

ОБРАТНЫЕ ФУНКЦИИ

Задачи, в которых участвуют обратные функции, встречаются в самых различных разделах математики и в ее приложениях.

Важную область математики составляют обратные задачи в теории интегральных и интегро-дифференциальных уравнений. Разработка теории и, в частности, методов решения некорректных обратных задач во второй половине 20-го столетия позволила решать прикладные задачи в самых различных областях, например, в геофизике – обнаружение полезных ископаемых; в микроэлектронике, радиолокации – восстановление «размытых» изображений и т.д.

Напомним определение числовой функции и некоторые связанные с ней понятия.

Определение 3.1.

Пусть X – некоторое числовое множество ($X \subset \mathbb{R}$) и пусть указано правило f , в соответствии с которым каждому числу $x \in X$ отвечает единственный элемент (число) $y = f(x)$ из числового множества Y . В этом случае гово-

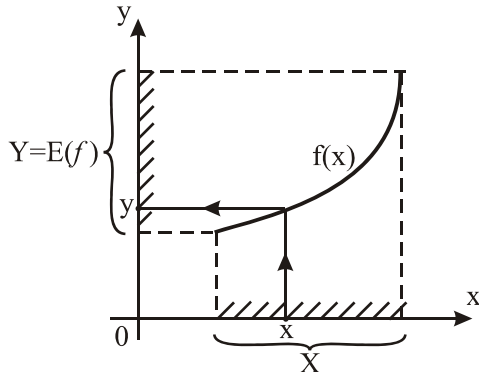


Рис. 3.1

рят, что на множестве X задана числовая функция (далее просто функция) $y = f(x)$, $x \in X$, со значениями в множестве Y . Множество X , на котором определена функция f , называется областью определения этой функции и обозначается также $D(f)$. Если множество Y содержит только образы $f(x)$ элементов $x \in X$, т.е.

$$Y = \{y | y = f(x), x \in X\},$$

то оно (множество Y) называется областью значений функции f и обозначается также $E(f)$ (рис. 3.1). Чтобы подчеркнуть, что множество Y состоит только из образов $f(x)$ элементов $x \in X$, пишут $Y = f(X)$.

Например, если $f(x) = 3x - 2$, $x \in [1; 3]$, то $f([1; 3]) = [1; 7]$.

Часто возникают задачи, в которых по заданному значению y_0 из области $E(f) = f(X)$ функции $y = f(x)$, $x \in X$, требуется найти соответствующее значение переменной x , т.е. требуется решить уравнение $f(x) = y_0$, $y_0 \in E(f)$.

Например, функция $y = 2x + 6$, $x \in [1; 4]$, отображает отрезок $X = [1; 4]$ на отрезок $Y = [8; 14]$. Тогда для любого $y_0 \in Y$ уравнение $2x + 6 = y_0$ имеет единственное решение $x = \frac{y_0}{2} - 3$. При этом функция $x \equiv g(y) = \frac{y}{2} - 3$, $y \in [8; 14]$, отображает отрезок Y на отрезок X , т.е. осуществляет обратное отображение.

Не всякое уравнение $f(x) = y_0$, $y_0 \in E(f)$ имеет единственное решение. Например, уравнение $|x| = y_0$, $y_0 \in [c; d]$, $0 < c < d$, имеет два решения $x_1 = -y_0$ и $x_2 = y_0$. Уравнение $\cos x = y$, $y \in [-1; 1]$ имеет бесконечное множество решений $x = \pm \arccos y + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Особый интерес представляют функции $y = f(x)$, $x \in X$, для которых уравнение $f(x) = y_0$, $y_0 \in Y = f(X)$, имеет единственное решение. Такие функции называются обратимыми.

Определение 3.2. Пусть $Y = f(X)$. Если каждому элементу $y_0 \in Y$ отвечает единственный элемент $x_0 \in X$ такой, что $f(x_0) = y_0$, то функция $y = f(x)$, $x \in X$, называется обратимой.

