ФУНКЦИИ АРКТАНГЕНС И АРККОТАНГЕНС

На интервале $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ *функция* $y = \mathrm{tg}x$ *непрерывна и строго возрастает, принимая все значения от* $-\infty$ *до* $+\infty$ $\left(E(y) = R\right)$, *откуда, с учетом теоремы 3.2, следует, что существует обратная к* $y = \mathrm{tg}x$, $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, *функция* $f^{-1}(x)$, *определенная на всей числовой прямой, непрерывная и строго возрастающая. Обозначают ее* $\mathrm{arctg}x$ *(арктангенс), т.е.* ***арктангенсом числа*** $x \in R$ ***называется такой угол*** α***, принадлежащий интервалу*** $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$***, тангенс которого равен*** x*:*

$$\boxed{\mathrm{tg}(\mathrm{arctg}x) = x, \quad x \in R} \tag{3.7}$$

$$\boxed{\mathrm{arctg}(\mathrm{tg}\alpha) = \alpha, \quad \alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)} \tag{3.8}$$

Выражение $\mathrm{arctg}(\mathrm{tg}\alpha)$ *определено для всех* $\alpha \in R$, $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in Z$, *но тождество (3.8) верно только для* $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

Свойства функции $y = \mathrm{arctg}x$

1. Область определения: $D(y) = R$.

2. Область значений: $E(y) = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ ***(*** $-\frac{\pi}{2} < \mathrm{arctg}x < \frac{\pi}{2}$ *для всех* $x \in R$ ***)***.

3. Четность и нечетность: *нечетная функция*

$$\boxed{\mathrm{arctg}(-x) = -\mathrm{arctg}x} \qquad (3.9)$$

для всех $x \in R$.

4. Периодичность: *непериодическая.*

5. Интервалы монотонности: *строго возрастает на всей числовой прямой.*

6. Экстремальные значения: *локальных и глобальных экстремумов нет.*

7. График *функции* $y = \mathrm{arctg}x$, $x \in R$ *приведен на рис. 3.14 и на рис. 3.15 вместе с «прямой» функцией* $y = \mathrm{tg}x$, $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

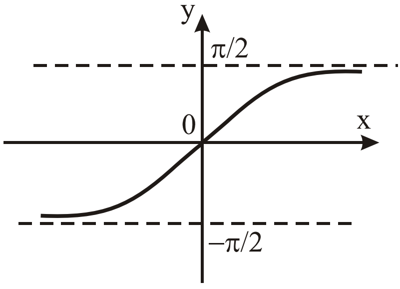

Рис. 3.14.
График функции y=arctgx

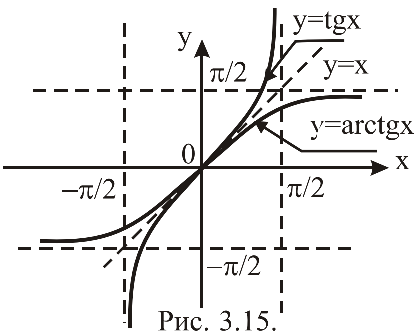

Рис. 3.15.
Графики функций
y=tgx и y=arctgx

Функция $y = \operatorname{ctg} x$ *на интервале* $(0; \pi)$ *непрерывна и строго убывает, принимая значения от* $-\infty$ *до* $+\infty$ $(E(y) = R)$*, откуда, с учетом теоремы 3.2, следует, что существует обратная к* $y = \operatorname{ctg} x, \quad x \in (0; \pi)$*, функция* $f^{-1}(x), x \in R,$ *непрерывная и монотонно убывающая. Обозначают ее* $\operatorname{arcctg}x$ *(арккотангенс), т.е.* ***арккотангенсом числа*** $x \in R$ ***называется такой угол*** α***, принадлежащий интервалу*** $(0; \pi)$***, котангенс которого равен*** x***:***

$$\boxed{\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg}x) = x, \quad x \in R} \tag{3.10}$$

$$\boxed{\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg}\alpha) = \alpha, \quad \alpha \in (0; \pi)} \tag{3.11}$$

Выражение $\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg}\alpha)$ *определено для всех* $\alpha \in R$*,* $\alpha \neq \pi n$*,* $n \in Z$ *но тождество (3.11) справедливо только для* $\alpha \in (0;\pi)$.

Свойства функции $y = \operatorname{arcctg}x$

1. Область определения: $D(y) = R$.

2. Область значений: $E(y) = (0; \pi)$ *(*$0 < \operatorname{arcctg}x < \pi$ *для всех* $x \in R$*).*

3. Четность и нечетность: *ни четная, ни нечетная.*

Для всех $x \in R$ *справедливо тождество*

$$\boxed{\operatorname{arcctg}(-x) = \pi - \operatorname{arcctg}x}$$

4. Периодичность: *непериодическая.*

5. ***Интервалы монотонности:*** *строго убывает на всей числовой прямой.*

6. ***Экстремальные значения:*** *локальных и глобальных экстремумов нет.*

7. ***График*** *функции* $y = \text{arctgx},\ x \in R$*, приведен на рис. 3.16 и на рис. 3.17 вместе с функцией* $y = \text{ctgx},\ x \in (0; \pi)$.

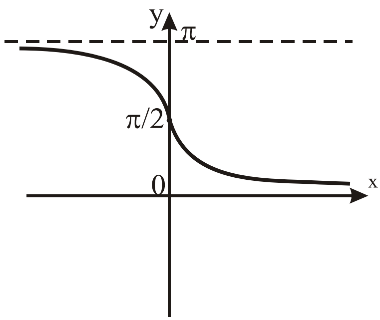

Рис. 3.16.
График функции y=arcctgx

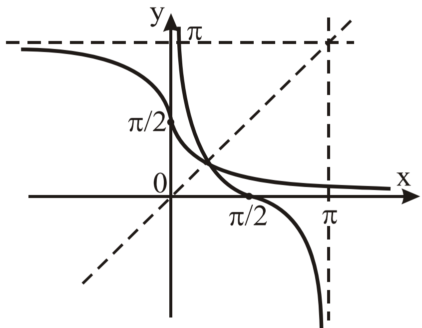

Рис. 3.17.
Графики функций
y=ctgx и y=arcctgx

Литература

1. Тригонометрические функции, уравнения и неравенства: Пособие для поступающих /А.И.Новиков; Рязан. гос. радиотехн. ун-т. Рязань, 2007. 288 с. ISBN 5-7722-0248-0.