ОПРЕДЕЛЕНИЕ, СВОЙСТВА И ГРАФИКИ ФУНКЦИЙ

$y = \sin x, \quad y = A \sin(\omega x + \varphi)$

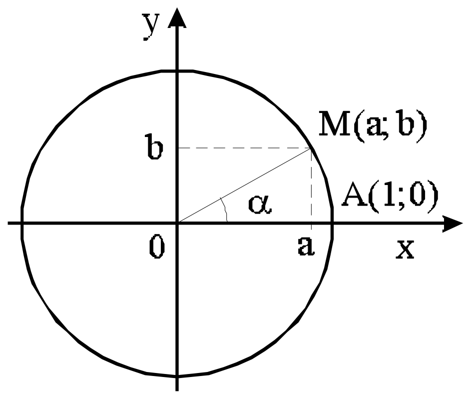

Рис. 11.1

На координатной плоскости OXY построим окружность единичного радиуса с центром в точке O (рис. 11.1). Радиус OA, где точка A имеет координаты (1; 0), будет называться начальным радиусом. Для любого действительного числа α можно провести радиус OM этой окружности, образующий с осью OX угол, радианная мера которого равна α. Угол α отсчитывается от начального радиуса OA (на рис. 11.1 угол α - положительный, так как отсчет угла происходит от OA против хода стрелки часов).

Определение. Синусом угла α называется число, равное ординате конца единичного радиуса, соответствующего углу α, и обозначается $\sin\alpha$. Таким образом, по определению $\sin\alpha = b$ (см. рис. 11.1). Так как каждому углу α соответствует на единичной окружности единственная точка M с ординатой y, то соответствие $y = \sin\alpha$ является функцией. В дальнейшем будем писать $y = \sin x$.

Рассмотрим свойства функции $y = \sin x$.

1) Областью определения функции является множество действительных чисел $D(y) = R$. Свойство следует из определения функции.

2) Область значений $E(y) = [-1;1]$, так как ордината точки M, являющаяся концом радиуса OM, может принимать значения на отрезке $[-1;1]$.

3) Периодичность. Функция является периодической с наименьшим положительным периодом 2π. Действительно, трем углам x, $x + 2\pi$, $x - 2\pi$ на единичной окружности соответствует одна и та же точка M, следовательно, $\sin(x + 2\pi) = \sin x$, $\sin(x - 2\pi) = \sin x$, $x \in R$, т.е. 2π - период функции $y = \sin x$.

Докажем, что число 2π является наименьшим положительным периодом функции. Пусть $T \neq 0$ - наименьший положительный период, тогда $\sin(x + T) = \sin x$ для любого $x \in R$. Положив $x = \frac{\pi}{2}$, получим $\sin\left(\frac{\pi}{2} + T\right) = 1$.

Отсюда $\frac{\pi}{2} + T = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in Z$; $T = 2\pi k$. Так как $T > 0$, то T принимает значения 2π, 4π, …. Следовательно, период не может быть меньше 2π. Свойство доказано.

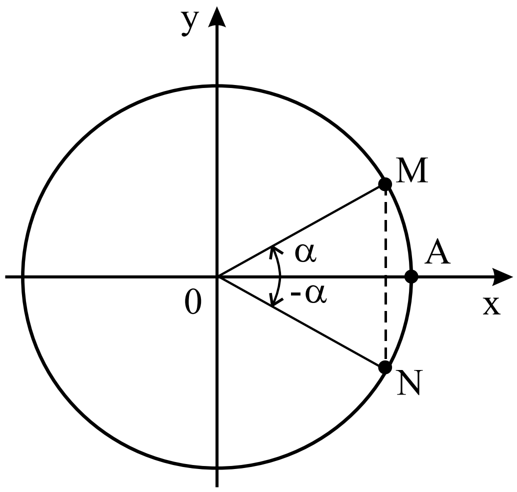

Рис. 11.2

4) <u>Четность и нечетность</u>. Функция $y = \sin x$ является нечетной.

Пусть двум действительным числам α и -α соответствуют на единичной окружности точки M и N (рис. 11.2). Ординаты точек M и N равны по абсолютной величине, но отличаются знаками. Поэтому $\sin(-\alpha) = \sin\alpha$. Следовательно, $\sin x$ - функция нечетная.