Заметим, что говоря об обратимости функции f , необходимо указывать множество X , на котором рассматривается эта функция. Например, функция $y = kx + b$, $k \neq 0$, обратима на любом промежутке $X \subset \mathbb{R}$ и, в частности, на всей числовой прямой. Однако функция $y = x^2$, заданная на всей числовой прямой, не обратима (каждому значению $y_0 > 0$ отвечают два значения $x \in \mathbb{R}$: $x_1 = -\sqrt{y_0}$ и $x_2 = \sqrt{y_0}$).

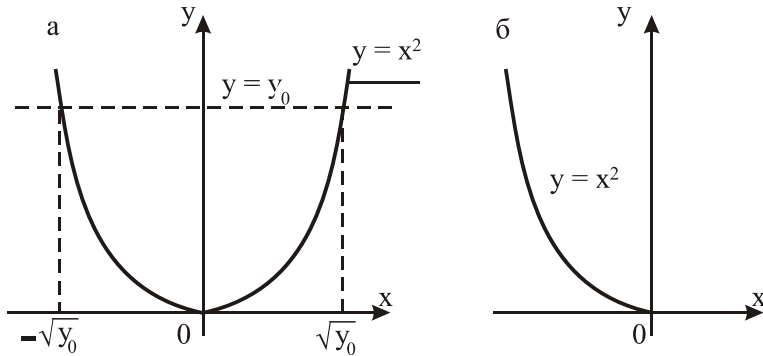


Рис. 3.2

На рис.3.2 обозначено:

- а) $y = x^2$, $x \in \mathbb{R}$, - необратимая функция,
 б) $y = x^2$, $x \in (-\infty; 0]$, - обратная к ней, $x = -\sqrt{y}$, $y \in [0; +\infty)$.

Функция $y = x^2$, заданная на множестве $X_1 = (-\infty, 0]$ или на множестве $X_2 = [0, +\infty)$, а также на любом непустом их подмножестве обратима.

Можно указать простой критерий проверки функции на обратимость: если любая прямая, параллельная оси Ox и проходящая через точку y множества $Y = f(X)$ значений функции, пересекает график этой функции ровно в одной точке, то функция $y = f(x)$, $x \in X$, обратима. Отметим, что четная функция не обратима.

Определение 3.3. Функция $x = g(y)$, определенная на множестве $Y = f(X)$ значений обратимой функции $y = f(x)$, $x \in X$, и отображающая каждый элемент (число) $y_0 \in Y$ в такой элемент $x_0 \in X$, что $f(x_0) = y_0$, называется обратной к функции $y = f(x)$, $x \in X$.

Таким образом, если $y = f(x)$, $x \in X$, отображает элемент x_0 множества X в некоторый элемент y_0 множества Y , то обратная функция $x = g(y)$, $y \in Y$, отображает этот элемент $y_0 \in Y$ в элемент $x_0 \in X$, образом которого он является. Иначе, если $y_0 = f(x_0)$, то $g(y_0) = x_0$ (рис. 3.3) или

$$f(g(y_0)) = y_0 \quad \text{и} \quad g(f(x_0)) = x_0.$$

В этом смысле функции

$$y = f(x), \quad x \in X \quad \text{и} \quad x = g(y), \quad y \in Y,$$

являются взаимно обратными (рис. 3.3). Графики взаимно обратных функций $y = f(x)$, $x \in X$, и $x = g(y)$, $y \in Y$, совпадают. Обратную функцию $g(y)$ обозначают также $f^{-1}(y)$. Такое обозначение представляется более удобным.

Справедливы следующие теоремы.

Теорема 3.1. Если функция f строго возрастает (убывает) на множестве X и $Y = f(X)$ - множество ее значений, то на множестве Y определена однозначная строго возрастающая (убывающая) обратная функция f^{-1} .

