Федеральное агентство по образованию

Рязанский государственный радиотехнический университет

К.В. БУХЕНСКИЙ

ОПОРНЫЕ КОНСПЕКТЫ ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ

Часть 1

Учебное пособие

Рязань 2010

УДК 512.8/514.122/517

Опорные конспекты по высшей математике. Часть 1: учеб. пособие / К.В. Бухенский; Рязан. гос. радиотехн. ун-т. – Рязань, 2010. – 168 с.

Акцент сделан на сообщении студентам сведений, необходимых для практического применения математического аппарата в профессиональной деятельности. Предполагается, что доказательства приведенных теорем и выводы части расчетных сообщений могут быть при необходимости разобраны по рекомендованной литературе. Приведены необходимые примеры решения типовых задач.

Предназначено для студентов, посещающих корректирующие курсы по математике, студентов групп УВЦ, а также может быть использовано в качестве опорного конспекта при подготовке к практическим занятиям и тестированию.

Табл. 8. Ил. 6. Библиогр. 12 назв.

Линейная алгебра, векторная алгебра, аналитическая геометрия, множество, числовые множества, функция, предел последовательности, предел функции, непрерывность функции

Печатается по решению редакционно-издательского совета Рязанского государственного радиотехнического университета.

Рецензент: кафедра высшей математики Рязанского государственного радиотехнического университета (зам. зав. кафедрой старший преподаватель Н.В. Ёлкина)

ОГЛАВЛЕНИЕ

Условные обозначения. Буквы греческого алфавита

◄	– начало решения примера
►	– решение примера завершено
$\varnothing$	– пустое множество
$A \Rightarrow B$	– из высказывания A следует высказывание B
$A \Leftrightarrow B$	– высказывания A и B равносильны
$\mathbf{N}$	– множество натуральных чисел
$\mathbf{Z}$	– множество целых чисел
$\mathbf{Q}$	– множество рациональных чисел
$\mathbf{R}$	– множество действительных чисел
$x \in X$	– элемент x принадлежит множеству X
$i = \overline{1, n}$	– число i принимает последовательно все значения от 1 до n из множества $\mathbf{N}$
$\forall$	– квантор всеобщности (любой, для всякого)
$\exists$	– квантор существования (существует)
Опр.	– определение
м. A	– матрица A
СЛАУ	– система линейных алгебраических уравнений
ФСР	– фундаментальная система решений
ПДСК	– прямоугольная декартова система координат
ПСК	– полярная система координат
к.ч.	– комплексное число
д.ч.	– действительная часть
м.ч.	– мнимая часть
а.д.	– алгебраическое дополнение
л.з.	– линейно зависимые
л. нз.	– линейно независимые
л.пр.	– линейное пространство
ев.пр.	– евклидово пространство
л.о.	– линейный оператор

кв.ф.	– квадратичная форма
т. и т.т.	– тогда и только тогда
н. и д.	– необходимо и достаточно
сл. обр.	– следующим образом
т. о.	– таким образом
сл–но	– следовательно

Буквы греческого алфавита

Буква	**Русское название**	**Буква**	**Русское название**
Α α	альфа	Ν ν	ню (ни)
Β β	бета (вита)	Ξ ξ	кси
Γ γ	гамма	Ο ο	омикрон
Δ δ	дельта	Π π	пи
Ε ε	эпсилон	Ρ ρ	ро
Ζ ζ	дзета (зита)	Σ σ ς	сигма
Η η	эта (ита)	Τ τ	тау (таф)
Θ θ	тета (фита)	Υ υ	ипсилон
Ι ι	йота	Φ φ	фи
Κ κ	каппа	Χ χ	хи
Λ λ	лямбда (лямда)	Ψ ψ	пси
Μ μ	мю (ми)	Ω ω	омега

Предисловие

Математика – это область человеческого знания, в которой изучаются математические структуры. В настоящее время под математикой понимается объединение чистой и прикладной математики.

Чистая математика (теоретическая математика) – это наука, изучающая специальные логические структуры, называемые математическими структурами, для которых заданы определенные отношения между их элементами.

Чистая математика представляет собой стройную и глубокую совокупность знаний о математических структурах со своими проблемами, с собственными путями развития, обусловленными внутренними и внешними задачами.

Прикладная математика является наукой, в которой математическими методами изучаются реальные объекты. Она состоит из математического моделирования, качественного и количественного исследования математических моделей, теории алгоритмов численных решений возникающих при этом задач, математического обеспечения ЭВМ, необходимого для проведения вычислений по указанным алгоритмам.

Очевидно, что обучиться приложениям математики нельзя, не освоив саму математику.

Математика – это систематическая наука, и заниматься ей следует ежедневно, а не от случая к случаю, как это часто, к сожалению, происходит у студентов. К сведению, слово «студент» в переводе с латинского означает – «овладевающий знаниями, усердно работающий, занимающийся».

Особую благодарность автор выражает старшим преподавателям кафедры высшей математики Ёлкиной Н.В. и Масловой Н.Н., прочитавшим рукопись и сделавшим ряд поправок и ценных замечаний, а также доценту кафедры высшей математики Лукьяновой Г.С., которая систематизировала рекомендуемую литературу по разделам и факультетам.

ГЛАВА 1. МАТРИЦЫ, ОПРЕДЕЛИТЕЛИ, СЛАУ

Матричное исчисление широко используется в различных областях математики (решение систем линейных уравнений, векторная алгебра, дифференциальные уравнения, теория вероятностей), механики, электротехники, теоретической физики и т.д. Матричное исчисление позволяет в компактной форме получить решение реальных задач, содержащих большое количество переменных.

§ 1. Матрицы. Действия над матрицами

Опр. **1.** *Матрицей* называется прямоугольная таблица чисел.

Обозначают матрицы заглавными латинскими буквами $A, \mathrm{B}, \mathrm{C}, \mathrm{D}$ и т.д.

Если м. A содержит m строк и n столбцов, то таблица называется *матрицей размера (формата)* $m \times n$ (читается «эм на эн»). Матрицу записывают в виде:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

обозначая через a_{ij} ее элемент, находящийся в i-й строке и j-м столбце.

Иногда для матриц используют другие обозначения:

$$A = \left\| a_{ij} \right\|_{m \times n}, \ A = \left(a_{ij} \right)_{m \times n}.$$

Опр. **2.** Матрица размером $1 \times n$ называется *матрицей-строкой*, или просто *строкой*, например: $B = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 0 \end{pmatrix}$, размер 1×3.

Опр. **3.** Матрица размером $m \times 1$ называется *матрицей-столбцом*, или просто *столбцом*, например: $C = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, размер

3×1.

***Опр.* 4.** Матрица называется *квадратной*, если число строк равно числу ее столбцов, $m=n$. Число n называют *порядком матрицы*.

Например, при n =3 квадратная матрица имеет вид:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Элементы квадратной матрицы, для которых номер строки и номер столбца совпадают, то есть, $i=j$, называются *диагональными* ($a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn}$), а диагональ матрицы, на которой они находятся, – *главной диагональю* этой матрицы.

Виды квадратных матриц

1. *Верхняя треугольная*

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & a_{nn} \end{pmatrix}$$

(под главной диагональю все нули)

2. *Нижняя треугольная*

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & ... & 0 \\ a_{21} & a_{22} & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}$$

(над главной диагональю все нули)

3. *Диагональная*

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & ... & 0 \\ 0 & a_{22} & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & a_{nn} \end{pmatrix}$$

(все элементы нули, кроме главной диагонали)

4. *Единичная*

$$E=\begin{pmatrix} 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 1 \end{pmatrix}$$

(на главной диагонали единицы, все остальные нули)

5. *Нулевая*

$$\theta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

(все элементы нули)

6. *Симметричная*

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

(выполняется симметрия элементов относительно главной диагонали $a_{ij} = a_{ji}, i \neq j$)

***Опр.* 5.** *Транспонированием* матрицы называется преобразование, состоящее в замене строк столбцами с сохранением их номеров.

Т.о., строки данной матрицы будут в той же последовательности столбцами транспонированной матрицы и наоборот.

Если задана матрица $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$, то ее транспонированная матрица имеет вид:

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

В случае квадратной матрицы транспонирование сводится к повороту матрицы на 180^0 вокруг главной диагонали.

Действия над матрицами

***Опр.* 6.** *Суммой* двух матриц $A = \left(a_{ij}\right)_{m\times n}$ и $B = \left(b_{ij}\right)_{m\times n}$ одинакового размера называется м. $C = A + B$ того же размера $C = \left(c_{ij}\right)_{m\times n}$, элементы которой вычисляются по правилу $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n}$ (складываются одинаково расположенные элементы).

***Опр.* 7.** *Произведением м.* $A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$ *и числа* α называется м. $B=\alpha\cdot A$, $B=\left(b_{ij}\right)_{m\times n}$, элементы которой вычисляются по правилу $b_{ij}=\alpha\cdot a_{ij}$, $i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$ (каждый элемент м. A умножается на α).

***Опр.* 8.** *Произведением* м. $A=\left(a_{ij}\right)_{m\times p}$ и м. $B=\left(b_{ij}\right)_{p\times n}$ называется м. $C=A\cdot B$, $C=\left(c_{ij}\right)_{m\times n}$, элементы которой вычисляются по правилу:

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{p}a_{ik}b_{kj}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\ldots+a_{ip}b_{pj},\ i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n}.$$

Замечание 1. Элемент c_{ij} матрицы произведения равен сумме произведений элементов i-й строки м. A на соответствующие элементы j-го столбца м. B.

Замечание 2. Произведение матриц определено т. и т.т., когда число столбцов первой матрицы равно числу строк второй матрицы.

Пример. Найти произведение $A\cdot B$ матриц $A=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\\5&6\end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix}7&8\\9&10\end{pmatrix}$.

◄ $A\cdot B=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\\5&6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}7&8\\9&10\end{pmatrix}=$

$$=\begin{pmatrix}1\cdot7+2\cdot9&1\cdot8+2\cdot10\\3\cdot7+4\cdot9&3\cdot8+4\cdot10\\5\cdot7+6\cdot9&5\cdot8+6\cdot10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}25&28\\57&64\\89&100\end{pmatrix}.\ ►$$

Замечание 3. В общем случае $A\cdot B\neq B\cdot A$, даже если оба произведения матриц $A\cdot B$ и $B\cdot A$ определены.

***Опр.* 9.** Матрицы, для которых выполняется условие $A\cdot B = B\cdot A$, называются *коммутативными* или *перестановочными*.

Отметим некоторые свойства операции умножения матриц.

1. $(A\cdot B)\cdot C = A\cdot(B\cdot C)$.

2. $(A+B)\cdot C = A\cdot C + B\cdot C$.

3. $A\cdot(B+C) = A\cdot B + A\cdot C$.

4. $A\cdot E = E\cdot A = A$.

5. $A\cdot\theta = \theta\cdot A = \theta$.

6. $(A\cdot B)^T = B^T\cdot A^T$.

§ 2. Определители

Каждой квадратной м. A можно поставить в соответствие число, которое называется ее *определителем* и обозначается $|A|$, $\det A$ или символом Δ (читается «дельта»).

Определитель матрицы второго порядка $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ (определитель 2-го порядка) вычисляется по правилу:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Определитель матрицы третьего порядка $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ (определитель 3-го порядка) вычисляется по правилу:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} -$$

$$- a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{11}a_{23} - a_{33}a_{21}a_{12}.$$

Замечание. Указанное здесь правило называется *правилом треугольников* (если мысленно соединить линиями множители во 2-м, 3-м, 5-м, 6-м слагаемых, то получим треугольники).

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad \overset{-}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}$$

Для нахождения определителя 3-го порядка можно применять еще одно мнемоническое правило, так называемое *правило Саррюса*: приписать к определителю справа два первых столбца и составить сумму произведений главных диагональных элементов и элементов, параллельных главной диагонали, из которых затем вычесть сумму произведений элементов побочной диагонали и элементов, параллельных побочной диагонали:

$$\left|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}\right|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + +a_{13}a_{21}a_{32} -$$
$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

Например, вычислим определитель по правилу треугольников:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 1\cdot 5\cdot 9 + 2\cdot 6\cdot 7 + 3\cdot 8\cdot 4 - 3\cdot 5\cdot 7 - 8\cdot 1\cdot 6 - 9\cdot 4\cdot 2 = 0.$$

Определитель квадратной матрицы n-го порядка ($n \geq 4$) вычисляется с использованием свойств определителей.

Основные свойства определителей матриц

1. Определитель не меняется при транспонировании матриц ($|A| = |A^T|$).

Это свойство устанавливает полное равноправие строк и столбцов определителя, то есть свойства определителей, доказанные для строк, верны и для столбцов и наоборот.

2. Если в определителе поменять местами две строки (столбца), то определитель поменяет знак.

3. Если все элементы одной строки (столбца) определителя пропорциональны (в частности, равны) соответствующим элементам другой строки (столбца), то он равен нулю.

4. Если в определителе строка (столбец) состоит из нулей, то определитель равен нулю.

5. Общий множитель у элементов какой-либо строки (столбца) можно вынести за знак определителя.

6. Определитель не изменится, если ко всем элементам одной строки (столбца) прибавить соответствующие элементы другой строки (столбца), умноженные на одно и то же число.

7. Определитель диагональной и треугольной (верхней или нижней) матриц равен произведению диагональных элементов.

8. $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$, где A и B квадратные матрицы размером $n \times n$.

9. Если всякий элемент любой строки (столбца) представляет собой сумму двух слагаемых, то определитель равен сумме двух определителей, в первом из которых в соответствующей строке (столбце) оставлены первые слагаемые, а во втором – вторые, например:

$$\begin{vmatrix} 9 & 8 & 7 \\ 6 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 9 & 8 & 7 \\ 2+4 & 3+2 & 1+3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 9 & 8 & 7 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 9 & 8 & 7 \\ 4 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}.$$

Рассмотрим определитель n-го порядка:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

***Опр.* 1.** *Минором* M_{ij} *элемента* a_{ij} определителя n-го порядка называется определитель $(n-1)$-го порядка, полученный из исходного вычеркиванием i-й строки и j-го столбца, на пересечении которых стоит элемент a_{ij}.

Например, $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$, $M_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = 1\cdot 8 - 2\cdot 7 = -6$

(вычеркнули 2-ю строку и 3-й столбец из $|A|$), $M_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 2\cdot 6 - 3\cdot 5 = -3$ (вычеркнули 3-ю строку и 1-й столбец из $|A|$).

***Опр.* 2.** *Алгебраическим дополнением* (*а.д.*) A_{ij} *элемента* a_{ij} определителя n-го порядка называется число, которое вычисляется по правилу $A_{ij} = (-1)^{i+j}\cdot M_{ij}$.

Например,

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}, \quad A_{23} = (-1)^{2+3}\cdot M_{23} = (-1)^5(-6) = 6,$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1}\cdot M_{31} = (-1)^4(-3) = -3.$$

Теорема разложения. *Определитель* n*-го порядка* $|A|$ *равен сумме произведений элементов любой его строки (или столбца) и соответствующих им а.д. :*

$$|A| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij} = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in} \quad i = \overline{1,n}$$

(разложение определителя по i*-й строке),*

$$|A| = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij} = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \ldots + a_{nj}A_{nj} \quad j = \overline{1,n}$$

(разложение определителя по j -му столбцу).

Пример. Вычислить определитель $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}$, разложив его по 1-му столбцу.

$$◀\ |A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} +$$

$$+ 0 \cdot (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 3 = -1\,.▶$$

§ 3. Обратная матрица

***Опр.* 1.** Квадратная м. A n -го порядка называется *невырожденной*, если $|A| \neq 0$, и *вырожденной,* если $|A| = 0$.

***Опр.* 2.** Матрица A^{-1} называется *обратной* матрицей для некоторой квадратной м. A, если справедливо равенство: $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$, где E – единичная матрица.

Мы видим, что матрицы A и A^{-1} – коммутативные (перестановочные).

Обратная матрица A^{-1} определена только для квадратных невырожденных матриц и вычисляется по формуле:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

где A_{ij} - а.д. элементов a_{ij} м. A, $i, j = \overline{1, n}$.

Матрицу $A^D = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$ называют *присоединенной* или *союзной* (ее элементами являются а.д. элементов м. A).

Тогда A^{-1} вычисляется по формуле

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \left(A^D\right)^T.$$

Пример. Найти м. A^{-1}, обратную для м. A: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

◄ $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -9 \neq 0$, то есть м. A невырожденная и у нее существует обратная A^{-1}.

Найдем а.д. A_{ij} элементов a_{ij} ($i, j = 1,2,3$) м. A:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3, \quad A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -6,$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 3, \quad A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -4,$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2, \quad A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1,$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 2, \quad A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -1,$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -4.$$

Составляем матрицу A^{-1}:

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\cdot\left(A^D\right)^T=\frac{1}{-9}\cdot\begin{pmatrix}3 & -6 & 3\\ -4 & 2 & -1\\ 2 & -1 & -4\end{pmatrix}^T=$$

$$=\frac{1}{-9}\cdot\begin{pmatrix}3 & -4 & 2\\ -6 & 2 & -1\\ 3 & -1 & -4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{3} & \frac{4}{9} & -\frac{2}{9}\\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{9} & \frac{1}{9}\\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{9} & \frac{4}{9}\end{pmatrix}.$$

Для проверки правильности вычислений необходимо убедиться в справедливости равенства: $A\cdot A^{-1}=E$ (самостоятельно). ▶

§ 4. Ранг матрицы

***Опр.* 1.** *Минором* k*-го* порядка м. $A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$ называется определитель квадратной матрицы, полученный из данной матрицы выделением произвольных k строк и k столбцов. Обозначение $M^{(k)}$.

Максимальный порядок минора равен наименьшему из чисел n или m.

Пример 1. Для матрицы $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 2\\ -1 & 0 & 2 & 1\\ 5 & 4 & 0 & 1\end{pmatrix}$ можно составить 4 минора третьего порядка, 18 миноров второго порядка и 12 миноров первого порядка.

***Опр.* 2.** *Рангом м.* A называется порядок наибольшего отличного от нуля минора этой матрицы. Обозначается ранг матрицы $r(A)$ или $rang(A)$.

***Опр.* 3.** Матрицы A и B называются *эквивалентными*, если $r(A)=r(B)$ (обозначается $A\sim B$).

Пример 2. Найти $r(A)$ из примера 1 данного параграфа.

◀ Вычислим все миноры третьего порядка:

$$M_1^{(3)} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \\ 5 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad M_2^{(3)} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 5 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$M_3^{(3)} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 5 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad M_4^{(3)} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Все миноры третьего порядка оказались равными нулю, поэтому ранг м. A меньше трёх.

Начнём вычислять миноры второго порядка. Вычислим минор м. A, полученный выделением первых двух строк и первых двух столбцов:

$$M_1^{(2)} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 2 \neq 0.$$

В соответствии с определением 2 делаем вывод: $r(A) = 2$. ▶

Для матриц сравнительно большого размера вычисление ранга, исходя из определения, является трудоёмкой задачей. Поэтому чаще применяется вычисление ранга с помощью приведения матрицы к ступенчатому виду. Эта процедура проводится с помощью элементарных преобразований матрицы.

***Опр.* 4.** *Элементарными преобразованиями матрицы* называются:

1) транспонирование;
2) перестановка строк (столбцов);
3) умножение строки (столбца) на число $\alpha \neq 0$;
4) прибавление к элементам строки (столбца) матрицы элементов другой строки (столбца), умноженных на некоторое число;
5) отбрасывание одной из двух пропорциональных (в частности, равных) строк;
6) отбрасывание нулевой строки (столбца) матрицы.

Теорема 1. *Элементарные преобразования матрицы не меняют её ранга.*

Для определения $r(A)$ методом элементарных преобразований необходимо:

1) переставить строки так, чтобы в верхнем левом углу м. A был ненулевой элемент;
2) все элементы первого столбца, кроме a_{11}, обратить в нуль;
3) повторить операцию со второй строкой: во втором столбце должен быть ненулевой элемент (при необходимости переставить строки, чтобы $a_{22} \neq 0$), после чего все элементы второго столбца, кроме a_{12} и a_{22}, обратить в нуль.

Окончательно после многократного применения указанной процедуры и отбрасывания нулевых строк преобразованная матрица будет иметь ступенчатый вид A_{cm}:

$$A_{cm} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,r-1} & a_{1r} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a'_{22} & \dots & a'_{2,r-1} & a'_{2r} & \dots & a'_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a'_{r-1,r-1} & a'_{r-1,r} & \dots & a'_{r-1,n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a'_{rr} & \dots & a'_{rn} \end{pmatrix}.$$

Теорема 2. *Ранг ступенчатой матрицы равен числу её ненулевых строк.*

Пример 3. Привести м. A из примера 1 к ступенчатому виду с помощью элементарных преобразований строк.

$$◄ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{C_2 + C_1}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 5 & 3 \\ 5 & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{C_3 - 5C_1}{\sim}$$

$$\sim\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 2\\ 0 & 2 & 5 & 3\\ 0 & -6 & -15 & -9\end{pmatrix}\overset{C_3=-3C_2}{\sim}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 2\\ 0 & 2 & 5 & 3\end{pmatrix}.$$

Число ненулевых строк ступенчатой матрицы равно двум, поэтому $r(A)=2$.►

§ 5. Система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)

***Опр.* 1.** *Системой* m *линейных алгебраических уравнений с* n *неизвестными* называется система уравнений вида:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=b_2,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n=b_m,\end{cases}\qquad(1)$$

где $x_1,x_2,\ldots,x_n$ – неизвестные; a_{ij} – коэффициенты при неизвестных, $i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$; $b_1,b_2,\ldots,b_m$ – свободные члены уравнений.

Система (1) может быть записана в матричном виде: $AX=B$, где

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn}\end{pmatrix}$$ – основная матрица системы (1);

$$B=\begin{pmatrix}b_1\\ b_2\\ \ldots\\ b_m\end{pmatrix}$$ – матрица-столбец свободных членов; $$X=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ \ldots\\ x_n\end{pmatrix}$$ – матрица-столбец неизвестных.

***Опр.* 2.** Матрица, полученная из м. A добавлением справа столбца свободных членов, называется *расширенной матрицей* системы (1):

$$\overline{A} = \left(A\middle|B\right) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right).$$

***Опр.* 3.** *Решением системы* (1) называется упорядоченное множество чисел $(c_1, c_2, \dots, c_n)$, удовлетворяющих всем уравнениям системы (1).

По числу решений выделяют следующие СЛАУ:

СЛАУ

совместная (есть хотя бы одно решение)

несовместная (нет ни одного решения)

определённая (ровно одно решение)

неопределённая (бесконечно много решений)

***Опр.* 4.** Две СЛАУ называются *равносильными*, если они имеют одно и то же множество решений.

Элементарные преобразования СЛАУ аналогичны элементарным преобразованиям матриц (см. § 4).

***Теорема* 1.** *Элементарные преобразования переводят данную СЛАУ в равносильную ей СЛАУ.*

Рассматривая любую СЛАУ, необходимо в первую очередь решить вопрос о её совместности. Исследование на совместность проводится с помощью следующей теоремы.

***Теорема* 2** (Кронекера - Капелли). *Для того чтобы СЛАУ (1) была совместной, н. и д., чтобы* $r(A) = r(\overline{A})$ *(ранг основной матрицы системы (1) был равен рангу расширенной матрицы системы (1)). Если* $r(A) = r(\overline{A}) = n$ *(n – число неизвестных), то* *система (1) имеет единственное решение. Если* $r(A)=r(\overline{A})<n$*, то система (1) имеет бесконечно много решений.*

§ 6. Методы решения СЛАУ

6.1. Метод Гаусса

Метод Гаусса – метод последовательного исключения неизвестных из уравнений системы (1) из § 5 путём элементарных преобразований.

Все преобразования проводятся с расширенной матрицей. Пусть в этой матрице $a_{11}\neq 0$ (за счет перестановки строк этого можно всегда добиться). Тогда умножением первой строки последовательно на $-\frac{a_{21}}{a_{11}},\ldots,-\frac{a_{m1}}{a_{11}}$ и сложением соответственно со 2-й, …, m-й строками получаем матрицу:

$$\overline{A}\sim\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a'_{22} & \ldots & a'_{2n} & b'_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & a'_{m2} & \ldots & a'_{mn} & b'_n \end{array}\right).$$

Далее добиваемся, чтобы $a'_{22}\neq 0$, и обнуляем аналогично все элементы под ним. Процесс продолжаем, пока не получим матрицу ступенчатого вида:

$$\overline{A}\sim\left(\begin{array}{ccccccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1,r-1} & a_{1r} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a'_{22} & \ldots & a'_{2,r-1} & a'_{2r} & \ldots & a'_{2n} & b'_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & a''_{rr} & \ldots & a''_{rn} & b''_r \end{array}\right),$$

причём $r(\overline{A})$ равен числу ненулевых строк в м. $\overline{A}$.

Возможны три случая.

1. Получилась строка $\left(\begin{array}{cccc|c}0 & 0 & \ldots & 0 & b''_k\end{array}\right)$, $b''_k\neq 0$, ей соответствует уравнение $0=b''_k$ – система (1) несовместна

($r(A) \neq r(\overline{A})$).

2. Если $r = n$, решение системы единственно. Последней ненулевой строке соответствует уравнение $a''_{nn}x_n = b''_n$, из которого находим неизвестное x_n, а далее последовательно $x_{n-1}, x_{n-2}, \ldots, x_1$.

3. Число ненулевых строк r меньше числа неизвестных $(r < n)$, тогда система (1) имеет бесконечное множество решений. Последней ненулевой строке соответствует уравнение:

$$a''_{rr}x_r + \ldots + a''_{rn}x_n = b''_r,$$

из которого выражаем неизвестное x_r через $n - r$ так называемых *свободных неизвестных*: $x_{r+1}, \ldots, x_n$. Из уравнений, соответствующих другим строкам, последовательно находим $x_1, \ldots, x_{r-1}$ также через свободные неизвестные ($x_1, \ldots, x_{r-1}$ называют *базисными неизвестными*).

Пример 1 (случай 1).

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = 2, \end{cases} \qquad x_1, x_2, x_3 = ?$$

$$◄ \ \overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \end{array}\right) \underset{\sim}{\overset{C_2 - C_1}{C_3 - C_1}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right) \overset{C_3 - 2C_2}{\sim}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

(в последнем преобразовании избавляемся от пропорциональных строк в основной матрице рассматриваемой системы)

Последней строке соответствует уравнение

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 = 1,$$

которое не имеет решений. Сл–но, исходная система несовместна ($r(A)=2$, $r(\overline{A})=3$, $r(A)\neq r(\overline{A})$).►

Пример 2 (случай 2).

$$\begin{cases} 2x_1+2x_2-3x_3=15, \\ 3x_1-4x_2+2x_3=-4, \\ 4x_1+6x_2+5x_3=-1, \end{cases} \qquad x_1, x_2, x_3 = ?$$

◄

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & -3 & 15 \\ 3 & -4 & 2 & -4 \\ 4 & 6 & 5 & -1 \end{array}\right) \underset{\sim}{C_1:2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -\frac{3}{2} & \frac{15}{2} \\ 3 & -4 & 2 & -4 \\ 4 & 6 & 5 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{c} C_2-3C_1 \\ C_3-4C_1 \\ \sim \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -\frac{3}{2} & \frac{15}{2} \\ 0 & -7 & \frac{13}{2} & -\frac{53}{2} \\ 0 & 2 & 11 & -31 \end{array}\right) \underset{\sim}{C_2:(-7)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -\frac{3}{2} & \frac{15}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{13}{14} & \frac{53}{14} \\ 0 & 2 & 11 & -31 \end{array}\right) \underset{\sim}{C_3-2C_2}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -\frac{3}{2} & \frac{15}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{13}{14} & \frac{53}{14} \\ 0 & 0 & \frac{90}{7} & -\frac{270}{7} \end{array}\right) \underset{\sim}{C_3:\frac{90}{7}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -\frac{3}{2} & \frac{15}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{13}{14} & \frac{53}{14} \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right).$$

Т.о., $r(A)=r(\overline{A})=3$, сл–но, решение у системы единственное.

Из последней строки следует, что $x_3=-3$. Второй строке расширенной матрицы $\overline{A}$ соответствует уравнение $0\cdot x_1+1\cdot x_2-\frac{13}{14}\cdot x_3=\frac{53}{14}$. Учитывая, что $x_3=-3$, получаем

$x_2 = 1$. Восстановим по первой строке м. $\overline{A}$ первое уравнение системы: $1 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 - \frac{3}{2} \cdot x_3 = \frac{15}{2}$. Так как $x_2 = 1$, $x_3 = -3$, то $x_1 = 2$.

Окончательно, $x_1 = 2$, $x_2 = 1$, $x_3 = -3$. ►

Пример 3 (случай 3).

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1, \\ 2x_1 - x_2 + 5x_3 = 3, \\ 3x_1 + \quad\; 4x_3 = 4, \end{cases} \quad x_1, x_2, x_3 = ?$$

$$◄\ \overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 5 & 3 \\ 3 & 0 & 4 & 4 \end{array}\right) \overset{\substack{C_2 - 2C_1 \\ C_3 - 3C_1}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 7 & 1 \\ 0 & -3 & 7 & 1 \end{array}\right) \overset{C_2 = C_3}{\sim}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 7 & 1 \end{array}\right) \overset{C_2 : (-3)}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{3} & -\frac{1}{3} \end{array}\right).$$

Т.о., $r(A) = r(\overline{A}) = 2 < 3$, сл–но, система имеет бесконечно много решений.

Второй строке соответствует уравнение $0 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 - \frac{7}{3} \cdot x_3 = -\frac{1}{3}$, из которого находим $x_2 = \frac{7}{3} \cdot x_3 - \frac{1}{3}$. Подставляем x_2 в первое уравнение системы: $x_1 + \left(\frac{7}{3} \cdot x_3 - \frac{1}{3}\right) - x_3 = 1$ и находим $x_1 = -\frac{4}{3} \cdot x_3 + \frac{4}{3}$, где x_3 – свободное неизвестное. Решение можно записать в виде: $\left\{-\frac{4}{3}t + \frac{4}{3}; \frac{7}{3}t - \frac{1}{3}; t\right\}$, $t \in \mathbf{R}$ (случай $r(A) = r(\overline{A}) = 2 < 3$). ►

6.2. Матричный метод

Если в системе (1) из § 5 $m = n$ (число строк равно числу неизвестных), то СЛАУ является квадратной.

Предположим, что $|A| \neq 0$, тогда м. A имеет обратную м. A^{-1} и решение СЛАУ $A \cdot X = B$ определяется по формуле:

$$X = A^{-1} \cdot B\,. \tag{2}$$

Пример 4. Решить квадратную СЛАУ матричным методом:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 10, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 23, \\ x_2 + 2x_3 = 13. \end{cases}$$

◀ $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 10 \\ 23 \\ 13 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$. В § 3 в примере 1 для м. A была найдена A^{-1}: $A^{-1} = -\frac{1}{9} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -4 & 2 \\ -6 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & -4 \end{pmatrix}$.

Для дальнейших вычислений $\left(-\frac{1}{9}\right)$ удобнее оставить как множитель.

Ищем решение по формуле (2):

$$X = A^{-1} \cdot B = -\frac{1}{9} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -4 & 2 \\ -6 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 23 \\ 13 \end{pmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{9} \cdot \begin{pmatrix} 3 \cdot 10 - 4 \cdot 23 + 2 \cdot 13 \\ -6 \cdot 10 + 2 \cdot 23 - 13 \\ 3 \cdot 10 - 23 - 4 \cdot 13 \end{pmatrix} = -\frac{1}{9} \cdot \begin{pmatrix} -36 \\ -27 \\ -45 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix},$$

сл–но, $x_1 = 4,\ x_2 = 3,\ x_3 = 5.$ ▶

6.3. Формулы Крамера

Считаем, что в системе (1) из § 5 $m=n$ и $|A|\neq 0$. Формулы Крамера записывают в виде:

$$x_i=\frac{|A_i|}{|A|},\ i=\overline{1,n},$$

где $|A|$ – определитель основной м. A системы (1) из § 5, $|A_i|$ – определитель, полученный из определителя м. A путём замены в нём i-го столбца столбцом свободных членов.

Пример 5. Решить квадратную СЛАУ из примера 4 по формулам Крамера.

$$◄\ |A|=\begin{vmatrix}1&2&0\\3&2&1\\0&1&2\end{vmatrix}=-9\neq 0,\quad |A_1|=\begin{vmatrix}10&2&0\\23&2&1\\13&1&2\end{vmatrix}=-36,$$

$$|A_2|=\begin{vmatrix}1&10&0\\3&23&1\\0&13&2\end{vmatrix}=-27,\quad |A_3|=\begin{vmatrix}1&2&10\\3&2&23\\0&1&13\end{vmatrix}=-45,$$

$$x_1=\frac{|A_1|}{|A|}=\frac{-36}{-9}=4,\quad x_2=\frac{|A_2|}{|A|}=\frac{-27}{-9}=3,$$

$$x_3=\frac{|A_3|}{|A|}=\frac{-45}{-9}=5.\ ►$$

§ 7. Однородные системы. Фундаментальная система решений (ФСР)

Если в столбце свободных членов СЛАУ (1) из § 5 все $b_i=0$, $i=\overline{1,n}$, то система называется *однородной*:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_{12} + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases}$$

Очевидно, что однородные СЛАУ всегда совместны: $x_1 = 0, x_2 = 0, \ldots, x_n = 0$ – нулевое (тривиальное) решение.

Если у однородной системы $r(A) = r(\overline{A}) = n$, то она имеет только нулевое решение.

Если у однородной системы $r(A) = r(\overline{A}) < n$, то она имеет еще и ненулевые решения.

Если м. A однородной системы – квадратная, то однородная система имеет ненулевые решения т. и т.т., когда $|A| = 0$.

Пусть однородная СЛАУ имеет $k < n$ ненулевых линейно независимых решений (ни одно из них нельзя выразить линейно через остальные) $X_1, X_2, \ldots, X_k$. Эти решения образуют *фундаментальную систему решений*, если любое решение X системы можно представить в виде:

$$X = c_1X_1 + c_2X_2 + \ldots + c_kX_k,$$

или $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} = c_1 \cdot \begin{pmatrix} x_1^1 \\ x_2^1 \\ \ldots \\ x_n^1 \end{pmatrix} + c_2 \cdot \begin{pmatrix} x_1^2 \\ x_2^2 \\ \ldots \\ x_n^2 \end{pmatrix} + \ldots + c_k \cdot \begin{pmatrix} x_1^k \\ x_2^k \\ \ldots \\ x_n^k \end{pmatrix}.$

Число решений k в ФСР равно числу свободных неизвестных и определяется по формуле $k = n - r(A)$, где n – число неизвестных системы, а $r(A)$ – ранг основной матрицы системы.