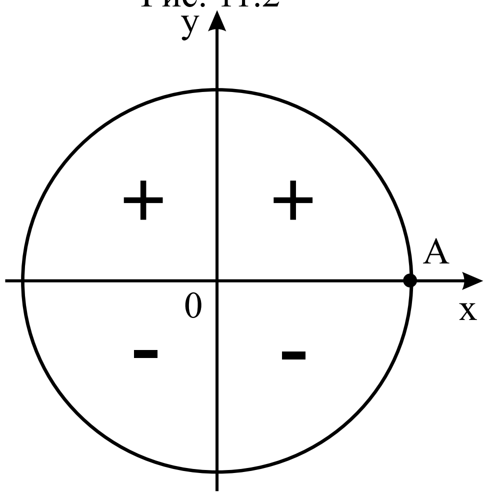

Рис. 11.3

5) <u>Знаки функции</u>. Непосредственно из определения функции $y = \sin x$ следует , что она положительна в I и II четвертях, т.е. при $x \in (0;\pi)$ и отрицательна в III и IV четвертях, т.е. при $x \in (\pi;2\pi)$ (см. рис. 11.3). Очевидно, что $\sin 0 = 0$, $\sin\frac{\pi}{2} = 1$, $\sin\pi = 0$, $\sin\frac{3}{2}\pi = -1$, $\sin 2\pi = 0$.Таким образом, $\sin x > 0$ при $x \in (2\pi k;\pi + 2\pi k)$, $k \in Z$; $\sin x < 0$ при $x \in (\pi + 2\pi k;2\pi + 2\pi k)$, $k \in Z$, так как для любого x значение $\sin(x + 2\pi k) = \sin x$. Ось OX функция $\sin x$ пересекает в точках $x = \pi n$, $n \in Z$, поскольку $\sin\pi n = 0$.

6) <u>Точки экстремума</u>. Наибольшее значение, равное 1, достигается в точках $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in Z$; наименьшее значение, равное -1, достигается в точках $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in Z$.

7) <u>Промежутки возрастания и убывания</u>. Функция $y = \sin x$ возрастает при $x \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ и убывает при $x \in \left[\frac{\pi}{2};\frac{3}{2}\pi\right]$. Докажем первую часть этого утверждения. Пусть α_1, α_2 - два произвольных угла в I четверти, причем $\alpha_1 < \alpha_2$ (рис.11.4) . Углам α_1 и α_2 соответствуют точки M_1 и M_2 единичной окружности с ординатами

$$y_1 = \sin\alpha_1 \text{ и } y_2 = \sin\alpha_2.$$

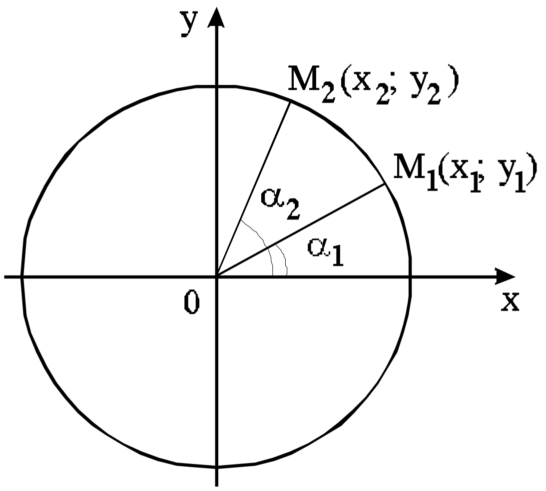

Рис. 11.4

Очевидно, $y_2 > y_1$, если $\alpha_2 > \alpha_1$, т.е. в первой четверти функция $\sin x$ возрастает. Если $\alpha_1 \in \left[-\frac{\pi}{2};0\right)$, а $\alpha_2 \in \left(0;\frac{\pi}{2}\right]$, то $\sin\alpha_1 < 0$, а $\sin\alpha_2 > 0$ и $\sin\alpha_2 > \sin\alpha_1$.

Аналогично рассматриваются другие четверти окружности.

С учетом периодичности функции $\sin x$ окончательно получаем , что $y = \sin x$

а) возрастает при $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right]$, $n \in Z$;

б) убывает при $x \in \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{3}{2}\pi + 2\pi n\right]$, $n \in Z$.

