ФОРМУЛЫ ПРИВЕДЕНИЯ

Формулы приведения позволяют вычислять значения тригонометрических функций $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$ произвольного аргумента через значения тригонометрических функций острого угла. Рассмотрим это утверждение подробно для функций $\sin x$ и $\cos x$.

Если аргумент x больше 2π, то разделив x на 2π, получим $x = 2\pi n + t$, где $t \in [0;2\pi)$ и $n \in N$. Далее, используя периодичность функций $\sin x$, $\cos x$, получаем

$$\sin x = \sin\,(2\pi n + t) = \sin t;\quad \cos x = \cos\,(2\pi n + t) = \cos t.$$

Если $0 < t < \frac{\pi}{2}$, то утверждение доказано. Пусть $t > \frac{\pi}{2}$. Покажем, что и в этом случае вычисление $\sin t$ и $\cos t$ можно свести к значениям данных функций для угла $\alpha \in \left(0;\frac{\pi}{2}\right)$, при этом значения t, равные π и $\frac{3}{2}\pi$ не рассматриваем. Действительно, любой угол $\frac{\pi}{2} < t < 2\pi$ можно представить в зависимости от величины t в виде $\frac{\pi}{2} + \alpha$, $\pi \pm \alpha$, $\frac{3}{2}\pi \pm \alpha$, $2\pi - \alpha$, где $\alpha \in \left(0;\frac{\pi}{2}\right)$.

Значения синусов и косинусов таких углов вычисляются по формулам суммы и разности аргументов.

Покажем, что имеют место формулы

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos\alpha, \qquad \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin\alpha,$$

$$\sin(\pi + \alpha) = -\sin\alpha, \qquad \cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha,$$

$$\sin\left(\frac{3}{2}\pi + \alpha\right) = -\cos\alpha, \qquad \cos\left(\frac{3}{2}\pi + \alpha\right) = \sin\alpha,$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha, \qquad \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha,$$

$$\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha, \qquad \cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha,$$

$$\sin\left(\frac{3}{2}\pi - \alpha\right) = -\cos\alpha, \qquad \cos\left(\frac{3}{2}\pi - \alpha\right) = -\sin\alpha,$$

$$\sin(2\pi - \alpha) = -\sin\alpha, \qquad \cos(2\pi - \alpha) = \cos\alpha.$$

Данные формулы называются формулами приведения для синуса и косинуса.

Докажем некоторые из них.

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\sin\frac{\pi}{2}\cos\alpha+\cos\frac{\pi}{2}\sin\alpha=\cos\alpha+0=\cos\alpha,$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\frac{\pi}{2}\cos\alpha-\sin\frac{\pi}{2}\sin\alpha=0-\sin\alpha=-\sin\alpha,$$

$$\sin(\pi+\alpha)=\sin\pi\cos\alpha+\cos\pi\sin\alpha=0-\sin\alpha=-\sin\alpha,$$

и т.д.

Аналогичные рассуждения можно провести для тангенса и котангенса. Если аргумент x больше π, то , используя их периодичность, можем записать:

$$\operatorname{tg} x=\operatorname{tg}(\pi n+t)=\operatorname{tg} t,$$

$$\operatorname{ctg} x=\operatorname{ctg}(\pi n+t)=\operatorname{ctg} t, \text{ где } \quad t\in[0;\pi).$$

Для перехода к аргументу $\alpha\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ воспользуемся формулами приведения для синуса и косинуса:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}=\frac{\cos\alpha}{-\sin\alpha}=-\operatorname{ctg}\alpha.$$

Аналогично доказываются следующие формулы приведения для тангенса и котангенса:

$$\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\operatorname{tg}\alpha,\qquad \operatorname{tg}(\pi-\alpha)=-\operatorname{tg}\alpha,\quad \operatorname{ctg}(\pi-\alpha)=-\operatorname{ctg}\alpha.$$

Для запоминания формул приведения удобно использовать следующее правило.

1) При переходе через углы $\frac{\pi}{2}$ и $\frac{3}{2}\pi$ наименование тригонометрической функции меняется на кофункцию ($\sin$ на $\cos$, $\cos$ на $\sin$, tg на ctg, ctg на tg). При переходе через углы π и 2π наименование функции сохраняется.

2) Знак перед приведенной функцией определяется знаком приводимой функции, в зависимости от четверти, к которой принадлежит ее аргумент.

Например, $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\alpha$. Наименование функции меняем на кофункцию, так как аргумент содержит слагаемое $\frac{\pi}{2}$. Знак перед приведенной функцией «+», поскольку $\frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{2} + \alpha < \pi$, а во второй четверти $\sin x > 0$. Другие примеры:

$$\cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha; \quad \mathrm{tg}\left(\frac{3}{2}\pi - \alpha\right) = \mathrm{ctg}\ \alpha; \quad \sin\left(\frac{3}{2}\pi - \alpha\right) = -\cos \alpha.$$

Литература

1. Математика: Пособие для поступающих в РГРТА /А.И. Новиков, И.П. Карасев, А.В. Лоскутов, Л.В. Артемкина, А.И. Сюсюкалов; Рязан. гос. радиотехн. акад. Рязань, 2003. 164 с. ISBN 5-7722-0156-5.