Пример. Выяснить, имеет ли однородная СЛАУ ненулевые решения. Если да, то найти их, выписав ФСР:

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 0. \end{cases}$$

◄ Приведём к ступенчатому виду расширенную матрицу системы:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right) \underset{\sim}{\begin{matrix} C_2 - 2C_1 \\ C_3 - C_1 \end{matrix}}$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \underset{\sim}{C_2 = C_3}$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \underset{\sim}{C_2 : 5} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{5} & 0 \end{array}\right).$$

Получили, что $r(A) = r(\overline{A}) = 2 < 4$ (у нас неизвестных $n = 4$). Следовательно, система имеет ненулевые решения. Выразим x_1 и x_2 через x_3 и x_4: из уравнения, соответствующего 2–й строке последней матрицы, находим $x_2 = -\frac{1}{5}x_4$, из первого находим x_1: $x_1 - 3x_2 - 1\cdot x_3 + 1\cdot x_4 = 0$,

$$x_1 - 3\cdot\left(-\frac{1}{5}\cdot x_4\right) - x_3 + x_4 = 0, \quad x_1 = x_3 - \frac{8}{5}x_4.$$

Неизвестные x_3 и x_4 – свободные, их можно задавать произвольно. Обозначим $x_3 = c_1$, $x_4 = c_2$, где $c_1, c_2 \in \mathbf{R}$. Выпишем решение X системы в матричном виде:

$$X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c_1-\frac{8}{5}c_2\\0\cdot c_1-\frac{1}{5}c_2\\c_1+0\cdot c_2\\0\cdot c_1+c_2\end{pmatrix}=c_1\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}+c_2\cdot\begin{pmatrix}\frac{-8}{5}\\-\frac{1}{5}\\0\\1\end{pmatrix}=$$

$$=c_1\cdot X_1+c_2\cdot X_2.$$

Решения $X_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}$ и $X_2=\begin{pmatrix}-\frac{8}{5}\\-\frac{1}{5}\\0\\1\end{pmatrix}$ образуют ФСР.▶

Замечание. ФСР можно получить и другим способом, если в общем решении константам c_1 и c_2 последовательно присвоить значения $c_1=1, c_2=0$ и $c_1=0, c_2=1$.

В нашем примере общее решение имеет вид:

$$\left\{c_1-\frac{8}{5}c_2, -\frac{1}{5}c_2, c_1, c_2\right\},\ c_1, c_2\in\mathbf{R}.$$

Если $c_1=1, c_2=0$, то получаем $X_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}$, в случае $c_1=0, c_2=1$ находим $X_2=\begin{pmatrix}-\frac{8}{5}\\-\frac{1}{5}\\0\\1\end{pmatrix}$.

ГЛАВА 2. ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА

Необходимость применения векторного исчисления при изложении технических дисциплин вызвана не столько удобством и наглядностью математических формулировок законов, сколько объективными свойствами изучаемых явлений.

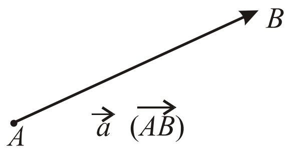
Направленные величины используются при описании широкого круга явлений, относящихся к теоретической механике, механике жидкости и газа, теории электромагнетизма.

§ 1. Векторы и линейные операции над ними

Величины, для определения которых достаточно задать одно число, называются *скалярными* (температура, масса, плотность). Но есть величины (перемещение, скорость, сила, напряженность электрического поля и т.д.), которые характеризуются направлением, помимо численного значения. Такие величины называются *векторными*.

***Опр.* 1.** *Вектором* называется направленный отрезок прямой, характеризующийся длиной и направлением.

На чертеже вектор обозначается стрелкой; над буквенным обозначением вектора также ставится стрелка $\overrightarrow{AB}$, $\vec{a}$. Точка A – начало $\vec{a}$, точка B – конец $\vec{a}$.



***Опр.* 2.** *Длиной* (*модулем*) *вектора* $\overrightarrow{AB}$ называется расстояние между началом и концом вектора. Обозначение длины вектора $\left|\overrightarrow{AB}\right|$ или $|\vec{a}|$.

Если $A = B$ (начало вектора совпадает с концом), то он называется *нулевым* и обозначается $\vec{0}$. По опр. 2 получим $\left|\vec{0}\right| = 0$.

Вектор $\vec{e}$, у которого $|\vec{e}| = 1$, назовем *единичным*.

***Опр.* 3.** *Коллинеарными* называют векторы, расположенные на параллельных (в частности, на одной) прямых, а *компланарными* – векторы, расположенные в параллельных (в частности, в одной) плоскостях.

$\vec{a} \parallel \vec{b}$ – обозначение коллинеарных векторов. Нулевой вектор коллинеарен любому вектору: $\vec{0} \parallel \vec{a}$.

***Опр.* 4.** *Равными* считаются векторы, которые:

1) коллинеарны;
2) одинаково направлены (сонаправлены – $\uparrow\uparrow$);
3) имеют одинаковую длину.

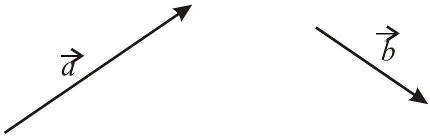
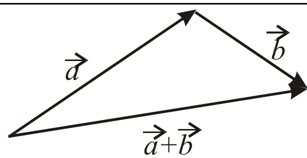
Отсюда следует, что вектор можно переносить параллельно самому себе, перемещая начало A в любую другую точку на плоскости или в пространстве. Такие векторы называются *свободными*.

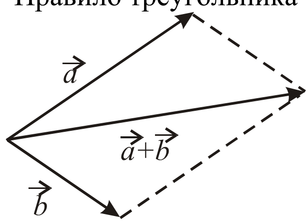
В дальнейшем будем рассматривать только свободные векторы.

Линейные операции над векторами представлены в табл. 1, а свойства этих операций в табл. 2.

Таблица 1

Линейные операции над векторами

<table>
<tr><td colspan="2">
</td></tr>
<tr><td>Линейные операции</td><td>Геометрическая интерпретация</td></tr>
<tr><td>Сумма $\vec{a} + \vec{b}$</td><td>

Правило треугольника


Правило параллелограмма</td></tr>
</table>

Окончание табл. 1

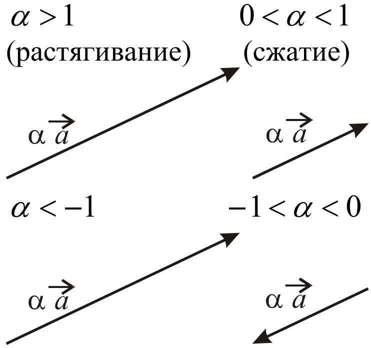
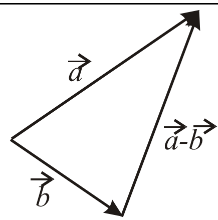
Умножение на число $\alpha \cdot \vec{a}$ *:* *1.* $\alpha \cdot \vec{a} \uparrow\uparrow \vec{a}, \alpha > 0$ $\alpha \cdot \vec{a} \uparrow\downarrow \vec{a}, \alpha < 0$ *2.* $\lvert \alpha \cdot \vec{a} \rvert = \lvert \alpha \rvert \cdot \lvert \vec{a} \rvert$	
Разность $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + \left(-\vec{b}\right)$	

Таблица 2

Свойства линейных операций

Свойства операции сложения векторов	**Свойства операции умножения вектора на число**
$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ (коммутативность) $\left(\vec{a} + \vec{b}\right) + \vec{c} = \vec{a} + \left(\vec{b} + \vec{c}\right)$ (ассоциативность) Для любого вектора $\vec{a}$ существует вектор $\left(-\vec{a}\right)$ (противоположный) такой, что $\vec{a} + \left(-\vec{a}\right) = \vec{0}$. Для любого вектора $\vec{a}$ выполняется $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$	$\alpha \cdot \left(\vec{a} + \vec{b}\right) = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b}$ (дистрибутивность числового сомножителя относительно суммы векторов) $(\alpha + \beta)\vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a}$ (дистрибутивность векторного сомножителя относительно суммы чисел) $\alpha\left(\beta\vec{a}\right) = (\alpha\beta)\vec{a}$ (ассоциативность числовых сомножителей)

§ 2. Линейная зависимость векторов. Базис

С учетом операций сложения векторов и умножения вектора на число вводится понятие линейной комбинации векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$:

$$\vec{b} = \alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + ... + \alpha_n\vec{a}_n,$$

где $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ – произвольные действительные числа.

Рассмотрим понятие линейной зависимости векторов на плоскости и в пространстве.

***Опр.* 1.** Система векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$ называется *линейно зависимой* (л.з), если существуют действительные числа $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ такие, что хотя бы одно из них отлично от нуля, и выполняется равенство векторов:

$$\alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + ... + \alpha_n\vec{a}_n = \vec{0}. \tag{1}$$

Если равенство (1) выполняется только, когда $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_n = 0$, то система векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$ называется *линейно независимой* (л.н.з).

Для ненулевых векторов $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$ справедливы следующие утверждения.

***Теорема* 1.** $\vec{a} \parallel \vec{b}$ *т. и т.т., когда* $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$ *л.з.*

Следствие. Два неколлинеарных вектора л.н.з.

***Теорема* 2.** $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ *компланарны. т. и т.т., когда* $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ *л.з.*

Следствие. Три некомпланарных вектора л.н.з.

***Опр.* 2.** *Базисом на плоскости* (пространство R^2) назовем любые два неколлинеарных вектора этой плоскости, взятые в определенном порядке.

***Опр.* 3.** *Базисом в пространстве* (пространство R^3) назовем любые три некомпланарных вектора, взятые в определенном порядке.

***Теорема* 3.** *Каждый вектор может быть разложен по базису на плоскости или в пространстве. Это разложение единственно.*

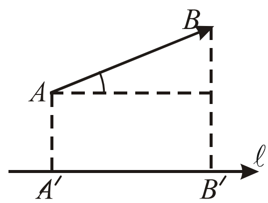
***Опр.* 4.** Коэффициенты разложения вектора по базису называются *координатами* вектора в данном базисе.

При сложении двух векторов, заданных в одном базисе, их соответственные координаты складываются.

При умножении вектора на число все его координаты умножаются на это число.

§ 3. Проекция вектора на ось и её свойства

Под *осью* ℓ будем понимать направленную прямую.



***Опр.* 1.** *Проекцией точки* A *на ось* ℓ называется основание перпендикуляра AA', опущенного из точки A на ℓ. Обозначение $np_\ell A = A'$.

***Опр.* 2.** *Составляющей вектора* $\overrightarrow{AB}$ *по оси* ℓ называется вектор $\overrightarrow{A'B'}$, где $A' = np_\ell A$, $B' = np_\ell B$.

***Опр.* 3.** *Проекцией вектора* $\overrightarrow{AB}$ *на ось* ℓ называется число $np_\ell \overrightarrow{AB} = \pm\left|\overrightarrow{A'B'}\right|$.

Знак (+) берётся, если $\overrightarrow{A'B'} \uparrow\uparrow \ell$, знак (–), если $\overrightarrow{A'B'} \uparrow\downarrow \ell$.

Свойства проекций:

1) $np_l \overrightarrow{AB} = \left|\overrightarrow{AB}\right| \cos\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\ell}\right)$;

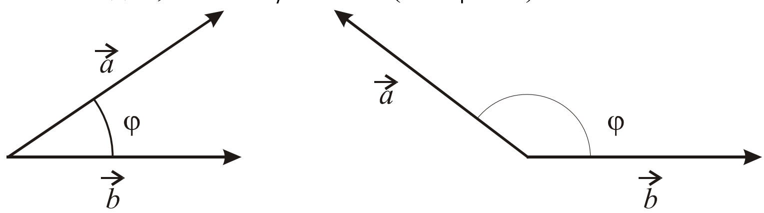
2) проекция суммы векторов на ось ℓ равна сумме проекций векторов на ℓ $\left(np_\ell\left(\vec{a}+\vec{b}\right) = np_\ell\vec{a} + np_\ell\vec{b}\right)$;

3) $np_\ell(\alpha \cdot \overrightarrow{AB}) = \alpha \cdot np_\ell \overrightarrow{AB}$, $\alpha = const$.

§ 4. Декартова прямоугольная система координат (ДПСК)

***Опр.* 1.** *Углом* между ненулевыми векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (обозначается $\varphi = \left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right)$) называется наименьший угол, на который надо повернуть вектор $\vec{a}$ до совмещения с вектором $\vec{b}$ (направления должны совпасть).

Очевидно, что $0 \le \varphi \le 180^0$ ($0 \le \varphi \le \pi$).



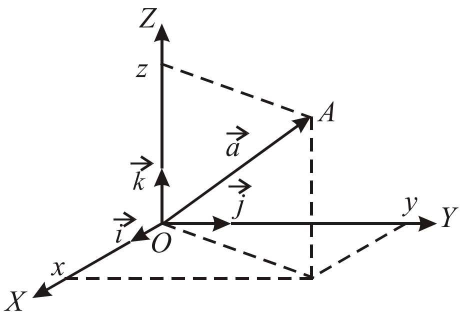
Если угол между векторами прямой, то они называются *ортогональными* (перпендикулярными) и обозначаются $\vec{a} \perp \vec{b}$.

Пусть в качестве базиса в пространстве выбраны три взаимноперпендикулярных вектора с длинами, равными единице.

Обозначение:

$$\left\langle \vec{i}, \vec{j}, \vec{k} \right\rangle,\ \left|\vec{i}\right| = \left|\vec{j}\right| = \left|\vec{k}\right| = 1,\ \vec{i} \perp \vec{j},\ \vec{i} \perp \vec{k}, \vec{j} \perp \vec{k}\ .$$

Такой базис называется *ортонормированным*. Векторы $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ называются *базисными ортами*.



Зафиксируем точку O – начало координат и отложим от нее векторы $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$. Полученная система координат называется ПДСК.

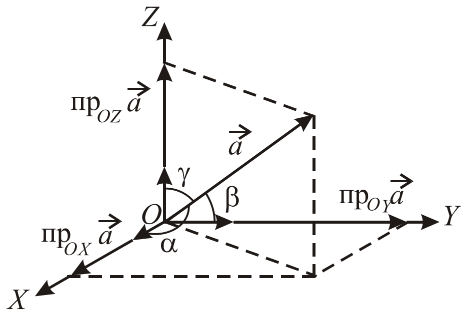
Координаты любого вектора в этом базисе называются *декартовыми координатами вектора*:

$$\vec{a} = \overrightarrow{OA} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}\ ,\ \vec{a} = (x, y, z),$$

x *– абсцисса*, y *– ордината*, z *– аппликата*.

Обычно рассматривается *правая система координат* (правая тройка векторов $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$), то есть такая, что из конца вектора $\vec{k}$ (последний в тройке) кратчайший поворот от $\vec{i}$ к $\vec{j}$ виден совершающимся против хода часовой стрелки.

В противном случае система векторов левая.



Декартовы прямоугольные координаты x, y, z вектора $\vec{a}$ равны проекциям этого вектора на оси OX, OY, OZ соответственно:

$$x = np_{OX}\vec{a} = |\vec{a}| \cdot \cos\alpha, y = np_{OY}\vec{a} = |\vec{a}| \cdot \cos\beta, z = np_{OZ}\vec{a} = |\vec{a}| \cdot \cos\gamma,$$

где α, β, γ – углы, которые составляет вектор $\vec{a}$ с координатными осями OX, OY, OZ соответственно, при этом $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ называются *направляющими косинусами вектора* $\vec{a}$.

Вектор

$$\vec{a}^0 = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \left(\frac{x}{|\vec{a}|}, \frac{y}{|\vec{a}|}, \frac{z}{|\vec{a}|}\right) = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma), \ |\vec{a}| \neq 0$$

представляет собой вектор единичной длины или *орт данного направления*.

Для направляющих косинусов справедливо соотношение

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

Если началом вектора $\vec{a}$ является точка $A = (x_1, y_1, z_1)$, а концом – точка $B = (x_2, y_2, z_2)$, то вектор $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ имеет координаты $\vec{a} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$ и

$$|\vec{a}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Координаты точки $M(x, y)$, делящей вектор $\overrightarrow{AB}$ в соотношении $\lambda(\lambda \neq -1)$, то есть $\overrightarrow{AM} = \lambda \cdot \overrightarrow{MB}$, находятся по формулам:

$$x = \frac{x_A + \lambda \cdot x_B}{1+\lambda}, y = \frac{y_A + \lambda \cdot y_B}{1+\lambda},$$

в частности, при $\lambda = 1$ $\left(\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB},\ M \text{ – середина } \overrightarrow{AB}\right)$

$$x = \frac{x_A + x_B}{2}, y = \frac{y_A + y_B}{2}.$$

Если $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$, $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$, то:

1) $\vec{a} \pm \vec{b} = (a_x \pm b_x, a_y \pm b_y, a_z \pm b_z)$;

2) $\alpha \cdot \vec{a} = (\alpha a_x, \alpha a_y, \alpha a_z)$;

3) $|\vec{a}| = \sqrt{a_x^{\ 2} + a_y^{\ 2} + a_z^{\ 2}}$;

4) $\vec{a} = \vec{b}$ т. и т.т., когда $a_x = b_x, a_y = b_y, a_z = b_z$;

5) $\vec{a} \parallel \vec{b}$ т. и т.т., когда $\vec{a} = \lambda \cdot \vec{b} \Leftrightarrow \frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z} = \lambda$, то есть координаты векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ пропорциональны.

§ 5. Скалярное, векторное и смешанное произведение векторов

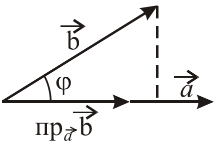
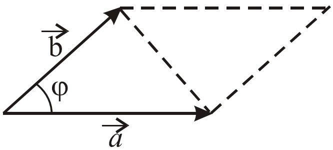
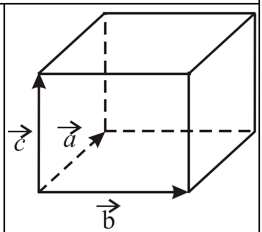
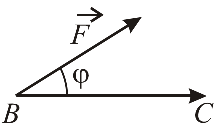
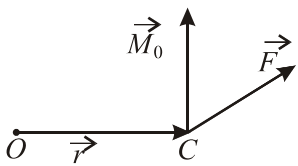
Над векторами вводятся операции скалярного, векторного и смешанного произведения. Обобщенные данные по этим операциям представлены в табл. 3.

Таблица 3

Скалярное, векторное и смешанное произведение векторов

Скалярное произведение	**Векторное произведение**	**Смешанное произведение**
ОПРЕДЕЛЕНИЕ		
$\lvert\vec{a}\rvert \cdot \lvert\vec{b}\rvert \cdot \cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}})$ (результатом является ***скаляр***-число!)	Это ***вектор*** $\vec{c}$ такой, что: 1) $\vec{c} \perp \vec{a}, \vec{c} \perp \vec{b}$; 2) $\lvert\vec{c}\rvert = \lvert\vec{a}\rvert \cdot \lvert\vec{b}\rvert \cdot \sin(\widehat{\vec{a},\vec{b}})$; 3) векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ образуют правую тройку векторов	Это скалярное произведение векторного произведения векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и вектора $\vec{c}$ (результат – число!)

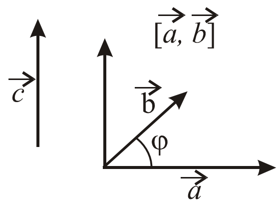
Продолжение табл. 3

ОБОЗНАЧЕНИЕ		
$\vec{a}\cdot\vec{b}$ или $(\vec{a},\vec{b})$	$\vec{a}\times\vec{b}$ или $[\vec{a},\vec{b}]$	$\vec{a}\vec{b}\vec{c}$ или $[\vec{a},\vec{b}]\cdot\vec{c}$
ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ		
 $\vec{a}\cdot\vec{b}=\lvert\vec{a}\rvert np_{\vec{a}}\vec{b}=$ $=\lvert\vec{b}\rvert np_{\vec{b}}\vec{a}$	 $S_{парал-ма}=\lvert\vec{a}\times\vec{b}\rvert=$ $=\lvert\lvert\vec{a}\rvert\cdot\lvert\vec{b}\rvert\cdot\sin\varphi\rvert$ $S_{треуг.}=\dfrac{1}{2}S_{парал-ма}$ (параллелограмм построен на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$)	 $V_{парал-да}=\lvert\vec{a}\vec{b}\vec{c}\rvert$ $V_{пирамиды}=$ $=\dfrac{1}{6}V_{парал-да}$
ФИЗИЧЕСКИЙ СМЫСЛ		
Вычисление работы A силы $\vec{F}$ при перемещении материальной точки из точки B в точку C. $A=\vec{F}\cdot\overrightarrow{BC}$ 	1. Вычисление момента $\vec{M}$ силы $\vec{F}$, приложенной к точке A, относительно точки O. $\vec{M}_0=\vec{r}\times\vec{F}$, где $\vec{r}=\overrightarrow{OA}$  2. Вычисление скорости $\vec{v}$ точки M твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси OZ с угловым ускорением $\vec{\omega}$. $\vec{v}=\vec{\omega}\times\vec{r}$, где $\vec{r}=\overrightarrow{OM}$, $\vec{\omega}$ направлен вдоль оси OZ.	

Продолжение табл. 3

РАСЧЕТ В КООРДИНАТНОЙ ФОРМЕ (ПДСК) $\vec{a}=(x_1,y_1,z_1),\vec{b}=(x_2,y_2,z_2),\vec{c}=(x_3,y_3,z_3)$		
$\vec{a}\cdot\vec{b}=x_1\cdot x_2+$ $+y_1\cdot y_2+z_1\cdot z_2$	$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\end{vmatrix}=$ $=(y_1z_2-y_2z_1)\cdot\vec{i}-$ $-(x_1z_2-x_2z_1)\cdot\vec{j}+$ $+(x_1y_2-x_2y_1)\cdot\vec{k}$ (определитель разложен по элементам первой строки)	$\vec{a}\vec{b}\vec{c}=\begin{vmatrix}x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\\ x_3 & y_3 & z_3\end{vmatrix}$
СВОЙСТВА		
1. Переместитель–ный закон $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$ 2. Сочетательный закон $(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b}=\lambda(\vec{a}\cdot\vec{b})$ 3. Распредели–тельный закон $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=$ $=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$ 4. $\vec{a}^2=\lvert\vec{a}\rvert^2$ (скалярный квадрат вектора равен квадрату его длины)	1. Антипереместительный закон $[\vec{a},\vec{b}]=-[\vec{b},\vec{a}]$ 2. Сочетательный закон $[\lambda\vec{a},\vec{b}]=[\vec{a},\lambda\vec{b}]=\lambda[\vec{a},\vec{b}]$ 3. Распределительный закон $[\vec{a},\vec{b}+\vec{c}]=[\vec{a},\vec{b}]+[\vec{a},\vec{c}]$ 4. $[\vec{a},\vec{a}]=\vec{0}$	1. $[\vec{a},\vec{b}]\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot[\vec{b},\vec{c}]$ 2. При перестановке в смешанном произведении двух векторов его знак меняется на противоположный: $\vec{a}\vec{b}\vec{c}=-\vec{b}\vec{a}\vec{c}=$ $=-\vec{a}\vec{c}\vec{b}=-\vec{c}\vec{b}\vec{a}$ 3. Смешанное произведение не меняется при круговой перестановке векторов: $\vec{a}\vec{b}\vec{c}=\vec{b}\vec{c}\vec{a}=\vec{c}\vec{a}\vec{b}$
ФАКТЫ, ПОЛЕЗНЫЕ ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ		
1. Вычисление угла между векторами:	1. Н. и д. условием коллинеарности ненулевых векторов $\vec{a}$ и	1. Н. и д. условием компланарности трех ненулевых векторов

Окончание табл. 3

$\cos(\vec a,\vec b)=\frac{\vec a\cdot\vec b}{\lvert\vec a\rvert\cdot\lvert\vec b\rvert}$ 2. Вычисление проекции одного вектора на другой: $np_{\vec a}\vec b=\frac{\vec a\cdot\vec b}{\lvert\vec a\rvert}$ 3. $\vec a\perp\vec b\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow\vec a\cdot\vec b=0$ 4. Направляющие косинусы вектора $\vec a=(x,y,z)$ (в ПДСК): $\cos\alpha=$ $=\cos(\vec a,\vec i)=\frac{x}{\lvert\vec a\rvert}$, $\cos\beta=$ $=\cos(\vec a,\vec j)=\frac{y}{\lvert\vec a\rvert}$, $\cos\gamma=$ $=\cos(\vec a,\vec k)=\frac{z}{\lvert\vec a\rvert}$, где $\lvert\vec a\rvert=$ $=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$	$\vec b$ является равенство нулевому вектору их векторного произведения: $[\vec a,\vec b]=\vec 0$. 2. Если $\vec c$ ортогонален двум векторам $\vec a$ и $\vec b$ $(\vec c\perp\vec a,\vec c\perp\vec b)$, то этот вектор коллинеарен их векторному произведению, т.е. $\vec c \parallel [\vec a,\vec b]$. 	$\vec a,\vec b,\vec c$ является равенство нулю их смешанного произведения: $\vec a\vec b\vec c=0$. 2. Если $\vec a\vec b\vec c>0$, то тройка векторов $\vec a,\vec b,\vec c$ – правая, если $\vec a\vec b\vec c<0$, то – левая

ГЛАВА 3. ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

§ 1. Линейное пространство. Преобразование координат вектора при переходе к новому базису

***Опр.* 1.** Упорядоченная система n действительных чисел $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ называется *n-мерным вектором* $\vec{a}$, а числа $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ – его *координатами.*

Обозначение $\vec{a} = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$.

***Опр.* 2.** *Суммой векторов* $\vec{a} = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ и $\vec{b} = (\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n)$ называется вектор

$$\vec{a} + \vec{b} = (\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, ..., \alpha_n + \beta_n).$$

***Опр.* 3.** *Произведением вектора* $\vec{a} = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ *и числа* λ называется вектор $\lambda\vec{a} = (\lambda\alpha_1, \lambda\alpha_2, ..., \lambda\alpha_n)$.

Следствием суммы векторов и произведением вектора и числа является *разность векторов*:

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-1)\vec{b} = (\alpha_1 - \beta_1, \alpha_2 - \beta_2, ..., \alpha_n - \beta_n).$$

Линейные операции над n-мерными векторами обладают теми же свойствами, что и линейные операции над векторами на плоскости и в пространстве.

***Опр.* 4.** Множество всех n-мерных векторов $\vec{a} = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$, $\alpha_i \in \mathbf{R}, i = \overline{1, n}$, для которых определены операции сложения и умножения на число, называется *арифметическим n-мерным векторным пространством* R^n.

В частности, R^2 – множество векторов на плоскости, R^3 – множество векторов в пространстве. Для пространства R^n сохраняются определения линейной комбинации и линейной зависимости векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$.

***Теорема* 1.** *В пространстве R^n существует n л. нз. векторов (это векторы* $\vec{e}_1 = (1,0,...,0), \vec{e}_2 = (0,1,0,...,0),...,$ $\vec{e}_n = (0,0,...,1)$.

Теорема 2. *Любые* $n+1$ *векторов в* R^n *л. з.*

Из теорем 1, 2 следует, что в R^n максимальное число л. нз. векторов равно n.

Опр. 5. *Базисом* в R^n называется любая система n л. нз. векторов, число n называется *размерностью пространства* R^n.

Как и в случае R^2 и R^3, всякий вектор $\vec{a} \in R^n$ можно единственным образом представить как линейную комбинацию базисных векторов $\langle \vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n \rangle$: $\vec{a} = \alpha_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_n\vec{e}_n$, причем $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ называются *координатами вектора* $\vec{a}$ в этом базисе.

Пусть $(x_1, x_2, ..., x_n)$ – координаты вектора $\vec{x} \in R^n$ в базисе $\langle \vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n \rangle$, и пусть векторы $\vec{e}_1', \vec{e}_2', ..., \vec{e}_n'$ также образуют базис. Если заданы координаты векторов $\vec{e}_1', \vec{e}_2', ..., \vec{e}_n'$ в старом базисе $\langle \vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n \rangle$, то есть

$$\vec{e}_1' = \begin{pmatrix} e_{11} \\ e_{21} \\ ... \\ e_{n1} \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_2' = \begin{pmatrix} e_{12} \\ e_{22} \\ ... \\ e_{n2} \end{pmatrix}, \quad ..., \quad \vec{e}_n' = \begin{pmatrix} e_{1n} \\ e_{2n} \\ ... \\ e_{nn} \end{pmatrix},$$

и если требуется найти координаты вектора $\vec{x}$ в этом базисе, то следует:

1) составить матрицу перехода от первого базиса ко второму

$$T = \begin{pmatrix} e_{11} & e_{12} & ... & e_{1n} \\ e_{21} & e_{22} & ... & e_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ e_{n1} & e_{n2} & ... & e_{nn} \end{pmatrix},$$

столбцами которой являются координаты векторов нового базиса в старом базисе;

2) найти координаты $(x_1', x_2', ..., x_n')$ вектора $\vec{x}$ в новом базисе из матричного уравнения $X = T \cdot X'$, решение которого при невырожденной матрице T $(|E| \neq 0)$ имеет вид:

$$X' = T^{-1} \cdot X \text{, где } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}, X' = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ ... \\ x_n' \end{pmatrix}.$$

Тогда в новом базисе $\langle \vec{e}_1', \vec{e}_2', ..., \vec{e}_n' \rangle$ вектор $\vec{x}$ будет иметь координаты $(x_1', x_2', ..., x_n')$, и его можно записать в виде матрицы-столбца

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ ... \\ x_n' \end{pmatrix}.$$

Пример 1. **А.** Убедиться в том, что система векторов $\vec{e}_1' = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{e}_2' = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{e}_3' = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ образует базис в R^3.

Б. В базисе $\langle \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3 \rangle$ задан вектор $\vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$. Найти координаты этого вектора в базисе $\langle \vec{e}_1', \vec{e}_2', \vec{e}_3' \rangle$.

◄ **А.** Убедимся, что система векторов $\vec{e}_1', \vec{e}_2', \vec{e}_3'$ л. нз. Для этого составим векторное равенство

$$\alpha_1 \vec{e}_1' + \alpha_2 \vec{e}_2' + ... + \alpha_n \vec{e}_n' = \vec{0}. \tag{1}$$

Приравнивая координаты векторов левой и правой частей равенства (1), получаем однородную СЛАУ:

$$\begin{cases} \alpha_1 \cdot 1 + \alpha_2 \cdot (-2) + \alpha_3 \cdot (-1) = 0, \\ \alpha_1 \cdot 2 + \alpha_2 \cdot 0 + \alpha_3 \cdot 1 = 0, \\ \alpha_1 \cdot (-1) + \alpha_2 \cdot 3 + \alpha_3 \cdot (-1) = 0. \end{cases} \qquad (2)$$

Найдем определитель основной м. A системы (2) $|A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = -11 \neq 0$, сл–но, однородная СЛАУ (2) имеет только нулевое решение $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0, \alpha_3 = 0$, и равенство (1) выполняется только, когда все $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ одновременно равны нулю. Сл–но, по определению, система векторов $\vec{e}_1', \vec{e}_2', \vec{e}_3'$ – л. нз. и образует базис в R^3.

Б. Составим матрицу перехода от базиса $\langle \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3 \rangle$ к базису $\langle \vec{e}_1', \vec{e}_2', \vec{e}_3' \rangle$:

$$T = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Обратная ей матрица $T^{-1} = -\dfrac{1}{11} \cdot \begin{pmatrix} -3 & -5 & -2 \\ 1 & -2 & -3 \\ 6 & -1 & 4 \end{pmatrix}$.

Тогда вектор $\vec{x}$ в базисе $\langle \vec{e}_1', \vec{e}_2', \vec{e}_3' \rangle$ имеет вид:

$$X' = T^{-1}X = -\frac{1}{11} \cdot \begin{pmatrix} -3 & -5 & -2 \\ 1 & -2 & -3 \\ 6 & -1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{11} \cdot \begin{pmatrix} -11 \\ -11 \\ -11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Это значит $x_1' = 1,\ x_2' = 1,\ x_3' = 1$ и

$$\vec{x} = 1 \cdot \vec{e}_1' + 1 \cdot \vec{e}_2' + 1 \cdot \vec{e}_3' = \vec{e}_1' + \vec{e}_2' + \vec{e}_3'. \blacktriangleright$$

***Опр.* 6.** *Линейным (векторным) пространством* L называется множество X, состоящее из элементов любой природы, с введенными на нем операциями сложения и умножения на действительное число, для которых выполняются три условия:

1) $\forall x, y \in X$ сумма $(x+y) \in X$;

2) $\forall x \in X$ и $\forall \alpha \in \mathbf{R}$ (α – вещественное число) произведение $\alpha \cdot x \in X$;

3) указанные операции сложения и умножения на число подчинены следующим аксиомам:

а) $\forall x, y \in X \quad x+y=y+x$;

б) $\forall x, y, z \in X \quad (x+y)+z=x+(y+z)$;

в) $\exists$ нулевой элемент $\Theta \in X$ такой, что $\forall x \in X$ $x+\Theta=x$;

г) $\forall x \in X \quad \exists(-x) \in X$ (противоположный) такой, что $x+(-x)=\Theta$;

д) $\forall x \in X \quad 1 \cdot x = x$;

е) $\forall x \in X$ и $\forall \alpha, \beta \in \mathbf{R}$ выполняется $\alpha(\beta x)=(\alpha\beta)x$;

ж) $\forall x \in X$ и $\forall \alpha, \beta \in \mathbf{R}$ выполняется $(\alpha+\beta)x=\alpha x+\beta x$;

з) $\forall x, y \in X$ и $\forall \alpha \in \mathbf{R}$ выполняется $\alpha(x+y)=\alpha x+\alpha y$.

Элементы л. пр. называются *векторами*.

Частными случаями л. пр. являются множество вещественных чисел $\mathbf{R}$; арифметическое векторное пространство R^n; множество многочленов $P_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_n$.

