\sigma}: f^*(\tilde{\sigma})=1} x_1^{\sigma_1} \& \ldots \& x_n^{\sigma_n},$$

отсюда и из теоремы двойственности имеем

$$f^{**} = f(x_1,\ldots,x_n) = \left(\bigvee_{\tilde{\sigma}: f^*(\tilde{\sigma})=1} x_1^{\sigma_1} \ldots x_n^{\sigma_n} \right)^* =$$

$$= \mathop{\&}_{\tilde{\sigma}: f(\tilde{\sigma})=0} \left(x_1^{\bar{\sigma}_1} \vee \ldots \vee x_n^{\bar{\sigma}_n} \right),$$ что и требовалось доказать. ▲

Пример 1. Совершенные КНФ для элементарных функций табл. 1 относительно алфавита переменных x, y:

для конъюнкции: $xy = (x \vee y)(\bar{x} \vee y)(x \vee \bar{y})$;

для дизъюнкции: $x \vee y$;

для суммы по $\mathrm{mod}\, 2$: $x \oplus y = (x \vee y)(\bar{x} \vee \bar{y})$;

для импликации: $x \to y = \bar{x} \vee y$;

для эквиваленции: $x \sim y = (\bar{x} \vee y)(x \vee \bar{y})$;

для «штрих Шеффера»: $x|y = \bar{x} \vee \bar{y}$;

для «стрелки Пирса»: $x \uparrow y = (\bar{x} \vee y)(x \vee \bar{y})(\bar{x} \vee \bar{y})$;

для отрицания $\bar{x}$: $\bar{x} = (\bar{x} \vee y)(\bar{x} \vee \bar{y})$;

для отрицания $\bar{y}$: $\bar{y} = (x \vee \bar{y})(\bar{x} \vee \bar{y})$;

для селекторной функции x: $x = (x \vee y)(x \vee \bar{y})$;

для селекторной функции y: $y = (x \vee y)(\bar{x} \vee y)$;

для константы $0 = (x \vee y)(\bar{x} \vee y)(x \vee \bar{y})(\bar{x} \vee \bar{y})$;

для константы 1 СКНФ не существует.

Пример 2. Написать СКНФ для функции голосования (табл.3). СКНФ для h_2 (h_2 содержит четыре нуля, и поэтому она состоит из четырех совершенных дизъюнкций):

$$h_2 = \left(x^{\bar{0}} \vee y^{\bar{0}} \vee z^{\bar{0}}\right)\left(x^{\bar{0}} \vee y^{\bar{0}} \vee z^{\bar{1}}\right)\left(x^{\bar{0}} \vee y^{\bar{1}} \vee z^{\bar{0}}\right)\left(x^{\bar{1}} \vee y^{\bar{0}} \vee z^{\bar{0}}\right) =$$
$$= (x \vee y \vee z)(x \vee y \vee \bar{z})(x \vee \bar{y} \vee z)(\bar{x} \vee y \vee z).$$

Пример 3. Преобразовать в СКНФ формулу $x\bar{y} \vee z$ относительно алфавита x, y, z.

Данная формула есть ДНФ. Преобразуем ее сначала в КНФ:

$$(x\bar{y}) \vee z = (x \vee z)(\bar{y} \vee z).$$

Преобразуем дизъюнкции в совершенные:

$$(x \vee z \vee (y\bar{y}))((x\bar{x}) \vee \bar{y} \vee z) =$$
$$= (x \vee y \vee z)(x \vee \bar{y} \vee z)(x \vee \bar{y} \vee z)(\bar{x} \vee \bar{y} \vee z) =$$
$$= \langle \text{отмечаем подобные члены и упрощаем согласно формуле } x \cdot x = x \rangle = (x \vee y \vee z)(x \vee \bar{y} \vee z)(\bar{x} \vee \bar{y} \vee z).$$

3. Замкнутые классы и теорема о полноте

3.1. Основные определения. Примеры замкнутых классов

Определение. *Класс функций* $\{f_1, f_2, \ldots\}$ *называется замкнутым, если:*

1) с каждой функцией f *класса классу принадлежит и функция, получающаяся из* f *переименованием или отождествлением переменных;*

2) классу принадлежит и всякая функция (суперпозиция) $h(x_1,\ldots,x_n) = f(f_{i_1}(\tilde{x}),\ldots,f_{i_m}(\tilde{x}))$, *где* $f = f(x_1,\ldots,x_m)$, $f_{i_k}(x_1,\ldots,x_n)$, $k = \overline{1,m}$ *являются функциями класса, либо некоторые из* f_{i_k} *являются простыми переменными.*

Пример 1. Класс C_3 всех функций, сохраняющих 0, т.е. функций $f(x_1,\ldots,x_n)$ таких, что $f(0,\ldots,0) = 0$, является замкнутым классом. Действительно, пусть

$$f(x_1,\ldots,x_m) \in C_3, \quad f_i(x_1,\ldots,x_n) \in C_3, \quad i = \overline{1,m}.$$

Тогда для суперпозиции $h(x_1,\ldots,x_n) = f(f_1(\tilde{x}),\ldots,f_m(\tilde{x}))$ имеем $h(\tilde{0}) = f(f_1(\tilde{0}),\ldots,f_m(\tilde{0})) = f(0,\ldots,0) = 0$.

Поэтому $h \in C_3$, и класс C_3 – замкнут.

Аналогично показывается, что класс C_2 всех функций, сохраняющих 1 , является замкнутым классом.

Классу C_3 принадлежат функции: 0, x, xy, $x \vee y$, $x \oplus y$.
К классу C_2 относятся функции: 1, xy, $x \vee y$, $x \to y$, $x \sim y$.

Пример 2. Класс L_1 всех линейных функций, т.е. функций, полином Жегалкина которых есть линейная функция

$$a_0 \oplus a_1x_1 \oplus \ldots \oplus a_nx_n, \quad n \in N, \quad a_i \in \{0,1\}.$$

L_1, очевидно, есть замкнутый класс, ибо подстановка линейных форм на места переменных не может привести к появлению конъюнкции переменных.

Пример 3. Для функции $f(x_1,\ldots,x_m)$ положим

$$f\begin{pmatrix} b_{11} & \ldots & b_{1m} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{n1} & \ldots & b_{nm} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(b_{11},\ldots,b_{1m}) \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ f(b_{n1},\ldots,b_{nm}) \end{pmatrix}.$$

Пусть $R(x_1,\ldots,x_n)$ – предикат, определенный на множестве всех наборов из нулей и единиц длины n. Область истинности предиката можно представить в виде матрицы

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1k} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nk} \end{pmatrix}, \qquad (1)$$

где столбцами являются те и только те наборы, которые принадлежат области истинности предиката.

Мы говорим, что функция $f(x_1,\ldots,x_m)$ сохраняет предикат $R(x_1,\ldots,x_n)$, если для любой матрицы

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \ldots & \alpha_{1m} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{n1} & \ldots & \alpha_{nm} \end{pmatrix}, \qquad (2)$$

составленной из столбцов матрицы (1), столбец

$$\begin{pmatrix} f(\alpha_{11},\ldots,\alpha_{1m}) \\ \ldots\ \ldots\ \ldots \\ f(\alpha_{n1},\ldots,\alpha_{nm}) \end{pmatrix}$$

принадлежит области истинности предиката $R(x_1,\ldots,x_n)$ (или является столбцом матрицы (1)).

Покажем, что множество всех функций, сохраняющих предикат, является замкнутым классом.