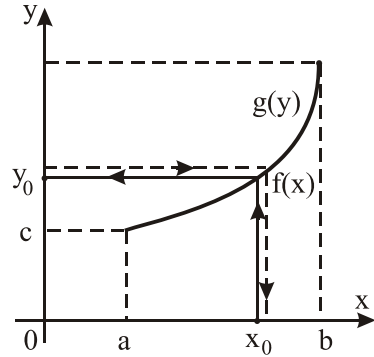


Рис. 3.3

Теорема 3.2. Если функция f определена, строго возрастает (убывает) и непрерывна на промежутке $X \subset \mathbb{R}$ (конечном или бесконечном), тогда на промежутке $Y = f(X)$ определена однозначная, строго возрастающая (убывающая) и непрерывная функция f^{-1} .

Как уже отмечалось выше, для нахождения обратной функции $x = f^{-1}(y)$, $y \in Y$ для заданной функции $y = f(x)$, $x \in X$, необходимо решить относительно переменн- ной x уравнение $f(x) = y$, $y \in Y = f(X)$.

Пример 3.1. Найдите обратную функцию для заданной

$$y = 2x + 2, \quad x \in [1; 3].$$

Решение. Заданная функция является строго возрастающей и непрерывной на отрезке $[1; 3]$. В соответствии с теоремой 3.2 на отрезке $[4; 8]$, являющемся образом отрезка $[1; 3]$, определена обратная функция, которая также будет непрерывной и строго возрастающей.

Решив уравнение $2x + 2 = y$, получим аналитическое выражение для обратной функции $f^{-1}(y)$: $x = \frac{1}{2}y - 1$, $y \in [4; 8]$. Обратная функция отображает отрезок $[4; 8]$ на отрезок $[1; 3]$, т.е. $f^{-1}([4; 8]) = [1; 3]$.

Ответ: $x = \frac{1}{2}y - 1$, $y \in [4; 8]$.

Обратную функцию $x = f^{-1}(y)$, $y \in Y$, часто записывают в другой, более привычной форме: $y = f^{-1}(x)$, $x \in Y$. Эта форма отличается от первой ($x = f^{-1}(y)$) заменой переменных x на y и y на x . Отметим, что закон f^{-1} обратного отображения при этом, естественно, сохраняется. Замена переменных (x на y и y на x) приводит к тому, что точка

$M_0(x_0, y_0)$ графика функции $x = f^{-1}(y)$, $y \in Y$ (или графика функции $y = f(x)$, $x \in X$) отображается в точку $M_1(y_0, x_0)$ графика обратной функции $y = f^{-1}(x)$, $x \in Y$, симметричную точке M_0 относительно прямой $y = x$ (пример 3.2, рис. 3.4).

Замена одной формы записи обратной функции на другую равносильна выполнению преобразования $y = x$, при котором отображаются симметрично относительно прямой $y = x$:

- а) множество Y с оси OY на ось OX ;
- б) множество X с оси OX на ось OY ;
- в) график обратной функции $x = f^{-1}(y)$, $y \in Y$.

Именно в этой второй форме $y = f^{-1}(x)$, $x \in Y$, мы и будем далее рассматривать обратные функции.

Заметим, что если $D(f)$ - область определения (задания) функции f , $E(f)$ - область ее значений, то обратная функция $y = f^{-1}(x)$ будет определена на множестве $E(f)$, а ее значения образуют множество $D(f)$, т.е. $D(f^{-1}) = E(f)$; $E(f^{-1}) = D(f)$ (в смысле равенства числовых множеств).

Пример 3.2. Найдите обратную функцию f^{-1} для заданной $y = 2x + 2$; $x \in [1; 3]$.

