СВОЙСТВА ПОКАЗАТЕЛЬНОЙ ФУНКЦИИ И ЕЕ ГРАФИК

Определение. Показательной функцией называется функция вида $y = a^x$, где $a > 0$, $a \neq 1$ - заданное положительное число.

При $a = 1$ функция $y = 1^x$ принимает значение 1 при всех $x \in \mathrm{R}$. Поэтому в определении показательной функции $a \neq 1$.

Число a называется основанием показательной функции.
Рассмотрим свойства показательной функции.

1) Область определения. $D(f) = \mathrm{R}$, так как a^x имеет смысл при любом значении x.

2) Область значений. $E(f) = \mathrm{R}_+$, так как $a^x > 0$ для любого $x \in \mathrm{R}$.

3) Интервалы монотонности. Функция $y = a^x$ является монотонно возрастающей на всей области определения, если $a > 1$ и монотонно убывающей на $D(f)$, если $0 < a < 1$.

Докажем эти утверждения. Пусть $a > 1$ и $x_1 < x_2$. Покажем, что $a^{x_1} < a^{x_2}$. Имеем

$$y(x_2) - y(x_1) = a^{x_2} - a^{x_1} = a^{x_1}\left(a^{x_2 - x_1} - 1\right) = a^{x_1}\left(a^{x_2 - x_1} - a^0\right).$$

По свойству степеней числа $a^{x_1} > 0$ и $a^{x_2 - x_1} - a^0 > 0$ при $x_2 - x_1 > 0$. Таким образом, при $a > 1$ и любых x_1, x_2 таких, что $x_1 < x_2$ выполняется неравенство $a^{x_1} < a^{x_2}$.

Пусть $0 < a < 1$ и x_1, x_2- произвольные действительные числа, причем $x_1 < x_2$. Покажем, что $a^{x_1} > a^{x_2}$. Так как, $0 < a < 1$, то $\frac{1}{a} > 1$ и потому в соответствии с доказанным выше

$$\left(\frac{1}{a}\right)^{x_2} > \left(\frac{1}{a}\right)^{x_1} \Leftrightarrow \frac{1}{a^{x_2}} > \frac{1}{a^{x_1}}.$$

Поскольку $a^{x_1} > 0$ и $a^{x_2} > 0$, то, умножив обе части неравенства $\frac{1}{a^{x_2}} > \frac{1}{a^{x_1}}$ на $\left(a^{x_1} \cdot a^{x_2}\right)$, получим неравенство $a^{x_1} > a^{x_2}$. +

4) <u>Точки пересечения с координатными осями</u>. График показательной функции не пересекает ось OX, поскольку $a^x > 0$ при всех $x \in \mathbb{R}$; ось OY график функции пересекает в единственной точке (0;1). Действительно, $y(0) = a^0 = 1$. Других точек нет, так как функция a^x в соответствии с п.3) является монотонной на $D(f)$.

5) <u>Четность и нечетность</u>. Показательная функция не является ни четной, ни нечетной. Четной она не может быть в силу монотонности функции на $D(f)$. Нечетной эта функция не является из-за того, что область значений функции несимметрична относительно нуля.

6) <u>Периодичность</u>. Показательная функция непериодическая. Это следует из ее монотонности на $D(f)$.

7) <u>Поведение функции на бесконечности</u>. Если $a > 0$, то

1. при $x \to -\infty$ функция неограниченно приближается к оси OX (но не пересекает ее); $a^x \to 0$;

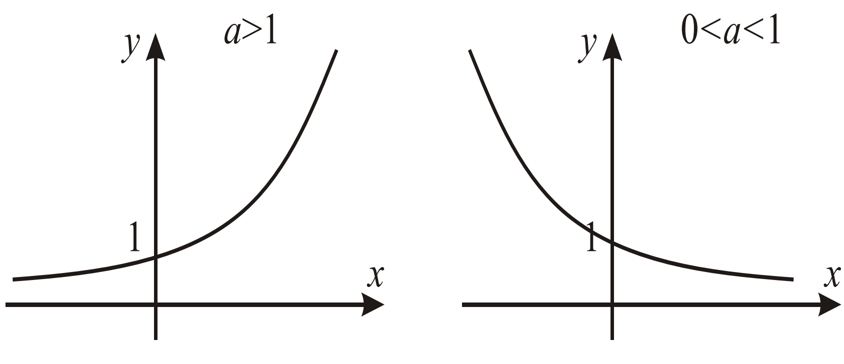
2. при $x \to +\infty$ функция $a^x \to +\infty$.

Если $0 < a < 1$, то

3. при $x \to -\infty$ $a^x \to +\infty$;

4. при $x \to +\infty$ $a^x \to 0$.

8) <u>График</u>. График показательной функции при $a > 1$ и при $0 < a < 1$ - приведен ниже



Литература

1. Математика: Пособие для поступающих в РГРТА /А.И. Новиков, И.П. Карасев, А.В. Лоскутов, Л.В. Артемкина, А.И. Сюсюкалов; Рязан. гос. радиотехн. акад. Рязань, 2003. 164 с. ISBN 5-7722-0156-5.