Действительно, обозначим через T_R класс всех функций, сохраняющих предикат R, $f(x_1,...,x_m) \in T_R$, $f_i(x_1,...,x_m) \in T_R$, $i = \overline{1,n}$. Рассмотрим $h = f(f_1(\tilde{x}),\ldots,f_n(\tilde{x}))$. Для матрицы (2) имеем

$$h\begin{pmatrix}\alpha_{11} & \dots & \alpha_{1m}\\ \dots & \dots & \dots\\ \alpha_{n1} & \dots & \alpha_{nm}\end{pmatrix}=$$

$$=f\left(f_1\begin{pmatrix}\alpha_{11} & \dots & \alpha_{1m}\\ \dots & \dots & \dots\\ \alpha_{n1} & \dots & \alpha_{nm}\end{pmatrix},\dots,f_n\begin{pmatrix}\alpha_{11} & \dots & \alpha_{1m}\\ \dots & \dots & \dots\\ \alpha_{n1} & \dots & \alpha_{nm}\end{pmatrix}\right)=$$

$$=f\left(\begin{pmatrix}f_1(\alpha_{11},\dots,\alpha_{1m})\\ \dots\ \dots\ \dots\\ f_1(\alpha_{n1},\dots,\alpha_{nm})\end{pmatrix},\dots,\begin{pmatrix}f_n(\alpha_{11},\dots,\alpha_{1m})\\ \dots\ \dots\ \dots\\ f_n(\alpha_{n1},,\dots,\alpha_{nm})\end{pmatrix}\right)=$$

$$=f\begin{pmatrix}f_1(\alpha_{11},\dots,\alpha_{1m}), & \dots & ,f_n(\alpha_{11},\dots,\alpha_{1m})\\ \dots & \dots & \dots\\ f_1(\alpha_{n1},\dots,\alpha_{nm}), & \dots & ,f_n(\alpha_{n1},\dots,\alpha_{nm})\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}f(f_1(\alpha_{11},\dots,\alpha_{1m}),\dots,f_n(\alpha_{11},\dots,\alpha_{1m}))\\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\\ f(f_1(\alpha_{n1},\dots,\alpha_{nm}),\dots,f_n(\alpha_{n1},\dots,\alpha_{nm}))\end{pmatrix}.$$

Последний столбец обязательно является столбцом матрицы (1), т.к. столбцы

$$\begin{pmatrix}f_1(\alpha_{11},\dots,\alpha_{1m})\\ \dots\ \dots\ \dots\\ f_1(\alpha_{n1},\dots,\alpha_{nm})\end{pmatrix},\quad\dots,\quad\begin{pmatrix}f_n(\alpha_{11},\dots,\alpha_{1m})\\ \dots\ \dots\ \dots\\ f_n(\alpha_{n1},\dots,\alpha_{nm})\end{pmatrix}$$

ввиду условий $f_1\in T_R,\dots,f_n\in T_R$ являются столбцами матрицы (1), а ввиду того, что $f\in T_R$, функция f порождает также столбец матрицы (1).

В дальнейшем будут рассмотрены следующие классы сохранения предиката:

1) D_3 – класс всех функций, сохраняющих предикат $x_1 \ne x_2$, (матрица (1)имеет вид $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$);

2) A_1 – класс всех функций, сохраняющих предикат $x_1 \le x_2$ (матрица (1) имеет вид $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$).

Класс всех функций алгебры логики является замкнутым классом и обозначается через P_2 (или реже через C_1). Замкнутыми классами являются множество всех конъюнкций с константами 0 и 1, а также множество всех дизъюнкций с константами 0 и 1.

В настоящее время известны все замкнутые классы функций алгебры логики, число их счетно бесконечно, и называются они классами Поста по имени автора, который смог их все описать.

3.2. Понятие о полноте. Примеры полных систем

Определение. *Система функций* $N = \{f_1, \ldots, f_i, \ldots\}$ *называется полной в* P_2*, если каждая функция из* P_2 *выразима суперпозицией над системой* N. *(Полные в* P_2 *системы будут также называться базисами в* P_2*).*

Система $\{x\,y, x \vee y, \overline{x}\}$ является классическим примером полной системы, т.к. если $f \ne 0$, то f представима совершенной ДНФ, т.е. выразима через функции $x\,y, x \vee y, \overline{x}$; если $f \equiv 0$, то мы имеем $0 = x \,\&\, \overline{x}$.

Система $\{x \oplus y, x\,y, 1\}$ является полной системой, т.к. любая функция выражается полиномом Жегалкина, т.е. формулой над системой функций $x \oplus y, x\,y, 1$.

Система $\{x\,y, \overline{x}\}$ является полной, т.к. дизъюнкция $x \vee y = \overline{\overline{x}\,\overline{y}}$ выразима через функции $x\,y, \overline{x}$ по формуле де Моргана.

Система $\{x \vee y, \bar{x}\}$ является полной как двойственная к предыдущей системе.

Система $\{x \to y, \bar{x}\}$ полна, так как $x \to y = \bar{x} \vee y$, отсюда подстановкой $\bar{x}$ в импликацию на место переменной x получаем дизъюнкцию $x \vee y$, что вместе с $\bar{x}$ дает полную систему.

Система $\{x|y\}$ является полной, так как $\bar{x} = x|x$, $x\,y = \overline{x|y}$.

Система $\{x \uparrow y\}$ является полной как двойственная к предыдущей.

Система $\{x\,y, x \oplus y\}$ не является полной, т.к. обе функции принадлежат классу C_3, а класс C_3 не является полным, так как не содержит, например, константы 1.

Система функций $\{x\,y, x \vee y\}$ не является полной, т.к. обе функции принадлежат классу A_1, который не является полным, т.к. не содержит, например, отрицание $\bar{x}$.

Система функций $\{0, 1, x, \bar{x}\}$ не является полной, т.к. суперпозициями нельзя получить функцию, существенно зависящую от двух переменных.

Понятие полной системы (базиса) в P_2 переносится и на другие замкнутые классы Поста. Так, например, система функций $x \oplus y, 1$ полна в замкнутом классе всех линейных функций L_1.

3.3. Монотонные функции

Определение. *Будем считать, что символ 0 предшествует символу 1,* $0 \le 1$*; дополним отношение предшествования неравенствами* $0 \le 0, 1 \le 1$.

Набор $\tilde{\sigma} = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ *предшествует набору* $\tilde{\tau} = (\tilde{\tau}_1, \ldots, \tilde{\tau}_n)$, $\tilde{\sigma} \le \tilde{\tau}$, *если при* $\tilde{\sigma} \ne \tilde{\tau}$ *имеем* $\sigma_1 \le \tau_1$, *...,* $\sigma_n \le \tau_n$. *Функция* $f(x_1, \ldots, x_n)$ *называется монотонной, если для любых наборов* $\tilde{\sigma} \le \tilde{\tau}$ *выполнено* $f(\tilde{\sigma}) \le f(\tilde{\tau})$. *Наборы* $\tilde{\sigma}$ *и*

$\tilde{\tau}$*, для которых выполнено* $\tilde{\sigma} \le \tilde{\tau}$ *или* $\tilde{\tau} \le \tilde{\sigma}$*, называются сравнимыми, в противном случае – несравнимыми.*

Классу монотонных функций A_1 принадлежат функции: 0, 1, x, xy, $x \vee y$, $xy \vee yz \vee xz$.

Отметим простейшие свойства монотонных функций:
1) если $f(\tilde{0}) = 1$, то $f(\tilde{x}) \equiv 1$; 2) если $f(\tilde{1}) = 0$, то $f(\tilde{x}) \equiv 0$;
3) если $f(\tilde{\sigma}) = 0$, то $f(\tilde{x}) = 0$ при всех $\tilde{x} \le \tilde{\sigma}$;
4) если $f(\tilde{\tau}) = 1$, то $f(\tilde{x}) = 1$ при всех $\tilde{x} \ge \tilde{\tau}$.

Проиллюстрируем указанные свойства монотонной функции
$g(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 h_2(x_2, x_3, x_4) \vee x_2 h_2(x_1, x_3, x_4) \vee x_1 \bar{x}_2 x_3 \bar{x}_4$
на четырехмерном единичном кубе, рис. 2. Куб разделен на две части: верхнюю и нижнюю. Верхняя часть, где функция принимает значение 1, с *нижними единицами*: (0111), (1101), (1010); нижняя часть, где функция равна нулю, с *верхними нулями* (0011), (0101), (1001), (0110), (1100). Множество нижних единиц, как и множество верхних нулей, состоит из попарно несравнимых наборов, и каждое полностью определяет монотонную функцию при учете свойств 3 и 4 монотонной функции.