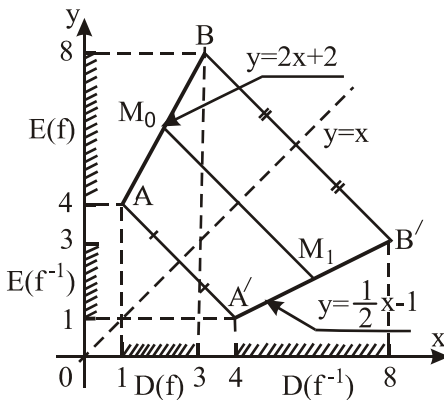


Рис. 3.4

Здесь

$$D(f) = [1; 3], \quad E(f) = [4; 8]$$

и потому $D(f^{-1}) = [4; 8]$.

Решение. Используя результаты предыдущего примера и сделанное замечание, получаем, что обратной будет функция

$$y = \frac{1}{2}x - 1, \quad x \in [4; 8].$$

На рис. 3.4 изображены графики заданной функции

$$y = 2x + 2; \quad x \in [1; 3],$$

и обратной

$$y = \frac{1}{2}x - 1, \quad x \in [4; 8].$$

В данном случае

$$D(f^{-1}) = E(f) = [4; 8];$$

$$E(f^{-1}) = D(f) = [1; 3].$$

Ответ: $y = \frac{1}{2}x - 1, \quad x \in [4; 8].$

Пример 3.3. Найдите обратную функцию f^{-1} для заданной:

$$y = \begin{cases} \frac{1}{2}x + 1, & -2 < x < 0; \\ x^2 + 2, & 0 \leq x < 2; \\ \frac{1}{2}x + 5, & 2 \leq x \leq 5. \end{cases} \quad (3.1)$$

Решение. Функции $y_1(x) = \frac{1}{2}x + 1$ и $y_3(x) = \frac{1}{2}x + 5$ являются монотонно возрастающими на заданных промежутках – интервале $(-2; 0)$ и отрезке $[2; 5]$ соответственно – как линейные функции с угловым коэффициентом $k > 0$ $\left(k = \frac{1}{2}\right)$.

Функция $y_2(x) = x^2 + 2$ также монотонно возрастает на полуинтервале $[0; 2)$.

Поскольку $y_1(0)=1 \neq y_2(0)=2$, то функция $y(x)$ терпит в точке $x=0$ разрыв. В точке $x=2$ она непрерывна, поскольку $y_1(0)=1 \neq y_2(0)=2$.

Таким образом, функция $y(x)$ является монотонно возрастающей на всей области определения (почему?), но не является непрерывной. В соответствии с теоремой 3.1 существует обратная функция f^{-1} с областью определения $D(f^{-1}) = (y_1(-2); y_1(0)) \cup [y_2(0); y_3(5)]$, которая также будет монотонно возрастающей. Вычислив указанные значения, получим, что $D(f^{-1}) = E(f) = (0; 1) \cup [2; 7,5]$.

Найдем обратную функцию:

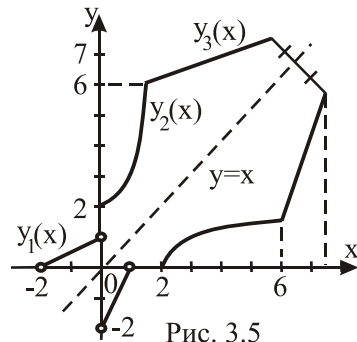
$$\frac{1}{2}x + 1 = y \Rightarrow x = 2y - 2, y \in (0; 1);$$

$$x^2 + 2 = y \Rightarrow x = \sqrt{y - 2}, y \in [2; 6];$$

$$\frac{1}{2}x + 5 = y \Rightarrow x = 2y - 10, y \in [6; 7,5].$$

Обратной к функции $y(x)$ (3.1) является функция (рис. 3.5):

$$y(x) = \begin{cases} 2x - 2, & 0 < x < 1; \\ \sqrt{x - 2}, & 2 \leq x < 6; \\ 2x - 10, & 6 \leq x \leq 7,5. \end{cases}$$



Ответ: $y(x) = \begin{cases} 2x - 2, & 0 < x < 1; \\ \sqrt{x - 2}, & 2 \leq x < 6; \\ 2x - 10, & 6 \leq x \leq 7,5. \end{cases}$

Пример 3.4. Найдите обратную функцию f^{-1} к заданной
 $y = x^3, x \in \mathbb{R}$.