§ 2. Евклидово пространство

***Опр.* 1.** Л. пр. называется *евклидовым*, если любым двум его элементам x и y ставится в соответствие вещественное число, которое обозначается (x, y) и называется *скалярным произведением,* подчиненное следующим аксиомам:

1) $(x, y)=(y, x)$;

2) $(x+z, y)=(x, z)+(y, z)$, где z – элемент л. пр.;

3) $(\lambda x, y)=\lambda(x, y)$, где $\lambda \in \mathbf{R}$;

4) $(x,x) \geq 0$, при этом $(x,x) = 0$, если x – нулевой элемент.

Примером ев. пр. является n-мерное векторное пространство R^n, в котором скалярное произведение двух векторов $\vec{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ и $\vec{y} = (y_1, y_2, ..., y_n)$ определяется соотношением

$$(\vec{x}, \vec{y}) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = x_1 y_1 + x_2 y_2 + ... + x_n y_n .$$

Для скалярного произведения элементов x и y любого ев. пр. выполняется неравенство

$$(x, y)^2 \leq (x,x)(y,y),$$

которое называется *неравенством Коши-Буняковского*.

В частности, для ев. пр. R^n неравенство Коши-Буняковского примет вид:

$$(x_1 y_1 + x_2 y_2 + ... + x_n y_n)^2 \leq$$
$$\leq (x_1{}^2 + x_2{}^2 + ... + x_n{}^2) \cdot (y_1{}^2 + y_2{}^2 + ... + y_n{}^2).$$

***Опр.* 2.** *Нормой элемента* x в л. пр. называется вещественное число $\|x\|$, которое ставится в соответствие этому элементу и подчинено следующим аксиомам:

1) $\|x\| \geq 0$, $\|x\| = 0$, если x – нулевой элемент;
2) $\|\lambda \cdot x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$, где $\lambda \in \mathbf{R}$;
3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (*неравенство Минковского*), где y – элемент л. пр.

Если л.пр. является ев. пр., то $\|x\| = \sqrt{(x,x)}$. В R^n норма вектора $\vec{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ определяется соотношением $\|x\| = \sqrt{(x,x)} = \sqrt{x_1{}^2 + x_2{}^2 + ... + x_n{}^2}$.

***Опр.* 3.** Два элемента x и y ев. пр. называются *ортогональными*, если $(x, y) = 0$ (их скалярное произведение равно нулю).

Например, векторы $\vec{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ и $\vec{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ортогональны, так как $(\vec{i}, \vec{j}) = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0$.

***Опр.* 4.** Если норма элемента x ев. пр. равна единице ($\|x\| = 1$), то x называется *нормированным*.

***Опр.* 5.** Базис векторов $\langle \vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n \rangle$ n-мерного векторного ев. пр. R^n называется *ортонормированным*, если

$$(\vec{e}_i, \vec{e}_j) = \begin{cases} 0, i \neq j \\ 1, i = j; \;\; i, j = \overline{1, n}, \end{cases}$$

то есть векторы $\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n$ попарно ортогональны.

Если в ев. пр. задан базис $\langle \vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n \rangle$, который не является ортогональным, то можно построить ортогональный базис $\langle \vec{e}_1', \vec{e}_2', ..., \vec{e}_n' \rangle$ по следующим формулам (процесс ортогонализации Шмидта):

$$\vec{e}_1' = \vec{e}_1; \;\; \vec{e}_k' = \vec{e}_k - \sum_{i=1}^{k-1} c_i \vec{e}_i', \;\; k = 2,3,...,n, \;\; c_i = \frac{(\vec{e}_k, \vec{e}_i')}{(\vec{e}_i', \vec{e}_i')}.$$

Пример будет рассмотрен в конце этой главы.

§ 3. Линейные операторы (преобразования). Матрица линейного оператора

Пусть $L = R^n$.

***Опр.* 1.** *Линейным оператором* $\widetilde{A}$ *л. пр.* L называется закон, по которому каждому вектору $\vec{x} \in L$ ставится в соответствие вектор $\vec{x}' \in L$: $\vec{x}' = \widetilde{A}\vec{x}$, причем $\forall \vec{x}, \vec{y} \in L$ справедливо:

1) $\widetilde{A}(\vec{x} + \vec{y}) = \widetilde{A}\vec{x} + \widetilde{A}\vec{y}$;

2) $\widetilde{A}(\lambda \cdot \vec{x}) = \lambda \cdot \widetilde{A}(\vec{x}), \;\; \lambda \in \mathbf{R}$;

где $\widetilde{A}\vec{x}$ и $\widetilde{A}\vec{y}$ называются *образами векторов* $\vec{x}$ и $\vec{y}$.

***Опр.* 2.** *Матрицей л. о.* $\widetilde{A}$ в пространстве R^n с базисом $\langle \vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n \rangle$ называется матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}, \tag{3}$$

столбцы которой являются координатами образов базисных векторов $\widetilde{A}\vec{e}_j = a_{1j}\vec{e}_1 + a_{2j}\vec{e}_2 + ... + a_{nj}\vec{e}_n$, $j = \overline{1, n}$.

Равенство $\vec{x}' = \widetilde{A}\vec{x}$ записывается в R^n в матричной форме

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ ... \\ x_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}. \tag{4}$$

В разных базисах л. о. задается различными матрицами. Пусть A – матрица л. о. $\widetilde{A}$ в базисе $\langle \vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n \rangle$, A' – в базисе $\vec{e}_1', \vec{e}_2', ..., \vec{e}_n'$. Если $T = (\tau_{ij})_{n \times n}$ – матрица перехода от первого базиса ко второму, то

$$A' = T^{-1}AT. \tag{5}$$

Пример. Задана матрица $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ л. о. $\widetilde{A}$ в базисе $\langle \vec{e}_1, \vec{e}_2 \rangle$. Найти матрицу A' этого оператора в базисе $\langle \vec{e}_1', \vec{e}_2' \rangle$, если $\begin{cases} \vec{e}_1' = 2\vec{e}_1 + \vec{e}_2, \\ \vec{e}_2' = -\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2. \end{cases}$

◄ Так как в базисе $\langle \vec{e}_1, \vec{e}_2 \rangle$ координаты векторов $\vec{e}_1' = (2,1)$, $\vec{e}_2' = (-1,2)$, то матрица T перехода от базиса $\langle \vec{e}_1, \vec{e}_2 \rangle$ к базису $\langle \vec{e}_1', \vec{e}_2' \rangle$ имеет вид: $T = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Тогда $T^{-1} = \dfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. По формуле (5)

$$A' = T^{-1}AT = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2{,}6 & -1{,}8 \\ 2{,}2 & 0{,}4 \end{pmatrix}. \blacktriangleright$$

Для проверки правильности вычислений м. A' полезными являются следующие утверждения.

1. $\sum\limits_{i=1}^{n} a_{ii} = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ii}'$ (суммы диагональных элементов м. A и м. A' совпадают).
2. $|A| = |A'|$.
3. $rang\, A = rang\, A'$.

§ 4. Собственные числа и собственные векторы матрицы

Пусть квадратная матрица $A = (a_{ij})_{n\times n}$ – матрица л. о. $\widetilde{A}$ в л. пр. R^n.

***Опр.* 1.** Ненулевой вектор $\vec{x} \in R^n$ называется *собственным вектором м.* A (л. о. $\widetilde{A}$), если выполняется равенство:

$$A\vec{x} = \lambda\vec{x} \ \ (\widetilde{A}\vec{x} = \lambda\vec{x}), \tag{6}$$

где λ – некоторое вещественное число, называемое *собственным числом м.* A (л. о. $\widetilde{A}$).

Равенство (6) может быть записано в виде:

$$(A - \lambda E)\cdot \vec{x} = \vec{0}, \tag{7}$$

где E – единичная матрица размером $n \times n$. Сл–но, собственный вектор $\vec{x}$ является ненулевым решением однородной системы (7), а собственные числа определяются из условия равенства нулю определителя этой системы: $\left|A-\lambda E\right|=0$ (данное уравнение называется *характеристическим*).

Пример 1. Определить собственные значения и собственные векторы матрицы $A=\begin{pmatrix}1 & 6\\ 1 & 2\end{pmatrix}$.

◄ Характеристическое уравнение для нахождения собственных значений м. A имеет вид:

$$\left|A-\lambda E\right|=\left|\begin{pmatrix}1 & 6\\ 1 & 2\end{pmatrix}-\lambda\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right|=\left|\begin{pmatrix}1 & 6\\ 1 & 2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}\right|=$$

$$=\begin{vmatrix}1-\lambda & 6\\ 1 & 2-\lambda\end{vmatrix}=0$$

или $(1-\lambda)(2-\lambda)-1\cdot 6=0$, или $\lambda^2-3\lambda-4=0$, откуда следует, что м. A имеет два собственных значения $\lambda_1=4$ и $\lambda_2=-1$.

Собственный вектор, соответствующий $\lambda_1=4$, согласно (7) определяется из системы уравнений вида:

$$\begin{cases}(1-4)x_1+6x_2=0,\\ x_1+(2-4)x_2=0.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-3x_1+6x_2=0,\\ x_1-2x_2=0,\end{cases}$$

которая сводится к одному уравнению $x_1=2x_2$.

Отсюда $\begin{cases}x_1=2x_2,\\ x_2=x_2\end{cases}$.

Собственный вектор $\vec{x}_1=C\cdot\begin{pmatrix}2\\ 1\end{pmatrix}$, где $C\neq 0, C=const$.

Второй собственный вектор $\vec{x}_2$, соответствующий собственному значению $\lambda_2=-1$, определяется из системы уравнений вида:

$$\begin{cases}(1+1)x_1+6x_2=0,\\ x_1+(2+1)x_2=0.\end{cases}$$

Эта система уравнений также сводится к одному уравнению $x_1 + 3x_2 = 0$.

Отсюда $\begin{cases} x_1 = -3x_2, \\ x_2 = x_2. \end{cases}$

Собственный вектор $\vec{x}_2 = C \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $C \neq 0$, $C = const$, т.е. м. A имеет два собственных различных значения $\lambda_1 = 4$ и $\lambda_2 = -1$ и два собственных вектора, равных (с точностью до постоянного множителя) $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$. ►

Пример 2. Найти собственные числа и собственные векторы матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -12 & 6 \\ 10 & -19 & 10 \\ 12 & -24 & 13 \end{pmatrix}.$$

◄ Составим характеристическое уравнение для нахождения собственных чисел м. A:

$$\begin{vmatrix} 7-\lambda & -12 & 6 \\ 10 & -19-\lambda & 10 \\ 12 & -24 & 13-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

или $(1-\lambda)^2(\lambda+1) = 0$, откуда следует, что у м. A следующие собственные числа: $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = -1$.

Собственный вектор, соответствующий $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, определяется из однородной системы уравнений вида:

$$\begin{cases} (7-1)x_1 - 12x_2 + 6x_3 = 0, \\ 10x_1 - (-19-1)x_2 + 10x_3 = 0, \\ 12x_1 - 24x_2 + (13-1)x_3 = 0, \end{cases}$$

которая сводится к уравнению $x_1 - 2x_2 + x_3 = 0$.

Если x_2, x_3 – свободные неизвестные, то

$$\begin{cases} x_1 = 2x_2 - x_3, \\ x_2 = x_2, \\ x_3 = x_3 \end{cases}$$

и собственный вектор $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 2x_2 - x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$,

где матрицы-столбцы $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ образуют ФСР, C_1 и C_2 – любые вещественные числа, не равные нулю одновременно.

Собственный вектор, соответствующий $\lambda_3 = -1$, определяется из однородной системы уравнений вида:

$$\begin{cases} (7 - (-1))x_1 - 12x_2 + 6x_3 = 0, \\ 10x_1 - (-19 - (-1))x_2 + 10x_3 = 0, \\ 12x_1 - 24x_2 + (13 - (-1))x_3 = 0, \end{cases}$$

которая сводится к системе

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + \dfrac{7}{6}x_3 = 0, \\ 2x_2 - \dfrac{5}{6}x_3 = 0. \end{cases}$$

Объявляя x_3 свободной неизвестной, получаем:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{2}x_3, \\ x_2 = \dfrac{5}{6}x_3 \end{cases}$$

и собственный вектор $\vec{x}_2 = C \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$, где $C \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$.▶

§ 5. Квадратичные формы

***Опр.* 1.** *Квадратичной формой* f *от* n *неизвестных* $x_1, x_2, ..., x_n$ в ев. пр. R^n называется выражение вида:

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j \,,$$

где a_{ij} – числовые коэффициенты, причем $a_{ij} = a_{ji}$.

***Опр.* 2.** *Матрицей квадратичной формы* называется м. $A = (a_{ij})_{n \times n}$, её ранг называется *рангом квадратичной формы*.

В частности, $f(x_1, x_2) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2$,

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$, $f(x_1, x_2, x_3) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 +$

$+ 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3$, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$.

Вид матрицы кв. ф. определяется базисом $\langle \vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n \rangle$, в котором задан вектор $\vec{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$, и меняется при переходе к другому базису по формуле (5) $A' = T^{-1}AT$ (T – матрица перехода от $\langle \vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n \rangle$ к $\langle \vec{e}\,'_1, \vec{e}\,'_2, ..., \vec{e}\,'_n \rangle$).

***Опр.* 3.** Кв. ф. вида

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} x_i^2$$

называется *канонической*.

Матрица канонической формы является диагональной. Чтобы привести кв. ф. к каноническому виду, следует перейти к базису собственных векторов м. A квадратичной формы.

Матрица кв. ф. симметричная $(a_{ij} = a_{ji})$. Собственные числа такой матрицы вещественные, а собственные векторы, соответствующие различным собственным числам, – ортогональны.

Если собственные числа м. A различные, то соответствующие собственные векторы $\vec{x}_1, \vec{x}_2, ..., \vec{x}_n$ образуют ортогональный базис, который можно нормировать. В этом ортонормированном базисе матрица кв. ф. будет иметь вид:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & \lambda_2 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & \lambda_n \end{pmatrix},$$

где $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ – собственные числа м. A.

Линейное преобразование, которое приводит матрицу кв. ф. к каноническому виду, имеет вид: $\vec{x} = T \cdot \vec{x}'$, где T – матрица перехода от базиса $\langle \vec{x}_1, \vec{x}_2, ..., \vec{x}_n \rangle$ к ортонормированному базису собственных векторов $\langle \vec{x}_1', \vec{x}_2', ..., \vec{x}_n' \rangle$.

***Опр.* 4.** Кв. ф. называется *положительно определённой*, если все собственные числа матрицы кв. ф. положительны ($\lambda_i > 0$, $i = \overline{1, n}$), *отрицательно определённой* – отрицательны ($\lambda_i < 0$, $i = \overline{1, n}$). Если есть как положительные, так и отрицательные собственные числа, то кв. ф. – *знакопеременная*.

Вопрос о знаке кв. ф. можно решить, не находя собственных чисел матрицы кв. ф.

Пусть $A = \left(a_{ij}\right)_{n\times n}$ матрица кв. ф. $f\left(x_1, x_2, ..., x_n\right)$ в некотором базисе.

Обозначим: $\Delta_1 = a_{11}$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}$,

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \ldots, \quad \Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{1n} & a_{2n} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$ – угловые

миноры м. A.

Теорема (критерий Сильвестра). *Для того чтобы кв. ф. $f\left(x_1, x_2, ..., x_n\right)$ была положительно определённой, н. и д., чтобы $\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 > 0, ...,$ $\Delta_n > 0$. Для того чтобы кв.ф. $f\left(x_1, x_2, ..., x_n\right)$ была отрицательно определённой, н. и д., чтобы $\Delta_1 < 0$, $\Delta_2 > 0$, $\Delta_3 < 0, ...,$ $\left(-1\right)^n \Delta_n > 0$.*

Если условия критерия Сильвестра не выполняются, то кв. ф. является знакопеременной.

Пример 1. Привести кв. ф. $f\left(x_1, x_2\right) = 9x_1^2 - 4x_1x_2 + 6x_2^2$ к каноническому виду.

◄ Находим собственные числа матрицы кв. ф. $A = \begin{pmatrix} 9 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$:

$$\begin{vmatrix} 9-\lambda & -2 \\ -2 & 6-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 15\lambda + 50 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = 5,\ \lambda_2 = 10.$$

Собственные векторы $\vec{x}_1$ и $\vec{x}_2$ получаем из систем:

$$\begin{cases} (9-5)x_1 - 2x_2 = 0, \\ -2x_1 - (6-5)x_2 = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} (9-10)x_1 - 2x_2 = 0, \\ -2x_1 + (6-10)x_2 = 0. \end{cases}$$

Решение первой: $\begin{cases} x_1 = x_1, \\ x_2 = 2x_1, \end{cases}$ второй: $\begin{cases} x_1 = x_1, \\ x_2 = -\dfrac{x_1}{2}. \end{cases}$

Собственные векторы: $\vec{x}_1 = C \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{x}_2 = C \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1/2 \end{pmatrix}$, $C \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$.

Составим базис $\langle \vec{e}_1, \vec{e}_2 \rangle$: $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1/2 \end{pmatrix}$.

Нормируем собственные векторы (нормирующие множители $|\vec{e}_1| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$ и $|\vec{e}_2| = \sqrt{1^2 + \left(-\dfrac{1}{2}\right)^2} = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$):

$$\vec{e}_1' = \frac{\vec{e}_1}{|\vec{e}_1|} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{5}} \\ \dfrac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_2' = \frac{\vec{e}_2}{|\vec{e}_2|} = \begin{pmatrix} \dfrac{2}{\sqrt{5}} \\ \dfrac{-1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}.$$

Кв. ф. является положительно определённой ($\lambda_1 = 5 > 0$ и $\lambda_2 = 10 > 0$) и преобразованием

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{x_1'}{\sqrt{5}} + \dfrac{2x_2'}{\sqrt{5}}, \\ x_2 = \dfrac{2x_1'}{\sqrt{5}} - \dfrac{x_2'}{\sqrt{5}}, \end{cases}$$

приводится к каноническому виду

$$f(x_1, x_2) = 5(x_1')^2 + 10(x_2')^2. \blacktriangleright$$

Пример 2. Привести кв. ф. $f(x_1, x_2, x_3) = 17x_1^2 + 14x_2^2 + 14x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3$ к каноническому виду.

◄ Составляем матрицу кв. ф.

$$A = \begin{pmatrix} 17 & -2 & -2 \\ -2 & 14 & -4 \\ -2 & -4 & 14 \end{pmatrix}.$$

Её собственные числа $\lambda_1 = 9$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 18$ (убедитесь в этом самостоятельно).

Собственный вектор, соответствующий собственному числу $\lambda_1 = 9$, равен $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

При $\lambda_2 = \lambda_3 = 18$ $\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{e}_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ (находятся аналогично примеру 2 из § 4 главы 3).

Проводим ортогонализацию базиса $\langle \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3 \rangle$, используя процесс ортогонализации Шмидта (§ 2 главы 3):

$$\vec{e}_1' = \vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$$\vec{e}_2' = \vec{e}_2 - \frac{(\vec{e}_2, \vec{e}_1')}{(\vec{e}_1', \vec{e}_1')} \cdot \vec{e}_1' = \vec{e}_2 - \frac{(-2)\cdot 1 + 1 \cdot 2 + 0 \cdot 2}{1^2 + 2^2 + 2^2} \cdot \vec{e}_1' =$$

$$= \vec{e}_2 - 0 \cdot \vec{e}_1' = \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\vec{e}_3' = \vec{e}_3 - \frac{(\vec{e}_3, \vec{e}_2')}{(\vec{e}_2', \vec{e}_2')} \cdot \vec{e}_2' =$$

$$= \vec{e}_3 - \frac{4}{5}\cdot\vec{e}_2\,' = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{4}{5}\cdot\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-2}{5} \\ \frac{-4}{5} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Нормируя собственные векторы:

$$\vec{e}_1\,'' = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_2\,'' = \begin{pmatrix} \frac{-2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_3\,'' = \begin{pmatrix} \frac{2}{3\sqrt{5}} \\ \frac{-4}{3\sqrt{5}} \\ \frac{5}{3\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

и проводя ортогональное преобразование

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{3}x_1' - \frac{2}{\sqrt{5}}x_2' + \frac{2}{3\sqrt{5}}x_3', \\ x_2 = \frac{2}{3}x_1' + \frac{1}{\sqrt{5}}x_2' - \frac{4}{3\sqrt{5}}x_3', \\ x_3 = \frac{2}{3}x_1' + \frac{5}{3\sqrt{5}}x_3', \end{cases}$$

получаем в ортонормированном базисе $\langle \vec{e}_1\,'', \vec{e}_2\,'', \vec{e}_3\,'' \rangle$ кв. ф. следующего вида: $f = 9(x_1'')^2 + 18(x_2'')^2 + 18(x_3'')^2$. ►

ГЛАВА 4. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

В элементарной геометрии изучаются свойства прямолинейных фигур и окружности. Основную роль играют построения; вычисления же, хотя практическое значение их и велико, в теории играют подчиненную роль. Выбор того или иного построения обычно требует изобретательности. Это и составляет главную трудность при решении задач методами элементарной геометрии.

Аналитическая геометрия возникла из потребности создать единообразные средства для решения геометрических задач с тем, чтобы применить их к изучению важных для практики кривых линий различной формы. Эта цель была достигнута созданием координатного метода. В нем ведущую роль играют вычисления, построения же имеют вспомогательное значение. Вследствие этого решение задач методом аналитической геометрии требует гораздо меньшей изобретательности.

Создание координатного метода было подготовлено трудами древнегреческих математиков, в особенности Аполлония (3 – 2 вв. до н.э.). Систематическое развитие координатный метод получил в первой половине 17 века в работах П. Ферми и Р. Декарта. Они, однако, рассматривали только плоские линии. К систематическому изучению пространственных линий и поверхностей координатный метод был применен впервые Л. Эйлером.

Методы аналитической геометрии широко используются в современном естествознании и прикладных технических дисциплинах при построении математических моделей объектов и процессов.

§ 1. Уравнения прямой

Прямая на плоскости и в пространстве может быть задана по-разному. Различные виды уравнения прямой отражены в табл. 4.

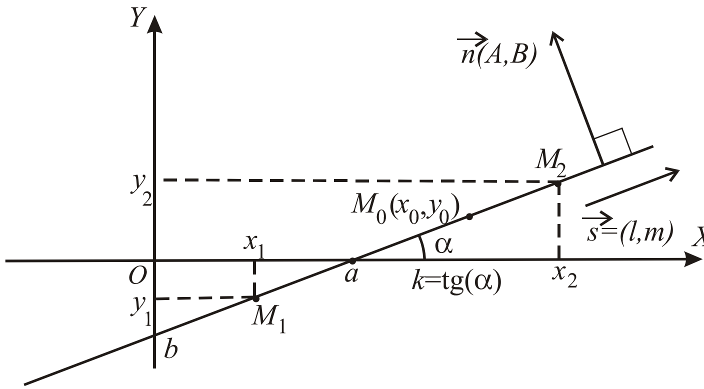


Таблица 4

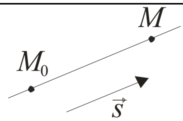
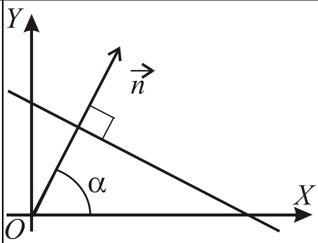
Уравнения прямой на плоскости и в пространстве

Вид уравнения	На плоскости	В пространстве
Общее уравнение прямой	1. $Ax + By + C = 0$ $\left(A^2 + B^2 \neq 0\right)$ $\vec{n}\left(A, B\right)$ – вектор, перпендикулярный к прямой (вектор нормали). 2. $A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$, где $\left(x_0, y_0\right)$ – точка, через которую проходит прямая, $\vec{n}\left(A, B\right)$ – вектор нормали к данной прямой	$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \end{cases}$ прямая задается как линия пересечения двух непараллельных плоскостей (уравнение плоскости см. § 3 главы 4)
Уравнение прямой с угловым коэффициентом	$y = kx + b, \quad k = tg\alpha$ (угловой коэффициент k равен тангенсу угла α, образованного прямой и осью OX, $0 \le \alpha \le \pi$, отсчет угла производится против часовой стрелки)	

Продолжение табл. 4

Уравнение прямой с угловым коэффициентом k, проходящей через точку $M_1(x_1, y_1)$	$y - y_1 = k(x - x_1)$ (уравнение пучка прямых с центром в точке $M_1(x_1, y_1)$)	
Уравнение прямой в отрезках	$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ (прямая в отрезках пересекает ось OX в точке $A(a,0)$ и ось OY – в точке $B(0,b)$)	
Уравнение прямой, проходящей через две заданные точки	$M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$ $\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$	$M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ $\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$
Канонические уравнения прямой	$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m}$ Прямая проходит через точку $M_0(x_0, y_0)$ параллельно заданному вектору $\vec{s}(l, m)$ – направляющий вектор прямой	$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}$ Прямая проходит через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ параллельно заданному вектору $\vec{s}(l, m, n)$ – направляющий вектор прямой
Параметрические уравнения прямой	$\begin{cases} x = x_0 + l \cdot t, \\ y = y_0 + m \cdot t, \end{cases} t \in \mathbf{R}$	$\begin{cases} x = x_0 + l \cdot t, \\ y = y_0 + m \cdot t, \\ z = z_0 + n \cdot t, \end{cases}$ $t \in \mathbf{R}$

Окончание табл. 4

Векторное уравнение прямой	 $\vec r_M = \vec r_{M_0} + t \cdot \vec s \quad \left(\vec r_M = \overrightarrow{OM}, \vec r_{M_0} = \overrightarrow{OM_0}\right)$	
Нормальное уравнение прямой	 $x \cdot \cos\alpha + y \cdot \sin\alpha - p = 0$, где $\cos\alpha$ и $\sin\alpha$ – координаты нормального (⊥) вектора прямой, направленного из начала координат в сторону прямой; p – расстояние от начала координат до прямой. Это уравнение можно получить из общего $Ax + By + C = 0$, домножив его на нормирующий множитель $$\mu = \pm\frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$ Знак μ противоположен знаку числа C	

Пример. Известно общее уравнение прямой L:

$$\begin{cases} x - y - 4 = 0, \\ x + 2y + z - 7 = 0. \end{cases}$$

Найти её канонические уравнения.

◄ Для определения координат опорной точки M_0 полагаем $z_0 = 0$ и, подставляя в общие уравнения прямой L, получаем систему для определения x_0, y_0:

$$\begin{cases} x_0 - y_0 - 4 = 0, \\ x_0 + 2y_0 + 0 - 7 = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 5, \\ y_0 = 1. \end{cases}$$

Т.о., $M_0(5,1,0)$.

Нормальные векторы плоскостей, определяющих прямую L как линию пересечения, имеют координаты: $\vec{n}_1 = (1,-1,0)$, $\vec{n}_2 = (1,2,1)$.

Находим направляющий вектор $\vec{s}$ прямой L как векторное произведение векторов $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$:

$$\vec{s} = [\vec{n}_1, \vec{n}_2] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}\,,\ \vec{s} = (-1,-1,3).$$

Следовательно, канонические уравнения прямой имеют вид: $\dfrac{x-5}{-1} = \dfrac{y-1}{-1} = \dfrac{z}{3}$. ►

§ 2. Взаимное расположение прямых. Угол между прямыми. Расстояние от точки до прямой

Пусть заданы на плоскости две прямые:

$$L_1:\ A_1x + B_1y + C_1 = 0, \quad \vec{n}_1 = (A_1, B_1) \quad (y = k_1x + b_1),$$
$$L_2:\ A_2x + B_2y + C_2 = 0, \ \vec{n}_2 = (A_2, B_2) \quad (y = k_2x + b_2).$$

$L_1 \| L_2 \Leftrightarrow$ 1) $\vec{n}_1 \| \vec{n}_2 \Leftrightarrow \dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2}$ (координаты векторов $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$ пропорциональны) $\Leftrightarrow A_1 B_2 - A_2 B_1 = 0$, или

2) $\left| \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 \right| = 0$, или

3) $k_1 = k_2$.

$L_1 \perp L_2 \Leftrightarrow$ 1) $\vec{n}_1 \perp \vec{n}_2 \Leftrightarrow A_1 A_2 + B_1 B_2 = 0$ (скалярное произведение векторов $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$ должно быть равно нулю), или

2) $k_1 \cdot k_2 = -1$.

$$L_1 \bigcap L_2 \Leftrightarrow \Delta = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0 \quad \left(\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2} \right).$$

Координаты точки пересечения прямых L_1 и L_2 находятся по формулам:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}}{\Delta}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}}{\Delta}$$

(вспомните формулы Крамера для решения СЛАУ).

Замечание 1. Аналогичные условия можно записать, если заданы направляющие векторы $\vec{s}_1 = (l_1, m_1)$ и $\vec{s}_2 = (l_2, m_2)$ прямых L_1 и L_2.

Замечание 2. В пространстве условия $\|$ или $\perp$ прямых M_1 и M_2 следуют из условий $\|$ или $\perp$ векторов $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$ или $\vec{s}_1$ и $\vec{s}_2$:

$$M_1 \| M_2 \Leftrightarrow \left| \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 \right| = 0; \quad M_1 \perp M_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0.$$

Угол φ между прямыми L_1 и L_2 определяется как угол между направляющими векторами (или векторами нормали) этих прямых или дополняющий его до $\pi \left(0 \leq \varphi \leq \dfrac{\pi}{2} \right)$:

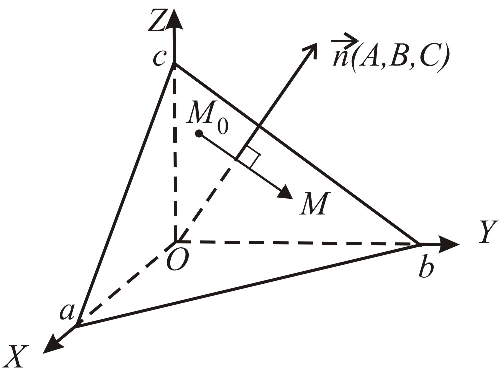
$$\cos\varphi = \frac{\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2}{|\vec{s}_1| \cdot |\vec{s}_2|} \quad \text{или} \quad \operatorname{tg}\varphi = \left| \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2} \right|.$$

Расстояние от точки $M_0(x_0, y_0)$ *до прямой* L: $Ax + By + C = 0$ находится по формуле:

$$\text{c}(M_0, L) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

($\text{c}(M_0, L)$ – это длина перпендикуляра, опущенного из точки M_0 на прямую L).

§ 3. Уравнения плоскости



Плоскость в пространстве может быть задана по-разному. Различные виды уравнения плоскости отражены в табл. 5.

Таблица 5

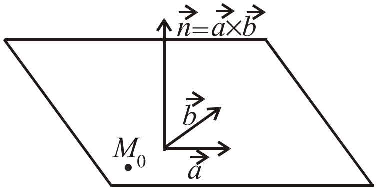
Уравнения плоскости

Вид уравнения	**Уравнение**
Общее уравнение плоскости	$Ax + By + Cz + D = 0 \ (A^2 + B^2 + C^2 \neq 0)$, $\vec{n}\,(A, B, C)$ – нормальный вектор плоскости
Уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$,	$\vec{n} \cdot \overrightarrow{M_0M} = 0 \Leftrightarrow$ $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$

Продолжение табл. 5

перпендикулярно к вектору $\vec{n}\,(A,B,C)$	
Уравнение плоскости в отрезках	$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1,$$ где числа $a,\ b,\ c$ – абсцисса, ордината, аппликата точек пересечения плоскости с координатными осями
Нормальное уравнение плоскости	$$x\cdot\cos\alpha+y\cdot\cos\beta+z\cdot\cos\gamma-p=0,$$ где $p>0$ – расстояние от начала координат до плоскости; направляющие косинусы $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ – координаты единичного нормального вектора $\vec{n}^0$ $\left(\left\|\vec{n}^0\right\|=1,\ \vec{n}^0=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)\right)$, направленного из начала координат к плоскости. Умножением на нормирующий множитель $$\mu=\pm\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$ (знак μ противоположен знаку свободного слагаемого D в общем уравнении плоскости) общее уравнение плоскости приводится к нормальному виду
Уравнение плоскости, проходящей через три точки: $M_1(x_1,y_1,z_1)$, $M_2(x_2,y_2,z_2)$, $M_3(x_3,y_3,z_3)$, *не лежащие на одной прямой*	$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0$$ (записано условие компланарности векторов $\overrightarrow{M_1M}$, $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\overrightarrow{M_1M_3}$: $\overrightarrow{M_1M}\cdot\overrightarrow{M_1M_2}\cdot\overrightarrow{M_1M_3}=0$, где $M(x,y,z)$ – произвольная точка плоскости)

Окончание табл. 5

Плоскость, заданная точкой $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и двумя неколлинеарными векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, коллинеарными плоскости	 $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$, где нормальный вектор равен $\vec{n}=\vec{a}\times\vec{b}$

§ 4. Взаимное расположение плоскостей, прямой и плоскости. Расстояние от точки до плоскости

Пусть даны две плоскости:

σ_1: $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$, $(\vec{n}_1=(A_1,B_1,C_1))$,

σ_2: $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$, $(\vec{n}_2=(A_2,B_2,C_2))$.

$$\sigma_1\|\sigma_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1\|\vec{n}_2 \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}.$$

$$\sigma_1 \perp \sigma_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 \perp \vec{n}_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1\cdot\vec{n}_2=0 \Leftrightarrow A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0.$$

Угол φ между плоскостями σ_1 *и* σ_2 определяется как угол между их нормальными векторами $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$ или дополняющий его до π $\left(0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}\right)$.

$$\cos\varphi=\frac{|\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2|}{|\vec{n}_1|\cdot|\vec{n}_2|}=\frac{|A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}.$$

Пусть даны канонические уравнения прямой L:

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$$

($\vec{s}(l,m,n)$ – направляющий вектор прямой L,
$M_0(x_0,y_0,z_0)\in L$) и общее уравнение плоскости σ:

$$Ax+By+Cz+D=0.$$

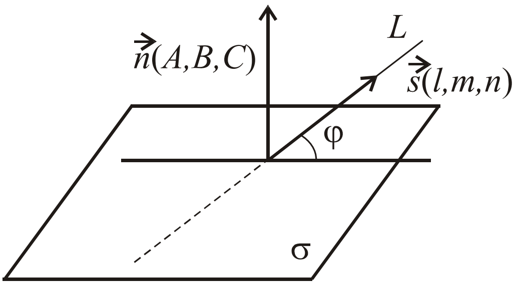
Координаты точки пересечения прямой L и плоскости σ должны одновременно удовлетворять этим двум уравнениям. Перейдём к параметрическим уравнениям прямой L:

$$\frac{x-x_0}{l}=t,\quad \frac{y-y_0}{m}=t, \frac{z-z_0}{n}=t \quad \Rightarrow$$

$$x=x_0+l\cdot t,\ y=y_0+m\cdot t,\ z=z_0+n\cdot t\ .$$

Подставляя их в уравнение плоскости σ, получаем значение параметра t, равное $t=-\dfrac{Ax_0+By_0+Cz_0+D}{Al+Bm+Cn}$, подстановка которого в параметрические уравнения прямой L даёт координаты точки пересечения прямой L с плоскостью σ.