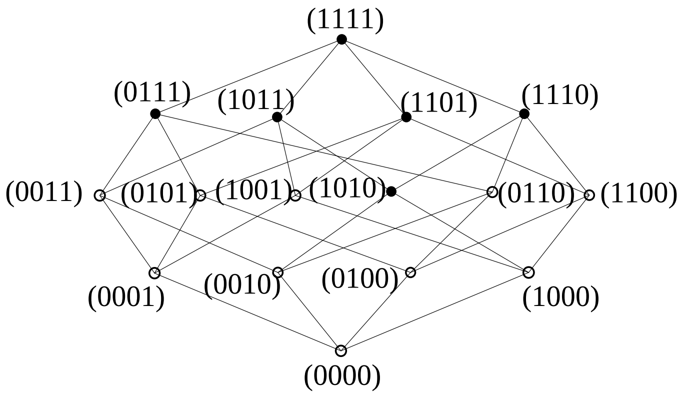


Рис. 2

Теорема. *Класс* A_1 *всех монотонных функций замкнут.*

Доказательство. Пусть $f, f_1, \ldots, f_m$ – монотонные функции. Рассмотрим суперпозицию

$$h(x_1,\ldots,x_n)=f(f_1(x_1,\ldots,x_n),\ldots,f_m(x_1,\ldots,x_n)).$$

Пусть $\tilde{\sigma}\le\tilde{\tau}$. Тогда $f_i(\tilde{\sigma})\le f_i(\tilde{\tau}),\quad i=\overline{1,m}$, или

$$(f_1(\tilde{\sigma}),\ldots,f_m(\tilde{\sigma}))\le(f_1(\tilde{\tau}),\ldots,f_m(\tilde{\tau})).$$

Отсюда в силу монотонности f имеем

$$f(f_1(\tilde{\sigma}),\ldots,f_m(\tilde{\sigma}))\le f(f_1(\tilde{\tau}),\ldots,f_m(\tilde{\tau})),$$

то есть $h(\tilde{\sigma})\le h(\tilde{\tau})$.▲

Теорема (о немонотонной функции). *Пусть* f *– немонотонная функция. Тогда подходящими подстановками 0, 1,* x *на места переменных функции* f *можно получить отрицание* $\bar{x}$.

Δ В силу немонотонности f существует пара сравнимых наборов $\tilde{\sigma}\le\tilde{\tau}$ такая, что

$$0=f(\tilde{\tau})\le f(\tilde{\sigma})=1.$$

В матрице $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_4 \\ \sigma_1 & \sigma_2 & \ldots & \sigma_4 \\ \tau_1 & \tau_2 & \ldots & \tau_4 \end{pmatrix}$ две последние строки состоят из столбцов вида $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$. Множество переменных разобьем на три группы N_1, N_2, N_3. К группе N_1 отнесем все переменные, под которыми стоит столбец $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$, к группе N_2 отнесем все переменные, под которыми стоит столбец $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, к группе N_3 отнесем все оставшиеся переменные.

Рассмотрим подстановку в функцию f: на места переменных группы N_1 подставим 0, на места переменных группы N_2 подставим 1, на места переменных группы N_3 подставим x. Тогда получается функция одного переменного $\varphi(x)$ такая, что $\varphi(0)=f(\tilde{\sigma})=1,\quad \varphi(1)=f(\tilde{\tau})=0$. Следовательно, $\varphi(x)=\bar{x}$.▲

3.4. Самодвойственные функции

Определение. *Функция* $f(x_1, \ldots, x_n)$ *называется самодвойственной, если* $f(x_1, \ldots, x_n) = \bar{f}(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)$ *или, что то же самое,* $f(x_1, \ldots, x_n) \neq f(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)$ *- на противоположных наборах функция принимает противоположные значения.*

Примеры.

1. Из функций одного переменного x самодвойственных только две: x и $\bar{x}$.

2. Нет самодвойственных функций, зависящих существенно от двух переменных.

3. Функция голосования от трех переменных $h_2(x, y, z) = xy \vee xz \vee yz$ является самодвойственной, т.к. двойственная к ней $h_2^* = (x \vee y)(x \vee z)(y \vee z)$ после раскрытия скобок приобретает вид:

$$h_2^* = (x \vee yz)(y \vee z) = xy \vee xz \vee yz = h_2 .$$

4. Функция $x \oplus y \oplus z$ является самодвойственной, т.к. $(x \oplus y \vee \oplus z)^* = \overline{\bar{x} \oplus \bar{y} \oplus \bar{z}} = (x \oplus 1 \oplus y \oplus 1 \oplus z \oplus 1) \oplus 1 =$
$= x \oplus y \oplus z.$

5. Для самодвойственной функции $f(\tilde{x})$ функция $f(x_1, \ldots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \ldots, x_n)$ двойственна к функции $f(x_1, \ldots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \ldots, x_n)$, что доказывается простой подстановкой $x_i = 0$ в формулу $f = f^*$:

$$f(x_1, \ldots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \ldots, x_n) = \bar{f}(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_{i-1}, 1, \bar{x}_{i+1}, \ldots, \bar{x}_n),$$

т.е. на противоположных наборах $(x_1, \ldots, x_{i-1},\ x_{i+1}, \ldots, x_n)$, $(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_{i-1},\ \bar{x}_{i+1}, \ldots, \bar{x}_n)$ функции $f(x_1, \ldots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \ldots, x_n)$, $f(x_1, \ldots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \ldots, x_n)$ принимают противоположные значения, короче, при любом фиксированном наборе $\tilde{x}$:

$$f(x_1, \ldots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \ldots, x_n) \neq f(\bar{x}_1, \ldots, 1, \bar{x}_{i+1}, \ldots, \bar{x}_n).$$

Теорема. *Класс* D_3 *всех самодвойственных функций замкнут.*

Δ Пусть $f, f_1, \ldots, f_m$ – самодвойственные функции.

Для функции

$$h(x_1, \ldots, x_n) = f(f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, \ldots, x_n))$$

имеем

$$h^*(x_1, \ldots, x_n) = \bar{f}(f_1(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n), \ldots, f_m(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)) =$$
$$= \bar{f}\left(\overline{\overline{f_1}}(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n), \ldots, \overline{\overline{f_m}}(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)\right) =$$
$$= \bar{f}\left(\bar{f}_1^*(x_1, \ldots, x_n), \ldots, \bar{f}^*(x_1, \ldots, x_n)\right) =$$
$$= \bar{f}\left(\bar{f}_1^*, \ldots, \bar{f}_m^*\right) = f^*\left(f_1^*, \ldots, f_m^*\right) = f(f_1, \ldots, f_m) = h(x_1 \ldots x_n). \blacktriangle$$

Теорема (о несамодвойственной функции). *Пусть* $f(\tilde{x})$ – *несамодвойственная функция. Подходящими подстановками* x, $\bar{x}$ *на места переменных функции* $f(\tilde{x})$ *можно получить константу.*

Δ Из несамодвойственности функции $f(\tilde{x})$ следует, что существует пара противоположных наборов $(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$, $(\bar{\sigma}_1, \ldots, \bar{\sigma}_n)$ таких, что $f(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) = f(\bar{\sigma}_1, \ldots, \bar{\sigma}_n)$.

В матрице $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_n \\ \sigma_1 & \sigma_2 & \ldots & \sigma_n \\ \bar{\sigma}_1 & \bar{\sigma}_2 & \ldots & \bar{\sigma}_n \end{pmatrix}$ две нижние строки составляются из столбцов двух видов $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Множество переменных разобьем на две группы. К первой группе относим переменные, под которыми стоит столбец $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, ко второй группе – все оставшиеся переменные.

Произведем подстановку на места переменных функции $f(\tilde{x})$: на места первой группы переменных подставим x, на места второй группы - $\overline{x}$. В результате получим функцию от одного переменного $\varphi(x)$ такую, что

$\varphi(0)=f(\sigma_1,\ldots,\sigma_n)=f(\overline{\sigma}_1,\ldots,\overline{\sigma}_n)=\varphi(1)$, т.е. $\varphi(x)$ - константа. ▲

3.5. Линейные функции

Определение. *Функция* $f(\tilde{x})$ *называется линейной, если ее полином Жегалкина имеет вид*

$$a_1x_1\oplus a_2x_2\oplus\ldots\oplus a_nx_n\oplus a_0.$$

Классу линейных функций L_1 принадлежат функции: 0, 1, x, $\overline{x}=x\oplus 1$, $x\sim y=x\oplus y\oplus 1$, $x\oplus y$.