Решение. Функция $y = x^3$ определена на всей числовой оси, строго возрастает и непрерывна на области определения. В соответствии с теоремой 3.2 существует обратная функция

$$x = \sqrt[3]{y}, y \in \mathbb{R}$$

($y = \sqrt[3]{x}, x \in \mathbb{R}$), которая также будет строго возрастающей и непрерывной на всей числовой прямой. На рис. 3.6 изображены графики функции $y = x^3$ и $y = \sqrt[3]{x}$.

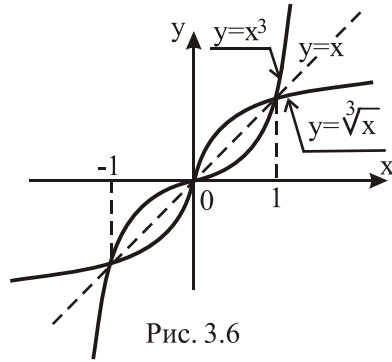


Рис. 3.6

Ответ: $y = \sqrt[3]{x}, x \in \mathbb{R}$.

Отметим, что в точках $x = -1$, $x = 0$ и $x = 1$ имеют место равенства $x^3 = \sqrt[3]{x} = x$, т.е. числа $-1; 0; 1$ являются решениями уравнения $x^3 = \sqrt[3]{x}$. При этом уравнение $x^3 = \sqrt[3]{x}$ равносильно каждому из уравнений $x^3 = x$ и $\sqrt[3]{x} = x$. Это замечание позволяет сформулировать следующее.

Теорема 3.3. Если в уравнении $f(x) = g(x)$ функции $f(x)$ и $g(x)$ являются взаимно обратными и возрастающими на области X определения уравнения, то уравнение равносильно на X каждому из уравнений $f(x) = x$; $g(x) = x$.

Пример 3.5. Решите уравнение

$$x^3 + 6 = 7 \sqrt[3]{7x - 6}.$$

Решение. Функции $f(x) = \frac{x^3 + 6}{7}$ и $g(x) = \sqrt[3]{7x - 6}$ определены, непрерывны и строго возрастают на всей числовой прямой; при этом $E(f) = E(g) = \mathbb{R}$. Поэтому каждая из этих функ-

ций имеет обратную. Решив уравнение $\frac{x^3+6}{7}=y$, получим $x=\sqrt[3]{7y-6}$ или $y=\sqrt[3]{7x-6}$ после замены y на x . Отсюда следует, что $f^{-1}(x)=g(x)$, т.е. функции f и g являются взаимно обратными.

В соответствии с теоремой 3.3 исходное уравнение равносильно следующему

$$\frac{x^3+6}{7}=x \Leftrightarrow x^3-7x+6=0.$$

Решив это уравнение, получим

$$\begin{aligned} (x^3-x)-6(x-1)=0 &\Leftrightarrow (x-1)(x^2+x-6)=0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x-1=0, \\ x^2+x-6=0, \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x=1, \\ x=2, \\ x=-3. \end{cases} \end{aligned}$$

Ответ: $x=1$, $x=2$, $x=-3$.

Подчеркнем важность всех условий в теореме 3.3. Во-первых, если функции f и g в уравнении $f(x)=g(x)$ являются взаимно обратными и *строго убывающими* на области определения уравнения, то это уравнение уже не равносильно уравнениям $f(x)=x$ и $g(x)=x$. Хотя одну общую точку графики функций $f(x)$, $g(x)$ и $y=x$ могут иметь и в этом случае.

