

**X Межрегиональная студенческая физико-математическая Олимпиада,  
посвященная 115-летию со дня рождения Георгия Николаевича Шуппе  
(II тур Всероссийской студенческой олимпиады)  
Рязанский государственный радиотехнический университет им. В.Ф. Уткина  
13 марта 2021 года**

**Задача 1.** Для всех натуральных  $n$  вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} n & 1 & 2 & \dots & n-2 & n-1 \\ 1 & n & 2 & \dots & n-2 & n-1 \\ 1 & 2 & n & \dots & n-2 & n-1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n & n-1 \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \end{vmatrix}.$$

**Решение.**

Вычтем из первой строки вторую, из второй – третью, и т.д., из предпоследней – последнюю.

Получим:

$$\begin{vmatrix} n-1 & -n+1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & n-2 & -n+2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & n-3 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \end{vmatrix}.$$

Вынесем множители из всех строк, кроме

последней, получим  $(n-1)!$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \end{vmatrix}.$$

Раскрываем определитель по последнему

столбцу, получим  $(n-1)!$

$$n \cdot \left( \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix} - (-1) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n-2 & n-1 \end{vmatrix} \right) =$$

$$(n-1)! \left( n + \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n-2 & n-1 \end{vmatrix} \right). \text{ Повторяем разложение по последнему столбцу и}$$

получаем:  $(n-1)!(n + (n-1) + (n-2) + \dots + 2 + 1) = (n-1)! \frac{n(n+1)}{2} = \frac{(n+1)!}{2}.$

**Задача 2.** Два приведенных квадратных трехчлена  $f(x)$  и  $g(x)$  таковы, что каждый из них имеет по два различных действительных корня, и выполняются равенства  $f(1) = g(2)$  и  $f(2) = g(1)$ . Найти сумму всех четырех корней этих трехчленов.

**Решение.**

1 способ. Пусть  $f(x) = x^2 + ax + b$  и  $g(x) = x^2 + cx + d$ , тогда условия задачи будут записаны в виде  $1 + a + b = 4 + 2c + d$  и  $4 + 2a + b = 1 + c + d$ . Вычитая из первого равенства второе, получим  $-3 - a = 3 + c$  или  $a + c = -6$ . Но по теореме Виета сумма корней первого уравнения равна  $-a$ , сумма корней второго уравнения равна  $-c$ . Тогда сумма всех четырех корней равна  $-a - c = 6$ .

2 способ. Рассмотрим вспомогательный трехчлен  $h(x) = g(3-x)$  (также являющийся приведенным). Тогда многочлен  $h(x) - f(x)$  имеет степень не выше 1, при этом имеет 2 корня ( $x=1$  и  $x=2$ ), то есть  $h(x) - f(x) \equiv 0$ , откуда  $f(x) = g(3-x)$ . Тогда если  $x_0$  является корнем  $f(x)$ , то  $3 - x_0$  является корнем  $g(x)$ , а их сумма равна 3. Аналогично для второй пары корней, а сумма всех четырех корней равна 6.

**Задача 3.** Найти предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( n^2 \ln \frac{\operatorname{arctg}(6n) - \operatorname{arctg}(3n)}{\operatorname{arctg}(3n) - \operatorname{arctg}(2n)} \right).$

**Решение.**

При  $x \rightarrow 0$  по формуле Тейлора  $\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)$ . Поскольку при  $z > 0$  выполняется

$$\operatorname{arctg} z = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{1}{z}, \quad \text{получаем} \quad \operatorname{arctg}(kn) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \left( \frac{1}{kn} \right) = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{kn} + \frac{1}{3k^3 n^3} + o(n^{-3}).$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \operatorname{arctg}(6n) - \operatorname{arctg}(3n) &= \left( \frac{\pi}{2} - \frac{1}{6n} + \frac{1}{3 \cdot 6^3 n^3} \right) - \left( \frac{\pi}{2} - \frac{1}{3n} + \frac{1}{3 \cdot 3^3 n^3} \right) + o(n^{-3}) = \\ &= \frac{1}{6n} - \frac{1}{3n^3} \cdot \frac{7}{216} + o(n^{-3}), \end{aligned}$$