Простейшие свойства линейной функции:

1) $\overline{x}_1\oplus x_2\oplus\ldots\oplus x_n\oplus\alpha=x_1\oplus\overline{x}_2\oplus\ldots\oplus x_n\oplus\alpha=...=$
$=x_1\oplus x_2\oplus\ldots\oplus\overline{x}_n\oplus\alpha=x_1\oplus\ldots\oplus x_n\oplus\overline{\alpha}$;

2) $x_1\oplus\ldots\oplus x_i\oplus\ldots\oplus x_j\oplus\ldots\oplus x_n\oplus\alpha=$
$=x_1\oplus\ldots\oplus\overline{x}_i\oplus\ldots\oplus\overline{x}_j\oplus\ldots\oplus x_n\oplus\alpha,\quad 1\le i<j\le n$;

3) линейная функция принимает противоположные значения на любой паре соседних наборов;

4) линейная функция принимает одно и то же значение на наборе с фиксированным числом единиц.

Проиллюстрируем свойства линейной функции $x_1\oplus x_1\oplus x_2\oplus x_4\oplus 1$ на четырехмерном кубе, рис. 3. Символы 0 и 1 чередуются от яруса к ярусу, на наборах одного яруса линейная функция принимает одно и то же значение.

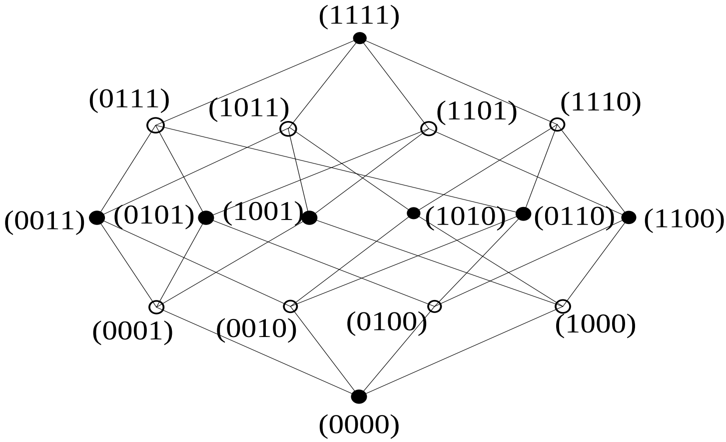


Рис. 3

Ранее отмечалось утверждение.

Теорема. *Класс* L_1 *всех линейных функций замкнут*.

Теорема (о нелинейной функции). *Пусть* $f(\tilde{x})$ *нелинейная функция. Подходящими подстановками на места переменных функции* $0, 1, x, y, \bar{x}, \bar{y}$ *можно получить конъюнкцию* $x\,y$ *или «штрих Шеффера»* $x|y$.

Δ В полиноме Жегалкина для нелинейной функции содержится хотя бы одна конъюнкция ранга ≥ 2. Предположим для определенности, что конъюнкция содержит переменные x_1 и x_2. Тогда вынесением переменных x_1 и x_2 за скобки полином можно привести к виду

$$x_1x_2f_1(x_3,\ldots,x_4)\oplus x_1f_2(x_3,\ldots,x_n)\oplus x_2f_3(x_3,\ldots,x_n)\oplus$$
$$\oplus f_4(x_3,\ldots,x_n), \qquad (1)$$

где f_1 не равняется тождественно 0. Существует набор $(\sigma_3, \ldots, \sigma_n)$ такой, что $f_1(\sigma_3, \ldots, \sigma_n) = 1$. Выполнив подстановку в (1) $x_i = \sigma_i$, $i = \overline{3, n}$, получим при подходящих a, b, c форму

$$x_1x_2 \oplus a\,x_1 \oplus b\,x_2 \oplus c. \qquad (2)$$

Это есть нелинейная функция от двух переменных. Выполнив преобразования над (2), получим

$$(x_1 \oplus b)(x_2 \oplus a) \oplus ab \oplus c. \qquad (3)$$

Подставляя в (3) $x_1 = x \oplus b, \quad x_2 = y \oplus a$, получим

$$xy \oplus ab \oplus c,$$

при $ab \oplus c = 0$ это xy, при $ab \oplus c = 1$ это $x|y$. ▲

3.6. Теорема о полноте

Теорема. *Для того чтобы система функций* N *была полной в алгебре логики, необходимо и достаточно, чтобы она содержала:*

1) *функцию* f_1*, не сохраняющую* 0, $\quad f_1 \notin C_3$*;*
2) *функцию* f_2*, не сохраняющую* 1, $\quad f_2 \notin C_2$*;*
3) *немонотонную функцию* f_3, $f_3 \notin A_1$*;*
4) *несамодвойственную функцию* f_4, $\quad f_4 \notin D_3$*;*
5) *нелинейную функцию* f_5, $\quad f_5 \notin L_1$.

Δ Необходимость следует из неполноты и замкнутости классов C_3, C_2, A_1, D_3, L_1.

Достаточность. Отождествим переменные у функций f_1 и f_2: $\varphi = f_1(x, \ldots, x), \quad \psi = f_2(x, \ldots, x)$. Возможны два случая:

1) $\{\varphi, \psi\} = \{0, 1\}$, т.е. получены константы;

2) получено отрицание $\bar{x}$ $(\varphi = \bar{x} \quad \text{или} \quad \psi = \bar{x})$.

Если осуществлен первый случай, то, по теореме о немонотонной функции, система $\{0, 1, x, f_3\}$ дает отрицание $\bar{x}$, и мы располагаем всеми функциями одного переменного $0, 1, \bar{x}, x$.

Если осуществлен второй случай, то, по теореме о несамодвойственной функции, система $\{\bar{x}, f_4\}$ дает константу α, а при $x = \alpha$ из $\bar{x}$ получается другая константа $\bar{\alpha}$, и мы опять располагаем всеми функциями одного переменного $0, 1, x, \bar{x}$.

Имея в распоряжении функции $0, 1, x, \bar{x}, y, \bar{y}$, по теореме о нелинейной функции, система $\{f_5, 0, 1, x, \bar{x}, y, \bar{y}\}$ дает конъюнкцию $x\,y$ или «штрих Шеффера» $x|y$.

Таким образом, построена полная система $\{\bar{x}, x\,y\}$ или $\{x|y\}$. ▲

Пример. Формулу $(x \vee z)(y \vee \bar{x})$ в базисе $\{\&, \vee, ^{-}\}$ преобразуем в эквивалентные ей формулы в базисах

1) $\bar{x}, x|y$;   2) $\bar{x}, x \uparrow y$;   3) $\bar{x}, x \to y$;   4) $x \leftrightarrow y, \bar{x}$.

Δ По теореме о полноте первые три системы являются полными, а четвертая система содержится в классе L_1 и поэтому не полна. Следовательно, задача в первых трех вариантах выполнима.

1. $x\,y = \overline{x|y}, \quad x \vee y = \overline{\bar{\bar{x}}\,\bar{\bar{y}}} = \bar{x}|\bar{y}, \quad (x \vee z)(y \vee \bar{x}) =$

$= \overline{\overline{(x \vee z)(y \vee \bar{x})}} = \overline{\overline{\bar{x}\,\bar{z}}\,|\,\overline{\bar{y}\,x}} = \overline{(\bar{x}|\bar{z})\,|\,(\bar{y}|x)}.$

2. $x \vee y = \overline{x \uparrow y}, \quad x\,y = \overline{\bar{x} \vee \bar{y}} = \bar{x} \uparrow \bar{y}, \quad (x \vee z)(y \vee \bar{x}) =$

$= \overline{(x \uparrow z)}\;\overline{(y \uparrow \bar{x})} = \overline{(x \uparrow z) \vee (y \uparrow \bar{x})} = (x \uparrow z) \uparrow (y \uparrow \bar{x}).$

3. $x \vee y = \bar{x} \to y, \quad x\,y = \overline{\bar{x} \vee \bar{y}} = \overline{x \to \bar{y}}, \quad (x \vee z)(y \vee \bar{x}) =$

$= (\bar{x} \to z)(\bar{y} \to \bar{x}) = \overline{(\bar{x} \to z) \to \overline{\bar{y} \to \bar{x}}}.$

Замечание. Во избежание возможных ошибок в задачах перехода в формулах к другому базису рекомендуем «забыть» о приоритетности действия операндов и заранее расставить все необходимые скобки.

4. Минимизация функций в классе ДНФ

4.1. Основные определения. Постановка задачи

Под сложностью ДНФ понимается число вхождений букв переменных, считаясь с кратностью. ДНФ функции f, соответствующая минимальной сложности, называется минимальной ДНФ (или МДНФ).