Например, уравнение

$$1-x^3=\sqrt[3]{1-x}$$

определено на всей числовой прямой, функции $f(x)=1-x^3$ и $g(x)=\sqrt[3]{1-x}$ являются взаимно обратными и *строго убывающими* на области определения уравнения. Поэтому нельзя утверждать, что исходное уравнение равносильно, например, уравнению

$$1-x^3=x.$$

Это уравнение имеет единственный корень

$$x_1 = \sqrt[3]{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{31}{108}}} + \sqrt[3]{\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{31}{108}}},$$

который является одновременно корнем исходного уравнения.

Однако исходное уравнение имеет еще четыре корня: $x_2 = 0$, $x_3 = 1$ и два корня x_4 и x_5 являются решениями уравнения

$$x^4 + x^3 - 2x - 1 = 0.$$

Действительно, обозначив $\sqrt[3]{1-x} = t$ или $x = 1 - t^3$, получим равносильную исходному уравнению систему

$$\begin{cases} 1 - x = t^3 \\ 1 - t = x^3 \end{cases}$$

После вычитания из одного уравнения другого получим

$$x - t = x^3 - t^3 \Leftrightarrow \begin{cases} x - t = 0 \\ x^2 + xt + t^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

Первое уравнение совокупности приводит, с учетом введенного обозначения ($t = 1 - x^3$) к уравнению $x^3 + x - 1 = 0$, которое имеет единственный корень x_1 .

Второе уравнение в совокупности при $t = 1 - x^3$ принимает следующий вид

$$x(x^5 - x^3 - 2x^2 + x + 1) = 0$$

Отсюда заключаем, что: $x_2 = 0$ и $x_3 = 1$ являются корнями данного и исходного уравнения. После деления многочлена $x^5 - x^3 - 2x^2 + x + 1$ на двучлен $x - 1$ получим уравнение

$$x^4 + x^3 - 2x - 1 = 0.$$

Исследование показывает, что это уравнение, а значит и исходное уравнение имеет еще два корня x_4 и x_5 .

Второе замечание к теореме 3.3 касается области X допустимых значений уравнения $f(x) = g(x)$ и множества X_1 , на котором функции f и g являются взаимно обратными. Если

$X_1 = X$ и функции f и g являются строго возрастающими, то “работает” теорема 3.3. Если же X_1 является собственным подмножеством множества X , то уравнение $f(x) = g(x)$ равносильно каждому из уравнений $f(x) = x$ и $g(x) = x$ только на множестве X_1 . Рассмотрим следующий пример.

Пример 3.6. Решите уравнение

$$(x-1)^2 = 1 + \sqrt{x}.$$

Решение. Уравнение определено на полуинтервале $X = [0; +\infty)$. На промежутке $X_1 = [1; +\infty)$ ($X_1 \subset X$) функции $f(x) = (x-1)^2$ и $g(x) = 1 + \sqrt{x}$ являются взаимно обратными и строго возрастающими. Поэтому в соответствии с замечанием к теореме 3.3 исходное уравнение равносильно уравнению

$$(x-1)^2 = x \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 3x + 1 = 0$$

только на множестве $X_1 = [1; +\infty)$. На этом промежутке последнее уравнение имеет единственный корень $x = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$.

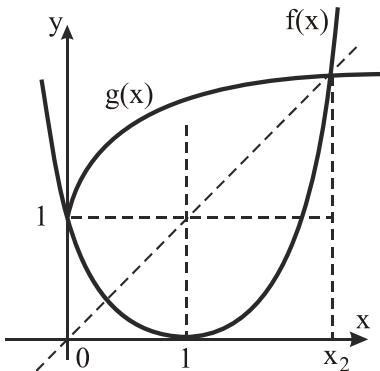


Рис. 3.7

На полуинтервале $[0; 1)$ функция $f(x) = (x-1)^2$ является убывающей, а функция $g(x) = 1 + \sqrt{x}$ — возрастающей и при этом $E(f) \cap E(g) = [1; \infty)$. Поэтому, если исходное уравнение имеет на промежутке $[0; 1)$ решение, то оно единственное. Нетрудно видеть, что $x = 0$ является его решением (рис. 3.7).

