Экономические специальности

1. Найти угол между касательными, проведенными к интегральным кривым дифференциального уравнения $y'y^2+x^3+xy=0$ в точках $(-1;1)$ и $(2;2)$.
2. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-3}{10^{\ln(n)}}$.
3. На расстоянии N м от близорукого мудреца лежит предмет. Мудрец замечает предмет только на расстоянии, меньшем 1 м. Он заявил, что найдет предмет, сделав меньше $\frac{3}{2}N+7$ шагов, если ему после каждого шага (длины 1м) будут сообщать «подошел ближе» или «не подошел ближе». Докажите, что мудрец прав.
4. Определить вид кривой $x^2-4y^2-2x+4y=0$.
5. Некоторый капитал K_0 помещен в банк под $p\%$ годовых, начисляемых в конце каждого года. Ежегодно (после начисления процентов) вкладчик снимает со счета одинаковую сумму S. Что можно сказать о соотношении K_0/S, если известно, что через определенное время остаток более чем втрое превышал первоначальный взнос? Через сколько лет произойдет указанное утроение?
6. При каких значениях параметра a график функции $y=a^x$ будет касаться графика функции $y=\log_a x$.

Решение задач (экономическая специальность)

1. Учитывая связь между угловым коэффициентом и производной в точке касания, имеем: $tg\varphi_1 = 2$, $tg\varphi_2 = -3$. Используя формулу для тангенса разности получим: $tg(\varphi_1 - \varphi_2) = \frac{2+3}{1-6} = -1$. Тогда из геометрических соображений определяем $\varphi_1 - \varphi_2 = -\frac{\pi}{4} + \pi = \frac{3\pi}{4}$.
2. Выполним преобразование: $\frac{2n-3}{10^{\ln n}} = \frac{2n-3}{n^{\ln 10}}$. Эта величина эквивалентна $\frac{1}{n^{\ln 10 - 1}}$, откуда следует сходимость исходного ряда, так как $\ln(10) - 1 > 1$.
3. Для начала приближения к предмету потребуется не более 6 шагов. После этого движение происходит в одном направлении до тех пор пока не сообщат, что предмет удаляется, делаем шаг назад и движемся в перпендикулярном направлении, которое зависит от результатов смещений в начальной точке. После сообщения об удалении мы можем однозначно определить квадрат 1×1, в котором находится предмет, либо в процессе движения заметим предмет. Движение по катетам прямоугольного треугольника в самом худшем случае дает оценку $\sqrt{2}n < \frac{3n}{2}$. С учетом начальной и промежуточной коррекций направления движения получаем требуемую оценку.
4. Уравнение перепишем в виде: $(x-1)^2 - (2y-1)^2 = 0$, что соответствует паре пересекающихся прямых $y = \frac{x}{2}$, $y = 1 - \frac{x}{2}$.
5. Общая зависимость от времени: $K_n = K_0\left(1+\frac{p}{100}\right)^n - \frac{100S}{p}\left(\left(1+\frac{p}{100}\right)^n - 1\right) = \left(K_0 - \frac{100S}{p}\right)\left(1+\frac{p}{100}\right)^n + \frac{100S}{p}$, где S-сумма снимаемая с вклада ежегодно. Необходимое условие роста вклада: $\frac{K_0}{S} > \frac{100}{p}$. Для оценки времени утроения вклада выражаем $n \geq \ln\left(3K_0 - \frac{100S}{p}\right) - \ln\left(K_0 - \frac{100S}{p}\right) \Big/ \ln\left(1+\frac{p}{100}\right)$. Для ответа выбирается ближайшее целое, удовлетворяющее неравенству.
6. Отметим, что эти функции взаимно обратные. В точке касания угол составит $\frac{\pi}{4}$ радиан, а угловой коэффициент равен 1. Запишем $a^{x_0} = \log_a x_0$, $y_1'(x_0) = a^{x_0}\ln a = 1$, $y_2'(x_0) = \frac{1}{x_0 \ln a} = 1$. Из первых двух следует, что $x_0 = e$. Учитывая последнее, получим $a = e^{\frac{1}{e}}$.