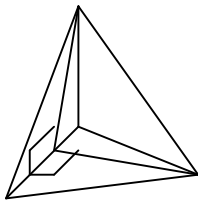


1. Найти все значения a_0 , при которых последовательность $\{a_n\}$ является возрастающей, $a_{n+1} = 2^n - 3a_n$.
2. Найти все многочлены, отличные от нуля, удовлетворяющие условию:
 $P(x^2) = (P(x))^2$, для всех $x \in \mathbb{R}$.
3. Существует ли матрица 4×4 , составленная из чисел $-1, 0, 1$, определитель которой равен 6?
4. Длина одного бокового ребра четырехугольной пирамиды равна x , длины всех остальных ребер принимают значение 1. Выразите объем пирамиды как функцию от x . Найдите x , при котором объем будет наибольшим.
5. Найдите многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами, обращающийся в нуль при $x = \sqrt{2} + \sqrt{3}$.
6. Найти асимптоту для неявно заданной кривой: $x^3 + y^3 = 6xy$ (указание: воспользоваться параметризацией).

1. $a_n = \frac{2^n - (-3)^n}{5} + (-1)^n 3^n a_0 = \frac{1}{5} 2^n + (-1)^n 3^n \left(a_0 - \frac{1}{5} \right)$ выводится из исходного итерационного выражения. Из анализа формулы видно, что возрастание возможно только при $a_0 = \frac{1}{5}$.
2. Предполагая общий вид многочлена: $P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots$. Подставив его в соотношение и приравняв старшие степени получим $a_0 = 1$, $a_1 = 0$. Далее, предполагая первый ненулевой коэффициент $a_k \neq 0$, $k > 1$, получим противоречие. Общий вид многочлена $P_n(x) = x^n$.

3. Существует. Например,
$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 6.$$



4. $V = \frac{\sin \alpha}{8}$, где α - двугранный угол, противолежащий ребру длины x . Очевидно, максимум объема достигается при $\alpha = \frac{\pi}{2}$. Это значение принимается при $x = h\sqrt{2}$, $h = \frac{\sqrt{3}}{2}$ — апофема равностороннего треугольника со стороной 1. Выражение объема через x имеет вид: $V = \frac{x}{8h} \sqrt{1 - \left(\frac{x}{2h} \right)^2} = \frac{x}{4\sqrt{3}} \sqrt{1 - \left(\frac{x}{\sqrt{3}} \right)^2}$.

5. $x^4 - 10x^2 + 1 = 0$.

6. Введем параметр $t = \frac{y}{x}$. Тогда имеем:
$$\begin{cases} x = -\frac{6t}{1+t^3} \\ y = -\frac{6t^2}{1+t^3} \end{cases}, \quad k = \lim_{t \rightarrow -1} \frac{y(t)}{x(t)} = -1,$$

$b = \lim_{t \rightarrow -1} \{y(t) + x(t)\} = 2$. Уравнение асимптоты имеет вид: $y = -x + 2$.