Угол φ *между прямой* L *и плоскостью* σ – это угол между прямой L и её проекцией на плоскость σ $\left(0\le\varphi\le\dfrac{\pi}{2}\right)$.



$$\sin\varphi=\left|\sin\left(\frac{\pi}{2}-\left(\vec{n},\hat{\ }\vec{s}\right)\right)\right|=\left|\cos\left(\vec{n},\hat{\ }\vec{s}\right)\right|,$$

$$\sin\varphi=\frac{|Al+Bm+Cn|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{l^2+m^2+n^2}}.$$

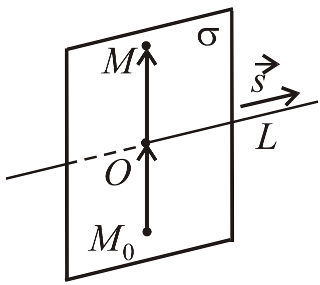
$$L\perp\sigma\Leftrightarrow\vec{s}\parallel\vec{n}\Leftrightarrow\frac{A}{l}=\frac{B}{m}=\frac{C}{n}.$$

$$L\parallel\sigma\Leftrightarrow\vec{s}\perp\vec{n}\Leftrightarrow Al+Bm+Cn=0\,.$$

Расстояние от точки $M_0(x_0,y_0,z_0)$ до плоскости σ находится по формуле:

$$\text{c}(M_0, \sigma) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Пример. Найти точку, симметричную точке $M_0(-1; -2; 2{,}5)$ относительно прямой, заданной каноническими уравнениями $\dfrac{x-4}{1} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z+2}{-2}$.



◄ Точка M, симметричная точке M_0 относительно заданной прямой L, лежит на прямой M_0M, перпендикулярной к прямой L. При этом точка пересечения прямых O делит отрезок M_0M пополам.

Если провести через точку M_0 плоскость σ, перпендикулярную к прямой L, то прямая M_0M будет лежать в этой плоскости. Для плоскости σ нормальным вектором является направляющий вектор прямой L: $\vec{s} = (1{,}2{,}-2)$.

Уравнение плоскости σ:

$1 \cdot (x+1) + 2 \cdot (y+2) - 2 \cdot (z - 2{,}5) = 0$, или $x + 2y - 2z + 10 = 0$.

Запишем уравнения прямой L в параметрическом виде:

$$\begin{cases} x = 4 + t, \\ y = 2t, \\ z = -2 - 2t. \end{cases}$$

Точка O – точка пересечения прямой L и плоскости σ. Её координаты найдём из системы

$$\begin{cases} x = 4 + t, \\ y = 2t, \\ z = -2 - 2t, \\ x + 2y - 2z + 10 = 0. \end{cases}$$

Подставляя x, y и z из первых трёх уравнений в четвёртое, получаем $4 + t + 4t - 2(-2 - 2t) + 10 = 0$, или $9t + 18 = 0$, откуда $t = -2$.

Теперь можно определить координаты точки O: $O(2; -4; 2)$. Точка O – середина отрезка M_0M. Подставляя координаты точек O и M_0 в формулы деления отрезка пополам, определяем координаты точки $M(x_M; y_M; z_M)$:

$$\begin{cases} x_0 = \dfrac{x_{M_0} + x_M}{2}, \\ y_0 = \dfrac{y_{M_0} + y_M}{2}, \\ z_0 = \dfrac{z_{M_0} + z_M}{2}, \end{cases} \quad \begin{cases} x_M = 2x_0 - x_{M_0}, \\ y_M = 2y_0 - y_{M_0}, \\ z_M = 2z_0 - z_{M_0}, \end{cases} \quad \begin{cases} x_M = 2 \cdot 2 + 1 = 5, \\ y_M = 2 \cdot (-4) + 2 = -6, \\ z_M = 2 \cdot 2 - 2{,}5 = 1{,}5. \end{cases}$$

Сл-но, $M(5; -6; 1{,}5)$.►

§ 5. Кривые второго порядка на плоскости

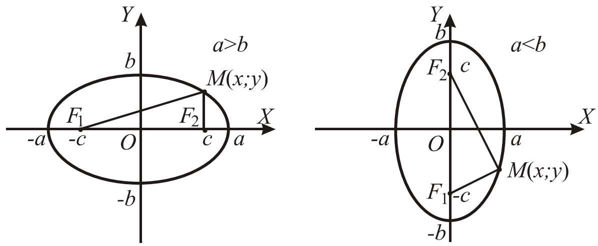
Кривые 2-го порядка на плоскости описываются алгебраическим уравнением 2-го порядка:

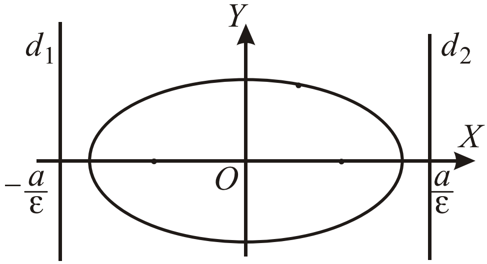
$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0,\ \ A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$$

$(A, B, C, D, E, F \in \mathbf{R})$.

5.1. Эллипс

***Опр.* 1.** *Эллипсом* называется геометрическое место всех точек $M(x, y)$ плоскости, для которых сумма расстояний до двух заданных точек, называемых фокусами, есть величина постоянная (её обозначают $2a$), причем эта постоянная больше расстояния между фокусами.

Чертёж	 *a – большая полуось* *a – малая полуось* *b – малая полуось* *b – большая полуось* *c – полуфокальное расстояние* F_1, F_2 – *фокусы* $F_1M + F_2M = 2a$ $F_1(-c;0),\ F_2(c;0) \quad (a > b)$ $F_1(0;-c),\ F_2(0;c) \quad (b > a)$
Каноническое уравнение	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$
Связь между параметрами	$a^2 = b^2 + c^2 \quad (a > b)$ $b^2 = a^2 + c^2 \quad (b > a)$
Эксцентриситет	$\varepsilon = \frac{c}{a},\ 0 \le \varepsilon < 1$
Площадь эллипса	$S = \pi \cdot a \cdot b$

Директрисы	 Прямые, параллельные оси OY и отстоящие от неё на расстояние $\frac{a}{\varepsilon}$, называются *директрисами* d_1 и d_2 эллипса
Фокальный параметр	$p=\frac{b^2}{a}$ – это половина хорды, проведённой через фокус параллельно оси OY

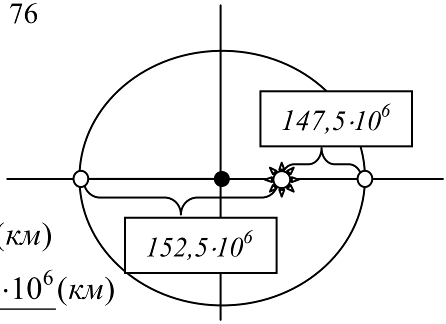
Замечание. Если в уравнении эллипса $a=b$, то получаем уравнение окружности $x^2+y^2=a^2$ с центром в точке $O(0,0)$ радиусом, равным a $(\varepsilon=0)$.

Пример 1. Земля движется по эллипсу, в одном из фокусов которого находится Солнце. Наименьшее расстояние от Земли до Солнца равно *147,5* млн км, а наибольшее – *152,5* млн км. Найти эксцентриситет орбиты Земли.

◄ Выполним вспомогательный чертёж по условию задачи. Очевидно, что:

$$\begin{cases} a+c=152{,}5\cdot 10^6, \\ a-c=147{,}5\cdot 10^6. \end{cases}$$

Решим систему:



$$+\begin{cases} a+c=152{,}5\cdot 10^6 \\ \underline{a-c=147{,}5\cdot 10^6} \end{cases}$$

$$2a=300\cdot 10^6 \Rightarrow \underline{a=150\cdot 10^6}(км)$$

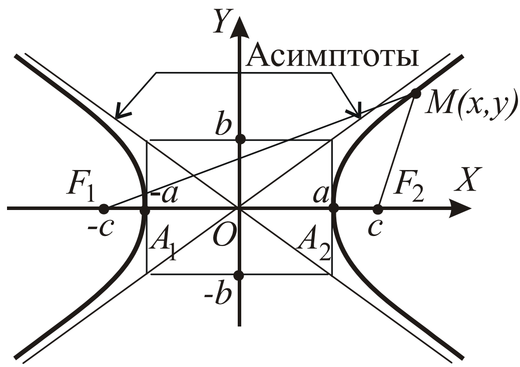
$$c=152{,}5\cdot 10^6-150\cdot 10^6=\underline{2{,}5\cdot 10^6}(км)$$

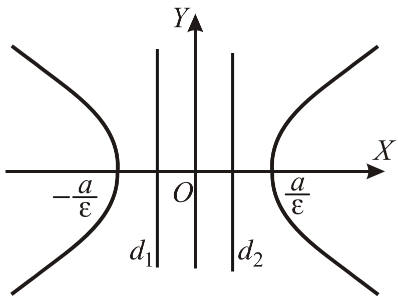
Найдём эксцентриситет $\varepsilon=\dfrac{c}{a}=\dfrac{2{,}5\cdot 10^6}{150\cdot 10^6}=\dfrac{1}{60}\approx 0{,}017$.►

Эксцентриситет показывает степень сжатия эллипса вдоль осей. В предыдущем примере значение ε близко к нулю, сл–но, форма эллипса близка к окружности.

5.2. Гипербола

***Опр.* 2.** *Гиперболой* называется геометрическое место всех точек $M(x,y)$ плоскости, абсолютная величина (модуль) разности расстояний от которых до двух данных точек, называемых фокусами, есть величина постоянная (её обозначают $2a$), причем эта постоянная меньше расстояния между фокусами.

Чертёж	 $2a$ – *действительная ось* $2b$ – *мнимая ось*

	$A_1(-a,0),\ A_2(a,0),$ – *вершины* $F_1(-c;0),\ F_2(c;0)$ – *фокусы* $\lvert F_1M - F_2M \rvert = 2a$
Каноническое уравнение	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$
Связь между параметрами	$a^2 + b^2 = c^2$
Эксцентриситет	$\varepsilon = \frac{c}{a},\quad \varepsilon > 1$
Уравнения асимптот	$y = \pm\frac{b}{a}x$
Уравнения директрис	 $x = \pm\frac{a}{\varepsilon}$
Фокальный параметр	$p = \frac{b^2}{a}$

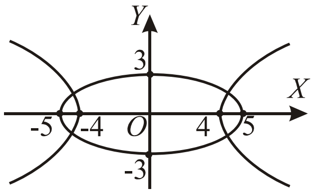
Пример 2. Написать уравнение гиперболы, имеющей вершины в фокусах, а фокусы в вершинах эллипса $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$.

◄ Найдём основные параметры эллипса.

Сравнивая данное уравнение $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ с каноническим $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, получаем $a^2=25;\quad b^2=9 \quad\Rightarrow\quad a=5;\ b=3$.

Для нахождения полуфокального расстояния воспользуемся соотношением между параметрами эллипса $(a>b)$: $a^2=b^2+c^2 \Rightarrow c^2=a^2-b^2=5^2-3^2=25-9=16 \Rightarrow c=4$.

Выполним вспомогательный чертёж по условию задачи.



Из чертежа видно, что для гиперболы: $c_г=5;\quad a_г=4$.

Воспользуемся соотношением между параметрами гиперболы:

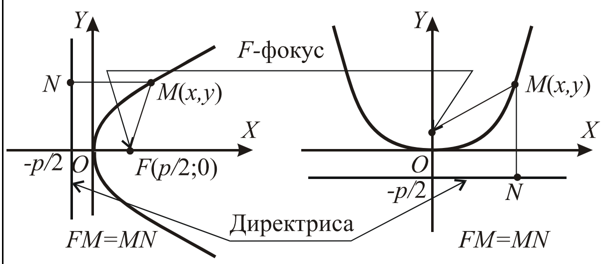
$$a^2+b^2=c^2 \Rightarrow b^2=c^2-a^2=5^2-4^2=25-16=9 \Rightarrow b=3.$$

Каноническое уравнение гиперболы

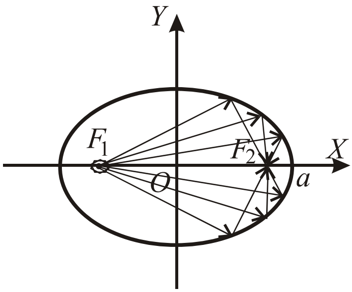
$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \Rightarrow \frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1. \blacktriangleright$$

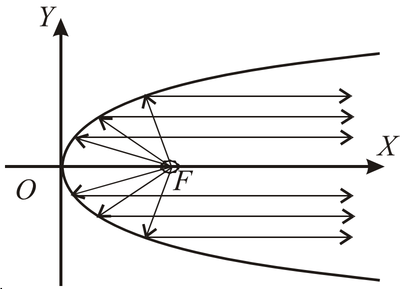
5.3. Парабола

***Опр.* 3.** *Параболой* называется геометрическое место всех точек $M(x,y)$ плоскости, равноудаленных от данной точки, называемой фокусом, и данной прямой, называемой директрисой.

	Парабола симметричная относительно оси *OX*	Парабола симметричная относительно оси *OУ*
Чертёж		
Каноническое уравнение	$y^2 = 2px$	$x^2 = 2py$
Уравнение директрисы	$x = \dfrac{-p}{2}$	$y = \dfrac{-p}{2}$

5.4. Оптические свойства кривых второго порядка





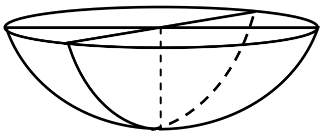
Если источник излучения поместить в один из фокусов эллипса, то после отражения лучи попадут в другой фокус эллипса.

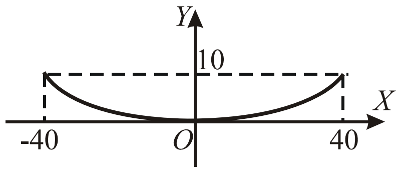
Если источник излучения поместить в фокус параболы, то после отражения лучи образуют параллельный пучок.

Эти свойства линий второго порядка широко используют в оптических и радиотехнических приборах.

Пример 3. Зеркальная поверхность прожектора образована вращением параболы вокруг ее оси симметрии. Диаметр зеркала 80 см, а его глубина 10 см. На каком расстоянии от вершины зеркальной поверхности вдоль оси вращения следует поместить источник света, чтобы лучи света, отражённые от зеркала, образовали параллельный пучок?

◄ Для того чтобы лучи света, отражённые от зеркала, образовали параллельный пучок, источник света необходимо поместить в фокус параболы. Выполним вспомогательный чертёж параболоида и его образующей.





Парабола симметрична относительно оси OY, следовательно, её каноническое уравнение $x^2 = 2py$. Точка с координатами $A(40,10)$ принадлежит параболе.

Значит, $40^2 = 2p \cdot 10 \Rightarrow 20p = 1600 \Rightarrow p = 80$,

а, сл–но, фокус параболы находится в точке $F(0,40)$.

Т. о., для того чтобы лучи света, отражённые от зеркала, образовали параллельный пучок, источник света следует поместить на расстоянии 40 см от вершины зеркальной поверхности вдоль оси вращения.►

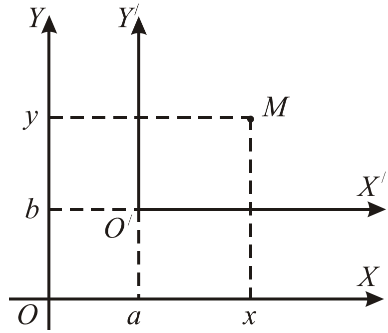
§ 6. Преобразования координат

6.1. Параллельный перенос

Иногда при решении задач удобно вместо данной системы координат XOY использовать другую $X'O'Y'$, определённым образом ориентированную относительно исходной системы.

Пусть новая система $X'O'Y'$ получена из старой XOY параллельным переносом осей координат, то есть оси новой системы параллельны осям старой и имеют одинаковое с ними направление.

Пусть O' имеет координаты (a,b) в системе XOY. Возьмем точку M на плоскости. Тогда, если (x,y) её координаты в системе XOY, а (x',y') – в $X'O'Y'$, то



$$\begin{cases} x = x' + a, \\ y = y' + b. \end{cases}$$

Если уравнение кривой 2-го порядка не содержит члена с произведением координат $(B = 0)$, то с помощью параллельного переноса оно приводится к каноническому виду. Для этого необходимо в случае $A \neq 0$, $C \neq 0$ выделить полные квадраты для членов, содержащих x, и членов, содержащих y, затем для полученных полных квадратов вида $(x-a)^2$, $(y-b)^2$ обозначить через новые переменные $x' = x - a$, $y' = y - b$.

Пример 1. Привести к каноническому виду уравнение $2x^2 - y^2 - 4x - 4y - 6 = 0$.

◄ $2x^2 - y^2 - 4x - 4y - 6 = 2(x^2 - 2x + 1) - (y^2 + 4y + 4) - 4 =$
$= 2(x-1)^2 - (y+2)^2 - 4.$

$2(x-1)^2 - (y+2)^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow 2(x-1)^2 - (y+2)^2 = 4.$

Введём новые переменные

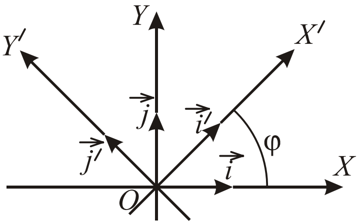
$$\begin{cases} x' = x - 1, \\ y' = y + 2, \end{cases}$$

и новое начало координат $O'(1,-2)$. Тогда, разделив обе части уравнения на 4, получим каноническое уравнение гиперболы:

$$\frac{(x')^2}{2} - \frac{(y')^2}{4} = 1. ►$$

6.2. Поворот координатных осей

Пусть $<\vec{i},\vec{j}>$ – старый ортонормированный базис,



$<\vec{i}\,',\vec{j}\,'>$ – новый. Выразим формулы преобразования координат через угол $\varphi=\left(\widehat{\vec{i},\vec{i}\,'}\right)$, отсчитываемый в направлении кратчайшего поворота от $\vec{i}$ к $\vec{i}\,'$:

$$\begin{cases}\vec{i}\,'=\cos\varphi\cdot\vec{i}+\sin\varphi\cdot\vec{j},\\ \vec{j}\,'=\cos\left(\varphi+\dfrac{\pi}{2}\right)\cdot\vec{i}+\sin\left(\varphi+\dfrac{\pi}{2}\right)\cdot\vec{j}.\end{cases}$$

Формулы преобразования поворота системы координат запишутся в виде:

$$\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\varphi & \sin\varphi\\ -\sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}\text{или}\begin{cases}x=x'\cos\varphi-y'\sin\varphi,\\ y=x'\sin\varphi+y'\cos\varphi.\end{cases}$$

Подставляя их в общее уравнение кривой второго порядка, получаем уравнение, не содержащее слагаемого с произведением xy, затем применяем преобразования параллельного переноса.

Замечание. Если $B\neq 0$ в общем уравнении кривой второго порядка, то первые три слагаемых образуют квадратичную форму от двух переменных $f(x,y)=Ax^2+Bxy+Cy^2$ с матрицей

$$P=\begin{pmatrix}A & B/2\\ B/2 & C\end{pmatrix}.$$

Приводя её к каноническому виду, получаем $f(x,y)=\lambda_1 x'^2+\lambda_2 y'^2$, где λ_1, λ_2 – собственные значения м. P, x', y' – новые координаты в системе $X'O'Y'$.

Пример 2. Определить тип кривой, заданной уравнением $5x^2+4xy+8y^2-32x-56y+80=0$.

◀ Получим канонические уравнения данной кривой преобразованием координат.

Кв.ф. $f(x,y)=5x^2+4xy+8y^2$ имеет матрицу $P=\begin{pmatrix}5 & 2\\ 2 & 8\end{pmatrix}$, собственные значения которой определим из характеристического уравнения

$$\begin{vmatrix}5-\lambda & 2\\ 2 & 8-\lambda\end{vmatrix}=0,\ \lambda_1=4,\ \lambda_2=9.$$

Найдём соответствующие собственные векторы из системы:

$$\begin{cases}(5-\lambda)x_1+2x_2=0,\\ 2x_1+(8-\lambda)x_2=0.\end{cases}$$

Если $\lambda_1=4$, то получим собственный вектор $\begin{pmatrix}2\\ -1\end{pmatrix}$, модуль которого равен $\sqrt{2^2+(-1)^2}=\sqrt{5}$. Нормируем его $\vec{i}\,'=\begin{pmatrix}\frac{2}{\sqrt{5}}\\ -\frac{1}{\sqrt{5}}\end{pmatrix}$.

Если $\lambda_2=9$, то получим собственный вектор $\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}$, модуль которого равен $\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$. Нормируем его $\vec{j}\,'=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{5}}\\ \frac{2}{\sqrt{5}}\end{pmatrix}$.

Преобразование поворота системы координат имеет вид:

$$\begin{cases}x=\dfrac{2}{\sqrt{5}}x'+\dfrac{1}{\sqrt{5}}y',\\[2mm] y=-\dfrac{1}{\sqrt{5}}x'+\dfrac{2}{\sqrt{5}}y'.\end{cases}$$

В новой системе координат $X'O'Y'$ квадратичная форма $f(x,y)=5x^2+4xy+8y^2=4x'^2+9y'^2$, а остальные члены преобразуются к виду $-32x-56y+80=-32\left(\frac{2}{\sqrt{5}}x'+\frac{1}{\sqrt{5}}y'\right)-$ $-56\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}x'+\frac{2}{\sqrt{5}}y'\right)+80$.

В результате получим уравнение:

$$4x'^2+9y'^2-\frac{8}{\sqrt{5}}x'-\frac{144}{\sqrt{5}}y'+80=0.$$

Выделяем полные квадраты:

$$4\left(x'-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2+9\left(y'-\frac{8}{\sqrt{5}}\right)-36=0.$$

Производим параллельный перенос системы координат $X'O'Y'$:

$$\begin{cases} x''=x'-\dfrac{1}{\sqrt{5}}, \\ y''=y'-\dfrac{8}{\sqrt{5}}, \end{cases} \quad O'\left(\frac{1}{\sqrt{5}},\frac{8}{\sqrt{5}}\right) \text{ – новое начало координат.}$$

$4x''^2+9y''^2=36$ или $\dfrac{x''^2}{9}+\dfrac{y''^2}{4}=1$ – каноническое уравнение исходной кривой. Это уравнение *эллипса*.

Для построения эллипса необходимо:

1) в системе координат XOY построить нормированные собственные векторы $\vec{i}\,'$ и $\vec{j}\,'$;

2) провести координатные оси OX' и OY' через эти векторы;

3) в системе координат $X'O'Y'$ отметить центр симметрии эллипса $O'\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{8}{\sqrt{5}}\right)$ и провести через него оси симметрии параллельно осям OX' и OY';

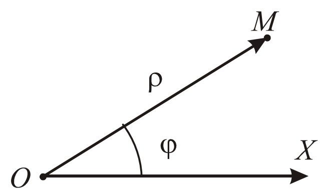
4) построить эллипс с центром симметрии в точке $O'\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{8}{\sqrt{5}}\right)$ и с полуосями $a = 3$, $b = 2$.►

Возможны варианты *вырождения* кривой второго порядка: эллипса в *точку* или *мнимый эллипс* $(x^2 + y^2 = 0)$, гиперболы – в *пару пересекающихся прямых* $ax^2 - by^2 = 0 \quad (a, b > 0)$, или $y = \pm\frac{b}{a}x$, параболы – в *пару параллельных прямых* $x^2 - a^2 = 0$ $(a \geq 0)$, или $x = \pm a$; $y^2 - b^2 = 0 \; (b \geq 0)$, или $y = \pm b$.

§ 7. Полярная система координат. Кривые в ПСК

Полярная система координат (ПСК) задана, если заданы точка O, называемая *полюсом*, и исходящий из полюса луч OX, который называется *полярной осью*.

Положение любой точки M в ПСК однозначно определяется её *полярными координатами*: *полярным радиусом* ρ – расстояние от полюса O до точки M и *полярным углом* φ – угол поворота полярной оси до совпадения с вектором $\overrightarrow{OM}$.

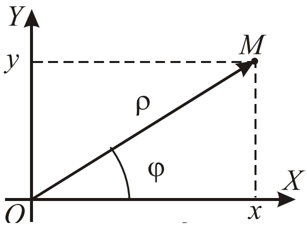


В полюсе полярный радиус $\rho = 0$, а полярный угол не определён. Для всех остальных точек плоскости $\rho > 0$.

Полярный угол измеряется в радианах и считается положительным, если отсчитывается от полярной оси против хода часовой стрелки. Полярный угол определяется с точностью до $2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$. Это означает, что точки с полярными координатами (ρ, φ) и $(\rho, \varphi + 2\pi k)$, $k \in \mathbf{Z}$ совпадают.

Из определения полярных координат следует, что уравнение $\rho = R$ задаёт на плоскости окружность с центром в полюсе и радиусом R, а уравнение $\varphi = \alpha$ задаёт на плоскости луч, проходящий через полюс и составляющий с полярной осью угол α ($\varphi = 0$ – уравнение полярной оси).

Если задать на плоскости ПДСК, поместив её начало в полюс и совместив ось абсцисс с полярной осью, то декартовы координаты x и y точки M будут выражены через полярные координаты ρ и φ из соотношений:



$$\begin{cases} x = \rho \cdot \cos\varphi, \\ y = \rho \cdot \sin\varphi. \end{cases}$$

Полярные координаты ρ и φ точки M через декартовы x и y выражаются следующей системой уравнений:

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \\ \operatorname{tg}\varphi = \dfrac{y}{x}. \end{cases}$$

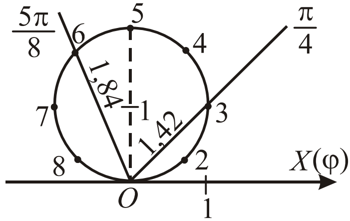
Уравнение вида $\rho = \rho(\varphi)$, задающее ρ как функцию от φ, определяет на плоскости некоторую кривую.

Пример. Построить кривую, заданную в ПСК уравнением $\rho = 2\sin\varphi$. Найти уравнение этой кривой в ПДСК.

◄ Так как $\rho \geq 0$, то $\sin\varphi \geq 0$, откуда $0 \leq \varphi \leq \pi$. Составим вспомогательную таблицу:

Номера точек	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
φ	0	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{8}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{8}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{8}$	π
$\sin\varphi$	0	0,38	0,71	0,92	1	0,92	0,71	0,38	0
$\rho = 2\sin\varphi$	0	0,76	1,42	1,84	2	1,84	1,42	0,76	0

Для построения кривой $\rho = 2\sin\varphi$ на луче, проведенном из полюса под углом φ_k, откладываем соответствующее значение полярного радиуса $\rho_k = 2\sin\varphi_k$, $k = \overline{1,9}$, и соединяем полученные точки.



Найдём уравнение кривой $\rho = 2\sin\varphi$ в ПДСК. Так как $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\text{tg}\varphi = \dfrac{y}{x}$ $(\varphi = \text{arctg}\dfrac{y}{x})$, то $\sqrt{x^2 + y^2} = 2\sin(\text{arctg}\dfrac{y}{x})$.

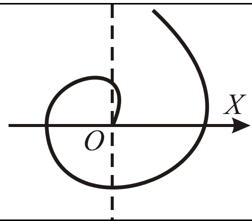
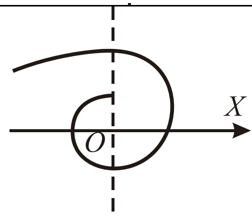
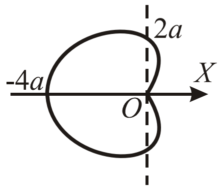
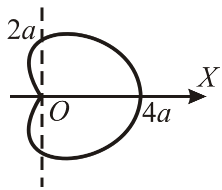
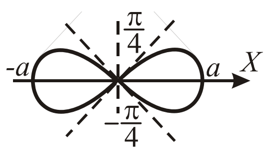
Преобразуем выражение $2\sin(\text{arctg}\dfrac{y}{x})$: известно, что $\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$, тогда $1 + \text{ctg}^2\varphi = \dfrac{1}{\sin^2\varphi}$, сл–но, $\sin^2\varphi = \dfrac{\text{tg}^2\varphi}{1 + tg^2\varphi}$. С учётом того, что $\text{tg}\varphi = \dfrac{y}{x}$, получаем $\sin\varphi = \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

Окончательно $\sqrt{x^2 + y^2} = \dfrac{2y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ или $x^2 + y^2 = 2y$, $x^2 + y^2 - 2y + 1 - 1 = 0$, $x^2 + (y-1)^2 = 1$, то есть рассматриваемое уравнение выражает в ПДСК окружность с центром в точке $O(0,1)$ и единичным радиусом. ►

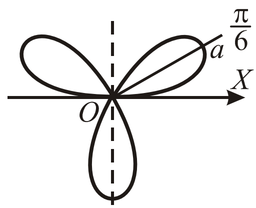
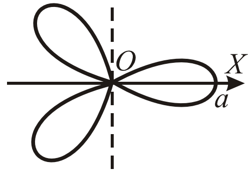
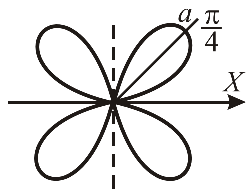
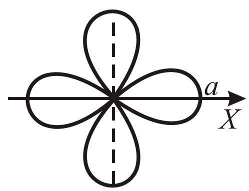
Рассмотрим другие наиболее часто встречающиеся в задачах кривые, заданные в ПСК (см. табл. 6).

Таблица 6

Кривые, заданные в ПСК

Название кривой	**Уравнение**	**График**
Архимедова спираль	$\rho = a\varphi,$ $0 < \varphi < \infty,$ $\rho \geq 0$	
Логарифмическая спираль	$\rho = e^{a\varphi}$	
Кардиоида	$\rho = 2a(1 - \cos\varphi),$ $a > 0$	
	$\rho = 2a(1 + \cos\varphi)$ $((x^2 + y^2 - 2ax)^2 =$ $= 4a^2(x^2 + y^2)$ уравнение в ПДСК)	
Лемниската Бернулли	$\rho^2 = a^2 \cos 2\varphi$ $((x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$ уравнение в ПДСК)	

Окончание табл. 6

<table>
<tr><td rowspan="2">Розы:
трёхлепест-
ковая</td><td>$\rho = a\sin 3\varphi$</td><td>
</td></tr>
<tr><td>$\rho = a\cos 3\varphi$</td><td>
</td></tr>
<tr><td rowspan="2">четырех-
лепестковая</td><td>$\rho = a\sin 2\varphi$</td><td>
</td></tr>
<tr><td>$\rho = a\cos 2\varphi$</td><td>
</td></tr>
</table>

§ 8. Параметрическое задание линий

Параметрические уравнения линий задаются в виде зависимости координат x и y от некоторого параметра t: $x = x(t)$, $y = y(t)$.

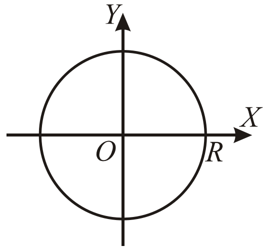
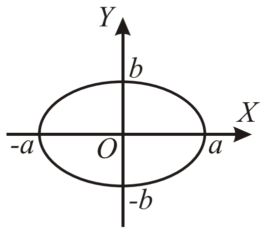
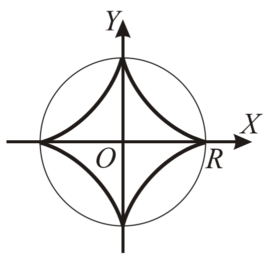
При изменении параметра t текущая точка $M(x, y)$ описывает некоторую кривую на плоскости.

Если линия задана аналитически в ПДСК $y = f(x)$, то $\begin{cases} x = t, \\ y = f(t), \end{cases}$ её параметрическое задание.

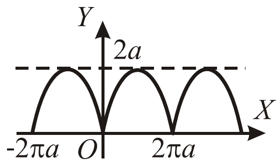
Рассмотрим параметрическое задание некоторых кривых (см. табл. 7).

Таблица 7

Параметрические уравнения кривых

Кривая	**Параметрические уравнения**	**Уравнение в ПДСК**	**График**
Окружность	$\begin{cases} x = R\cos t, \\ y = R\sin t, \end{cases}$ $0 \le t < 2\pi$	$x^2 + y^2 = R^2$	
Эллипс	$\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b\sin t, \end{cases}$ $0 \le t < 2\pi$	$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$	
Астроида	$\begin{cases} x = R\cos^3 t, \\ y = R\sin^3 t, \end{cases}$ $0 \le t < 2\pi$	$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = R^{\frac{2}{3}}$	

Окончание табл. 7

Циклоида	$\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t), \end{cases}$ $-\infty < t < +\infty,$ $a > 0$		

Замечание 1. *Астроида* – кривая, которую описывает точка окружности радиусом $R/4$, когда окружность катится без скольжения внутри окружности радиусом R.

Замечание 2. *Циклоида* – кривая, описываемая точкой круга, катящегося без скольжения по прямой линии.