Ответ: $x_1 = 0$; $x_2 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$.

Пример 3.7. Найдите обратную функцию f^{-1} для заданной

$$y = \frac{1}{x^2 + 1}, \quad x \in (-\infty, 0].$$

Решение. Выясним, является ли заданная функция обратимой на указанном множестве. Найдем

$$y'(x) = \left((x^2 + 1)^{-1} \right)' = \frac{-2x}{x^2 + 1}. \text{ Поскольку } y'(x) \geq 0 \text{ на } (-\infty, 0],$$

то функция $y = \frac{1}{x^2 + 1}$ **строго** возрастает (почему?) на этом промежутке и является непрерывной функцией на нем. Множество значений $E(y) = (0, 1]$. Действительно, $\frac{1}{x^2 + 1} \rightarrow 0$ при

$x \rightarrow -\infty$; $y(0) = 1$. Поэтому с учетом непрерывности и монотонного возрастания функции $y(x)$ заключаем, что $E(y) = (0; 1]$.

Тогда в соответствии с теоремой 3.2 существует обратная функция $f^{-1}(x)$, которая определена, непрерывна и строго возрастает на полуинтервале $(0; 1]$, а множество принимаемых ею значений составляет бесконечный промежуток $E(f^{-1}) = (-\infty; 0]$. Отметим, что на всей числовой

прямой функция $y = \frac{1}{x^2 + 1}$ не обратима (почему?).

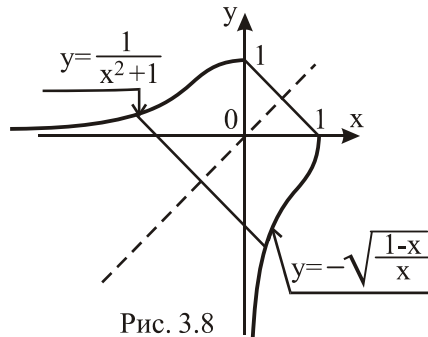


Рис. 3.8

Решив уравнение $\frac{1}{x^2 + 1} = y$, получим $x = \pm \sqrt{\frac{1-y}{y}}$. Из двух ветвей обратной функции выбираем $x = -\sqrt{\frac{1-y}{y}}$, поскольку $x(y) < 0$ ($x(y) \in (-\infty; 0]$). На рис. 3.8 приведены графики заданной $y = \frac{1}{x^2 + 1}$, $x \in (-\infty, 0]$ и обратной $y = -\sqrt{\frac{1-x}{x}}$, $x \in (0, 1]$, функций.

Ответ: $y = -\sqrt{\frac{1-x}{x}}$, $x \in (0; 1]$.

Пример 3.8. Решите уравнение

$$2f^{-1}(6\cos^2 x + 7\sin x) = \sin x + 5,$$

если известно, что $f(3x + 2) = 6x + 5$.

Решение. Для решения данного примера необходимо:

- а) построить отображение $f(x)$;
- б) найти обратную функцию $f^{-1}(x)$;
- в) составить и решить искомое уравнение.

Отображение $f(x)$ нужно получить из условия $f(3x + 2) = 6x + 5$. Это можно сделать с помощью явной замены переменной:

$$\begin{aligned} t = 3x + 2, \quad x = \frac{1}{3}(t - 2) &\Rightarrow \\ \Rightarrow f(t) = 6\frac{t-2}{3} + 5 &\Leftrightarrow f(x) = 2x + 1. \end{aligned}$$

Другой способ – неявная замена переменной:

$$f(3x + 2) = 6x + 5 \Leftrightarrow f(3x + 2) = 3(3x + 2) + 1$$

или $f(t) = 2t + 1$, где $t = 3x + 2$.