Пусть $\{0,1\}^n$ - множество всех наборов из нулей и единиц длины n, $U \subseteq \{0,1\}^n$. Подмножество U называется интервалом, если существует пара сравнимых наборов $\tilde{\sigma} \le \tilde{\tau}$ такая, что

$U = \{\, \tilde{x} \mid \tilde{\sigma} \le \tilde{x} \le \tilde{\tau} \}$.

Лемма 1. *Множество всех решений* $(x_1, \ldots, x_n)$ *уравнения*

$$x_{i_1}^{\sigma_{i_1}} x_{i_2}^{\sigma_{i_2}} \ldots x_{i_r}^{\sigma_{i_r}} = 1, \quad \text{где} \quad 1 \le i_1 \le \ldots \le i_r \le n, \qquad (1)$$

является интервалом.

Δ Уравнение (1) равносильно системе

$$x_{i_1}^{\sigma_{i_1}} = 1, x_{i_2}^{\sigma_{i_2}} = 1, \ldots, x_{i_r}^{\sigma_{i_r}} = 1,$$

то есть системе

$$x_{i_1} = \sigma_{i_1}, \quad x_{i_2} = \sigma_{i_2}, \ldots, x_{i_n} = \sigma_{i_n}.$$

Множество всех решений описывается как множество наборов

$$\{(x_1, \ldots, x_{i_1 - 1}, \sigma_{i_1}, x_{i_1 + 1}, \ldots, x_{i_r - 1}, \sigma_{i_r}, x_{i_r + 1}, \ldots, x_n)\}, \qquad (2)$$

где переменные (параметры) свободно пробегают значения 0, 1.

Очевидно, что минимальный набор –

$\tilde{\sigma} = (0, \ldots, 0, \sigma_{i_1}, 0, \ldots, 0, \sigma_{i_r}, 0, \ldots, 0)$,

максимальный набор –

$\tilde{\tau} = (1, \ldots, 1, \sigma_{i_1}, 1, \ldots, 1, \sigma_{i_r}, 1, \ldots, 1)$.

Число решений равно 2^{n-r}, множество всех решений есть подкуб (грань) размерности $n - r$ в n-мерном единичном кубе. ▲

Лемма 2. *Любой интервал* U, $U \subseteq \{0,1\}^n$, *может быть представлен как множество решений подходящего уравнения* (1).

Δ Пусть $U = \{\tilde{x} \mid \tilde{\sigma} \le \tilde{x} \le \tilde{\tau}\}$. В любом столбце матрицы

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ \sigma_1 & \sigma_2 & \dots & \sigma_n \\ \tau_1 & \tau_2 & \dots & \tau_n \end{pmatrix} \qquad (3)$$

под переменной стоит один из столбцов трех видов $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Пусть константные столбцы стоят под переменными

$$x_{i_1}, \dots, x_{i_r} \quad (1 \le i_1 \le \dots \le i_r \le n).$$

Тогда уравнение (1) примет вид $x_{i_1}^{\sigma_{i_1}} \dots x_{i_r}^{\sigma_{i_r}} = 1$, где степень σ_{i_r} у переменной x_{i_k} определяется столбцом $\begin{pmatrix} \sigma_{i_k} \\ \tau_{i_k} \end{pmatrix}$ под переменной x_{i_k} в матрице (3), $1 \le k \le r$, а переменные, под которыми в (3) стоит столбец $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, являются свободными параметрами (переменными). ▲

Следствие. *Таким образом, существует взаимнооднозначное соответствие между интервалами и элементарными конъюнкциями над данным алфавитом переменных* $x_1, \dots, x_n$.

Будем говорить, что набор $\tilde{\alpha}$ покрывается элементарной конъюнкцией K, если $K(\tilde{\sigma}) = 1$.

Пусть $N \subseteq \{0,1\}^n$. Интервал U называется максимальным в N, если $U \subseteq N$ и не существует интервала U', отличного от U такого, чтобы выполнялись включения $U \subset U' \subseteq N$.

Интервалы $U_1, \dots, U_k$ покрывают множество N, $N \subseteq \{0,1\}^n$, если $N = U_1 \cup \dots \cup U_k$ есть теоретико-множественное объединение интервалов $U_1, \dots, U_k$. В дальнейшем нас будет интересовать покрытие N всеми максимальными интервалами. Такое покрытие единственно.

Иногда выделяют так называемые тупиковые покрытия, когда после изъятия из системы покрывающих максимальных интервалов хотя бы одного интервала оставшаяся подсистема максимальных интервалов вообще не является покрытием.

Лемма 3. *Пусть* $N_f \subseteq \{0,1\}^n$, N_f *- множество всех наборов, в которых функция* $f(x_1,\ldots,x_n)$ *принимает значение 1. Пусть* $N_f = U_1 \bigcup \ldots \bigcup U_k$ *- покрытие множества* N_f. *Для каждого* i, $1 \le i \le k$, *по леммам 1 и 2 интервалу* U_i *соответствует элементарная конъюнкция* K_i. *Тогда функция* $f(x_1,\ldots,x_n)$ *представима ДНФ*

$$\bigvee_{i=1}^{k} K_i = f\,. \tag{4}$$

Обратно, каждое представление (4) *отвечает покрытию* N_f *соответствующими интервалами согласно леммам 1 и 2.*

Δ Пусть $U_1 \cup \ldots \cup U_k = N_f$ и $\tilde{\sigma} \in N_f$. Следовательно, $\tilde{\sigma} \in U_i$, $1 \le i \le k$, при подходящем i. Тогда $K_i(\tilde{\sigma}) = 1$ и $f(\tilde{\sigma}) = 1$. Обратно, пусть $\bigvee_{i=1}^{k} K_i = f$ и $f(\tilde{\sigma}) = 1$. Тогда для подходящего i, $1 \le i \le k$, $K_i(\tilde{\sigma}) = 1$, $\tilde{\sigma} \in U_i$ и $N_f = U_1 \cup \ldots \cup U_k$. ▲

4.2. Алгоритмы получения сокращенной и тупиковых ДНФ функции

Определения. *ДНФ функции* $f(\tilde{x})$ *называется сокращенной ДНФ, если ДНФ отвечает покрытию* N_f *всеми максимальными интервалами. ДНФ функции* f *называется тупиковой ДНФ, если она может быть получена из сокращенной ДНФ удалением некоторых конъюнкций и притом тупиковая ДНФ отвечает тупиковому покрытию множества* N_f. *Тупиковая*

ДНФ называется минимальной ДНФ, если она содержит минимальное число вхождений букв переменных. Тупиковая ДНФ называется кратчайшей ДНФ, если она содержит минимальное число элементарных конъюнкций.

1. Метод Квайна для получения сокращенной ДНФ

Интервалы кодируем наборами из символов 0, 1, 2. Пусть интервал U описывается конъюнкцией

$$x_{i_1}^{\sigma_{i_1}} \dots x_{i_r}^{\sigma_{i_r}}.$$

Интервалу U (и конъюнкции) соответствует код $\left(2, \dots, 2, \sigma_{i_1}, 2, \dots, \sigma_{i_r}, 2, \dots, 2\right) = \text{КОД}(U)$.

Два интервала U_1 и U_2 называются соседними по i-й компоненте, если их коды разнятся только в i-й компоненте. Операция склейки интервалов – соседние интервалы U_1 и U_2 объединяются (склеиваются) в третий интервал $U_3 = U_1 \cup U_2$, и его кодом будет набор, который получается из $\text{КОД}(U_1)$ (или $\text{КОД}(U_2)$) заменой i-го символа на 2.

Метод Квайна заключается в том, что над множеством N_f производятся всевозможные склейки. Подобные действия имеют естественный конец, когда склеек больше нет. Пусть мы имеем окончательный перечень кодов

$$\text{КОД}(U_1), \dots, \text{КОД}(U_m).$$

Им отвечают конъюнкции (согласно лемме 2) $K_1, \dots, K_m$ и сокращенная ДНФ: $K_1 \vee \dots \vee K_m$.

Пример 1. Сокращенная ДНФ для линейной функции совпадает с ее СДНФ.

Действительно, N_f для линейной функции f не имеет склеек, т.к. в N_f нет ни одной пары соседних наборов, ибо соседние наборы находятся на разных соседних ярусах n-мерного куба (см. рис. 3).