§ 9. Поверхности второго порядка

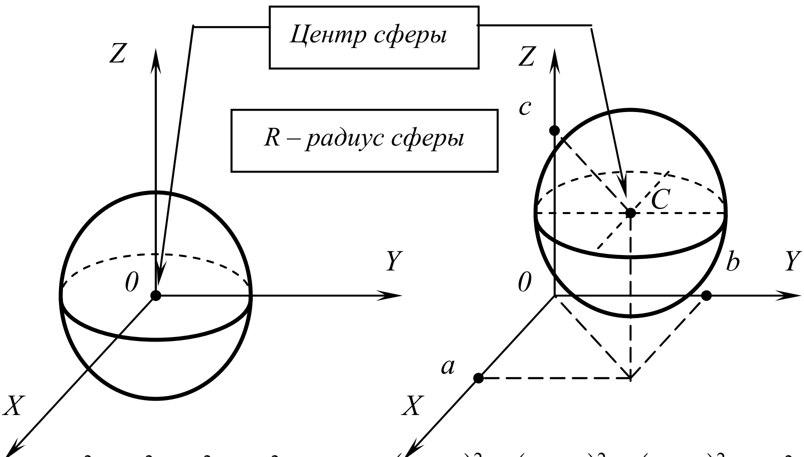
***Опр.* 1.** *Алгебраической поверхностью 2-го порядка* называется поверхность, уравнение которой в ПДСК имеет вид:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Jz + K = 0,$$

где $A, B, C, ..., K \in \mathbf{R}$, ($A, B, C$ не равны нулю одновременно).

Рассмотрим основные частные случаи уравнения поверхности 2-го порядка.

9.1. Сфера

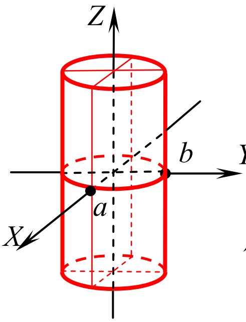


$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ $\qquad$ $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$

9.2. Цилиндрические поверхности второго порядка

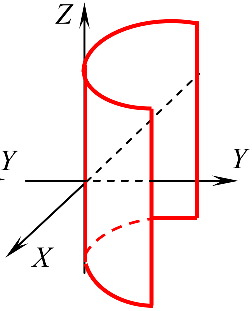
Уравнение вида $F(x;y)=0$ в пространстве определяет цилиндрическую поверхность с образующими, параллельными оси OZ. В зависимости от вида направляющей будем получать соответствующие виды цилиндров.

Эллиптический цилиндр



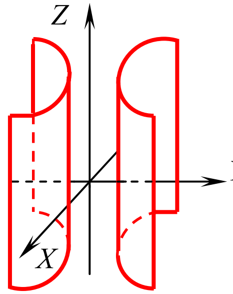
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

Параболический цилиндр



$$x^2=2py$$

Гиперболический цилиндр

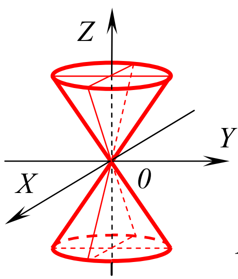


$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

Уравнение $F(x;z)=0$ в пространстве определяет цилиндрическую поверхность с образующими, параллельными оси OY, уравнение $F(y;z)=0$ в пространстве определяет цилиндрическую поверхность с образующими, параллельными оси OX.

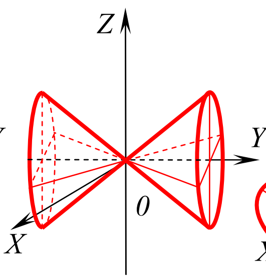
9.3. Конус второго порядка

С осью OZ



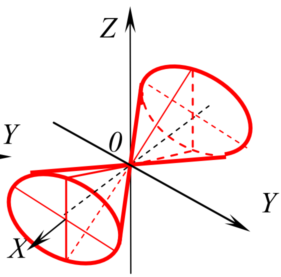
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$$

С осью OY



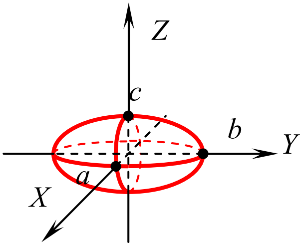
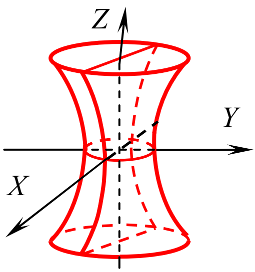
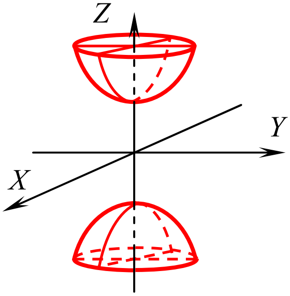
$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0$$

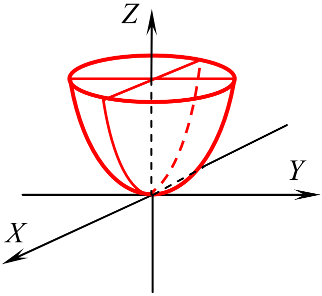
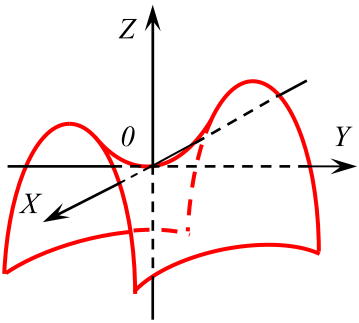
С осью OX



$$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0$$

9.4. Поверхности второго порядка

Вид поверхности	**Каноническое уравнение**
Эллипсоид 	$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$ $(a=b=c=R$ – сфера)
Однополостный гиперболоид 	$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$
Двуполостный гиперболоид 	$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$$

Вид поверхности	**Каноническое уравнение**
Эллиптический параболоид 	$z=\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}$
Гиперболический параболоид 	$z=\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}$

Замечание. Принято выделять девять поверхностей второго порядка: *эллипсоид*, *однополостный* и *двуполостный гиперболоиды*, *эллиптический* и *гиперболический параболоиды*, *эллиптический*, *параболический* и *гиперболический цилиндры* и *конус второго порядка*.

Пример 1. Построить тело, ограниченное указанными поверхностями, и проекцию этого тела на плоскость XOY.

1. $z^2 = x^2 + y^2$, $x^2 + y^2 = 4$, $z \geq 0$.

2. $z = 9 - x^2 - y^2$, $z = 5$.

3. $x^2 + y^2 = 16$, $x^2 + z^2 = 16$ в первом октанте.

◀ 1. Уравнение $x^2 + y^2 = 4$ задаёт в пространстве круговой цилиндр радиусом $R = 2$ и с образующими, параллельными оси OZ.

Уравнение $z^2 = x^2 + y^2$ или $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ определяет в пространстве круговой конус с осью OZ.

Условие $z \geq 0$ говорит о том, что нужно рассматривать только части данных поверхностей, лежащие не ниже плоскости XOY.

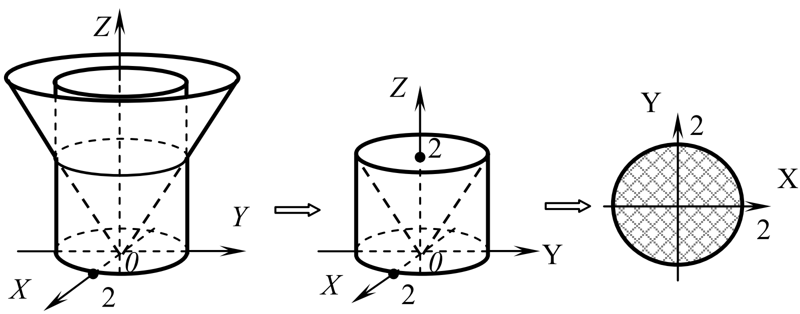
Найдём линию пересечений данных конуса и цилиндра:

$$\begin{cases} z^2 = x^2 + y^2, \\ x^2 + y^2 = 4, \\ z \geq 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z^2 = 4, \\ x^2 + y^2 = 4, \\ z \geq 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 2^2, \\ z = 2. \end{cases}$$

Искомой линией пересечения является окружность радиусом $R = 2$ в плоскости $z = 2$.

Проекцией на плоскость XOY является круг радиусом $R = 2$.

Построим указанные поверхности, далее – результат их пересечения (требуемое тело) и проекцию этого тела на плоскость XOY.



2. Приведём уравнение $z = 9 - x^2 - y^2$ к каноническому виду: $z = 9 - x^2 - y^2 \quad \Rightarrow \quad z - 9 = -\left(x^2 + y^2\right)$ – это уравнение определяет параболоид вращения, вершина которого смещена на *9* единиц вверх, а сам он направлен вниз.

$z = 5$ – уравнение плоскости, в нём отсутствуют две переменные x и y, значит, плоскость параллельна двум осям OX и OY или плоскости XOY и проходит через *5* на оси OZ.

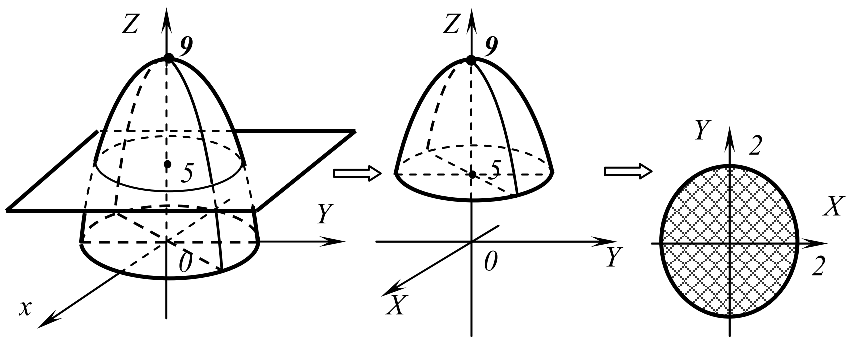
Найдём линию пересечений данных параболоида и плоскости:

$$\begin{cases} z = 9 - x^2 - y^2, \\ z = 5, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 9 - 5, \\ z = 5, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 2^2, \\ z = 5. \end{cases}$$

Искомой линией пересечения является окружность радиусом $R = 2$ в плоскости $z = 5$.

Проекцией на плоскость XOY является круг радиусом $R = 2$.

Построим указанные поверхности, далее – результат их пересечения (требуемое тело) и проекцию этого тела на плоскость XOY.



3. Уравнение $x^2 + y^2 = 16$ задаёт в пространстве круговой цилиндр радиусом $R = 4$ и с образующими, параллельными оси OZ.

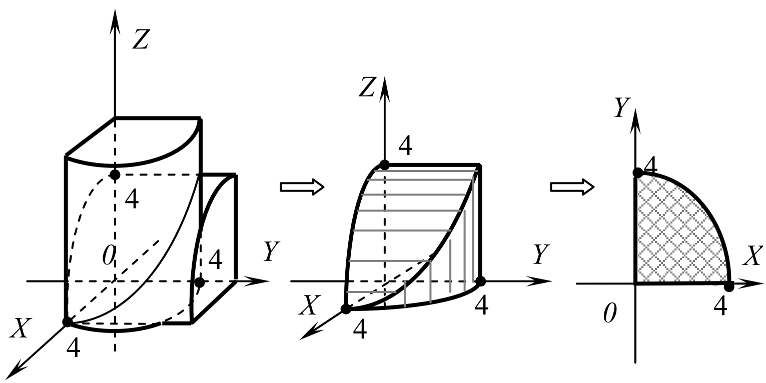
Уравнение $x^2 + z^2 = 16$ задаёт в пространстве круговой цилиндр радиусом $R = 4$ и с образующими, параллельными оси OY.

Первый октант определяет часть пространства, где $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$.

Так как по условию нужно найти пересечение поверхностей в первом октанте, то рассмотрим только пересечение четверти цилиндров.

Проекцией на плоскость XOY является четверть круга радиусом $R = 4$ в первом координатном углу.

Построим указанные поверхности, далее – результат их пересечения (требуемое тело) и проекцию этого тела на плоскость XOY.



►

ГЛАВА 5. ПОНЯТИЕ МНОЖЕСТВА. ЧИСЛОВЫЕ МНОЖЕСТВА

§ 1. Понятие множества. Операции над множествами

Одним из фундаментальных понятий математики является понятие множества. *Множество* – совокупность некоторых объектов, объединенных по какому-либо признаку. Обозначают множества заглавными латинскими буквами A, B, C и т.д.; их элементы – строчными a, b, c и т.д.

Множество может состоять из чисел, точек, прямых и т. д., называемых *элементами множества*. Например, $C = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ – множество однозначных чисел.

Множество, которое не содержит элементов, называют *пустым* и обозначают символом $\varnothing$.

Множество, содержащее все возможные множества, называется *универсальным* и обозначается Ω.

Если каждый элемент множества M является элементом множества K, то говорят, что множество M является *подмножеством* множества K. Это выражается записью $M \subset K$.

Если каждый элемент множества A является одновременно элементом множества B (т. е. $A \subset B$) и каждый элемент множества B – элементом множества A (т. е. $B \subset A$), то множества A и B называют *равными* и пишут: $A = B$.

Пересечением множеств A и B называется множество C, состоящее из элементов, которые принадлежат каждому из данных множеств A и B. Пересечение множеств обозначают символом $\cap$ и пишут: $C = A \cap B$.

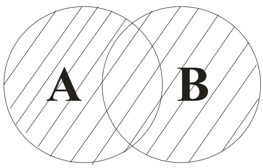
Если множества A и B не имеют общих элементов, то пересечением таких множеств является пустое множество.

Объединением множеств A и B называется множество, состоящее из всех элементов множеств A и B и только из них. Объединение множеств обозначают символом $\cup$ и пишут: $C = A \cup B$. При этом, если множества A и B имеют общие элементы, то каждый из этих общих элементов в объединение входит только один раз.

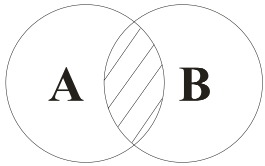
Разностью множеств A и B называется подмножество множества A элементов, не входящих в B. Разность множеств обозначают символом $\setminus$ и пишут $A \setminus B$.

Если $B \subset A$, то $C_A(B) = A \setminus B$ называется *дополнением* множества B до множества A.

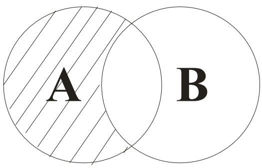
Введенные понятия легко проиллюстрировать следующими рисунками:



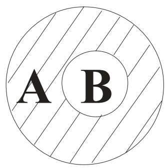
$A \cup B$



$A \cap B$



$A \setminus B$



$C_A(B) = A \setminus B$

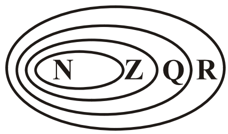
§ 2. Множество действительных чисел

Одним из основных понятий математики является число. Понятие числа возникло в древности, числа являются результатами измерения различных величин.

Натуральное число – это число, которое употребляется при счете. Множеством *натуральных чисел* называют числовое множество, которое содержит число 1 и вместе с каждым своим элементом n содержит элемент $n+1$. Множество натуральных чисел обозначается $\mathbf{N} = \{1;2;3;...;n;...\}$. Натуральные числа вместе с противоположными им (отрицательными) числами и нулём образуют множество *целых чисел* $\mathbf{Z} = \{0; \pm 1; \pm 2; ...; \pm n; ...\}$.

Число p, представленное в виде $p = \dfrac{m}{n}$, где $m \in \mathbf{Z}$, $n \in \mathbf{N}$, называется *рациональным числом*. Множество рациональных чисел обозначается $\mathbf{Q} = \left\{ \dfrac{m}{n} \mid m \in \mathbf{Z},\quad n \in \mathbf{N} \right\}$. Всякое рациональное число выражается или конечной десятичной дробью, или бесконечной периодической дробью. Например, $\dfrac{1}{4} = 0{,}25$, $\dfrac{1}{3} = 0{,}333... = 0{,}(3)$.

Числа, которые представляются бесконечными, но непериодическими десятичными дробями, называются *иррациональными числами*. Такими числами являются $\sqrt{2}$, $3 - \sqrt{5}$, π, e…. Множество иррациональных чисел обозначается $\mathbf{I}$. Совокупность всех рациональных и иррациональных чисел называется *множеством действительных чисел* $\mathbf{R}$. Между указанными множествами существует соотношение $\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$.



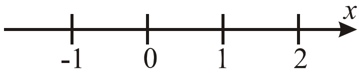
Множество $\mathbf{R}$ действительных чисел обладает следующими свойствами.

1. Множество $\mathbf{R}$ *упорядоченное*. Для любых двух различных чисел a и b имеет место одно из двух соотношений $a < b$ или $b < a$.

2. Множество $\mathbf{R}$ *плотное*. Между любыми двумя различными числами a и b содержится бесконечное множество действительных чисел x, т.е. чисел, удовлетворяющих неравенству $a < x < b$.

3. Множество $\mathbf{R}$ *непрерывное*.

Действительные числа можно изображать точками числовой оси. *Числовой осью* называется бесконечная прямая, на которой выбраны: 1) некоторая точка O, называемая началом отсчёта; 2) положительное направление, которое указывается стрелкой; 3) масштаб для измерения длин.



Между всеми действительными числами и всеми точками числовой оси существует взаимно однозначное соответствие: каждому числу соответствует единственная изображающая его точка, и наоборот, каждой точке соответствует единственное число на числовой оси. Поэтому вместо слова «число» часто говорят «точка».

§ 3. Числовые множества

***Опр.* 1.** *Числовым множеством* называется любое подмножество множества $\mathbf{R}$ действительных чисел.

***Опр.* 2.** *Несобственными элементами множества* $\mathbf{R}$ называют объекты $+\infty, -\infty, \infty$.

Геометрический смысл несобственных элементов:

- несобственный элемент $+\infty$ $(-\infty)$ можно получить, если удаляться от начала отсчета числовой оси неограниченно вправо (влево);
- несобственный элемент ∞ можно получить, если удаляться от начала отсчета числовой оси неограниченно.

Таким образом, для любого действительного числа x выполняется: $-\infty < x < +\infty$.

Рассмотрим некоторые из числовых множеств:

$[a;b] = \{x \mid a \le x \le b\}$ – отрезок;

$(a;b) = \{x \mid a < x < b\}$ – интервал;

$[a;b) = \{x \mid a \le x < b\}$ и $(a;b] = \{x \mid a < x \le b\}$ – полуинтервалы (полусегменты);

$(-\infty;b] = \{x \mid x \le b\}$; $[a;+\infty) = \{x \mid x \ge a\}$ – замкнутые лучи;

$(-\infty;b) = \{x \mid x < b\}$; $(a;+\infty) = \{x \mid x > a\}$ – открытые лучи;

$(-\infty;\infty) = \{x \mid -\infty < x < +\infty\} = \mathbf{R}$ – множество действительных чисел.

***Опр.* 3.** *Окрестностью (ε-окрестностью) числа* $x_0 \in \mathbf{R}$ называют интервал вида $(x_0 - \varepsilon; x_0 + \varepsilon)$ $(\varepsilon > 0)$. Число x_0 в этом случае называют *центром окрестности*, число ε называют *радиусом окрестности*.

Будем рассматривать произвольное числовое множество D.

***Опр.* 4.** Точку $x_0 \in D$ называют *внутренней точкой* числового множества D, если существует окрестность точки x_0, целиком принадлежащая множеству D.

***Опр.* 5.** Числовое множество D называют *открытым*, если каждая его точка является внутренней.

***Опр.* 6.** Точку x_0 называют *внешней точкой* по отношению к числовому множеству D, если существует окрестность точки x_0, в которой не содержится точек множества D.

***Опр.* 7.** Если точка $x_0 \in D$ и является внешней точкой по отношению к числовому множеству D, то ее называют *изолированной точкой* множества D.

***Опр.* 8.** Точку x_0 называют *граничной точкой* числового множества D, если в любой, сколь угодно малой, окрестности точки x_0 содержатся как внутренние, так и внешние точки множества D.

Замечание 1. Граничные точки числового множества D могут принадлежать, а могут и не принадлежать ему.

***Опр.* 9.** Внутренние и граничные точки числового множества D называют *предельными точками* числового множества D.

***Опр.* 10.** Числовое множество D называется *замкнутым*, если оно содержит все свои предельные точки.

Замечание 2. Числовое множество D может оказаться ни замкнутым, ни открытым.

Замечание 3. В дальнейшем для краткости записи используются два символа (квантора): $\forall$ – квантор всеобщности и $\exists$ – квантор существования. Выражение «для любого элемента x множества A» записывается так: $\forall x \in A$. Выражение «существует хотя бы один элемент x из множества A» можно записать: $\exists x \in A$.

§ 4. Модуль действительного числа

Опр. *Модулем (абсолютной величиной)* действительного числа x называется число x, если $x \geq 0$, и число $-x$, если $x < 0$.

Модуль обозначается так: $|x| = \begin{cases} x, x \geq 0, \\ -x, x < 0. \end{cases}$

Геометрический смысл модуля действительного числа

На числовой прямой $|x|$ численно равен расстоянию от начала отсчета до точки, изображающей число x.

Некоторые свойства модуля

1. $\forall x \in \mathbf{R}: \quad |x| = |-x|$.

2. $\forall x \in \mathbf{R}: \quad |x| \geq 0$.

3. $\forall x \in \mathbf{R}\ \forall y \in \mathbf{R}: \quad |x \cdot y| = |x| \cdot |y|$.

4. $\forall x \in \mathbf{R}\ \forall y \in \mathbf{R} \setminus \{0\}: \quad \left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$.

5. $\forall x \in \mathbf{R}\ \forall y \in \mathbf{R}: \quad |x + y| \leq |x| + |y|$.

6. $\forall x \in \mathbf{R}\ \forall y \in \mathbf{R}: \quad \big||x| - |y|\big| \leq |x - y|$.

7. $\forall x \in \mathbf{R}\ \forall a \geq 0: \quad |x| \leq a \Rightarrow -a \leq x \leq a.$

8. $\forall x \in \mathbf{R}\ \forall a \geq 0: \quad |x| \geq a \Rightarrow x \leq -a$ *или* $x \geq a.$

§ 5. Комплексные числа

Комплексные, или *мнимые*, *числа* не только расширяют мировоззрение человека, но и лежат в основе мощнейшего аппарата математики – ТФКП (теории функций комплексного переменного). С помощью этого раздела математики решают принципиальные задачи аэро- и гидродинамики (Н.Е. Жуковским рассчитана подъемная сила крыла самолёта), электротехники (практически любой раздел или направление), теории упругости (расчёты конструкций с отверстиями или границами произвольной формы, тонкими вырезами) и т.д.

Без знания комплексных чисел невозможно решение большинства задач квантовой механики, спектроскопии физических процессов, динамики диспергирующих сред, физики элементарных частиц, гидродинамики, волновых и колебательных процессов, многих задач теории упругости и пластичности.

Появление же собственно комплексных чисел было ответом на попытки человечества занумеровать точки плоскости и трёхмерного пространства; решить часто встречающиеся (колебания, собственные частоты) уравнения типа $x^2 + \omega^2 = 0$ (чем они «хуже» элементарно решаемого $x^2 - \omega^2 = 0$?); найти именно n корней из единицы (почти все студенты, не знакомые с комплексными числами, утверждают, что этот корень равен 1 и других значений нет) и т.д.

Отечественные и зарубежные историки математики пришли к выводу, что комплексные числа впервые появились не позднее 1545 года в трудах итальянского врача, фамилию которого знают практически все люди, – Джероламо Кардано («карданный вал», «карданов подвес», «карданная передача» – его изобретения). К сожалению, сам Кардано посчитал их «игрой разума» и «бесполезным понятием» (даже общепризнанный гений, И. Ньютон не считал нововведение числами и, почти как Г. Лейбниц, относил их к чему-то «загадочному» и «мистическому»).

Первым пользу комплексных чисел оценил Рафаэль Бомбелли. В изданной в г. Болонья в 1572 г. «Алгебре» он с их помощью исследовал кубические уравнения, нашёл все три значения $\sqrt[3]{1}$, установил простейшие правила действий над этими числами. Но и после этого, более трёхсот лет, до самого конца XIX века, комплексные числа употреблялись мало, хотя методология работы с ними совершенствовалась и развивалась. «Бум» в области использования комплексных чисел произошёл только в конце XIX – XX вв. и был вызван необходимостью решения многих задач, поставленных пришедшейся на это время научно-технической революцией.

***Опр.* 1.** *Комплексным числом* (к. ч.) z называется упорядоченная пара действительных чисел x и y: $z = (x, y)$.

Число x – *действительная часть* (д. ч.) и обозначается символом $\operatorname{Re} z$: $x = \operatorname{Re} z$ (от лат. Realis – действительный), число y – *мнимая часть* (м. ч.) к. ч. z и обозначается $\operatorname{Im} z$: $x = \operatorname{Im} z$ (от лат. Imaginarius – мнимый).

Если $y = 0$, то $z = (x,0)$, и к. ч. z совпадает с д. ч. x. Поэтому $(x,0) = x$.

***Опр.* 2.** К. ч. $(0,1)$ называется *мнимой единицей* и обозначается символом i: $i = (0,1)$.

***Опр.* 3.** Два к. ч. $z = (x, y)$ и $\bar{z} = (x,-y)$ называются *сопряженными к. ч.*

Например, сопряженным к числу $z = (2,3)$ является $\bar{z} = (2,-3)$, к числу $z = (-3,-\sqrt{2})$ будет $\bar{z} = (-3,\sqrt{2})$.

***Опр.* 4.** *Два к. ч.* $z_1 = (x_1, y_1)$ *и* $z_2 = (x_2, y_2)$ *равны* т. и т.т., когда $x_1 = x_2$ и $y_1 = y_2$ (д. ч. и м. ч. этих чисел совпадают).

Отношения меньше (больше) между к. ч. не существует.

***Опр.* 5.** *Суммой к. ч.* $z_1 = (x_1, y_1)$ и $z_2 = (x_2, y_2)$ называется к. ч. $z_1 + z_2$, определяемое следующим образом (сл. обр.):

$$z_1 + z_2 = (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2).$$

***Опр.* 6.** *Произведением к. ч.* $z_1 = (x_1, y_1)$ и $z_2 = (x_2, y_2)$ называется к. ч. $z_1 \cdot z_2$, определяемое сл. обр.:

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1).$$

По определению 6, мнимая единица обладает следующим свойством:

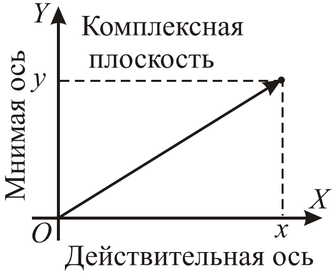
$$i^2 = -1.$$

Действительно,

$$i \cdot i = (0,1) \cdot (0,1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = (-1,0) = -1.$$

***Опр.* 7.** Запись $z = x + iy$ называется *алгебраической формой к. ч.* z.

$$(z = (x, y) = (x,0) + (0, y) = x + (y,0) \cdot (0,1) =$$
$$= x + y \cdot (0,1) = x + iy).$$



Выберем ПДСК на евклидовой плоскости. Так как к. ч. z является парой (x, y) действительных чисел x и y, то естественной геометрической интерпретацией к. ч. является его изображение точкой M на плоскости с декартовыми координатами x и y (рис.1).

Множество действительных чисел изображается на оси абсцисс (OX), которая называется *действительной осью*, множество всех мнимых чисел – на оси ординат (OY) (кроме точки O) – *мнимая ось*.

К. ч. можно интерпретировать как радиус-вектор точки $M(x, y)$ – $\overrightarrow{OM}$. В таком истолковании евклидова плоскость называется *комплексной плоскостью*.

Введем ПСК сл. обр.: полярную ось совместим с положительной полуосью (OX), а полюс – с началом координат O.

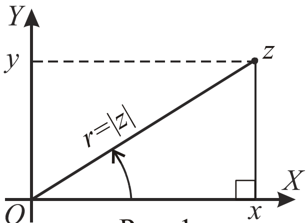


Рис. 1

Полярные координаты r и φ точки z называют соответственно *модулем* и *аргументом* к. ч. z.

Обозначение:

$|z|$ – модуль к. ч. z, $\arg z$ – аргумент к. ч. z, то есть $r = |z|$, $\varphi = \arg z$.

Так как $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, то

$$z = x + iy = r\cos\varphi + i \cdot r\sin\varphi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

***Опр.* 8.** Запись $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ называется *тригонометрической формой записи к. ч. z*.

Аргумент к. ч. $z \neq 0 + i \cdot 0$ ($z \neq 0$) определен с точностью до слагаемого $2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$. Удобно работать с приведенным аргументом $\varphi = \arg z$, $-\pi < \varphi \leq \pi$ (иногда считают $0 \leq \varphi < 2\pi$).

Из прямоугольного треугольника (рис. 1)

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}\,,\ \operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}\,,\ x \neq 0\,.$$

Так как $-\dfrac{\pi}{2} < \operatorname{arctg}\varphi < \dfrac{\pi}{2}$ (из определения арктангенса), то:

$$\varphi = \begin{cases} \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} \text{ при } x > 0 \text{ (к. ч. } z \text{ в 1-й или 4-й четверти или на положительной части действительной оси) (рис. 2),} \\ \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} + \pi \text{ при } x < 0\,,\ y \geq 0 \text{ (к. ч. } z \text{ во 2-й четверти или на отрицательной части действительной оси (рис. 3),} \\ \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} - \pi \ \ x < 0\,,\ y < 0 \text{ (к. ч. } z \text{ в 3-й четверти) (рис.4),} \\ \dfrac{\pi}{2} \text{ при } x = 0\,,\ y > 0 \text{ (к. ч. на положительной части мнимой оси),} \\ -\dfrac{\pi}{2} \text{ при } x = 0\,,\ y < 0 \text{ (к. ч. на отрицательной части мнимой оси).} \end{cases} \qquad (1)$$

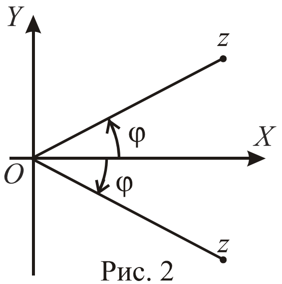


Рис. 2

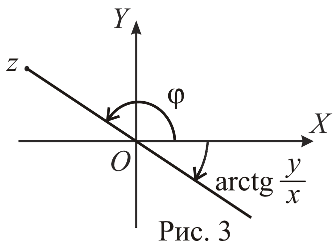


Рис. 3

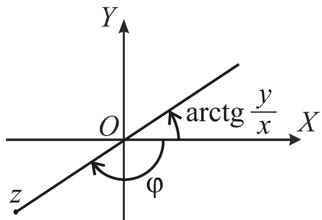


Рис. 4

***Опр.* 9.** Запись $z = r \cdot e^{i\varphi}$ называется *показательной формой записи к. ч.* z (получается с использованием формулы Эйлера: $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$, которая доказывается в теории рядов).

Действия над к. ч., записанными в разных формах, обобщим в табл. 8.

Таблица 8

Действия над к. ч.

Действия	**Алгебраическая**	**Тригонометрическая**	**Показательная**
$z = (x, y)$	$x + iy$	$r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, где $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, φ определяется по формуле (1)	$re^{i\varphi}$
$\bar{z} = (x, -y)$	$x - iy$	$r(\cos\varphi - i\sin\varphi)$	$re^{-i\varphi}$
$z_1 \pm z_2$	$(x_1 \pm x_2) + $ $+ i(y_1 \pm y_2)$		
$z_1 \cdot z_2$	$(x_1x_2 - y_1y_2) +$ $+ i(x_1y_2 + x_2y_1)$	$r_1r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) +$ $+ i\sin(\varphi_1 + \varphi_2))$	$r_1r_2e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$
$\frac{z_1}{z_2}$ $(z_2 \neq 0)$	$\frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} +$ $+ i\frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}$	$\frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) +$ $+ i\sin(\varphi_1 - \varphi_2))$	$\frac{r_1}{r_2}e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}$
z^n, $n \in \mathbf{N}$		$r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$ формула Муавра	$r^n \cdot e^{in\varphi}$

Окончание табл. 8

$\sqrt[n]{z}$, $n \in \mathbf{N}$		$\omega_k = \sqrt[n]{\lvert z\rvert} \cdot (\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} +$ $+ i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n})$, $k = \overline{0, n-1}$	$\omega_k =$ $= \sqrt[n]{\lvert z\rvert} e^{i\frac{\varphi+2\pi k}{n}}$ $k = \overline{0, n-1}$

Замечание 1. Умножение к. ч. производится по правилу умножения многочленов с учетом того, что $i^2 = -1$.

Замечание 2. Деление к. ч. производится по правилу $\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{z_2 \cdot \bar{z}_2}$ (необходимо числитель и знаменатель домножить на к. ч., сопряженное к знаменателю).

Извлечение корня из к. ч.

Теорема. *При $z \neq 0$ существует ровно n различных корней ω_k из числа $\sqrt[n]{z}$, которые вычисляются по формулам:*

$$\omega_k = \sqrt[n]{|z|} \cdot (\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}) \quad \text{или} \quad \omega_k = \sqrt[n]{|z|} e^{i\frac{\varphi+2\pi k}{n}}, \tag{2}$$

где $\sqrt[n]{|z|}$ – арифметический корень из положительного числа $|z|$, $k = \overline{0, n-1}$.

Из формулы (2) следует, что все комплексные числа ω_k $(k = 0,1,2,...,n-1)$ имеют один и тот же модуль $\sqrt[n]{|z|}$, а аргументы точек ω_k и ω_{k+1} отличаются друг от друга на $\frac{2\pi}{n}$. Сл-но, комплексные числа ω_k располагаются на окружности радиусом $R = \sqrt[n]{|z|}$ с центром в начале координат в вершинах правильного n-угольника.

Пример 1. Найти $(1-i)^{11}$.

◄ Запишем число $z=1-i$ в тригонометрической форме. Здесь $x=1$, $y=-1$, $|z|=\sqrt{1^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$. К. ч. $z=1-i$ расположено в 4-й четверти, сл-но, по формуле (1) $\varphi=\operatorname{arctg}\dfrac{-1}{1}=\operatorname{arctg}(-1)=-\dfrac{\pi}{4}$.