числитель:

знаменатель:

$$\begin{aligned}\operatorname{arctg}(3n) - \operatorname{arctg}(2n) &= \left( \frac{\pi}{2} - \frac{1}{3n} + \frac{1}{3 \cdot 3^3 n^3} \right) - \left( \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{3 \cdot 2^3 n^3} \right) + o(n^{-3}) = \\ &= \frac{1}{6n} - \frac{1}{3n^3} \cdot \frac{19}{216} + o(n^{-3}).\end{aligned}$$

После умножения числителя и знаменателя на  $6n$  получим:

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \left( n^2 \ln \frac{\operatorname{arctg}(6n) - \operatorname{arctg}(3n)}{\operatorname{arctg}(3n) - \operatorname{arctg}(2n)} \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( n^2 \ln \frac{1 - \frac{2}{n^2} \cdot \frac{7}{216} + o(n^{-2})}{1 - \frac{2}{n^2} \cdot \frac{19}{216} + o(n^{-2})} \right) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left[ \left( 1 - \frac{2}{n^2} \cdot \frac{7}{216} + o(n^{-2}) \right) - \left( 1 - \frac{2}{n^2} \cdot \frac{19}{216} + o(n^{-2}) \right) \right] = 2 \left( -\frac{7}{216} + \frac{19}{216} \right) = \frac{1}{9}.\end{aligned}$$

**Задача 4.** Записать в виде  $F(x, y) = 0$  уравнение:

- а) границы квадрата с вершинами в точках  $A(-1, -1)$ ,  $B(-1, 1)$ ,  $C(1, 1)$ ,  $D(1, -1)$ .  
б) части координатной плоскости, ограниченной этим квадратом.

**Решение.**

а) Сначала зададим отрезок  $AB$ . При этом  $x = -1$ , а  $-1 \leq y \leq 1$ . Отметим, что функция  $2 - |y - 1| - |y + 1|$  равна 0 только при  $-1 \leq y \leq 1$ , тогда уравнение отрезка может быть записано в виде  $(2 - |y + 1| - |y - 1|)^2 + (x + 1)^2 = 0$ . Аналогично строим уравнения отрезков  $BC$ ,  $CD$  и  $DA$ . Тогда граница может быть записана в виде уравнения

$$\begin{aligned}F(x, y) &= \left( (2 - |x + 1| - |x - 1|)^2 + (y - 1)^2 \right) \left( (2 - |x + 1| - |x - 1|)^2 + (y + 1)^2 \right) \times \\ &\times \left( (2 - |y + 1| - |y - 1|)^2 + (x - 1)^2 \right) \left( (2 - |y + 1| - |y - 1|)^2 + (x + 1)^2 \right) = 0.\end{aligned}$$

**Примечание.** Данный вариант уравнения – не единственный, граница может быть задана, например, как  $F(x, y) = |y - x| + |y + x| - 2 = 0$ .

- б) Часть плоскости, ограниченная этим квадратом, может быть задана уравнением

$$F(x, y) = \sqrt{2 - |x + 1| - |x - 1|} \cdot \sqrt{2 - |y + 1| - |y - 1|} = 0, \text{ причем область определения функции } F(x, y) \text{ } (|x| \leq 1 \text{ и } |y| \leq 1) \text{ совпадает с искомым квадратом.}$$

**Задача 5.** Используя известные разложения логарифмических функций в ряд Тейлора, найдите  $\ln 6$  с точностью до  $\varepsilon = 0,01$ .

**Решение.**

Непосредственно пользоваться разложением в ряд Маклорена

$$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \dots, \quad (1)$$

разумеется, нельзя. Тогда записывая

$$\ln(1 - x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5} - \dots \quad (2)$$

и вычитая (2) из (1), получим

$$\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} \dots\right). \quad (3)$$

При области сходимости  $x \in (0,1)$ , получаем, что  $\frac{1+x}{1-x} \in (0, +\infty)$ , т.е. по (3) можно вычислить натуральный логарифм для любого неотрицательного числа.