8) <u>График</u> функции $y = \sin x$ приведен на рис. 11.5. Для построения графика $y = \sin x$ сначала строим часть графика на отрезке $[0;2\pi]$ длиной 2π. При построении графика учитываем, что $\sin 0 = 0$, $\sin\frac{\pi}{2} = 1$, $\sin\frac{3}{2}\pi = -1$, $\sin 2\pi = 0$, $\sin x > 0$ при $x \in (0;\pi)$, $\sin x < 0$, при $x \in (\pi;2\pi)$. Так как $y = \sin x$ является периодической функцией с периодом 2π, то ее график на промежутках $[2\pi n;2\pi(n+1)]$, $n \in Z$, получается из ее графика, построенного на отрезке $[0;2\pi]$, параллельным переносом вдоль оси OX на расстояние $2\pi n$, $n \in Z$. График функции $y = \sin x$ называется синусоидой.

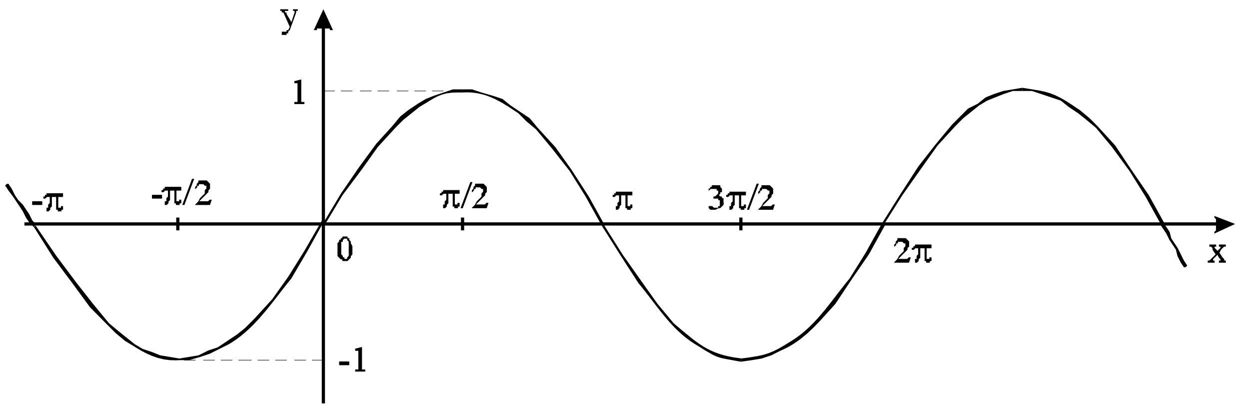

Рис. 11.5

Функция $y = A\sin(\omega x + \varphi)$, где A, ω, φ - заданные действительные числа, описывает так называемые гармонические колебания. Числа A, ω, φ имеют наглядный физический смысл: A – амплитуда колебания, ω - его частота, φ -

начальная фаза. Если $\omega = 0$, то $y = A\sin\varphi = \text{const}$, поэтому будем считать, что $\omega \neq 0$.

Обозначим $u = \omega x + \varphi$, тогда $y = A\sin u$. Если x пробегает множество значений $(-\infty;\infty)$, то u пробегает это же множество значений. Поэтому графиком функции $y = A\sin u$, а значит и функции $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ будет синусоида.

Найдем наименьший положительный период функции $y = A\sin(\omega x + \varphi)$. Пусть $\omega > 0$ и пусть $T > 0$ - период функции $y = A\sin(\omega x + \varphi)$. Тогда для любого $x \in R$ должно выполняться равенство

$$A\sin(\omega(x + T) + \varphi) = A\sin(\omega x + \varphi)$$

Это равенство выполняется тогда и только тогда, когда

$$\omega(x + T) + \varphi = \omega x + \varphi + 2\pi k, \quad k \in Z,$$

откуда $\omega T = 2\pi k$ и $T = \dfrac{2\pi}{\omega}k$, $k \in Z$.

Так как $T > 0$, то период может принимать значения $\dfrac{2\pi}{\omega}, \dfrac{4\pi}{\omega}, \ldots$.