Тогда

$$z=1-i=\sqrt{2}\cdot(\cos(-\frac{\pi}{4})+i\sin(-\frac{\pi}{4}))==\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4}-i\sin\frac{\pi}{4}).$$

По формуле Муавра $(n=11)$:

$$(1-i)^{11}=(\sqrt{2})^{11}\cdot(\cos(11\cdot\frac{\pi}{4})-i\sin(11\cdot\frac{\pi}{4}))=$$

$$=(\sqrt{2})^{11}\cdot(\cos(2\pi+\frac{3\pi}{4})-i\sin(2\pi+\frac{3\pi}{4}))=$$

$$=(\sqrt{2})^{11}\cdot(\cos(\frac{3\pi}{4})-i\sin(\frac{3\pi}{4}))=(\sqrt{2})^{11}\cdot(-\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2})=$$

$$=(\sqrt{2})^{11}\cdot(-\frac{1}{\sqrt{2}}-i\frac{1}{\sqrt{2}})=(\sqrt{2})^{11}\cdot(-\sqrt{2})^{-1}\cdot(1+i)=$$

$$=-(\sqrt{2})^{11}\cdot(\sqrt{2})^{-1}\cdot(1+i)=-(\sqrt{2})^{10}\cdot(1+i)=-32\cdot(1+i).$$ ►

Пример 2. Найти $\sqrt[4]{1-i}$.

◄ По формуле (2), последовательно полагая $k=0,1,2,3$, получаем четыре значения корня из к. ч. $z=1-i$:

$$\omega_0=\sqrt[4]{\sqrt{2}}\cdot(\cos\frac{-\frac{\pi}{4}+2\pi\cdot 0}{4}+i\sin\frac{-\frac{\pi}{4}+2\pi\cdot 0}{4})=$$

$$=\sqrt[8]{2}(\cos\frac{\pi}{16}-i\sin\frac{\pi}{16}),$$

$$\omega_1=\sqrt[4]{\sqrt{2}}\cdot(\cos\frac{-\frac{\pi}{4}+2\pi\cdot 1}{4}+i\sin\frac{-\frac{\pi}{4}+2\pi\cdot 1}{4})=$$

$$=\sqrt[8]{2}(\cos\frac{7\pi}{16}+i\sin\frac{7\pi}{16}),$$

$$\omega_2=\sqrt[4]{\sqrt{2}}\cdot(\cos\frac{-\frac{\pi}{4}+2\pi\cdot 2}{4}+i\sin\frac{-\frac{\pi}{4}+2\pi\cdot 2}{4})=$$

$$=\sqrt[8]{2}(\cos\frac{15\pi}{16}+i\sin\frac{15\pi}{16}),$$

$$\omega_3=\sqrt[4]{\sqrt{2}}\cdot(\cos\frac{-\frac{\pi}{4}+2\pi\cdot 3}{4}+i\sin\frac{-\frac{\pi}{4}+2\pi\cdot 3}{4})=$$

$$=\sqrt[8]{2}(\cos\frac{23\pi}{16}+i\sin\frac{23\pi}{16}).\blacktriangleright$$

Пример 3. Решить уравнение $z^2+(-3+2i)z+5-i=0$.

◀ Это квадратное уравнение относительно z. Здесь $a=1$, $b=-3+2i$, $c=5-i$. По формуле корней квадратного уравнения:

$$z=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}=\frac{-(-3+2i)+\sqrt{(-3+2i)^2-4(5-i)}}{2\cdot 1}=$$

$$=\frac{3-2i+\sqrt{-15-8i}}{2}.$$

Далее необходимо извлечь корень из к. ч. $-15-8i$. Можно применить формулу (2). Покажем другой ход решения.

Запишем равенство $\sqrt{-15-8i}=x+iy$.

Возведем обе части в квадрат $-15-8i=(x+iy)^2$,

но $(x+iy)^2=(x+iy)(x+iy)=x^2-y^2+2ixy$, сл-но,

$-15-8i=x^2-y^2+2ixy$.

По определению 4:

$$\begin{cases}x^2-y^2=-15,\\ 2xy=-8.\end{cases}$$

Решая систему, находим $x_1=1$, $y_1=-4$ и $x_2=-1$, $y_2=4$.

Окончательно

$$z_1 = \frac{3-2i+(1-4i)}{2} = \frac{4-6i}{2} = 2-3i,$$

$$z_2 = \frac{3-2i+(-1+4i)}{2} = 1+i. \ ►$$

Пример 4. Дать геометрическое описание множества точек комплексной плоскости, удовлетворяющих условиям:

$$a. \begin{cases} 1 \le |z| < 4, \\ \operatorname{Im} z \le 0. \end{cases} \quad б. \begin{cases} |z-i| = 1, \\ \dfrac{\pi}{6} < \varphi \le \dfrac{\pi}{3}. \end{cases}$$

◄ a. Запишем к. ч. z в алгебраической форме $z = x + iy$, тогда из условия

$$\begin{cases} 1 \le |z| < 4, \\ \operatorname{Im} z \le 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 \le \sqrt{x^2+y^2} < 4, \\ y \le 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 1 \le x^2+y^2 < 4^2, \\ y \le 0. \end{cases}$$

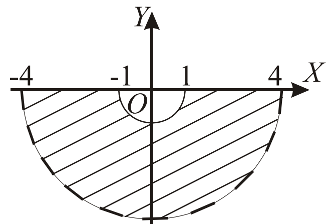


Рис. 5

Искомое множество точек изображено на рис. 5.

$б$. $|z-i| = |x+iy-i| = |x+i(y-1)| = \sqrt{x^2+(y-1)^2}$, по условию $|z-i|<1$, тогда $\sqrt{x^2+(y-1)^2} = 1 \Rightarrow x^2+(y-1)^2 = 1$. Искомое множество точек изображено на рис. 6.►

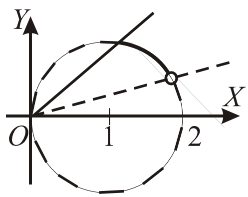


Рис. 6

ГЛАВА 6. ФУНКЦИЯ

§ 1. Понятие функции. График функции. Способы задания функции

Математическим анализом называют систему дисциплин, предметом изучения которых являются количественные соотношения действительного мира (в отличие от геометрических дисциплин, занимающихся его пространственными свойствами). Эти соотношения выражаются с помощью числовых величин, как и в арифметике. Но в арифметике (и в алгебре) рассматриваются преимущественно постоянные величины (они характеризуют состояния), в анализе же – переменные величины (характеризующие процессы). В основе изучения зависимости между переменными величинами лежат понятия *функции* и *предела*.

Понятие функции – одно из основных математических понятий, оно относится к установлению соответствия между элементами двух множеств.

***Опр.* 1.** Если задано правило f, по которому каждому элементу x из множества X поставлен в соответствие единственный элемент y из множества Y, то говорят, что на множестве X задана *функция* $y = f(x)$, $x \in X$, $y \in Y$.

Множество X называется *областью определения функции* (ООФ) и обозначается $D(f)$. Множество изменения функции Y называется *областью значений функции* (ОЗФ) и обозначается $E(f)$.

В дальнейшем будем рассматривать числовые функции, т.е. функции, у которых ООФ и ОЗФ являются числовыми множествами $X \subset \mathbf{R}$, $Y \subset \mathbf{R}$. В этом случае переменная величина x называется *независимой переменной* или *аргументом*, величина y – *зависимой переменной* или *функцией* (от x). Число y, соответствующее данному значению x, называется *частным значением функции* в точке x.

***Опр.* 2.** Множество точек $\big(x, f(x)\big)$ плоскости XOY называется *графиком* функции $y = f(x)$.

Функция может быть задана:

1) *аналитически* (с помощью формул);

2) *графически*;

3) *с помощью таблицы*.

При аналитическом задании функция может быть определена:

1) *явно* – уравнением вида $y = f(x)$ или

$$y = \begin{cases} f_1(x), x \in D_1 \subset D(f), \\ f_2(x), x \in D_2 \subset D(f); \end{cases}$$

2) *неявно* – уравнением вида $F(x, y) = 0$;

3) *параметрически* – с помощью вспомогательной переменной – параметра – $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases}$ $t \in T \subset \mathbf{R}$.

Примеры

1. Явное задание:

1) $y = \sqrt{x}$,

$D(f) = \{x\} = \{x \mid 0 \le x < +\infty\}$,

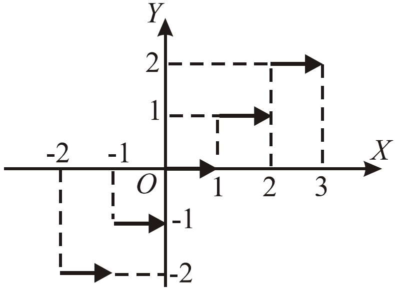
$E(f) = \{y\} = \{y \mid 0 \le x < +\infty\}$;

2) функция Дирихле $y = \begin{cases} 0, x - \textit{иррациональное}, \\ 1, x - \textit{рациональное}; \end{cases}$

3) $y = [x]$ – целая часть x (наибольшее целое, не превосходящее x),

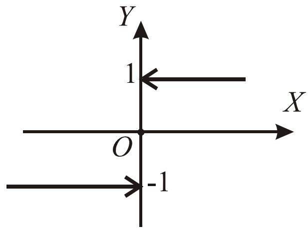
$D(f) = \{x\} = \{x \in \mathbf{R}\}$,

$E(f) = \{y\} = \{y \in \mathbf{Z}\}$;



4) $y = \mathrm{sign}x$ определяет знак x,

$$\mathrm{sign}x = \begin{cases} 1, \ x > 0, \\ 0, \ x = 0, \\ -1, \ x < 0. \end{cases}$$



2. Неявное задание:

1) $e^{xy} + \sin x - y = 0$. Нельзя в явном виде выразить y через x;

2) уравнение $F(x, y) = 0$ может определять не одну, а несколько функций вида $y = f(x)$. Так, уравнение $x^2 + y^2 - 1 = 0$ определяет две функции:

$$y = f_1(x) = +\sqrt{1 - x^2} \ \text{ и } \ y = f_2(x) = -\sqrt{1 - x^2} \ .$$

3. Параметрическое задание:

$$\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin t, \end{cases} \quad 0 \le t \le \pi \ .$$

Данная система задает верхнюю половину окружности единичного радиуса.

Аналитический способ задания функции является наиболее точным и предпочтительным для дальнейшего исследования функции методами математического анализа. Графическое и табличное описание возникает, например, при исследовании экспериментально наблюдаемых функциональных зависимостей, но и в этом случае обычно подбирают подходящую аналитическую формулу, с достаточной степенью точности воспроизводящую экспериментальные данные (так называемая *аппроксимация*).

§ 2. Основные характеристики функции

Опр. **1.** Функция $f(x)$ с симметричной относительно нуля областью определения X называется *четной*, если для любого $x \in X$ выполняется равенство $f(x) = f(-x)$.

Из определения четной функции следует, что ее график симметричен относительно оси ординат. Например, функции $y = x^2$, $y = |x|$ являются четными.

Опр. 2. Функция $f(x)$ с симметричной относительно нуля областью определения X называется *нечетной*, если для любого $x \in X$ выполняется равенство $f(-x) = -f(x)$.

График нечетной функции симметричен относительно начала координат. Например, функции $y = x^3$ и $y = 2x$ являются нечетными.

Функция $y = x^2 + x$ не является ни четной, ни нечетной, так как $(-x)^2 + (-x) = x^2 - x \neq \pm y$. Такие функции называются *функциями общего вида*.

***Опр.* 3.** Функция $y = f(x)$ называется *периодической*, если существует такое число $T \neq 0$, что для любого $x \in X$ выполнены условия:

1) $x + T \in X; x - T \in X$;

2) $y = f(x + T) = f(x)$.

Число T называется *периодом* функции $y = f(x)$.

Наименьший положительный период называют *основным периодом* функции $T_{осн}$.

Если функция $y = f(x)$ периодическая с основным периодом $T_{осн}$, то период функции $y = f(kx + a)$ равен $\dfrac{T_{осн}}{k}$.

Множество значений числовой функции может быть ограниченным, ограниченным сверху (снизу) и неограниченным. В соответствии с этим подразделяются и сами функции.

***Опр.* 4.** Функция f называется *ограниченной* на множестве $X \subset D(f)$, если существует положительное число M такое, что для всех $x \in X$ выполняется $|f(x)| \leq M$.

Например, функция $y = \sin x$ ограничена на всей числовой оси; $y = x^3$ ограничена на любом промежутке конечной длины, но не ограничена на всей области определения $x \in \mathbf{R}$.

Пусть $y = f(x)$ определена на множестве $D(f)$ и множество $X \subset D(f)$.

Опр. 5. Если для любых $x_1, x_2 \in X$:

$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$, то $f(x)$ *возрастающая* на X;

$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \le f(x_2)$, то $f(x)$ *неубывающая* на X;

$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$, то $f(x)$ *убывающая* на X;

$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \ge f(x_2)$, то $f(x)$ *невозрастающая* на X.

Все четыре типа в совокупности называются *монотонными* на X, а возрастающие и убывающие – *строго монотонными* на X.

§ 3. Понятие обратной и сложной функции

Если уравнение $y = f(x)$ может быть однозначно разрешено относительно переменной *x*, т.е. существует функция $x = g(y)$, такая, что $y = f(g(y))$, то функция $x = g(y)$, или в стандартных обозначениях $y = g(x)$, называется *обратной* по отношению к $y = f(x)$. Очевидно, что $g(f(x)) = x$, т.е. функции $f(x)$ и $g(x)$ являются *взаимно обратными*.

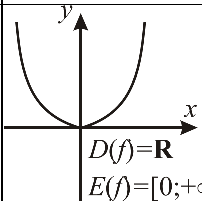
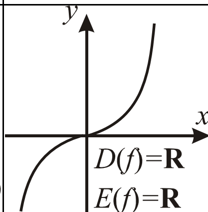
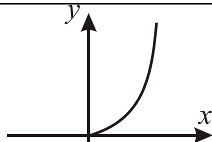
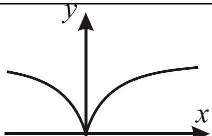
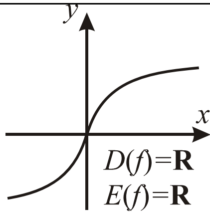
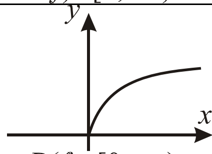
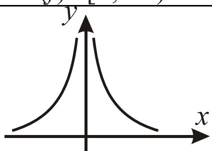
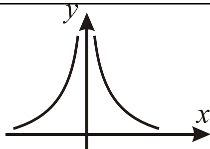
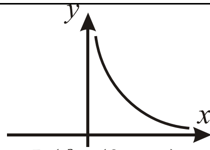
Например, $y = x^2$ обратная к $y = \sqrt{x}$ при $x \in [0, +\infty)$, $y \in [0, +\infty)$.

Если f и g – функции одной переменной, то функция h, определенная соотношением $h(x) = g(f(x))$ на области $D(h) = \{x \in D(f) : f(x) \in D(g)\}$, называется *сложной функцией* (*суперпозицией* или *композицией* $h = (g \circ f)x$) функций f и g.

Например, $y = \sin^2 x$. Здесь $f(x) = \sin x$, $g(x) = f^2(x)$.

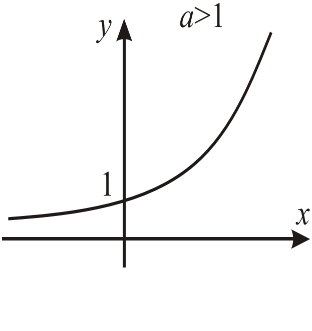
§ 4. Основные элементарные функции

1. *Степенная функция* $y = x^r$

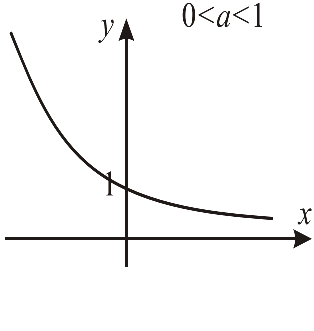
	$r = \dfrac{m}{n}$, **где** m **– четное,** n **– нечетное**	$r = \dfrac{m}{n}$, **где** m, n **– нечетные**	$r = \dfrac{m}{n}$, **где** m **– нечетное,** n **– четное, или** r **– иррациональное**
$r > 1$	 $D(f)=\mathbf{R}$ $E(f)=[0;+\infty)$	 $D(f)=\mathbf{R}$ $E(f)=\mathbf{R}$	 $D(f)=[0;+\infty)$ $E(f)=[0;+\infty)$
$0 < r < 1$	 $D(f)=\mathbf{R}$ $E(f)=[0;+\infty)$	 $D(f)=\mathbf{R}$ $E(f)=\mathbf{R}$	 $D(f)=[0;+\infty)$ $E(f)=[0;+\infty)$
$r < 0$	 $D(f)=\mathbf{R}\backslash\{0\}$ $E(f)=(0;+\infty)$	 $D(f)=\mathbf{R}\backslash\{0\}$ $E(f)=(0;+\infty)$	 $D(f)=(0;+\infty)$ $E(f)=(0;+\infty)$

2. *Показательная функция* $y = a^x$ $(a > 0,\ a \neq 1)$

$a>1$

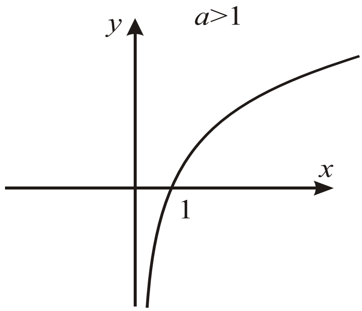


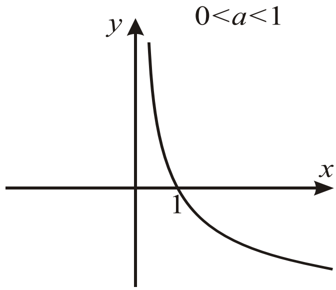
$0<a<1$



3. *Логарифмическая функция* $y = \log_a x$ $(a > 0, a \neq 1)$

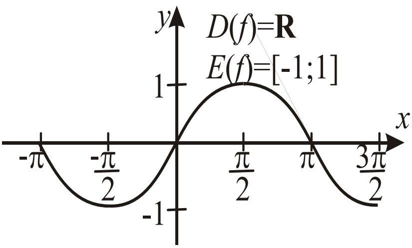
$D(f) = (0;+\infty)$, $E(f) = \mathbf{R}$.



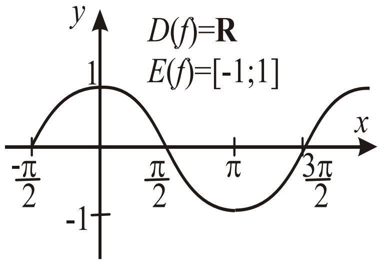


4. *Тригонометрические функции*

$y=\sin x$

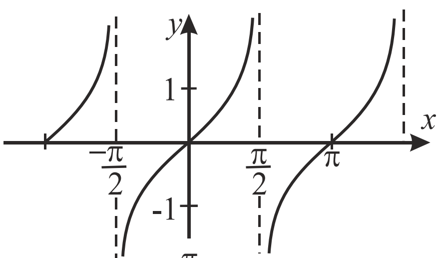


$y=\cos x$



Функции $y = \sin x$ и $y = \cos x$ являются периодическими с наименьшим положительным периодом $T = 2\pi$.

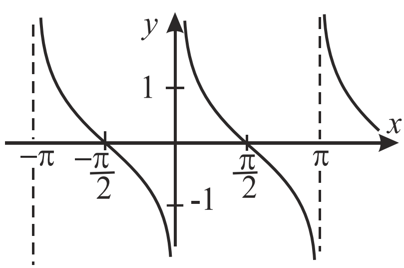
$y=\mathrm{tg}\, x$



$D(f)=\{x|x\neq \frac{\pi}{2}+\pi n, n\in \mathbf{Z}\}$

$E(f)=\mathbf{R}$

$y=\mathrm{ctg}\, x$



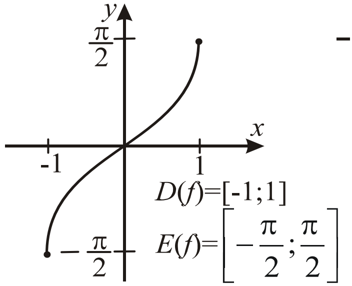
$D(f)=\{x|x\neq \pi n, n\in \mathbf{Z}\}$

$E(f)=\mathbf{R}$

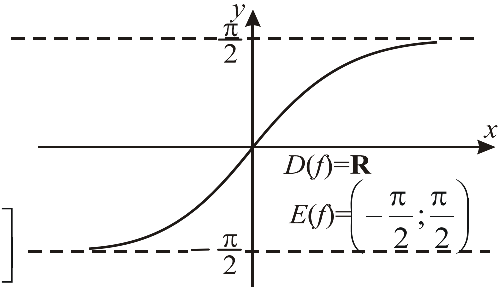
Функции $y = \mathrm{tg}\, x$ и $y = \mathrm{ctg}\, x$ имеют наименьший положительный период $T = \pi$.

5. *Обратные тригонометрические функции*

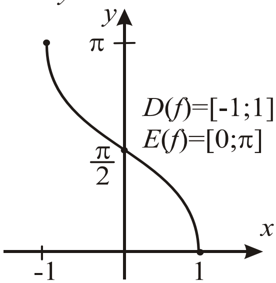
y=arcsin x



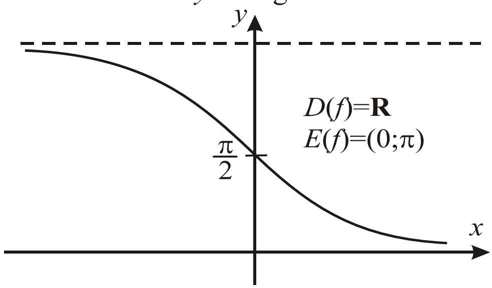
y=arctg x



y=arccos x



y=arctg x



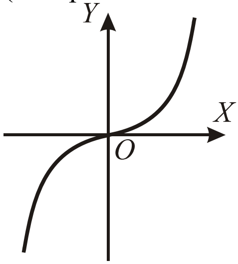
6. *Гиперболические функции*

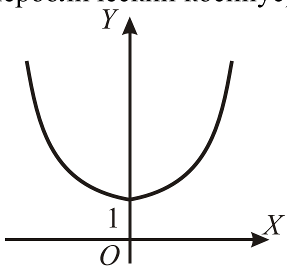
$$y = \mathrm{sh}x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

(гиперболический синус)

$$y = \mathrm{ch}x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

(гиперболический косинус)



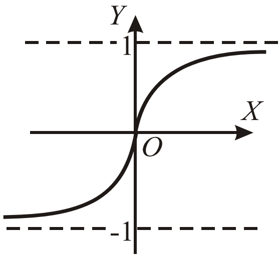


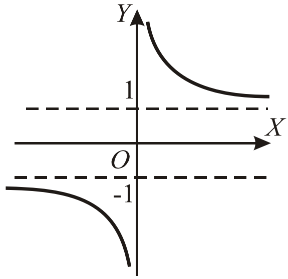
$$y = \mathrm{th}x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{\mathrm{sh}x}{\mathrm{ch}x}$$

(гиперболический тангенс)

$$y = \mathrm{cth}x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = \frac{\mathrm{ch}x}{\mathrm{sh}x}$$

(гиперболический котангенс)





***Опр.* 1.** *Элементарной* называется функция, записанная одной формулой и составленная из основных элементарных функций с помощью символов четырех арифметических действий $+, -, \cdot, /$ и операции суперпозиции функций.

Например, $y = \dfrac{2^{\cos x}}{1 + \log_2 x}$ – элементарная функция.

***Опр.* 2.** Функцию называют *рациональной*, если в ней над аргументом x проводится конечное число операций сложения, вычитания, умножения, деления и возведения в степень (обозначается $R(x)$).

Замечание. К рациональным функциям относятся: *многочлен (полином, целая рациональная функция)* степени $n \in \mathbf{N}$ с вещественными коэффициентами

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \ \ (a_n \neq 0)$$

и *дробно-рациональная функция* – отношение двух многочленов.

***Опр.* 3.** Функцию называют *иррациональной*, если в составе алгебраических операций над аргументом x имеется извлечение корня.

***Опр.* 4.** Рациональные и иррациональные функции называют *алгебраическими*.

***Опр.* 5.** Функции $y = a^x$ $(a > 0, a \neq 1)$, $y = \log_a x$ $(a > 0, a \neq 0)$, $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \mathrm{tg} x$, $y = \mathrm{ctg} x$, $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \mathrm{arctg} x$, $y = \mathrm{arcctg} x$, а также составленные из них с помощью конечного числа алгебраических операций элементарные функции называют *трансцендентными*.

ГЛАВА 7. ПРЕДЕЛ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ И ФУНКЦИИ

Понятие предела является одним из основных понятий всей математики, через понятие предела вводятся такие фундаментальные понятия математики, как производная, определенный интеграл и т.д.

Понятие предела впервые определено Валлисом (Arithmetica infinitorum, 1655 г.) и шотландским математиком Дж. Грегори. Валлис применял совершенно строгую процедуру вычисления предела: после составления числовой последовательности и установления ее общего члена следовало доказательство того, что $|a_n - a| < \varepsilon$, начиная с некоторого номера N_ε. Слово «предел» – лимит – произошло от латинского limes – межа, граница, граничный камень. Словом limes впервые воспользовался Ньютон, а употребляемый всюду символ lim ввел впервые, по-видимому, Люилье (1786 г.).

Определение предела с ε и δ дал Коши в 1820 г. Выражения «ε – метод доказательства», «ε – определение» стали привычными в математике после работ Вейерштрасса. Уже в 1861 году интуитивное выражение «стремится к...» Вейерштрасс заменил точными формулировками на языке $\varepsilon - \delta$, ввел понятие «ε – окрестность точки», «верхней и нижней границ». Обозначения $f(x_0 + 0), f(x_0 - 0)$ для пределов справа и слева ввел Дирихле (1837 г.).

§ 1. Предел числовой последовательности

Пусть $\mathbf{N} = \{1, 2, ..., n, ...\}$.

***Опр.* 1.** Если любому натуральному значению n ставится в соответствие единственное значение $a_n \in \mathbf{R}$, то говорят, что *задана числовая последовательность* (a_n), $n \in \mathbf{N}$, a_n называется n*-м членом последовательности*.

Последовательность принято обозначать (a_n), (x_n), (α_n) и т.д.

Из определения 1 следует, что задание числовой последовательности равносильно заданию некоторой функции $f(n)$ натурального аргумента.

Примеры числовых последовательностей:

1) $\left(\frac{1}{n}\right)$: $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ..., \frac{1}{n}, ...$;

2) $\left(n^2 - 1\right)$: $0, 3, 8, ..., n^2 - 1, ...$;

3) (1): $1, 1, 1, ..., 1, ...$ – стационарная последовательность.

***Опр.* 2.** Число a называется *пределом* последовательности (a_n), если для любого положительного числа ε существует натуральное число N_ε такое, что для всех членов последовательности с номерами $n > N_\varepsilon$ выполняется неравенство $|a_n - a| < \varepsilon$.

Обозначается $a = \lim\limits_{n\to+\infty} a_n$.

$$\left(a = \lim_{n\to+\infty} a_n\right) \Leftrightarrow \left(\forall \varepsilon > 0\ \exists N_\varepsilon \in \mathbf{N}\ \forall n > N_\varepsilon: \quad |a_n - a| < \varepsilon\right).$$

***Опр.* 3.** $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty(-\infty, \infty)$, если

$$\forall e > 0\ \exists N_\varepsilon \in \mathbf{N}\ \forall n > N_\varepsilon: \quad a_n > e\left(a_n < -e, |a_n| > e\right).$$

***Опр.* 4.** Последовательность (a_n) называется *сходящейся*, если $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a \in \mathbf{R}$; если предел равен $+\infty$ или $-\infty$ или не существует вовсе, то последовательность (a_n) называется *расходящейся*.

Если последовательность имеет конечный предел, то он единственный.

Пусть $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a \in \mathbf{R}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = b \in \mathbf{R}$. Тогда:

1) существует $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_n \pm b_n) = a \pm b$;

2) существует $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_n \cdot b_n) = a \cdot b$;

3) если $\forall n \in \mathbf{N}: \quad b_n \neq 0$ и $b \neq 0$, то существует

$\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=\dfrac{a}{b}$.

***Опр.* 5.** Последовательность (α_n) называется *бесконечно малой*, если $\lim\limits_{n\to+\infty}\alpha_n=0$, т.е.

$$\forall\varepsilon>0\ \exists N_\varepsilon\in\mathbf{N}\ \forall n>N_\varepsilon:\ \ |\alpha_n|<\varepsilon .$$

Примерами бесконечно малых последовательностей являются $\left(\dfrac{1}{n}\right)$, $\left(\dfrac{1}{2^n}\right)$, $\left(\dfrac{(-1)^n}{n^2}\right)$, $\left(\dfrac{1}{\ln(n+1)}\right)$ и т.д.

***Опр.* 6.** Последовательность (β_n) называется *бесконечно большой*, если $\lim\limits_{n\to+\infty}\beta_n=+\infty$, т.е.

$$\forall\varepsilon>0\ \exists N_\varepsilon\in\mathbf{N}\ \forall n>N_\varepsilon:|\beta_n|>\varepsilon .$$

Примерами бесконечно больших последовательностей являются (n), $((-1)^n n)$, (3^n), (n^2) и т.д.

§ 2. Предел функции и его свойства

Пусть функция $y=f(x)$ задана на множестве действительных чисел $\mathbf{R}$. Выберем последовательность значений $(x_n)\subset\mathbf{R}$ такую, что $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=+\infty$. Этой последовательности соответствует последовательность значений функции $(f(x_n))$.

***Опр.* 1.** Число A называют *пределом функции* $f(x)$ при $x\to+\infty$, если для любой последовательности $(x_n)\subset\mathbf{R}$ такой, что $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=+\infty$, соответствующая последовательность $(f(x_n))$ сходится к числу A ($\lim\limits_{n\to+\infty}f(x_n)=A$). Факт существования предела функции при $x\to+\infty$ записывается так:
$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$.

Аналогично определяют предел функции при $x\to-\infty$.

Пусть функция $y = f(x)$ задана на числовом множестве $X \subset \mathbf{R}$. Выберем последовательность значений $(x_n) \subset X$ такую, что $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = x_0$ (число x_0 может и не принадлежать множеству X). Этой последовательности соответствует последовательность значений функции $(f(x_n))$.

Опр. **2** (*определение предела функции по Гейне*). Число A называют *пределом функции* $y = f(x)$ *в точке* x_0 *(при* $x \to x_0$*)*, если для любой последовательности точек $(x_n) \subset X$, отличных от x_0, такой, что $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = x_0$, соответствующая последовательность $(f(x_n))$ сходится к числу A $(\lim\limits_{n \to +\infty} f(x_n) = A)$. Факт существования предела функции при $x \to x_0$ записывают так: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$.

Опр. **3** (*определение предела функции по Коши*). Число A называется *пределом функции* $y = f(x)$ *в точке* x_0, если для любого положительного числа ε существует положительное число δ такое, что для всех x, удовлетворяющих условию $0 < |x - x_0| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Опр. **4.** Функцию $y = f(x)$ называют *бесконечно малой функцией при* $x \to x_0$, если $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$.

Опр. **5.** Функцию $y = f(x)$ называют *бесконечно большой функцией при* $x \to x_0$, если $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty(\pm\infty)$.

Опр. **6.** Число A называют *левосторонним пределом функции* $y = f(x)$ в точке x_0 (*пределом слева*), если для любой последовательности $(x_n) \subset D_f$ такой, что для любого $n \in \mathbf{N}$ $x_n < x_0$, из соотношения $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = x_0$ следует, что $\lim\limits_{n \to +\infty} f(x) = A$. Обозначение: $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = A$.

***Опр.* 7.** Число A называют *правосторонним пределом функции* $y = f(x)$ в точке x_0 (*предел справа*), если для любой последовательности $(x_n) \subset D_f$ такой, что для любого $n \in \mathbf{N}$ $x_0 < x_n$, из соотношения $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x_0$ следует, что $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = A$. Обозначение: $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) = A$.

Свойства пределов функций

1. Если предел функции в точке существует, то только один.

2. Функция $y = f(x)$ имеет в точке x_0 предел т. и т. т., когда левосторонний и правосторонний пределы в этой точке существуют и равны между собой. В этом случае

$$\lim_{x\to x_0+0} f(x) = \lim_{x\to x_0-0} f(x) = \lim_{x\to x_0} f(x) = A.$$

3. Если функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$ определены на множестве $D \subset \mathbf{R}$, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = B$ $(A \in \mathbf{R}, B \in \mathbf{R})$, то $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x) \pm g(x)) = A \pm B$, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)g(x) = AB$,

$\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{A}{B}$, (для всех $x \in D$ $g(x) \neq 0$, $B \neq 0$).

4. Если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$ ($A \in \mathbf{R}$) и $k \in \mathbf{R}$, $k \neq 0$, то $\lim\limits_{x\to x_0} kf(x) = k \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = kA$.

5. Если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$ ($A \in \mathbf{R}$), то в некоторой окрестности точки x_0 справедливо представление $f(x) = A + a(x)$, где $\lim\limits_{x\to x_0} a(x) = 0$.

6. Пусть: 1) функции f, g, h определены в некоторой окрестности точки x_0; 2) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = A$, $(A \in \mathbf{R})$;

3) выполняется неравенство $f(x) \le h(x) \le g(x)$. Тогда $\lim\limits_{x \to x_0} h(x) = A$.

7. Пусть: 1) функции f и g определены на числовых множествах D_f и D_g соответственно; 2) $x_0 \in D_g$, $g(D_g) \subset D_f$, $y_0 \in D_f$; 3) $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = y_0$; 4) для всех $x \in D_g$ $g(x) \ne y_0$; 5) $\lim\limits_{y \to y_0} f(y) = A$ $(A \in \mathbf{R})$. Тогда $\lim\limits_{x \to x_0} f(g(x)) = \lim\limits_{y \to y_0} f(y) = A$.

Свойства бесконечно малых и бесконечно больших функций

1. Если $y = f(x)$ – бесконечно малая функция при $x \to x_0$ и для всех $x \in D_f$ $f(x) \ne 0$, то $y = \dfrac{1}{f(x)}$ – бесконечно большая функция при $x \to x_0$ и наоборот.

2. Произведение бесконечно малой функции при $x \to x_0$ и ограниченной функции есть бесконечно малая функция при $x \to x_0$.

3. Произведение бесконечно большой функции при $x \to x_0$ и ограниченной функции есть бесконечно большая функция при $x \to x_0$.

4. Сумма конечного числа бесконечно малых функций при $x \to x_0$ есть бесконечно малая функция при $x \to x_0$.

5. Произведение конечного числа бесконечно малых функций при $x \to x_0$ есть бесконечно малая функция при $x \to x_0$.