Далее  $\frac{1+x}{1-x} = 3$ , откуда  $x = \frac{1}{2}$ . Подставляя в (3), получим

$$\begin{aligned} \ln 3 &= 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{24} + \frac{1}{160} + \frac{1}{896} + \dots\right) = 1 + \frac{1}{12} + \frac{1}{80} + \frac{1}{448} + \dots =, \\ &= 1 + 0.083 + 0.013 + 0.002 + \dots \approx 1.098. \end{aligned}$$

При  $\frac{1+x}{1-x} = 2$ ,  $x = \frac{1}{3}$ , аналогично

$$\ln 2 = 2\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{81} + \frac{1}{1215} + \dots\right) \approx 0.693$$

Тогда  $\ln 6 = \ln 3 + \ln 2 \approx 1.791$

**Задача 6.** Разложить в ряд Маклорена функцию  $f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$

**Решение.**

Так как  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) = 0$ , то  $f(x)$  непрерывна в окрестности точки  $x_0 = 0$ .

Далее, по определению

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-1/x^2}}{x} = 0,$$

далее получаем, что и  $f^{(n)}(0) = 0$  для всех  $n \in \mathbb{N}$ . То есть получаем абсурдный результат:

$$f(x) \equiv 0 \text{ для любого } x \in \mathbb{R} !$$

Данная функция не может быть представлена в ряд Маклорена. Действительные функции одного или нескольких переменных могут быть не аналитическими, даже если они бесконечно дифференцируемы, т.е. их ряды Тейлора могут сходиться, но не к данной функции.

**Задача 7.** Найти решение уравнения  $2y'' + (y')^2 = y^2$ ,  $y(0) = y'(0) = 1$ .

**Решение.**

Пусть  $y' = p(y)$ , тогда  $y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \frac{dy}{dx} = pp'$ . Уравнение примет вид  $2pp' + p^2 = y^2$ .

Уравнение является уравнением Бернулли. Решение однородного уравнения  $2p' + p = 0$  имеет вид  $v = e^{-y/2}$ . Ищем решение уравнения Бернулли в виде  $p = uv$ .

$$2pp' + p^2 = 2(u'v + v'u)uv + u^2v^2 = 2u'uv^2 = (u^2)'e^{-y} = y^2.$$

$$u^2 = \int y^2 e^y dy = e^y (y^2 - 2y + 2) + C_1.$$

Получаем  $p = uv = \sqrt{y^2 - 2y + 2 + C_1 e^{-y}}$ . При  $y = 0$  получаем  $p = 1$ , откуда  $C_1 = 0$ .

Тогда  $\frac{dy}{dx} = \sqrt{y^2 - 2y + 2}$ ,  $\frac{dy}{\sqrt{y^2 - 2y + 2}} = dx$ ,  $\text{Arsh}(y - 1) = x + C_2$ . Из условия  $y(0) = 1$

получаем  $y = \text{sh } x + 1$ .

**Задача 8.** Найти объем тела  $G = \{|x| + |y| + |z| + \max(|x|, |y|, |z|) \leq 1\}$ .

**Решение.**

Поскольку  $G$  симметрично относительно всех координатных плоскостей, его объем в 8 раз больше объема тела  $H = G \cap \{x, y, z \geq 0\}$ . Далее,  $H$  симметрично относительно плоскости  $x = y$  и поворотов на  $120^\circ$  вокруг прямой  $x = y = z$ , т.е. объем  $H$  в 6 раз больше объема тела  $T = H \cap \{x \geq y \geq z\} = G \cap \{x \geq y \geq z \geq 0\} = \{2x + y + z \leq 1, x \geq y \geq z \geq 0\}$ . Тело  $T$  – тетраэдр с вершинами в точках  $O(0, 0, 0)$ ,  $A(\frac{1}{2}, 0, 0)$ ,  $B(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0)$ ,  $C(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ .

$$V(T) = \frac{1}{6} |\mathbf{OA} \cdot \mathbf{OB} \cdot \mathbf{OC}| = \frac{1}{6} \cdot \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{vmatrix} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{24}.$$



Тогда  $V(G) = 8 \cdot 6 \cdot V(T) = \frac{1}{3}$ .