Пример 2. Сокращенная ДНФ для монотонной функции определяется множеством нижних единиц (см. рис. 2). Пусть набор $\tilde{\sigma}$ – нижняя единица, тогда множество $\left\{\tilde{x} \,\middle|\, \tilde{\sigma} \le \tilde{x} \le \tilde{1}\right\}$ – максимальный интервал.

Матрица $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ \sigma_1 & \sigma_2 & \dots & \sigma_n \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$ ни под какой переменной не имеет столбца $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Пусть $x_{i_1}, \dots, x_{i_r}$ – переменные, под которыми стоит столбец $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Тогда максимальный интервал описывается положительной конъюнкцией $x_{i_1} \& \dots \& x_{i_r}$.

Из примера выводится три следствия.

Следствие 1. *Сокращенная ДНФ для монотонной функции не содержит отрицаний переменных*.

Следствие 2. *Сокращенная ДНФ для монотонной функции является единственной тупиковой ДНФ*.

Следствие 3. *Монотонная функция, тождественно не равная константе, выразима формулой в базисе* $x\,y, x \vee y$.

Пример 3. Рассмотрим функцию голосования от трех переменных $h_2(x, y, z)$; $N_{h_2} = \{(011), (101), (110), (111)\}$. Произведем склейки (их всего три): (211), (121), (112). После декодирования имеем три конъюнкции

$$y\,z,\ x\,z,\ x\,y$$

и сокращенную ДНФ

$$h_2 = x\,y \vee x\,z \vee y\,z.$$

Пример 4. Формы $x\,y, x \vee y$ являются сокращенными ДНФ для конъюнкции и дизъюнкции соответственно. Для импликации $x \to y$ имеем $N_{x \to y} = \{(0\,0), (01), (11)\}$. Здесь две склейки (02), (21), и отсюда $\bar{x} \vee y$ – сокращенная ДНФ. Для функции «штрих Шеффера» сокращенная ДНФ – $\bar{x} \vee \bar{y}$; для «стрелки Пирса» – $\bar{x}\,\bar{y}$; для эквиваленции $x \sim y$ это $x\,y \vee \bar{x}\,\bar{y}$ (совпадает с СДНФ эквиваленции).

2. Метод Нельсона для получения сокращенной ДНФ

Метод эффективен, если функция имеет «сравнительно мало» нулей.

Расписывается СКНФ по таблице или преобразуется из формулы, задающей данную функцию. В СКНФ раскрывают все скобки, удаляют конъюнкции, которые поглощаются по формулам полного поглощения. То, что остается, и есть сокращенная ДНФ.

Пример 5. Найдем сокращенную ДНФ для функции $h_2(x, y, z)$ методом Нельсона.

СКНФ

$$h_2(x, y, z) = (x \vee y \vee z)(x \vee y \vee \bar{z})(x \vee \bar{y} \vee z)(\bar{x} \vee y \vee z).$$

Раскрываем скобки:

$$(x \vee y \vee z\bar{z})(z \vee (x \vee \bar{y})(\bar{x} \vee y)) = (x \vee y)(z \vee xy \vee \bar{x}\bar{y}) =$$

$= xz \vee xy \vee yz \vee xy = xy \vee xz \vee yz$, что и требовалось.

3. Метод Мак-Класки для получения тупиковых ДНФ

Каждой конъюнкции K_i, $i = \overline{1, m}$, сокращенной ДНФ соответствует булева переменная y_i: $y_i = 1$, если K_i входит в тупиковую ДНФ, $y_i = 0$ в противном случае. Составляется таблица (см. табл. 4),

Таблица 4

N_f	K_1	K_2	$\ldots$	K_s	$\ldots$	K_m
$\sigma_{11} \ldots \sigma_{1n}$	a_{11}	a_{12}	$\ldots$	a_{1s}	$\ldots$	a_{1m}
$\sigma_{21} \ldots \sigma_{2n}$	a_{21}	a_{22}	$\ldots$	a_{2s}	$\ldots$	a_{2m}
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
$\sigma_{r1} \ldots \sigma_{rn}$	a_{r1}	a_{r2}	$\ldots$	a_{rs}	$\ldots$	a_{rm}
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$

где на пересечении строки $(\sigma_{r1} \ldots \sigma_{rn})$ и столбца K_s ставится символ a_{rs}, равный 1, если $K_s(\sigma_{r1} \ldots \sigma_{rn}) = 1$, и 0 – в противном случае. Для покрытия множества единиц N_f функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ необходимо и достаточно выполнимости формулы

$$\underset{r:\tilde{\sigma}\in N_f}{\&} \bigvee_{s=1}^{m} a_{rs} \cdot y_s . \qquad (5)$$

Формула (5) представляет собой КНФ монотонной функции выбора покрытия от переменных $y_1, \ldots, y_m$. После раскрытия скобок и выполнения элементарных поглощений получается сокращенная ДНФ над алфавитом $y_1, \ldots, y_m$, каждая конъюнкция Π_j которой выражает j-ю тупиковую ДНФ для функции $f(x_1, \ldots, x_n)$:

$$T_j = \bigvee_{i:(y_i \text{ вх.в } \Pi_j)} K_i$$

(дизъюнкция по таким i, что переменная y_i входит в конъюнкцию Π_j). Затем среди тупиковых ДНФ T_j отмечают минимальную ДНФ, кратчайшую ДНФ (их может быть несколько).

Пример 6. Найдем тупиковую ДНФ для функции $g(x_1, \ldots, x_n)$, N_g ={(0110), (0010), (1101), (1011), (1010), (1001)}. После склеек в N_g получим коды

{(1012), (1021), (1201), (0210), (2010)}.

Им соответствует сокращенная ДНФ

$x_1\bar{x}_2x_3 \vee x_1\bar{x}_2x_4 \vee x_1\bar{x}_3x_4 \vee \bar{x}_1x_3\bar{x}_4 \vee \bar{x}_2x_3\bar{x}_4$.

Заполним таблицу 5.

Таблица 5

N_f	1012	1021	1201	0210	2010
	$x_1\bar{x}_2x_3$	$x_1\bar{x}_2x_4$	$x_1\bar{x}_3x_4$	$\bar{x}_1x_3\bar{x}_4$	$\bar{x}_2x_3\bar{x}_4$
1010	1	0	0	0	1
1011	1	1	0	0	0
1001	0	1	1	0	0
1101	0	0	1	0	0
0010	0	0	0	1	1
0110	0	0	0	1	0
	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5

Составим функцию выбора и представим ее в сокращенной ДНФ:

$$(y_1 \vee y_5)(y_1 \vee y_2)(y_2 \vee y_3)(y_4 \vee y_5)y_3 y_4 = y_1 y_3 y_4 \vee y_2 y_3 y_4 y_5 .$$

Отсюда получаем тупиковые ДНФ:

T_1: $x_1\bar{x}_2 x_3 \vee x_1\bar{x}_3 x_4 \vee \bar{x}_1 x_3 \bar{x}_4$.

T_2: $x_1\bar{x}_2 x_4 \vee x_1\bar{x}_3 x_4 \vee \bar{x}_1 x_3 \bar{x}_4 \vee \bar{x}_2 x_3 \bar{x}_4$.

Тупиковая T_1 соответствует минимальной и кратчайшей ДНФ.

Пример 7. Найдем тупиковую ДНФ для функции f, N_f ={(000), (001), (011), (101), (110)}. Сокращенную ДНФ здесь проще отыскать методом Нельсона, так как $f = 0$ всего на трех наборах (100), (010), (111). Поэтому получим:

$$(\bar{x} \vee y \vee z)(x \vee \bar{y} \vee z)(\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z}) = \bar{x}\,\bar{y} \vee \bar{x}\,z \vee \bar{y}\,z \vee x\,y\,\bar{z} .$$

Заполним таблицу 6.

Таблица 6

Коды интервалов	002	021	201	110
N_f	$\bar{x}\,\bar{y}$	$\bar{x}\,z$	$\bar{y}\,z$	$x\,y\,\bar{z}$
0 0 0	1	0	0	0
0 0 1	1	1	1	0
0 1 1	0	1	0	0
1 0 1	0	0	1	0
1 1 0	0	0	0	1
	y_1	y_2	y_3	y_4

Функция выбора

$$y_1(y_1 \vee y_2 \vee y_3)y_2 y_3 y_4 = y_1 y_2 y_3 y_4 .$$

Таким образом, сокращенная ДНФ является и тупиковой.