***Опр.* 8.** *Неопределенностью вида* $\left|\dfrac{\infty}{\infty}\right|$ *при* $x \to x_0$ называют предел вида $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$, если $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty(\pm\infty)$, $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \infty(\pm\infty)$.

***Опр.* 9.** *Неопределенностью вида* $\left|\frac{0}{0}\right|$ *при* $x \to x_0$ называют предел вида $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$, если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0$.

***Опр.* 10.** *Неопределенностью вида* $|\infty-\infty|$ *при* $x \to x_0$ называют предел вида $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)-g(x))$, если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty(-\infty)$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=+\infty(-\infty)$.

***Опр.* 11.** *Неопределенностью вида* $|1^\infty|$ *при* $x \to x_0$ называют предел вида $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x))^{g(x)}$, если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=1$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\infty(\pm\infty)$.

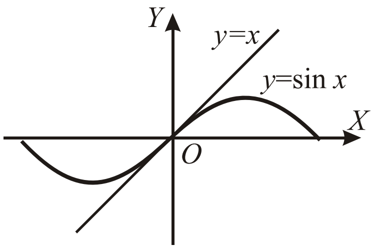
***Опр.* 12.** *Неопределенностью вида* $|0^\infty|$ *при* $x \to x_0$ называют предел вида $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x))^{g(x)}$, если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\infty(\pm\infty)$.

***Опр.* 13.** *Неопределенностью вида* $|\infty^0|$ *при* $x \to x_0$ называют предел вида $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x))^{g(x)}$, если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty(\pm\infty)$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0$.

Замечательные пределы

Первый замечательный предел:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$$



Данный предел позволяет сделать вывод о том, что чем меньше x отличается от нуля, тем меньше отличие ординат функций $y=\sin x$ и $y=x$, а при $x=0$ их значения совпадают (это позволяет с высокой точностью при очень малых x определять приближенное значение $\sin x$).

Следствия из первого замечательного предела

Если $x \to 0$, то:	Если $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha(x) = 0$, то:
1) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\mathrm{tg} x}{x} = 1;$	5) $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\sin \alpha(x)}{\alpha(x)} = 1;$
2) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\arcsin x}{x} = 1;$	6) $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\mathrm{tg} \alpha(x)}{\alpha(x)} = 1;$
3) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\mathrm{arctg} x}{x} = 1;$	7) $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\arcsin \alpha(x)}{\alpha(x)} = 1;$
4) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x^2} = \dfrac{1}{2}$	8) $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\mathrm{arctg} \alpha(x)}{\alpha(x)} = 1;$
	9) $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{1 - \cos \alpha(x)}{(\alpha(x))^2} = \dfrac{1}{2}$

Второй замечательный предел:

$$\lim_{x \to +\infty} (1 + \frac{1}{x})^x = \lim_{x \to -\infty} (1 + \frac{1}{x})^x = e .$$

Число e – иррациональное (так же, как и число π) и может быть записано в виде бесконечной десятичной непериодической дроби $e = 2{,}71828...$; играет важную роль в вычислительной математике, служа, в частности, основанием натурального логарифма, обозначаемого $\ln x = \log_e x$. Функцию $y = e^x$ называют *экспоненциальной* функцией (иногда обозначается как $\exp x$).

Следствия из второго замечательного предела

Если $x \to 0$, то:	Если $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha(x) = 0$, то:
1) $\lim\limits_{x \to 0}(1+x)^{1/x} = e;$	7) $\lim\limits_{x \to x_0}(1+\dfrac{1}{\alpha(x)})^{\alpha(x)} = e;$
2) $\lim\limits_{x \to 0}\dfrac{a^x - 1}{x} = \ln a;$	8) $\lim\limits_{x \to x_0}\dfrac{a^{\alpha(x)} - 1}{\alpha(x)} = \ln a;$
3) $\lim\limits_{x \to 0}\dfrac{e^x - 1}{x} = 1;$	9) $\lim\limits_{x \to x_0}\dfrac{e^{\alpha(x)} - 1}{\alpha(x)} = 1;$
4) $\lim\limits_{x \to 0}\dfrac{\log_a(1+x)}{x} = \dfrac{1}{\ln a};$	10) $\lim\limits_{x \to x_0}\dfrac{\log_a(1+\alpha(x))}{\alpha(x)} = \dfrac{1}{\ln a};$
5) $\lim\limits_{x \to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1;$	11) $\lim\limits_{x \to x_0}\dfrac{\ln(1+\alpha(x))}{\alpha(x)} = 1;$
6) $\lim\limits_{x \to 0}\dfrac{(1+x)^m - 1}{x} = m$	12) $\lim\limits_{x \to x_0}\dfrac{(1+\alpha(x))^m - 1}{\alpha(x)} = m$

Некоторые значения пределов функций

1.	2.	3.	4.
$\lim\limits_{x \to +\infty}\dfrac{1}{x^k} = 0$ $(k > 0)$	$\lim\limits_{x \to -\infty}\dfrac{1}{x^k} = 0$ $(k > 0)$	$\lim\limits_{x \to +0}\dfrac{1}{x^k} = +\infty$ $(k > 0)$	$\lim\limits_{x \to -0}\dfrac{1}{x^k} = $ $= \begin{cases} +\infty, k = 2n, \\ -\infty, k = 2n+1, \\ n \in \mathbf{N} \end{cases}$

5. $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x =$ $= +\infty$ $(a>1)$	6. $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x = 0$ $(a>1)$	7. $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x = +\infty$ $(0<a<1)$	8. $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x = 0$ $(0<a<1)$
9. $\lim\limits_{x\to+0} \log_a x =$ $= -\infty$ $(a>1)$	10. $\lim\limits_{x\to+\infty} \log_a x = +\infty$ $(a>1)$	11. $\lim\limits_{x\to+\infty} \log_a x = -\infty$ $(0<a<1)$	12. $\lim\limits_{x\to+0} \log_a x = +\infty$ $(0<a<1)$
13. $\lim\limits_{x\to+\infty} x^k =$ $= +\infty$ $(k>0)$	14. $\lim\limits_{x\to-\infty} x^k =$ $= \begin{cases} +\infty, k=2n, \\ -\infty, k=2n+1, \\ n\in\mathbf{N} \end{cases}$	15. $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt[k]{x} = +\infty$	16. $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt[k]{x} = -\infty$ $(k - \textit{нечетное})$

17. $$\lim_{x\to\infty} \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \begin{cases} 0, & n<m, \\ \infty, & n>m, \\ \dfrac{a_n}{b_n}, & n=m, \end{cases}$$

где $P_n(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$,

$$Q_m(x) = b_m x^m + \ldots + b_1 x + b_0$$

§ 3. Техника вычисления пределов
3.1. Предел числовой последовательности

Пример 1. Пусть $x_n = \dfrac{n}{2n+1}$ $(n \in \mathbf{N})$. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \dfrac{1}{2}$.

◀ Напомним, что задание числовой последовательности равносильно заданию некоторой функции $f(n)$ натурального аргумента. Если эта функция имеет не очень сложную структуру, т.е. имеет достаточно простое аналитическое выражение, то для вычисления предела можно использовать непосредственно само определение, т.е. для $\forall \varepsilon > 0$ найти такое число $N_\varepsilon = N(\varepsilon)$, что $|x_n - a| < \varepsilon$ для $\forall n > N_\varepsilon$. В нашем случае имеем

$$|x_n - a| = \left|\frac{n}{2n+1} - \frac{1}{2}\right| = \left|-\frac{1}{2(2n+1)}\right| = \frac{1}{2(2n+1)} < \varepsilon .$$

Теперь выясним, существует ли такое число N_ε, чтобы для всех элементов x_n данной последовательности, номера n которых больше N_ε, выполнялось неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$. Для этого решим неравенство $\dfrac{1}{2(2n+1)} < \varepsilon$ относительно n:

$$\frac{1}{2(2n+1)} < \varepsilon \Rightarrow \varepsilon \cdot 2(2n+1) > 1 \Rightarrow 2n+1 > \frac{1}{2\varepsilon}, \text{ так как } \varepsilon > 0 .$$

Из последнего неравенства окончательно имеем $n > \dfrac{1-2\varepsilon}{4\varepsilon}$. Заметим, что если ε – произвольное сколь угодно малое положительное число, то величина $\dfrac{1-2\varepsilon}{4\varepsilon}$ будет достаточно большим положительным числом. Тогда за искомое число N_ε можно взять любое натуральное число, лежащее правее точки

$\dfrac{1-2\varepsilon}{4\varepsilon}$, например $N_\varepsilon = \left[\dfrac{1-2\varepsilon}{4\varepsilon}+1\right]$ (выражение $[a]$ означает целую часть некоторого числа a). Т.о., для $\forall\varepsilon > 0$ мы определили число $N_\varepsilon = N(\varepsilon)$, что неравенство $\left|\dfrac{\mathrm{n}}{2\mathrm{n}+1}-\dfrac{1}{2}\right| < \varepsilon$ выполняется при всех $n > N_\varepsilon$. Сл–но, по определению предела числовой последовательности, нами доказано, что $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{2n+1} = \dfrac{1}{2}$. ►

Пример 2. Пусть $x_n = \dfrac{n^2-n+2}{3n^2+2n-4}$. Доказать, что последовательность (x_n) будет сходящейся. Чему равен предел этой последовательности?

◄ В отличие от предыдущего примера предельное значение a, к которому стремится x_n при $n \to \infty$, неизвестно, более того, у нас нет даже уверенности, что оно существует. Поэтому необходимо подробнее описать поведение общего члена нашей последовательности при изменении n, для этого преобразуем x_n следующим образом:

$$x_n = \frac{n^2-n+2}{3n^2+2n-4} = \frac{n^2\left(1-\dfrac{1}{n}+\dfrac{2}{n^2}\right)}{n^2\left(3+\dfrac{2}{n}-\dfrac{4}{n^2}\right)} = \frac{1-\dfrac{1}{n}+\dfrac{2}{n^2}}{3+\dfrac{2}{n}-\dfrac{4}{n^2}}.$$

Очевидно, слагаемые $\dfrac{1}{n}, \dfrac{1}{n^2}$ при $n \to \infty$ становятся и остаются сколь угодно малыми, в таком случае выражение в правой части полученного равенства, похоже, должно стремиться к $\dfrac{1}{3}$. Т.о., у нас возникло предположение, что пределом данной последовательности должно быть число $\dfrac{1}{3}$.

Надо подчеркнуть особо, что полученный вывод не может служить доказательством того, что существует $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \dfrac{1}{3}$! Утверждение, что предел данной последовательности существует и равен $\dfrac{1}{3}$, можно считать доказанным, если для $\forall\varepsilon > 0$ найдем номер N_ε такой, что для всех $n > N_\varepsilon$ будет выполняться неравенство

$$\left|\frac{n^2 - n + 2}{3n^2 + 2n - 4} - \frac{1}{3}\right| < \varepsilon . \tag{1}$$

С этой целью рассмотрим разность

$$\frac{n^2 - n + 2}{3n^2 + 2n - 4} - \frac{1}{3} = \frac{-5n + 10}{3(3n^2 + 2n - 4)}$$

и оценим ее абсолютную величину. Для $n > 2$ имеем:

$$\left|\frac{n^2 - n + 2}{3n^2 + 2n - 4} - \frac{1}{3}\right| = \left|\frac{-5n + 10}{3(3n^2 + 2n - 4)}\right| < \frac{5n}{3(3n^2 - 4)} < \frac{5n}{3 \cdot 2n^2} < \frac{1}{n},$$

так что это выражение меньше ε, если $n > \dfrac{1}{\varepsilon}$. Если $N_\varepsilon = \left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]$, то при всех $n > N_\varepsilon$ неравенство (1) выполняется. Этим доказано, что существует $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \dfrac{1}{3}$.▶

Итак, в примерах 1 и 2 с помощью не очень сложных математических выкладок для $\forall\varepsilon > 0$ нам удалось подобрать соответствующий номер N_ε. На практике к таким рассуждениям обычно прибегают при *доказательстве* существования предела. Рассуждения при этом могут быть достаточно сложными, если пользоваться только определением.

На практике чаще всего мы сталкиваемся с примерами, в которых необходимо просто вычислить предел данной последовательности, будучи уверенными в его существовании. При решении именно таких задач важную роль играет наличие в арсенале исследователя определенных технических приемов и способов вычисления пределов. Некоторые из них продемонстрируем на следующих примерах.

Пример 3. Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2-n+2}{5n^2+9}$.

◀ Преобразуем выражение под знаком предела, поделив числитель и знаменатель на старшую степень n, т.е. на n^2:

$$\frac{3n^2-n+2}{5n^2+9}=\frac{3-\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}}{5+\frac{9}{n^2}}.$$

Если ввести числовые последовательности $a_n=\dfrac{1}{n}$ и $b_n=\dfrac{1}{n^2}$, $\left(n\in\mathbf{N}\right)$, то с помощью рассуждений, аналогичных примерам 1, 2, можно было бы доказать, что обе они сходятся и имеют пределы, равные 0. Тогда, используя теоремы о пределах суммы и отношения, получаем:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2-n+2}{5n^2+9}=\lim_{n\to\infty}\frac{3-\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}}{5+\frac{9}{n^2}}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(3-\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(5+\frac{9}{n^2}\right)}=$$

$$=\frac{3-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}+2\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}}{5+9\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}}=\frac{3-0+2\cdot 0}{5+9\cdot 0}=\frac{3}{5}.$$

Окончательно $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2-n+2}{5n^2+9}=\dfrac{3}{5}$. ▶

Пример 4. Найти $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}\right)$.

◀ Теорему о пределе разности применять нельзя, так как при $n \to \infty$ $\sqrt{n+1} \to \infty$ и $\sqrt{n-1} \to \infty$, т.е. имеем неопределенность $|\infty - \infty|$. Для ее раскрытия необходимо избавиться от радикалов, поэтому выражение под знаком предела домножим и разделим на сопряженное к нему:

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1} = \frac{\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}\right)\cdot\left(\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}\right)}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}}.$$

Так как при $n \to \infty$ величина $\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}$ – бесконечно большая, то

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}} =$$

$$= 2\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}} = 0. \blacktriangleright$$

Пример 5. Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2}{n^3}$.

◄ Так как при $n \to \infty$ $n^3 \to \infty$, $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 \to \infty$, то получаем неопределенность $\left|\dfrac{\infty}{\infty}\right|$. Для ее раскрытия воспользуемся известной формулой

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

(доказывается методом математической индукции).

Тогда

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2}{n^3} = \lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)(2n+1)}{n^3} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)(2n+1)}{n^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{n\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)\cdot n\left(2 + \dfrac{1}{n}\right)}{n^2} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right) = 2\cdot 1 = 1. \blacktriangleright$$

3.2. Предел функции

При вычислении пределов функций мы обычно пользуемся двумя определениями, равносильными друг другу. Первое определение принадлежит Коши, поэтому его называют определением предела функции по Коши или, по-другому, определением предела на языке «$\varepsilon-\delta$». Другое определение принадлежит Гейне, в нем понятие предела функции сводится к понятию предела числовой последовательности. Суть обоих определений одна и та же: при неограниченном приближении аргумента в данном процессе соответствующие значения функции должны стремиться к некоторому значению.

Все задачи, с которыми вы сталкиваетесь в начале математического анализа, бывают двух видов: к первому виду условно можно отнести задачи, в которых необходимо *доказать* существование предела (или, наоборот, отсутствие), а ко второму виду – задачи на *вычисление* предела. Также дело обстояло при изучении пределов числовых последовательностей. При решении задач первого вида требуется умение проводить, иногда достаточно строгие, рассуждения на языке «$\varepsilon-\delta$». А для решения задач второго вида требуется владение определенными техническими приемами вычисления пределов, особенно при раскрытии неопределенностей.

Применение определений при вычислении пределов

Пример 1. Показать, что функция $y=\dfrac{1}{1+x}$ при $x\to 2$ имеет предел, равный $\dfrac{1}{3}$.

◀ Задачу надо воспринимать так: предположим, что нам пока неизвестны никакие теоремы о пределах, что мы еще не знаем ничего о непрерывных функциях и что надо доказать существование $\lim\limits_{x\to 2}\frac{1}{1+x}=\frac{1}{3}$ только на основании определения предела.

Если пользоваться определением Гейне, рассуждения можно вести так: пусть (x_n) – произвольная последовательность точек, $\neq 1$ и стремящихся к 2, тогда необходимо выяснить, куда стремится последовательность значений функции $\left(\frac{1}{1+x_n}\right)$. С помощью основных свойств о пределе числовой последовательности ответ получим сразу:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{1+x_n}=\frac{1}{\lim\limits_{x\to\infty}(1+x_n)}=\frac{1}{1+\lim\limits_{x\to\infty}x_n}=\frac{1}{3},$$

так как по условию $\lim\limits_{x\to\infty}x_n=2.$

Если взять за основу определение Коши, то необходимо для $\forall\varepsilon>0$ найти такое $\delta>0,$ чтобы неравенство $\left|\frac{1}{1+x}-\frac{1}{3}\right|<\varepsilon$ выполнялось при всех $x\neq 2$ и $|x-2|<\delta.$ Существование такого δ можно обосновать сл. обр.: неравенство $\left|\frac{1}{1+x}-\frac{1}{3}\right|<\varepsilon$ выполняется при всех x, принадлежащих интервалу $\left(\frac{2-\varepsilon}{1+\varepsilon},\frac{2+\varepsilon}{1-\varepsilon}\right)$, сл–но,

$$\frac{2-\varepsilon}{1+\varepsilon}-2<x-2<\frac{2+\varepsilon}{1-\varepsilon}-2,$$

из этого неравенства следует, что $-\frac{3\varepsilon}{1+\varepsilon}<x-2<\frac{3\varepsilon}{1-\varepsilon}$. Пусть δ – наименьшее из двух чисел $\frac{3\varepsilon}{1+\varepsilon}$ и $\frac{3\varepsilon}{1-\varepsilon}$ (так как $\varepsilon>0,$ то, очевидно, это будет $\frac{3\varepsilon}{1+\varepsilon}$). Поэтому при всех $x: |x-2|<\delta,$ где $\delta=\frac{3\varepsilon}{1+\varepsilon}$, неравенство $\left|\frac{1}{1+x}-\frac{1}{3}\right|<\varepsilon$ будет выполняться. Тогда по определению предела функции на языке «$\varepsilon-\delta$» доказано, что $\lim\limits_{x\to 2}\frac{1}{1+x}=\frac{1}{3}$.►

Пример 2. Доказать, что функция $y=2^{\frac{1}{x}}$ не имеет предела при $x\to 0.$

◄ Напомним, что в определении предела функции при $x\to x_0$ само предельное значение функции не должно зависеть от способа стремления x к x_0. Учитывая сказанное, вычислим односторонние пределы данной функции. Пусть переменная x стремится к $x_0=0$ слева, т.е. $x\to 0,$ но в процессе стремления x остается меньше 0, тогда показатель степени $\frac{1}{x}$ будет сколько угодно большим, но отрицательным, т.е. $\frac{1}{x}\to-\infty$, тогда $2^{\frac{1}{x}}\to 0.$

Аналогично, если x стремится к $x_0=0$ справа, то x_0 будет величиной бесконечно малой, но все же положительной, тогда $\frac{1}{x}\to+\infty$. Т. о., $\lim\limits_{x\to 0-0}2^{\frac{1}{x}}=0; \lim\limits_{x\to 0+0}2^{\frac{1}{x}}=+\infty$, т.е. односторонние пределы различны, поэтому функция $y=2^{\frac{1}{x}}$ при $x\to 0$ не имеет предела. ►

Если функция $y=f(x)$ является элементарной, то вычисление $\lim\limits_{x\to a}f(x)$ сводится к простой подстановке предельного значения a вместо x, если a принадлежит области определения этой функции:

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a). \tag{2}$$

Пример 3. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^x+1}{\sqrt{4+x^3}}$.

◀ Функция, находящаяся под знаком предела, есть отношение двух элементарных функций, значение $x=0$ принадлежит области ее определения, сл–но

$$\lim_{x\to 0}\frac{2^x+1}{\sqrt{4+x^3}} = \frac{2^0+1}{\sqrt{4}} = \frac{2}{2} = 1. \blacktriangleright$$

Как видно, вычисление предела в приведенном примере не вызывает никаких трудностей. Но так бывает не всегда. На практике мы чаще всего сталкиваемся с примерами, в которых равенство (2) не выполняется. Именно это обстоятельство и приводит к некоторым дополнительным сложностям.

Пример 4. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{x+1}}{x}$.

◀ В данном примере предельное значение $\mathrm{x}=0$ не принадлежит области определения функции – условие (2) нарушено. Применим следующие тождественные преобразования:

$$\frac{1-\sqrt{x+1}}{x} = \frac{\left(1-\sqrt{x+1}\right)\cdot\left(1+\sqrt{x+1}\right)}{x\left(1+\sqrt{x+1}\right)} = \frac{1-x-1}{x\left(1+\sqrt{x+1}\right)} =$$

$$= \frac{-x}{x\left(1+\sqrt{x+1}\right)} = \frac{-1}{1+\sqrt{x+1}}.$$

Тогда

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{x+1}}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{-1}{1+\sqrt{x+1}} = \frac{-1}{1+1} = -\frac{1}{2}. \blacktriangleright$$

Пример 5. Вычислить $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{\sin^2 x}{1+\cos^3 x}$.

◀ Значение $x=\pi$ не принадлежит области определения функции. Преобразуем функцию, разложив числитель и знаменатель на множители:

$$\frac{\sin^2 x}{1+\cos^3 x}=\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{(1+\cos x)\left(1-\cos x+\cos^2 x\right)}=\frac{1-\cos x}{1-\cos x+\cos^2 x}.$$

Тогда

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\sin^2 x}{1+\cos^3 x}=\lim_{x\to\pi}\frac{1-\cos x}{1-\cos x+\cos^2 x}=\frac{1-\cos\pi}{1-\cos\pi+\cos^2\pi}=\frac{2}{3}.$$

►

3.3. Использование замечательных пределов

Пример 1. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$.

◄ Воспользуемся формулой $1-\cos x=2\sin^2\frac{x}{2}$, тогда

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\cdot\sin^2\frac{x}{2}}{4\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^2}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2=\frac{1}{2}.$$

►

Пример 2. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin\left(x^2-5x\right)}{2x^2+3x}$.

◄ Применим следующее тождественное преобразование:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin\left(x^2-5x\right)}{2x^2+3x}=\lim_{x\to 0}\left[\frac{\sin\left(x^2-5x\right)}{x^2-5x}\cdot\frac{x^2-5x}{2x^2+3x}\right].$$

Предел каждого сомножителя рассмотрим отдельно:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin\left(x^2-5x\right)}{x^2-5x}=\begin{vmatrix}x^2-5x=t\\ x\to 0\Rightarrow t\to 0\end{vmatrix}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=1,$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2-5x}{2x^2+3x}=\lim_{x\to 0}\frac{x(x-5)}{x(2x+3)}=\lim_{x\to 0}\frac{x-5}{2x+3}=-\frac{5}{3}.$$

По свойству о пределе произведения искомый предел равен $-\frac{5}{3}$. ►

Пример 3. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(a+x)-\ln a}{x}$.

◀ $$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(a+x)-\ln a}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\dfrac{a+x}{a}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+\dfrac{x}{a}\right)}{a\cdot\dfrac{x}{a}}=$$

$$=\frac{1}{a}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+\dfrac{x}{a}\right)}{\dfrac{x}{a}}=\frac{1}{a}.$$ ▶

Пример 4. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[5]{1+4x^2}-\sqrt[4]{1-6x^3}}{x^2}$.

◀ $$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[5]{1+4x^2}-\sqrt[4]{1-6x^3}}{x^2}=\left|\frac{0}{0}\right|=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left(1+4x^2\right)^{\frac{1}{5}}-1-\left(1-6x^3\right)^{\frac{1}{4}}+1}{x^2}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left[\frac{\left(1+4x^2\right)^{\frac{1}{5}}-1}{x^2}-\frac{\left(1-6x^3\right)^{\frac{1}{4}}-1}{x^2}\right]=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left[4\cdot\frac{\left(1+4x^2\right)^{\frac{1}{5}}-1}{4x^2}+6x\cdot\frac{\left(1-6x^3\right)^{\frac{1}{4}}-1}{-6x^3}\right]=4\cdot\frac{1}{5}+6\cdot\frac{1}{4}=\frac{23}{10}.$$ ▶

Пример 5. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\operatorname{tg}3x}-1}{\ln(1-\sin x)}$.

◀ Используем следующие преобразования:

$$\frac{e^{\operatorname{tg}3x}-1}{\ln(1-\sin x)}=\frac{e^{\operatorname{tg}3x}-1}{\operatorname{tg}3x}\cdot\frac{\operatorname{tg}3x}{\sin x}\cdot\frac{\sin x}{\ln(1-\sin x)}.$$

Учитывая следствия из замечательных пределов, найдем пределы каждого сомножителя в отдельности:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{\operatorname{tg}3x}-1}{\operatorname{tg}3x}=\ln e=1;\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}3x}{\sin x}=\lim_{x\to 0}3\cdot\frac{\operatorname{tg}3x}{3x}\cdot\frac{x}{\sin x}=3;$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\ln(1-\sin x)}=\lim_{x\to 0}\frac{-1}{\frac{\ln(1-\sin x)}{-\sin x}}=-1.$$

Тогда по свойству о пределе произведения данный предел равен -3. ►

Пример 6. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[m]{1+\alpha x}\cdot\sqrt[n]{1+\beta x}-1}{x}$.

◄ Непосредственной проверкой убеждаемся в справедливости равенства

$$\sqrt[m]{1+\alpha x}\cdot\sqrt[n]{1+\beta x}-1=\sqrt[n]{1+\beta x}\left[\sqrt[m]{1+\alpha x}-1\right]+\sqrt[n]{1+\beta x}-1.$$

Тогда исходный предел равен:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[m]{1+\alpha x}\cdot\sqrt[n]{1+\beta x}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\left[\sqrt[n]{1+\beta x}\cdot\frac{\sqrt[m]{1+\alpha x}-1}{x}+\frac{\sqrt[n]{1+\beta x}-1}{x}\right]=$$

$$=\lim_{x\to 0}\sqrt[n]{1+\beta x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[m]{1+\alpha x}-1}{x}+\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[m]{1+\beta x}-1}{x}.$$

Но из следствия второго замечательного предела:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[n]{1+\alpha x}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(1+\alpha x)^{1/n}-1}{\alpha x}=\frac{\alpha}{n},$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[m]{1+\beta x}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(1+\beta x)^{1/m}-1}{\beta x}=\frac{\beta}{m}.$$

Сл–но, данный предел равен $\dfrac{\alpha}{n}+\dfrac{\beta}{m}$. ►

3.4. Простейшие приемы раскрытия неопределенностей

При решении задач, связанных с пределами суммы, разности, произведения или частного двух функций, а также с пределами показательно-степенных выражений, мы сталкиваемся с проблемами иного рода. Речь идет о неопределенных выражениях. Большинство примеров, рассмотренных ранее, относится именно к этому случаю. Термин «неопределенность» подчеркивает, что поведение данного выражения заранее предсказать невозможно, более того, в зависимости от конкретных функций пределы выражений одинаковой структуры могут быть конечным числом, бесконечностью или вовсе отсутствовать. Отыскание пределов таких выражений или установление их отсутствия называется раскрытием рассматриваемой неопределенности. Различают неопределенности следующих видов:

$$\left|\frac{0}{0}\right|, \left|\frac{\infty}{\infty}\right|, \left|0\cdot\infty\right|, \left|\infty-\infty\right|, \left|0^0\right|, \left|1^\infty\right|, \left|\infty^0\right|.$$

Неопределенности $\left|\frac{0}{0}\right|, \left|\frac{\infty}{\infty}\right|$

Пример 1. Вычислить $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-3x+2}{x^2-5x+4}$.

◄ При $x\to 1$

$$x^2-3x+2\to 0 \text{ и } x^2-5x+4\to 0.$$

Имеем неопределенность $\left|\frac{0}{0}\right|$. Для ее раскрытия достаточно разложить числитель и знаменатель дроби на множители:

$$\frac{x^2-3x+2}{x^2-5x+4}=\frac{(x-1)(x-2)}{(x-1)(x-4)}=\frac{x-2}{x-4},$$

тогда $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-3x+2}{x^2-5x+4}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{x-2}{x-4}=\frac{1}{3}$. ►

Пример 2. Вычислить $\lim\limits_{x\to -2}\frac{x^2-4}{\operatorname{arctg}(x+2)}$.

◀ При $x \to -2$ $\left(x^2-4\right) \to 0$ и $\operatorname{arctg}(x+2) \to 0$. Получаем неопределенность $\left|\frac{0}{0}\right|$. Для ее раскрытия применим следующие преобразования:

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^2-4}{\operatorname{arctg}(x+2)}=\lim_{x\to -2}\left[(x-2)\cdot\frac{x+2}{\operatorname{arctg}(x+2)}\right]=$$

$$=\lim_{x\to -2}(x-2)\cdot\lim_{x\to -2}\frac{x+2}{\operatorname{arctg}(x+2)}=-4.$$

Здесь мы воспользовались тем, что $\lim\limits_{\alpha\to 0}\frac{\operatorname{arctg}\alpha}{\alpha}=1$ ($\alpha = x+2$).▶

Пример 3. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3^{8x}-1}{\log_4(1+\sin x)}$.

◀ Неопределенность $\left|\frac{0}{0}\right|$. Применим следующие преобразования: $\frac{3^{8x}-1}{\log_4(1+\sin x)}=\frac{3^{8x}-1}{8x}\cdot\frac{\sin x}{\log_4(1+\sin x)}\cdot\frac{8x}{\sin x}$ и вычислим пределы каждого множителя отдельно:

$$\lim_{x\to 0}\frac{3^{8x}-1}{8x}=\left|\frac{0}{0}\right|=\ln 3;\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\log_4(1+\sin x)}=\left|\sin x = t\right|=$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{t}{\log_4(1+t)}=\frac{1}{\log_4 e}=\ln 4;\ \lim_{x\to 0}\frac{8x}{\sin x}=8\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=8.$$

По теореме о пределе произведения искомый предел равен $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3^{8x}-1}{\log_4(1+\sin x)}=8\ln 3\cdot\ln 4.$ ▶

Пример 4. Вычислить $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x+\sqrt{x+1}}}{\sqrt{x+1}}$.

$$◀\ \lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x+\sqrt{x+1}}}{\sqrt{x+1}}=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x}\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}}{\sqrt{x}\cdot\sqrt{1+\frac{1}{x}}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{1+\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}{1+\frac{1}{x}}}=1,$$

так как при $x\to\infty$ $\frac{1}{x}\to 0$ и $\frac{1}{x^2}\to 0$. ▶

Неопределенности $|\infty-\infty|,|0\cdot\infty|$

Легко приводятся к неопределенностям $\left|\frac{0}{0}\right|$ или $\left|\frac{\infty}{\infty}\right|$:

$$\lim_{x\to a}\left[f(x)-\varphi(x)\right]=|\infty-\infty|=\lim_{x\to a}\left[\frac{1}{1/f(x)}-\frac{1}{1/\varphi(x)}\right]=$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{1/\varphi(x)-1/f(x)}{1/f(x)\cdot 1/\varphi(x)}=\left|\frac{0}{0}\right|;$$

$$\lim_{x\to a}\left[f(x)\cdot\varphi(x)\right]=|0\cdot\infty|=\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{1/\varphi(x)}=\left|\frac{0}{0}\right|=\lim_{x\to a}\frac{\varphi(x)}{1/f(x)}=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|.$$

Пример 5. Вычислить $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{2x^2-1}-\frac{x^2}{2x+1}\right)$.

◀ Неопределенность $|\infty-\infty|$, так как

$$\frac{x^3}{2x^2-1}=\frac{x^3}{x^2\left[2-\frac{1}{x^2}\right]}=x\cdot\frac{1}{2-\frac{1}{x^2}}\to\infty,$$

$$\frac{x^2}{2x+1}=\frac{x^2}{x\left(2+\frac{1}{x}\right)}=x\cdot\frac{1}{2+\frac{1}{x}}\to\infty \quad \text{при} \quad x\to\infty.$$

Приводя к общему знаменателю, получаем:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{2x^2-1}-\frac{x^2}{2x+1}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^4+x^3-2x^4+x^2}{\left(2x^2-1\right)\cdot\left(2x+1\right)}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+x^2}{\left(2x^2-1\right)\cdot\left(2x+1\right)}=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x^2\left(2-\frac{1}{x^2}\right)\cdot x\left(2+\frac{1}{x}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{1}{x}}{\left(2-\frac{1}{x^2}\right)\cdot\left(2+\frac{1}{x}\right)}=\frac{1}{4}.\ ►$$

Пример 6. Вычислить $\lim\limits_{x\to 1}\left(\left(x-1\right)\cdot \operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}\right)$.

◄ Так как при $x\to 1$ $\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}\to\infty$, то получаем неопределенность $|0\cdot\infty|$. Введем переменную $y=x-1$; если $x\to 1$, то $y\to 0$. Тогда

$$\lim_{x\to 1}(x-1)\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}=\lim_{y\to 0}y\cdot\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}y\right)=-\lim_{y\to 0}y\cdot\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2}y=$$

$$=-\lim_{y\to 0}\cos\frac{\pi}{2}y\cdot\frac{y}{\sin\frac{\pi}{2}y}=\left|\frac{0}{0}\right|=-\lim_{y\to 0}\cos\frac{\pi}{2}y\cdot\lim_{y\to 0}\frac{y}{\sin\frac{\pi}{2}y}=$$

$$=-\lim_{y\to 0}\cos\frac{\pi}{2}y\cdot\frac{2}{\pi}\cdot\lim_{y\to 0}\frac{y\cdot\frac{\pi}{2}}{\sin\frac{\pi}{2}y}=-\frac{2}{\pi}.\ ►$$

Неопределенности $\left|1^{\infty}\right|, \left|0^{0}\right|, \left|\infty^{0}\right|$

Неопределенности данного вида связаны с пределами степенно-показательных выражений, в некоторых случаях сводятся непосредственно ко второму замечательному пределу.

С помощью основного логарифмического тождества ($b = a^{\log_a b}$) их можно свести к неопределенностям $\left|\frac{0}{0}\right|, \left|\frac{\infty}{\infty}\right|$ или $\left|0 \cdot \infty\right|$.

Пример 7. Вычислить $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+3}{x^2-4x}\right)^x$.