Отсюда следует, что наименьший положительный период равен $\dfrac{2\pi}{\omega}$.

График функции $A\sin(\omega x + \varphi)$ можно построить исходя из графика функции $y = \sin x$ и используя три типа преобразований графиков – параллельный перенос, растяжение (сжатие) и симметрию. Для этого строим последовательно графики функций

1. $y = \sin x$;
2. $y = \sin \omega x$. Данный график получается из графика $y = \sin x$ его сжатием вдоль оси OX в $|\omega|$ раз, если $|\omega| > 1$ и растяжением его в $\dfrac{1}{|\omega|}$ раз, если $0 < |\omega| < 1$.
3. $y = \sin(\omega x + \varphi) = \sin \omega\left(x + \dfrac{\varphi}{\omega}\right)$. График функции получается параллельным переносом графика функции $y = \sin \omega x$ на $-\dfrac{\varphi}{\omega}$ вдоль оси OX.
4. $y = A\sin(\omega x + \varphi)$.

Если $A > 1$, то происходит растяжение графика $y = \sin(\omega x + \varphi)$ в

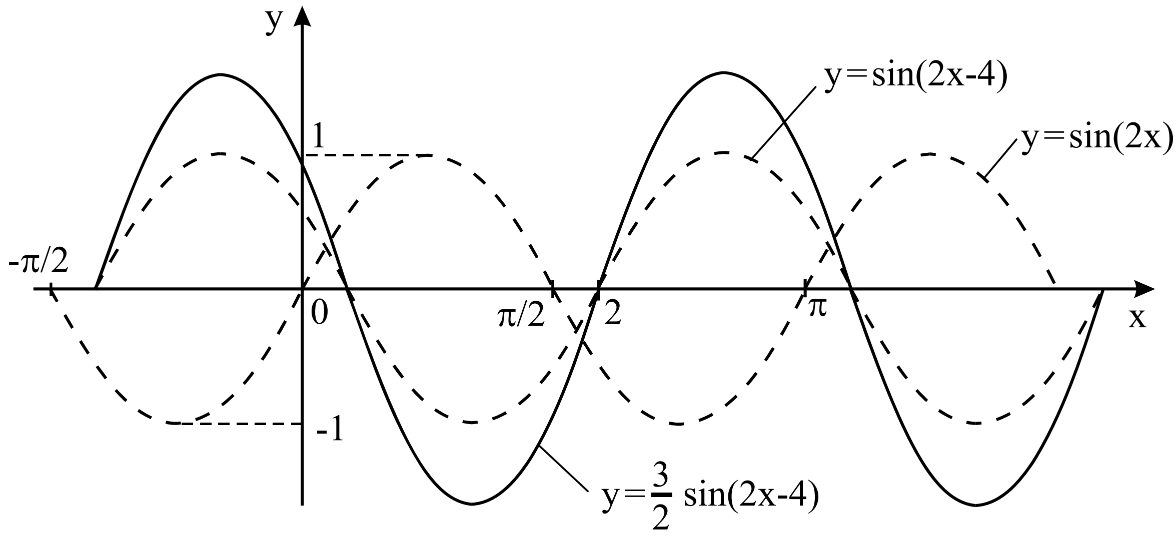

Рис. 11.6

А раз

вдоль оси OY; если $0 < A < 1$, то происходит сжатие графика $y = \sin(\omega x + \varphi)$ в $\frac{1}{A}$ раз вдоль оси OY.

Если $A < 0$ и $|A| > 1$, то происходит растяжение графика $y = \sin(\omega x + \varphi)$ в $|A|$ раз вдоль оси OY и его отражение относительно оси OX; если $A < 0$ и $0 < |A| < 1$, то происходит сжатие графика $y = \sin(\omega x + \varphi)$ в $\frac{1}{|A|}$ раз и его отражения относительно оси OX. Построение графика функции $y = \frac{3}{2}\sin(2x - 4)$ изображено на рис. 11.6.

Литература

1. Математика: Пособие для поступающих в РГРТА /А.И. Новиков, И.П. Карасев, А.В. Лоскутов, Л.В. Артемкина, А.И. Сюсюкалов; Рязан. гос. радиотехн. акад. Рязань, 2003. 164 с. ISBN 5-7722-0156-5.