

Технические специальности старшие курсы.

1. Доказать, что $1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{n^3} < \frac{5}{4}$.
2. На круг радиуса R намотана гибкая нерастяжимая нить длины $2\pi R$.
Найти площадь, которую заметает эта нить при ее полном сматывании с круга (нить всегда находится в натяжении).
3. Пусть $P(x)$ - квадратный трехчлен, $0 \leq P(-1) \leq 1$, $0 \leq P(0) \leq 1$, $0 \leq P(1) \leq 1$.
Доказать, что $P(x) \leq \frac{9}{8}$ для любого $x \in [0, 1]$.
4. Вычислить $\int_0^1 \frac{x^2 + 1}{x^4 + 1} dx$.
5. Решить дифференциальное уравнение 2-го порядка:
 $xy'' - x(y')^2 = y'y, \quad y(0) = 1, y(-1) = e$.
6. Функция $f(x, y)$ для любых $x, y \in \mathbb{R}$ удовлетворяет тождеству
 $f(x + y, xy) = x^3 + y^3 + (x - y)^2$. Какие значения может принимать $f(x, y)$ в ограниченной области $D: \{x + y = 3, xy = 2\}$?

1. Оценим величину сверху:

$$1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{n^3} < 1 + \frac{1}{2(2^2-1)} + \frac{1}{3(3^2-1)} + \dots + \frac{1}{n(n^2-1)} =$$

$$= 1 + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{(n-1) \cdot n \cdot (n+1)} = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1/2}{n+1} - \frac{1/2}{n} < \frac{5}{4}.$$

2. $S = \int_0^{2\pi} \frac{(\phi R)^2}{2} d\phi = \frac{4\pi^3 R^2}{3}.$

3. Рассмотрим многочлен $Q(x) = P(x) - \frac{1}{2}$. $|Q(-1)| \leq \frac{1}{2}$, $|Q(0)| \leq \frac{1}{2}$, $|Q(1)| \leq \frac{1}{2}$.

Используем интерполяционную формулу Лагранжа:

$$Q(x) = \frac{x(x-1)}{2} Q(-1) + (1-x^2) Q(0) + \frac{x(x+1)}{2} Q(1).$$

Для полученного многочлена сделаем оценку

$$|Q(x)| \leq \left| \frac{x(x-1)}{2} \right| \frac{1}{2} + |1-x^2| \frac{1}{2} + \left| \frac{x(x+1)}{2} \right| \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2} \max_{[-1,1]} \left(\left| \frac{x(x-1)}{2} \right| + |1-x^2| + \left| \frac{x(x+1)}{2} \right| \right) \leq \frac{5}{8},$$

откуда следует утверждение задачи.

4. Первый способ: стандартное интегрирование дробно-рациональной функции. Второй способ: заменой $t = x - \frac{1}{x}$ интеграл приводится к виду

$$\int_{-\infty}^0 \frac{dt}{2+t^2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{2}} \Big|_{-\infty}^0 = \frac{\pi\sqrt{2}}{4}.$$

5. Разделим уравнение на xy^2 и введем новую переменную $z(x) = \frac{y'}{y}$.

Уравнение приведет к виду $z' = \frac{z}{x}$, решение которого $z = Cx$. Решая

вспомогательное уравнение, получим $y = C_2 e^{C_1 x^2}$. Из краевых условий

получим $C_1 = C_2 = 1$. Решение примет вид $y(x) = e^{x^2}$.

6. Преобразуем исходное выражение для f :

$$f = (x+y)((x+y)^2 - 3xy) + (x+y)^2 - 4xy.$$

Таким образом $f(x, y) = x^3 - 3xy + x^2 - 4y$. В области D экстремумов нет, следовательно,

из непрерывности функции, наибольшее и наименьшее значения достигаются на границе области. Исследование дает $f_{\min}(1,2) = -12$,

$f_{\max}(2,1) = 2$. Следовательно, область значений функции $[-12, 2]$.