◄ Основание $\dfrac{x^2+3}{x^2-4x} = \dfrac{x^2\left(1+3/x^2\right)}{x^2\left(1-4/x\right)} = \dfrac{1+3/x^2}{1-4/x} \to 1$ при $x \to \infty$, сл–но, имеем неопределенность $\left|1^{\infty}\right|$. Ее можно свести ко второму замечательному пределу. Для этого заметим, что $\dfrac{x^2+3}{x^2-4x} = 1 + \dfrac{4x+3}{x^2-4x}$. Тогда

$$\left(\frac{x^2+3}{x^2-4x}\right)^x = \left(1+\frac{4x+3}{x^2-4x}\right)^x = \left[1+\frac{4x+3}{x^2-4x}\right]^{\frac{x^2-4x}{4x+3}\cdot\frac{(4x+3)}{x^2-4x}\cdot x}.$$

Обозначим $y = \dfrac{x^2-4x}{4x+3}$, очевидно, что при $x \to \infty$ $y \to \infty$, тогда

$$\lim_{x\to\infty}\left[1+\frac{4x+3}{x^2-4x}\right]^{\frac{x^2-4x}{4x+3}} = \lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^y = e;$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(4x+3)\cdot x}{x^2-4x} = \left|\frac{\infty}{\infty}\right| = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2(4+3/x)}{x^2(1-4/x)} = 4,$$

отсюда $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+3}{x^2-4x}\right)^x = e^4$. ►

Неопределенность удалось раскрыть путем сведения к второму замечательному пределу. Иногда проще использовать следующую схему:

$$\lim_{x\to a}[u(x)]^{v(x)} = \lim_{x\to a} e^{\ln u(x)\cdot v(x)} = e^{\lim\limits_{x\to a}\ln u(x)\cdot v(x)}.$$

Пример 8. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0} x^{\frac{1}{\ln(e^x-1)}}$.

◄ При $x\to\infty$ выражение $\ln(e^x-1)\to\infty$, тогда $\dfrac{1}{\ln(e^x-1)}\to 0$, поэтому имеем неопределенность $\left|0^0\right|$. Раскроем ее вышеуказанным способом:

$$\lim_{x\to 0} x^{\frac{1}{\ln(e^x-1)}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln x}{\ln(e^x-1)}}.$$

В показателе полученного выражения имеем неопределенность $\left|\dfrac{\infty}{\infty}\right|$, раскроем ее отдельно:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\ln(e^x-1)} = \lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\ln\left(\dfrac{e^x-1}{x}\cdot x\right)} = \lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\ln\dfrac{e^x-1}{x}+\ln x}.$$

Используя следствия из второго замечательного предела, нетрудно показать, что $\lim\limits_{x\to 0}\left(\ln\dfrac{e^x-1}{x}\right)=1$, тогда

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\ln\dfrac{e^x-1}{x}+\ln x} = \lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{1+\ln x} = \left|\frac{\infty}{\infty}\right| = \lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\left(1+\dfrac{1}{\ln x}\right)\cdot\ln x} = 1.$$

Т. о., окончательно получим $\lim\limits_{x\to 0} x^{\frac{1}{\ln(e^x-1)}} = e$. ►

При раскрытии неопределенности $\left|1^{\infty}\right|$ можно использовать более простую схему:

$$\lim_{x\to a}[u(x)]^{\upsilon(x)}=\left|1^{\infty}\right|=\lim_{x\to a}e^{\ln u(x)\cdot\upsilon(x)}=\left|0\cdot\infty\right|=e^{\lim\limits_{x\to a}[u(x)-1]\cdot\upsilon(x)} \qquad (3)$$

Пример 9. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$.

◀ Так как при $x\to 0$ $\cos x\to 1$, то получаем неопределенность $\left|1^{\infty}\right|$.

Воспользуемся формулой (3):

$$\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}(\cos x-1)\cdot\frac{1}{x^2}}=\left|0\cdot\infty\right|=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x^2}}=\left|\frac{0}{0}\right|.$$

Неопределенность в показателе раскроем отдельно:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x^2}=-\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=-\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\left[\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}\right]^2=-\frac{1}{2},$$

сл–но, данный предел равен $e^{-\frac{1}{2}}$. ▶

Замечание. Как показывают предыдущие примеры, при раскрытии неопределенностей, связанных с пределами степенно-показательных выражений, мы вынуждены проводить достаточно громоздкие преобразования. Для их упрощения рекомендуется выражения предварительно прологарифмировать.

Пример 10. Вычислить $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x^2+1\right)^{\frac{4}{\ln\left(1+x^2\right)}}$.

◀ Неопределенность $\left|\infty^0\right|$. Пусть $y=\left(x^2+1\right)^{\frac{4}{\ln\left(1+x^2\right)}}$. Найдем предел логарифма данного выражения:

$$\lim_{x\to\infty}\ln y=\lim_{x\to\infty}\frac{4}{\ln\left(1+x^2\right)}\cdot\ln\left(1+x^2\right)=4,$$

тогда $\lim\limits_{x\to\infty}y=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+x^2\right)^{\frac{4}{\ln\left(1+x^2\right)}}=e^4$. ▶

3.5. Применение эквивалентных бесконечно малых

Бесконечно малые $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются *эквивалентными при* $x \to a$, если $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$. Обозначается эквивалентность так: $\alpha(x)\sim\beta(x)$ при $x \to a$. Применение эквивалентных бесконечно малых является очень эффективным способом раскрытия некоторых неопределенностей. В основе лежит следующая теорема.

Теорема. *Пусть функции* $\alpha(x)$ *и* $\alpha_1(x)$ *являются эквивалентными при* $x \to a$. *Если существует конечный или бесконечный* $\lim\limits_{x\to a}\alpha_1(x)\cdot g(x)$, *то существует и* $\lim\limits_{x\to a}\alpha(x)\cdot g(x)$, *причем* $\lim\limits_{x\to a}\alpha_1(x)\cdot g(x)=\lim\limits_{x\to a}\alpha(x)\cdot g(x)$.

Из этой теоремы следует, что если при $x \to a$ $\alpha(x)\sim\alpha_1(x)$ и $\beta(x)\sim\beta_1(x)$, то

$$\lim_{x\to a}\alpha(x)\cdot\beta(x)=\lim_{x\to a}\alpha_1(x)\cdot\beta_1(x);$$
$$\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta_1(x)}=\lim_{x\to a}\frac{\alpha_1(x)}{\beta(x)}=\lim_{x\to a}\frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}.$$

Эти равенства означают, что при вычислении пределов множители в числителе или в знаменателе можно заменить на эквивалентные.

Приведем некоторые пары эквивалентных бесконечно малых величин

$$\sin\alpha(x)\sim\alpha(x),\ \arcsin\alpha(x)\sim\alpha(x),$$
$$\mathrm{tg}\,\alpha(x)\sim\alpha(x),\quad \mathrm{arctg}\,\alpha(x)\sim\alpha(x),$$
$$1-\cos\alpha(x)\sim\frac{(\alpha(x))^2}{2},$$

$$\log_a(1+\alpha(x)) \sim \frac{\alpha(x)}{\ln a}, \quad \ln(1+\alpha(x)) \sim \alpha(x),$$
$$a^{\alpha(x)} - 1 \sim \alpha(x)\ln a, \qquad e^{\alpha(x)} - 1 \sim \alpha(x),$$
$$(1+\alpha(x))^m - 1 \sim m \cdot \alpha(x).$$

Здесь $\alpha(x) \to 0$ при $x \to a$.

Пример 1. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{2^x - 1}$.

◀ Функции $\sin x$ и $2^x - 1$ являются бесконечно малыми при $x \to 0$, заменим их эквивалентными бесконечно малыми: $\sin x \sim x$; $2^x - 1 \sim \ln 2 \cdot x$ при $x \to 0$. Тогда

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{2^x - 1} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{\ln 2 \cdot x} = \frac{1}{\ln 2}. \blacktriangleright$$

С помощью замены бесконечно малой на эквивалентную удается очень быстро преодолеть те искусственные, иногда громоздкие преобразования, которые нами использовались при раскрытии неопределенностей другими способами. Чтобы убедиться в этом, вернемся к примеру 3 из п. 3.4 и вычислим его с помощью эквивалентных бесконечно малых.

При $x \to 0$ $\sin x \to 0$, поэтому $\log_4(1+\sin x) \sim \dfrac{1}{\ln 4}\sin x \sim \dfrac{1}{\ln 4}x$; бесконечно малая $3^{8x} - 1 \sim 8x \cdot \ln 3$.

Тогда

$$\lim_{x\to 0} \frac{3^{8x} - 1}{\log_4(1+\sin x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\ln 3 \cdot 8x}{\frac{1}{\ln 4} \cdot x} = 8\ln 3 \cdot \ln 4. \blacktriangleright$$

Преимущества использования бесконечно малых очевидны.

Пример 2. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+\sin x} - 1}{\log_2(2x+1)}$.

◀ Обозначим $y = \sin x$ и заметим, что при $x \to 0$ новая переменная y тоже стремится к 0. Тогда

$\sqrt{1+\sin x}-1=(1+y)^{1/2}-1\sim\frac{1}{2}y$ при $y\to 0$, т.е.

$\sqrt{1+\sin x}-1\sim\frac{1}{2}\sin x,\quad x\to 0$. При $x\to 0$ бесконечно малая $\log_2(2x+1)\sim\frac{1}{\ln 2}\cdot 2x.$ Тогда

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\sin x}-1}{\log_2(2x+1)}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln 2}{4}\cdot\frac{\sin x}{x}=\frac{\ln 2}{4}. \blacktriangleright$$

Метод замены переменной, использованный в данном примере, значительно расширяет возможности применения эквивалентных бесконечно малых величин.

Замечание. Не рекомендуется заменять под знаком предела слагаемые на эквивалентные им величины. Например, при $x\to 0$ $\mathrm{tg}x\sim x;$ $\sin x\sim x$. Если перейти к эквивалентным функциям в пределе $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\mathrm{tg}x-\sin x}{x^3}$, то получим

$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{tg}x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{x-x}{x^3}=0.$$

В действительности все обстоит по-другому:

$$\frac{\mathrm{tg}x-\sin x}{x^3}=\frac{\mathrm{tg}x(1-\cos x)}{x^3}.$$

Согласно приведенной выше теореме заменим множители $\mathrm{tg}x$ и $1-\cos x$ на эквивалентные им: $\mathrm{tg}x\sim x$, $1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2$ при $x\to 0.$ Тогда получим верный результат:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{tg}x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{tg}x(1-\cos x)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\frac{1}{2}x^2}{x^3}=\frac{1}{2}.$$

Рассмотренные примеры связаны с неопределенностью $\left|\frac{0}{0}\right|$, но эквивалентные бесконечно малые можно использовать при раскрытии и других неопределенностей.

Пример 3. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x)^{\operatorname{ctg} 3x}$.

◀ Неопределенность $\left|1^{\infty}\right|$. Применим следующие преобразования:

$$(\cos 2x)^{\operatorname{ctg}3x} = e^{[\ln\cos 2x]\operatorname{ctg}3x} = e^{\ln[1+(\cos 2x-1)]\frac{\cos 3x}{\sin 3x}}.$$

При $x \to 0$, $\cos 2x - 1 \to 0$, тогда $\ln[1+(\cos 2x-1)] \sim \cos 2x - 1$.

В свою очередь, $\cos 2x - 1 \sim -\dfrac{1}{2}(2x)^2$.

Поэтому

$$\lim_{x\to 0}(\cos 2x)^{\operatorname{ctg}3x} = \left|1^{\infty}\right| = e^{\lim\limits_{x\to 0}\left[-\frac{1}{2}(2x)^2\cdot\cos 3x\cdot\frac{1}{3x}\right]} =$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to 0}\left[-\frac{2}{1}\cdot\frac{x\cos 3x}{3}\right]} = e^0 = 1. \blacktriangleright$$

Пример 4. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\left(\left(x^2+4x+8\right)^a - \left(x^2-2x+3\right)^a\right)$, где a – произвольное положительное число.

◀ При $a = \dfrac{1}{2}$ данный предел можно вычислить путем умножения и деления на сопряженное выражение. Для других значений такой метод уже не проходит. Используя эквивалентные бесконечно малые, этот предел можно вычислить без особого труда. Сначала применим дополнительные преобразования:

$$F(x) = \left(x^2+4x+8\right)^a - \left(x^2-2x+3\right)^a =$$

$$= \left(x^2-2x+3\right)^a\left[\left(\frac{x^2+4x+8}{x^2-2x+3}\right)^a - 1\right] =$$

$$= \left(x^2-2x+3\right)^a\left[\left(1+\frac{6x+5}{x^2-2x+3}\right)^a - 1\right].$$

Так как при $x \to +\infty$ $\quad \dfrac{6x+5}{x^2-2x+3} \to 0$, то

$$\left(1+\frac{6x+5}{x^2-2x+3}\right)^a -1 \sim a\cdot\frac{6x+5}{x^2-2x+3}.$$

Тогда

$$\lim_{x\to+\infty} F(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(x^2-2x+3\right)^a \cdot a\frac{6x+5}{x^2-2x+3} =$$

$$= a\lim_{x\to+\infty}\frac{6x+5}{\left(x^2-2x+3\right)^{1-a}} = a\lim_{x\to+\infty}\frac{6x\cdot\left(1+\dfrac{5}{6x}\right)}{x^{2(1-a)}\cdot\left(1-\dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{x^2}\right)} =$$

$$= 6a\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x^2\cdot x^{-2a}} = 6a\lim_{x\to+\infty} x^{2a-1}.$$

В зависимости от возможных значений показателя степени функция x^{2a-1} ведет себя по-разному при $x\to+\infty$. Если $a<\dfrac{1}{2}$, то $x^{2a-1}\to 0.$ Тогда искомый предел равен 0. Если $2a-1=0$, то он равен $\dfrac{1}{3}$ и, наконец, если $a>\dfrac{1}{2}$, то $x^{2a-1}\to+\infty$, предел равен $+\infty$.►

3.6. Раскрытие неопределенностей методом выделения главной части

Пусть $f(x)$ и $g(x)$ – бесконечно малые при $x\to a.$ Если $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=0,$ то говорят, что $f(x)$ при $x\to a$ является *бесконечно малой величиной более высокого порядка*, чем $g(x)$, и пишут $f(x)=o(g(x))$ при $x\to a$ (читается: $f(x)$ есть o – малое от $g(x)$ при $x\to a$).

Например, при $x\to 0$ $\quad 1-\cos x = o(x);\quad \ln(1+x^3)=o(x^2),$

так как $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sin\frac{x}{2}}{x}=0$, то

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x^3)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{x^2}=0.$$

Отметим некоторые свойства символа «o», применяемые при вычислении пределов.

1. Если $f(x)=o(g(x))$ при $x\to a$, то $C\cdot f(x)=o(g(x))$ при $x\to a$ $(C\in\mathbf{R}\setminus\{0\})$.

2. Если $f_1(x)=o(g(x))(i=\overline{1,n})$, то

$C_1f_1(x)+C_2f_2(x)+\ldots+C_nf_n(x)=o(g(x))$ $(C_i\in\mathbf{R},\ i=\overline{1,n})$.

3. Если $f(x)=o(g^m(x))$ при некотором натуральном m, то $f(x)=o(g^k(x))$, при всех $k<m$.

4. Если $f(x)=o(g(x))$ при $x\to a$, то $f^k(x)=o(g^k(x))$ при $x\to a$.

5. Если $f(x)=o(g(x))$ при $x\to a$ и $g(x)\sim\varphi(x)$, то $f(x)=o(\varphi(x))$ при $x\to a$.

Если функция $y=f(x)$, не равная нулю в точке $x=a$, в некоторой окрестности этой точки представляется в виде $f(x)=P(x)+o(x-a)^n, x\to a$, где $P(x)$ – некоторый многочлен по степеням $(x-a)$, то этот многочлен $P(x)$ называют *главной частью* функции $f(x)$ в этой окрестности. В этом случае при $x\to a$ значение функции $f(x)$ с точностью до бесконечно малых величин более высокого порядка, чем $(x-a)^n$, можно заменить на значение соответствующего многочлена. Такие формулы, характеризующие поведение $f(x)$ при $x\to a$, называют *асимптотическими формулами.* Неиссякаемый источник асимптотических формул дает формула Тейлора (см. часть 2, глава 1).

Пример 1. Выделить главную часть функции

$$f(x)=\frac{2x^2-x+2}{3x^2+4x-7} \text{ при } x\to 1.$$

◄ $\lim\limits_{x\to 1}\frac{2x^2-x+2}{3x^2+4x-7}=\left[\frac{2-1+2}{3+4-7}\right]=\left[\frac{3}{0}\right]=\infty.$

Для выделения главной части разложим знаменатель дроби на множители:

$$f(x)=\frac{2x^2-x+2}{3x^2+4x-7}=\frac{2x^2-x+2}{(x-1)(3x+7)}.$$

Так как при $x\to 1$ $2x^2-x+2\to 3$ и $3x+7\to 10$, то имеем

$$f(x)=\frac{2x^2-x+2}{3x^2+4x-7}=\frac{2x^2-x+2}{(x-1)(3x+7)}\underset{x\to 1}{\sim}\frac{3}{(x-1)\cdot 10}=\frac{3}{10}\left(\frac{1}{x-1}\right),$$

и $\frac{3}{10}\cdot\left(\frac{1}{x-1}\right)$ есть главная часть функции $f(x)$.►

Пример 2. Выделить главную часть функции $f(x)=\cos x-3e^{3x}$ при $x\to 0$ и установить ее порядок относительно x.

◄ $\lim\limits_{x\to 0}\left(\cos x-3e^{3x}\right)=0.$ Сл–но, функция $f(x)$ является бесконечно малой при $x\to 0$. Воспользуемся соотношениями эквивалентностей

$$1-\cos\alpha(x)\underset{\alpha(x)\to 0}{\sim}\frac{(\alpha(x))^2}{2},\ e^{\alpha(x)}-1\underset{\alpha(x)\to 0}{\sim}\alpha(x),$$

для этого приведем $f(x)$ к виду:

$$f(x)=\cos x-e^{3x}=\cos 3x-e^{3x}+1-1=$$

$$=-(1-\cos x)-\left(e^{3x}-1\right)\underset{x\to 0}{\sim}-\frac{1}{2}x^2-3x.$$

Меньший порядок имеет слагаемое $(-3x)$, поэтому

$$f(x)=\cos x-e^{3x}\underset{x\to 0}{\sim}-\frac{1}{2}x^2-3x\underset{x\to 0}{\sim}-3x.$$

Главная часть функции $f(x)$ имеет вид $(-3x^1)$, где $k=1$ – ее порядок относительно x.▶

Замечание. Если в задаче требуется сравнить бесконечно малые или бесконечно большие функции, это значит, что следует найти порядки функций и сравнить их.

Пример 3. Сравнить функции $f_1(x)=\ln(x+1)-\ln(x+3)$ и

$$f_2(x)=\frac{\operatorname{arctg}\dfrac{1}{\sqrt{x-3}}}{\sqrt{x^5-3x^3+x^2+8}}$$ при $x\to\infty$.

◀ $f_1(x)=\ln(x+1)-\ln(x+3)=\ln\dfrac{x+1}{x+3}=\ln\left(1+\dfrac{-2}{x+3}\right)$.

Заметим, что $\dfrac{-2}{x+3}\to 0$ при $x\to\infty$ и по соотношению эквивалентностей $\ln\left(1+\dfrac{-2}{x+3}\right)\underset{x\to\infty}{\sim}\dfrac{-2}{x+3}$ при $x\to\infty$.

Тогда

$$f_1(x)=\ln\left(1+\frac{-2}{x+3}\right)\underset{x\to\infty}{\sim}\frac{-2}{x+3}\underset{x\to\infty}{\sim}\frac{-2}{x}=-2\left(\frac{1}{x}\right)^1.$$

Главная часть функции $f_1(x)$ имеет вид $-2\cdot\left(\dfrac{1}{x}\right)^1$, и ее порядок $k_1=1$.

Теперь выделим главную часть функции $f_2(x)$. Для этого заметим, что

$$\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{x-3}}\underset{x\to\infty}{\sim}\frac{1}{\sqrt{x-3}}\ \text{при}\ \frac{1}{\sqrt{x-3}}\underset{x\to\infty}{\to}0:$$

$$f_2(x)=\frac{\operatorname{arctg}\dfrac{1}{\sqrt{x-3}}}{\sqrt{x^5-3x^3+x^2+8}}\underset{x\to\infty}{\sim}\frac{\dfrac{1}{\sqrt{x-3}}}{\sqrt{x^5-3x^3+x^2+8}}\underset{x\to\infty}{\sim}\frac{\dfrac{1}{\sqrt{x}}}{\sqrt{x^5}}=$$

$$=\frac{1}{x^3}=\left(\frac{1}{x}\right)^3.$$

Главная часть функции $f_2(x)$ имеет вид $\left(\dfrac{1}{x}\right)^3$, и ее порядок $k_2=3$.

Поскольку при $x\to\infty$ функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ стремятся к нулю, то они являются бесконечно малыми, причем порядок малости функции $f_2(x)$ больше, чем порядок малости функции $f_1(x)$.►

ГЛАВА 8. НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИЙ

§ 1. Понятие непрерывности функции

***Опр.* 1.** Функцию $y = f(x)$ называют *непрерывной в точке* $x = a$, если:

1) эта функция определена в некоторой окрестности точки $x = a$ и в самой точке;

2) существует предел функции $\lim\limits_{x \to a} f(x)$, и он равен значению функции в этой точке, т.е. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Можно предложить и иное определение. Пусть аргумент x_0 получит приращение Δx и примет значение $x = x_0 + \Delta x$. В общем случае функция также получит некоторое приращение $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.

***Опр.* 2.** Функцию $f(x)$ называют *непрерывной в точке* x_0, если она определена в этой точке и некоторой окрестности ее и если бесконечно малому приращению аргумента соответствует бесконечно малое приращение функции, т.е.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0 \text{ или } \lim_{\Delta x \to 0} [f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)] = 0.$$

Теорема. *Всякая элементарная функция непрерывна в каждой точке, в которой она определена.*

Из этой теоремы следует важное для решения задач по теории пределов следствие. Запишем условие непрерывности в виде $\lim\limits_{\Delta x \to 0} f(x_0 + \Delta x) = f(x_0)$ или, что то же самое, $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. Но $x_0 = \lim\limits_{x \to x_0} x$ и, сл–но, $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(\lim\limits_{x \to x_0} x) = f(x_0)$. Для любой непрерывной функции во всех точках области определения ее символы (и соответствующие операции) предела и функции можно поменять местами: $\lim\limits_{x \to a} F(f(x)) = F(\lim\limits_{x \to a} f(x))$, то есть предел непрерывной функции равен функции предела.

Например:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln(1+x)=\lim_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}=$$

$$=\ln\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\ln e=1.$$

В ряде случаев удобно использовать следующее соотношение:

$$\lim_{x\to a} f(x)^{\varphi(x)}=\left[\lim_{x\to a} f(x)\right]^{\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)}.$$

Говорят, что если функция $f(x)$ непрерывна в каждой точке некоторого интервала (a,b), где $a<b$, то функция непрерывна на этом интервале.

§ 2. Точки разрыва функции и их классификация

***Опр.* 1.** Точка x_0, в которой функция $f(x)$ не является непрерывной, называется *точкой разрыва* этой функции.

Исходя из определения непрерывности функции в точке, точка x_0 является точкой разрыва функции $f(x)$, если не выполняется хотя бы одно из условий:

1) существует конечное $f(x_0)$;

2) существуют конечные $f(x_0+0)$ и $f(x_0-0)$;

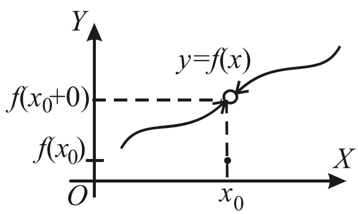
3) $f(x_0+0)=f(x_0-0)=f(x_0)$.

***Опр.* 2.** Точка x_0 называется *устранимой точкой разрыва* функции f, если существуют конечные

$$f(x_0+0) \text{ и } f(x_0-0),$$

$$f(x_0+0)=f(x_0-0),$$

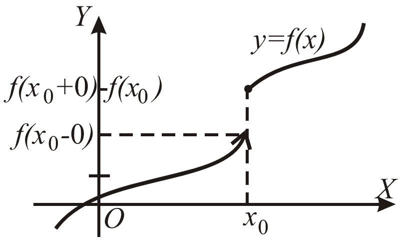
а $f(x_0)$ либо не существует, либо $f(x_0)\neq f(x_0+0)$.



Если функцию f доопределить по непрерывности, то получится непрерывная в точке x_0 функция

$$\tilde{f}(x)=\begin{cases} f(x), x \neq x_0, \\ f(x_0+0), x = x_0. \end{cases}$$

***Опр.* 3.** Точка x_0 называется *точкой разрыва первого рода* функции f, если существуют конечные $f(x_0+0)$ и $f(x_0-0)$, причем $f(x_0+0) \neq f(x_0-0)$.



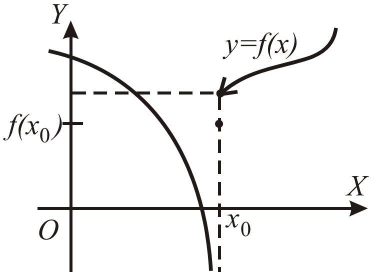
Значение функции $f(x_0)$ в данном случае может существовать или не существовать. Величина $y=|f(x_0+0)-f(x_0-0)|$ – это *скачок* функции f в точке x_0.

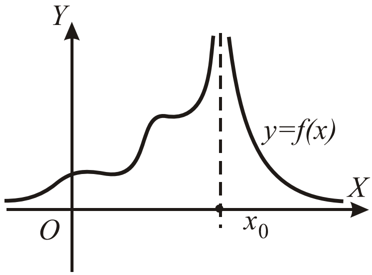
Пример 1. Показать, что при $x=3$ функция $y=\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x-3}$ имеет разрыв.

◀ Если $x \to 3-0$, то $\dfrac{1}{x-3} \to -\infty$ и $\lim\limits_{x\to 3-0} \operatorname{arctg}\dfrac{1}{x-3} = -\dfrac{\pi}{2}$. В случае, когда $x \to 3+0$, $\dfrac{1}{x-3} \to +\infty$ и $\lim\limits_{x\to 3+0} \operatorname{arctg}\dfrac{1}{x-3} = \dfrac{\pi}{2}$. Т.о., при $x \to 3$ функция имеет как левый, так и правый конечный предел, причем эти пределы различны. Сл–но, $x=3$ является точкой разрыва первого рода. Скачок функции в этой точке равен $\sigma = \dfrac{\pi}{2} - \left(-\dfrac{\pi}{2}\right) = \pi$.▶

***Опр.* 4.** Точка x_0 называется *точкой разрыва второго рода с бесконечным скачком* функции f, если существуют $f(x_0+0)$ и $f(x_0-0)$ и хотя бы один из них равен $+\infty$ или $-\infty$.

Примеры точек разрыва второго рода с бесконечным скачком приведены ниже.





$$\lim_{x\to x_0-0} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to x_0-0} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x\to x_0+0} f(x) = A \in \mathbf{R} \qquad \lim_{x\to x_0+0} f(x) = +\infty$$

Пример 2. Показать, что при $x=3$ функция $y=\dfrac{x}{x-3}$ имеет разрыв.

◀ Находим $\lim\limits_{x\to 3-0}\dfrac{x}{x-3} = -\infty$, $\lim\limits_{x\to 3+0}\dfrac{x}{x-3} = +\infty$. Т.о., функция при $x\to 3$ не имеет ни левого, ни правого конечного предела. Сл–но, $x=3$ является точкой разрыва второго рода с бесконечным скачком.▶

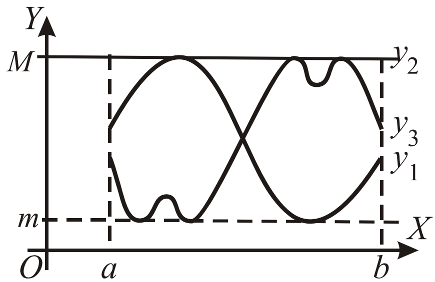
***Опр.* 5.** Точка x_0 называется *точкой разрыва второго рода*, если хотя бы один из пределов $f(x_0+0)$ или $f(x_0-0)$ не существует.

Как пример, функция Дирихле $y=\begin{cases}1, & x\in\mathbf{Q},\\ 0, & x\in\mathbf{I},\end{cases}$ является разрывной в каждой точке $x\in\mathbf{R}$, причем все точки – точки разрыва второго рода.

§ 3. Некоторые свойства непрерывных функций

1. Если функция $f(x)$ непрерывна на некотором отрезке $[a,b]$, то на этом отрезке найдется, по крайней мере, одна точка $x = x_1$ такая, что значение функции в этой точке будет удовлетворять соотношению $f(x_1) \geq f(x)$, где x – любая другая точка отрезка, и найдется, по крайней мере, одна точка x_2 такая, что значение функции в этой точке будет удовлетворять соотношению $f(x_2) \leq f(x)$.

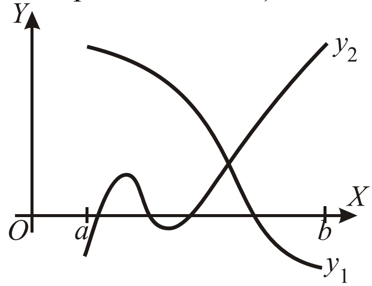
Значения $f(x_1) = M$ и $f(x_2) = m$ – наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)$ на этом отрезке. Поясним с помощью рисунка, на котором представлены графики трех непрерывных на $[a,b]$ функций y_1, y_2 и y_3.



Легко видеть, что на $[a,b]$ функция y_1 один раз достигает наибольшего M и наименьшего m значений. Функция y_2 во всех точках $[a,b]$ имеет одно и то же значение – оно одновременно и наибольшее, и наименьшее. Функция y_3 на $[a,b]$ дважды принимает наибольшее M и наименьшее m значения. Но *хоть один раз* наибольшее и наименьшее значения принимает каждая из них!

(Отметим, что на интервале (a,b) утверждение теоремы может оказаться неверным. Пример: $y = x$ – функция не имеет на интервале (a,b) наибольшего и наименьшего значений, т.к. не достигает значений a и b !)

2. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$ и принимает на концах этого отрезка значения разных знаков, то между точками a и b найдется, по крайней мере, одна точка $x=c$, в которой функция обращается в нуль (это значит, что график функции хотя бы раз пересечет ось OX в пределах этого отрезка; $x=c$ – как раз такая точка).



Графики функций y_1 и y_2 таковы, что на концах отрезка $[a,b]$ их ординаты (значения функций) различны. При этом график y_1 пересекает ось OX один раз, а график y_2 – три раза, но хоть один раз – каждый из них.

3. Если функция $f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a,b]$ и на концах этого отрезка принимает неравные значения $f(a)=A$ и $f(b)=B$, то, каково бы ни было число μ, заключенное между числами A и B, найдется такая точка $x=c$, заключенная между a и b, что $f(c)=\mu$.

Следствие. Если функция $f(x)$ непрерывна на некотором отрезке и принимает на нем наибольшее и наименьшее значения, то на этом отрезке она принимает, по крайней мере, один раз любое значение, заключенное между ее наибольшим и наименьшим значениями.

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

№	Тема	ФАИТУ	ФРТ	ФЭ
1	Комплексные числа	Карасев И.П. Теория функций комплексного переменного. Морозова В.Д. Теория функций комплексного переменного. М.: МГТУ, 2009. Краснов М.Л. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости. М.: 1971, 1981	Краснов М.Л., Киселев А.И. и др. Вся высшая математика. М.:УРСС, 2000-2001.Т.1 Краснов М.Л. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости. М.: 1971,1981	Карасев И.П. Теория функций комплексного переменного. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления. М., 1985. Т.1
2	Матрицы, определители, СЛАУ	Канатников А.Н., Крищенко А.П. Аналитическая геометрия. М.: МГТУ, 2000	Краснов М.Л., Киселев А.И. и др. Вся высшая математика. М.:УРСС, 2000-2001. Т.1	Ильин В.А., Позняк Э.Г. Линейная алгебра. 1999
3	Векторная алгебра и аналитическая геометрия	Канатников А.Н., Крищенко А.П. Аналитическая геометрия. М.: МГТУ, 2000	Краснов М.Л., Киселев А.И. и др. Вся высшая математика. М.:УРСС, 2000-2001. Т.1	Ильин В.А., Позняк Э.Г. Аналитическая геометрия. 1988

4	Введение в анализ (предел и непрерывность)	Морозова В.Д. Введение в анализ. М.: МГТУ, 1996 Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления. М., 1985. Т.1	Краснов М.Л., Киселев А.И. и др. Вся высшая математика. М.:УРСС, 2000-2001. Т. 1	Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления. М., 1985. Т.1
5	Линейные пространства и операторы	Канатников А.Н., Крищенко А.П. Линейная алгебра. М.: МГТУ, 2002	Краснов М.Л., Киселев А.И. и др. Вся высшая математика. М.:УРСС, 2000-2001. Т. 1	Ильин В.А., Позняк Э.Г. Линейная алгебра. 1999

Дополнительная литература

1. Выгодский М.Я. Справочник по ВМ. 13-е изд. М.: Физмат.лит., 1995.
2. Данко П.Е. и др. ВМ в упражнениях и задачах в 2-х частях. М.: Высш. школа, 1996.
3. Зимина О.В., Кириллов А.И., Сальникова Т.А. Высшая математика (Решебник). М., 2005.
4. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике: полный курс. М., 2006.
5. Справочное пособие по ВМ. Т.1,2 / И.И. Ляшко, А.Н. Боярчук и др. М.УРСС,1995.
6. Черненко В.Д. Высшая математика в примерах и задачах: учеб. пособие для вузов. В 3 т. СПб., 2003.

Б у х е н с к и й Кирилл Валентинович

Опорные конспекты
по высшей математике
Часть 1

Редактор М.Е. Цветкова
Корректор С.В. Макушина
Подписано в печать 21.06.10. Формат бумаги 60×84 1/16.
Бумага газетная. Печать трафаретная. Усл. печ. л. 10,5.
Тираж 100 экз. Заказ
Рязанский государственный радиотехнический университет.
390005, Рязань, ул. Гагарина, 59/1.
Редакционно-издательский центр РГРТУ.