4.3. Тупиковые ДНФ для систем функций

Чтобы найти тупиковые ДНФ для каждой булевой функции системы $f_0(x_1,\ldots,x_n),\ldots,f_s(x_1,\ldots,x_n)$ необязательно повторять одну и ту же процедуру $s+1$ раз (аналогично, как в математическом анализе необязательно для нахождения градиента функции вычислять производные по всем переменным в отдельности). Для этого достаточно воспользоваться мультиплексором k-го порядка, $k = \lceil \log(s+1) \rceil$, и рассмотреть функцию $\varphi(x_1,\ldots,x_n,z_1,\ldots,z_k) = \bigvee\limits_{\tilde{\sigma}:\,\tilde{\sigma}\le s} z_1^{\sigma_1}\ldots z_k^{\sigma_k} f_{|\tilde{\sigma}|}(x_1,\ldots,x_n)$, где $\tilde{\sigma}$ – двоичная запись десятичного числа $|\tilde{\sigma}|$.

На множестве N_φ единиц функции $\varphi(\tilde{x},\tilde{z})$ произведем все склейки по переменным $x_1,\ldots,\ x_n$. В результате получим множество C всех кодов максимальных интервалов функций $z_1^{\sigma_1}\ldots z_k^{\sigma_k} f_{|\tilde{\sigma}|}(\tilde{x}),\ 0 \le |\tilde{\sigma}| \le s$. Если $S_{f_{|\tilde{\sigma}|}}$ – сокращенная ДНФ функции $f_{|\tilde{\sigma}|}(\tilde{x})$, то по множеству C можно написать ДНФ

$$\bigvee_{\tilde{\sigma}:\,\tilde{\sigma}\le s} z_1^{\sigma_1}\ldots z_k^{\sigma_k} S_{f_{|\tilde{\sigma}|}}$$

всех сокращенных ДНФ функций $z_1^{\sigma_1}\ldots z_k^{\sigma_k} f_{|\tilde{\sigma}|}(\tilde{x}),\ 0 \le |\tilde{\sigma}| \le s$. На множестве C произведем дальнейшие склейки по переменным $z_1,\ldots,\ z_k$ и далее методом Мак-Класки получаем перечень тупиковых ДНФ функции $\varphi(\tilde{x},\tilde{z})$, подставляя в которые $\tilde{z} = \tilde{\sigma}$, получаем тупиковые для функции $f_{|\tilde{\sigma}|}(\tilde{x})$.

Пример. Найти тупиковые ДНФ для пары функций (φ,ψ), если они заданы таблично (см. табл. 7):

Таблица 7

$x_1\ x_2\ x_3$	φ	ψ		$x_1\ x_2\ x_3$	φ	ψ
0 0 0	0	1		1 0 0	0	1
0 0 1	0	0		1 0 1	0	1
0 1 0	1	0		1 1 0	1	1
0 1 1	0	1		1 1 1	1	0

Составим функцию:

$h(x_1, x_2, x_3, z) = \bar{z}\varphi(x_1, x_2, x_3) \vee z\psi(x_1, x_2, x_3)$.

Для нее N_h: (0100), (1100), (1110), (0001), (0111), (1001), (1011), (1101). Тогда, применяя метод Квайна, получим, что коды максимальных интервалов будут следующими:

(2100), (1120), (2001), (0111), (1021), (1201).

Поэтому сокращенная ДНФ имет вид:

$x_2\bar{x}_3\bar{z} \vee x_1x_2\bar{z} \vee \bar{x}_2\bar{x}_3z \vee \bar{x}_1x_2x_3z \vee x_1\bar{x}_2z \vee x_1\bar{x}_3z$.

Далее составляем таблицу (см. табл. 8):

Таблица 8

N_h	2100	1120	2001	0111	1021	1201
0100	1	0	0	0	0	0
1100	1	1	0	0	0	0
1110	0	1	0	0	0	0
0001	0	0	1	0	0	0
0111	0	0	0	1	0	0
1001	0	0	1	0	1	1
1011	0	0	0	0	1	0
1101	0	0	0	0	0	1
	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6

Функция выбора покрытия N_h:

$y_1(y_1 \vee y_2)y_2y_3y_4(y_3 \vee y_5 \vee y_6)y_5y_6 = y_1y_2y_3y_4y_5y_6$.

Получили одну тупиковую ДНФ:

$$x_1x_2\bar{z} \vee \bar{x}_2\bar{x}_3z \vee \bar{x}_1x_2x_3z \vee x_1\bar{x}_2z \vee x_1\bar{x}_3z.$$

При $z = 0$ имеем тупиковую ДНФ для функции φ:

$$T_\varphi : x_2\bar{x}_3 \vee x_1x_2,$$

причем это минимальная ДНФ для φ.

При $z = 1$ получим тупиковую ДНФ для функции ψ:

$$T_\psi^2 : \bar{x}_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1x_2x_3 \vee x_1\bar{x}_2 \vee x_1\bar{x}_3,$$

она также является минимальной ДНФ для ψ.

4.4. Градиентный метод получения тупиковой ДНФ

Рассмотрение таблиц 4, 6 и 8 Мак-Класки для получения всех тупиковых ДНФ с последующим выбором из них одной минимальной и кратчайшей ДНФ практически бывает довольно трудоемко и поэтому нетерпеливые пользователи прибегают к эвристическим («жадным») алгоритмам. Одним из таких является градиентный метод. Он заключается в следующем. В таблице 4 отмечают столбец с максимальным числом единиц, соответствующую покрывающую конъюнкцию относят к строящейся тупиковой ДНФ, а строки с покрывающими наборами и столбец с выбранной конъюнкцией вычеркиваются. В оставшейся таблице снова выбирают столбец с максимальным числом единиц, соответствующую конъюнкцию присовокупляют к строящейся тупиковой ДНФ, а выбранные столбец и строки с покрывающими наборами вычеркивают из таблицы и так делается до тех пор, пока не будет вычеркнута последняя строка. Такая процедура «часто» приводит к тупиковой ДНФ «приемлемой» сложности.

5. Некоторые приемы синтеза схем

5.1. Метод каскадов для схем из функциональных элементов

Метод основывается на формуле К. Э. Шеннона разложения функции алгебры логики $f(x_1, \ldots, x_n)$ по первым k переменным

$$f(x_1,\ldots,x_k,x_{k+1},\ldots,x_n)=\bigvee_{\tilde{\sigma}} x_1^{\sigma_1}\ldots x_k^{\sigma_k} f(\sigma_1,\ldots,\sigma_k,x_{k+1},\ldots,x_n). \tag{1}$$

Доказательство формулы (1). Пусть $(x_1, \ldots, x_k, \ldots, x_n)=(\tau_1, \ldots, \tau_k, \ldots, \tau_n)$. В силу ортогональности конъюнкций $x_1^{\sigma_1}\ldots x_k^{\sigma_k}$ дизъюнктивные слагаемые при подстановке в правую часть (1) $\tilde{x}=\tilde{\sigma}$ обращаются в нуль, за исключением, может быть, одного слагаемого

$$\tau_1^{\sigma_1}\ldots\sigma_k^{\sigma_k} f(\sigma_1, \ldots, \sigma_k, \tau_{k+1},\ldots, \tau_n), \tag{2}$$

когда $(\tau_1, \ldots, \tau_k) = (\sigma_1, \ldots, \sigma_k)$. Здесь значение конъюнкции (2) равно $f(\tau_1, \ldots, \tau_k, \ldots, \tau_n)$, т.е. значению функции f в левой части равенства (1). ▲

Функцию

$$MP^k\left(x_1, \ldots, x_k, y_0, \ldots, y_{2^k-1}\right) = \bigvee_{\tilde{\sigma}} x_1^{\sigma_1} \ldots x_k^{\sigma_k} y_{|\tilde{\sigma}|}, \qquad (3)$$

где $\tilde{\sigma}$ двоичная запись числа $|\tilde{\sigma}|$, назовем мультиплексором порядка k. Ясно, что при $y_{|\tilde{\sigma}|} = f(\sigma_1, \ldots, \sigma_k, x_{k+1}, \ldots, x_n)$ в (3) имеем формулу (1).