Для нахождения обратной функции $f^{-1}(x)$ к $f(x) = 2x + 1$ решим уравнение $y = 2x + 1$ относительно переменной x . По-

лучим
$$x = \frac{y-1}{2} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x-1}{2}.$$

Составим и решим уравнение, которое следует из условия примера:

$$2\frac{1}{2}(6\cos^2 x + 7\sin x - 1) = \sin x + 5 \quad \Leftrightarrow$$

$$\sin^2 x - \sin x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \pi n, n \in \mathbb{Z}; \quad x = \frac{\pi}{2}k, k \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $x = \pi n, n \in \mathbb{Z}; \quad x = \frac{\pi}{2}k, k \in \mathbb{Z}.$

Пример 3.9. Решите неравенство $g(x) \geq f(x)$, где $g(x)$ – функция, обратная к

$$f(x) = \frac{x+2}{x+1}.$$

Решение. Функция $f(x) = \frac{(x+1)+1}{x+1} = 1 + \frac{1}{x+1}$ определена на множестве

$$D(f) = (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$$

непрерывна и монотонно убывает на каждом из бесконечных промежутков $(-\infty, -1)$ и $(-1, +\infty)$ (но не на $D(f)$). Поэтому обратная функция существует (теорема 3.1).

Решив уравнение $\frac{x+2}{x+1} = y$, получим $x = \frac{2-y}{y-1}$, откуда

$$g(x) = \frac{2-x}{x-1}$$

или

$$g(x) = -1 + \frac{1}{x-1}.$$

Эта функция определена на множестве

$$D(g) = E(f) = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty),$$

непрерывна и монотонно убывает

на каждом из бесконечных промежутков $(-\infty, 1)$ и $(1, +\infty)$.

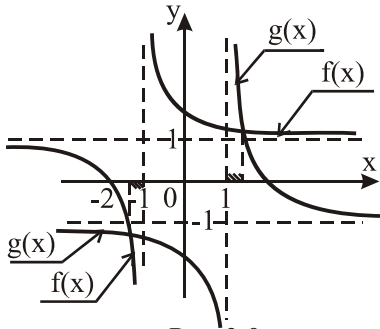
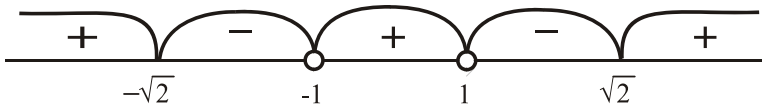


Рис. 3.9

Решим неравенство $g(x) \geq f(x)$:

$$\frac{2-x}{x-1} \geq \frac{x+2}{x+1} \Leftrightarrow \frac{-2(x^2-2)}{(x-1)(x+1)} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})}{(x+1)(x-1)} \leq 0.$$

Решив последнее неравенство методом интервалов,



получим, что $x \in [-\sqrt{2}; -1) \cup (1, \sqrt{2}]$.

На рис. 3.9 приведена геометрическая иллюстрация данного примера.

Ответ: $1 < |x| \leq \sqrt{2}$.

Обратные тригонометрические функции

Функции $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$ являются периодическими и потому каждое значение y из своей области значений

($y \in [-1; 1]$ для $\sin x$ и $\cos x$; $y \in \mathbb{R}$ - для $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$) они принимают бесконечное число раз. Каждая из названных функций имеет бесконечное число периодически повторяющихся промежутков монотонности. Для построения обратной функции необходимо выбрать один из них. Удобно выбирать ближайший к точке $x = 0$ промежуток монотонности тригонометрической функции. Для $\sin x$ - это отрезок $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$;
 для $\cos x$ - отрезок $[0; \pi]$; для $\operatorname{tg} x$ - интервал $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$; для $\operatorname{ctg} x$ - интервал $(0; \pi)$.

Литература

1. Тригонометрические функции, уравнения и неравенства: Пособие для поступающих /А.И.Новиков; Рязан. гос. радиотехн. ун-т. Рязань, 2007. 288 с. ISBN 5-7722-0248-0.