**Задача 9.** Дожливым осенним вечером на заседание Лондонского Клуба Джентльменов пришло  $n$  человек. Разумеется, каждый джентльмен взял с собой зонтик и отдал его на входе

швейцару. Через несколько часов, после многих выпитых чашек чая и обсуждения всех вопросов, джентльмены стали расходиться по домам, и каждый джентльмен брал у швейцара зонтик случайным образом. Какова вероятность того, что никто из джентльменов не взял тот зонтик, с которым он пришел? Рассмотреть случаи  $n = 4$ ,  $n = 50$ ,  $n \rightarrow \infty$ .

**Решение.**

Пусть  $P(A)$  - искомая вероятность.

По известной формуле «включения – исключения» найдем вероятность того, что хотя бы один человек ушел со своим зонтиком:

$$P(\bar{A}) = P(A_1 + A_2 + \dots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n) - P(A_1 A_2) - \dots - P(A_{n-1} A_n) + P(A_1 A_2 A_3) + \dots + P(A_{n-2} A_{n-1} A_n) - \dots + (-1)^{n+1} P(A_1 A_2 \dots A_n).$$

Тогда

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \left[ \frac{C_n^1 (n-1)!}{n!} - \frac{C_n^2 (n-2)!}{n!} + \frac{C_n^3 (n-3)!}{n!} - \dots + \frac{(-1)^{n+1} C_n^n}{n!} \right]$$

Таким образом,

$$P(A) = 1 - \left[ 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{n!} \right].$$

При небольших значениях  $n$  можно вычислять непосредственно, при  $n = 4$

$$P(A) = \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} = \frac{9}{24}.$$

При больших  $n$ , очевидно, что

$$P(A) = 1 - \left[ 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{n!} + \dots \right] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n!} = \frac{1}{e}.$$

**Замечание.**

К правильному ответу можно было прийти путем неправильных рассуждений. Пусть разбор зонтиков – независимые (что вообще говоря неверно) события. Тогда легко можно получить формулу

$$P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{1}{n} \right)^n = \frac{1}{e}.$$

Такие выводы, очевидно, применимы лишь к большому числу  $n$ .

**Задача 10.** Пусть действие оператора  $\hat{A}$  на некоторую функцию  $\psi(x)$  задается уравнением

$$\hat{A}\psi = \frac{d\psi}{dx} + x\psi, \text{ т.е. } \hat{A} = \frac{d}{dx} + x. \text{ Найти вид оператора } \hat{A}^2.$$

**Решение.**

Применяя двукратно оператор к произвольной функции  $\psi(x)$ , получим

$$\hat{A}^2\psi = \hat{A}(\hat{A}\psi) = \left( \frac{d}{dx} + x \right) \left( \frac{d\psi}{dx} + x\psi \right) = \frac{d^2\psi}{dx^2} + 2x \frac{d\psi}{dx} + x^2\psi + \psi,$$

и, следовательно,

$$\hat{A}^2 = \frac{d^2}{dx^2} + 2x \frac{d}{dx} + x^2 + 1.$$

**Задача 11.** Основной причиной понижения температуры с высотой в атмосфере является адиабатическое расширение восходящих потоков воздуха. Используя уравнение адиабаты  $pV^\gamma = \text{const}$ , где  $\gamma = 1,4$ , найти изменение температуры с высотой. Универсальная газовая постоянная  $R = 8,31 \text{ Дж} \cdot \text{град}^{-1} \cdot \text{моль}^{-1}$ , молекулярный вес воздуха  $M = 29 \text{ г} \cdot \text{моль}^{-1}$ .

**Решение.**

Изменение давления с высотой:

$$dp = -\rho g dh = -\frac{gM}{R} \cdot \frac{p}{T} dh \quad (1)$$

где  $\rho = \frac{pM}{RT}$  - плотность воздуха. Так как процесс адиабатический, то  $p^{1-\gamma} T^\gamma = \text{const}$ , то дифференцируя и разделяя переменные, получим:

$$\frac{dp}{p} = \left( \frac{\gamma}{\gamma-1} \right) \frac{dT}{T} \quad (2)$$

Из (1) и (2) следует, что

$$\frac{dT}{dh} = - \left( \frac{\gamma-1}{\gamma} \right) \frac{gM}{R} \approx -10 \frac{\text{град}}{\text{км}}.$$