Мультиплексор первого порядка

$$MP(x_1, y_0, y_1) = \bar{x}_1 y_0 \vee x_1 y_1$$

имеет схему из функциональных элементов в базисе $\{\&, \vee, ^{-}\}$ на рис. 4.

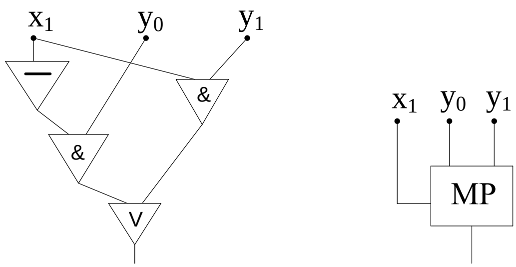


Рис. 4

Мультиплексор второго порядка может быть получен как суперпозиция мультиплексоров первого порядка, рис. 5.

$$MP^2(x_1, x_2, y_0, y_1, y_2, y_3) = \bar{x}_1(\bar{x}_2 y_0 \vee x_2 y_1) \vee x_1(\bar{x}_2 y_2 \vee x_2 y_3).$$

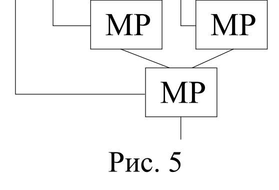


Рис. 5

Мультиплексор k-го порядка может быть получен по рекуррентной формуле:

$$MP\left(x_1, MP^{k-1}\left(x_2,\dots,x_k, y_0,\dots,y_{2^{k-1}-1}\right),\right.$$
$$\left.MP^{k-1}\left(x_2,\dots,x_k, y_{2^{k-1}},\dots,y_{2^k-1}\right)\right)=$$
$$= MP^k\left(x_1,\dots,x_k, y_0,\dots,y_{2^{k-1}-1}\right)$$ (см. также рис.6).

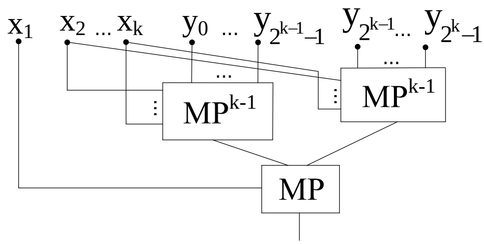


Рис. 6

Для построения мультиплексора k- го порядка потребуется $2^{k-1}+1$ мультиплексоров 1-го порядка. Схема на рис. 6 представляет собой дерево из мультиплексоров 1-го порядка с k ярусами.

Метод каскадов заключается в том, что если располагать универсальным блоком, реализующим все функции от переменных $x_{k+1},\dots,x_n$, то, подсоединяя подходящие выходы универсального блока к соответствующим входам мультиплексора k-го порядка, мы получаем реализацию схемы из функциональных элементов для заданной функции $f\left(x_1,\dots,x_n\right)$. Очевидно, что универсальный блок может обеспечивать реализацию не одной функции $f\left(\tilde{x}\right)$, а системы функций $\left\{f_1,\dots,f_m\right\}$.

Пример 1. Методом каскадов реализуем пару функций φ и ψ, табл. 9.

Таблица 9

x, y, z	φ	ψ	x, y, z	φ	ψ
000	0	0	100	1	1
001	0	0	101	1	1
010	1	1	110	0	1
011	0	1	111	0	0

Воспользуемся формулой (1)

$$\varphi(x, y, z) = \bar{x}\,\bar{y}\,\varphi(0,0,z) \vee \bar{x}\,y\,\varphi(0,1,z) \vee x\,\bar{y}\,\varphi(1,0,z) \vee$$
$$\vee\, x\,y\,\varphi(1,1,z),$$
$$\psi(x, y, z) = \bar{x}\,\bar{y}\,\psi(0,0,z) \vee \bar{x}\,y\,\psi(0,1,z) \vee x\,\bar{y}\,\psi(1,0,z) \vee$$
$$\vee\, x\,y\,\psi(1,1,z)$$

и универсальным блоком (см. рис. 7).

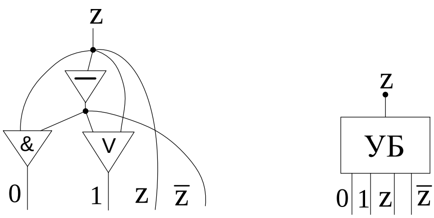


Рис. 7

По табл. 9 имеем

$$\varphi(0,0,z) = 0,\ \psi(0,0,z) = 0; \quad \varphi(0,1,z) = \bar{z},\ \psi(0,1,z) = 1;$$
$$\varphi(1,0,z) = 1,\ \psi(1,0,z) = 0; \quad \varphi(1,1,z) = 0,\ \psi(1,1,z) = \bar{z}.$$

Далее см. рис. 8.

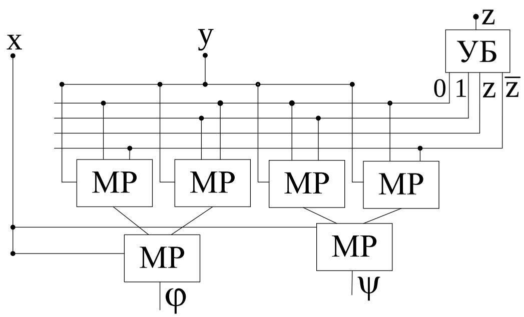


Рис. 8

Замечание. Из рис. 8 видно, что два мультиплексора: 1-й и 4-й первого яруса дерева выполняют одну и ту же функцию. Поэтому один из указанных мультиплексоров можно удалить. Например, удалив 4-й мультиплексор, выход 1-го мультиплексора соединяем со вторым входом первого концевого мультиплексора функции ψ .

5.2. Метод каскадов для контактных схем

Система конъюнкций может быть реализована контактным деревом, рис. 9. Дерево имеет k ярусов, i-й ярус содержит 2^i контактов, A – входной полюс дерева, выходных полюсов 2^k. На выходных полюсах дерева реализуются конъюнкции:
$\bar{x}_1\bar{x}_2\ldots\bar{x}_k,\ \bar{x}_1\ldots\bar{x}_{k-1}x_k,\ \ldots,\ x_1x_2\ldots x_k$. Универсальный $\left(2^{2^{n-k}},1\right)$ – многополюсник, рис. 10, имеет один выходной полюс B и $2^{2^{n-k}}$ входных полюса, так что для любой

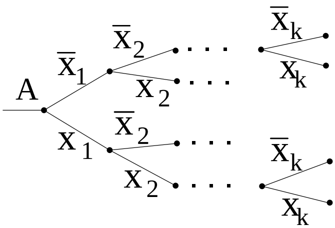


Рис. 9

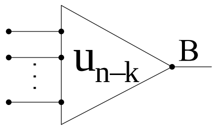


Рис. 10

функции $f\left(\sigma_1, \ldots, \sigma_n, x_{k+1}, \ldots,\ x_n\right)$ существует входной полюс многополюсника u_{n-k} такой, что между полюсами A и B реализуется функция $f\left(\sigma_1\ x_{k+1}, \ldots,\ x_n\right)$. Учтя, что последовательное соединение имеет логическую функцию – конъюнкцию, а параллельное – дизъюнкцию, после выполнения соединений согласно формуле (1) получается контактная схема, реализующая функцию $f\left(x_1, \ldots, x_n\right)$ каскадным методом.

Пример 2. Реализуем методом каскадов контактной схемой пару функций φ и ψ, табл. 8, рис. 11.

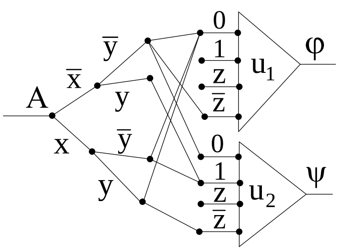


Рис. 11

Замечание. Универсальный многополюсник, реализующий все функции одного переменного, может быть представлен схемой на рис. 12. Однако практически реле z не управляет (управляет фиктивно) подсхемами, реализующими функции 0 и 1, поэтому они могут быть реализованы проще: 0 – это изолятор, 1 – простой проводник. Причем мультиплексор MP^k реализуется как дерево в базисе мультиплексоров 1-го порядка.

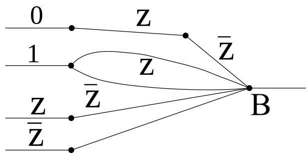


Рис. 12