

ПОНЯТИЕ ФУНКЦИИ. ГРАФИК ФУНКЦИИ. СПОСОБЫ ЗАДАНИЯ ФУНКЦИИ

Понятие функции – одно из основных математических понятий, оно относится к установлению соответствия между элементами двух множеств.

Опр. 1. Если задано правило f , по которому каждому элементу x из множества X поставлен в соответствие единственный элемент y из множества Y , то говорят, что на множестве X задана функция $y = f(x)$, $x \in X$, $y \in Y$.

Множество X называется *областью определения функции* (ООФ) и обозначается $D(f)$. Множество изменения функции Y называется *областью значений функции* (ОЗФ) и обозначается $E(f)$.

В дальнейшем будем рассматривать числовые функции, т.е. функции, у которых ООФ и ОЗФ являются числовыми множествами $X \subset \mathbf{R}$, $Y \subset \mathbf{R}$. В этом случае переменная величина x называется *независимой переменной* или *аргументом*, величина y – *зависимой переменной* или *функцией* (от x). Число y , соответствующее данному значению x , называется *частным значением функции* в точке x .

Опр. 2. Множество точек $(x, f(x))$ плоскости XOY называется *графиком функции* $y = f(x)$.

Функция может быть задана:

- 1) *аналитически* (с помощью формул);
- 2) *графически*;
- 3) *с помощью таблицы*.

При аналитическом задании функция может быть определена:

1) *явно* – уравнением вида $y = f(x)$ или

$$y = \begin{cases} f_1(x), x \in D_1 \subset D(f), \\ f_2(x), x \in D_2 \subset D(f); \end{cases}$$

2) *неявно* – уравнением вида $F(x, y) = 0$;

3) *параметрически* – с помощью вспомогательной переменной – параметра – $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} t \in T \subset \mathbf{R}$.

Примеры

1. Явное задание:

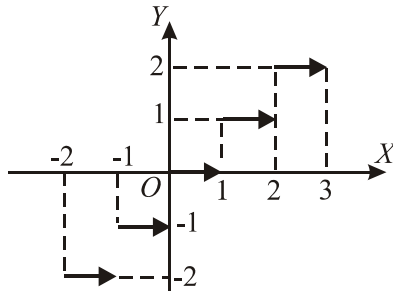
$$\begin{aligned} 1) \quad & y = \sqrt{x}, \\ & D(f) = \{x\} = \{x \mid 0 \leq x < +\infty\}, \\ & E(f) = \{y\} = \{y \mid 0 \leq y < +\infty\}; \end{aligned}$$

2) функция Дирихле

$$y = \begin{cases} 0, x - \text{иррациональное}, \\ 1, x - \text{рациональное}; \end{cases}$$

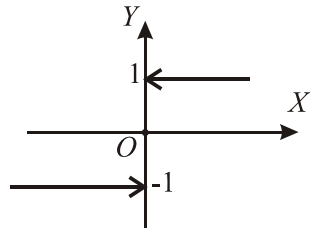
3) $y = [x]$ – целая часть x (наибольшее целое, не превосходящее x),

$$\begin{aligned} D(f) &= \{x\} = \{x \in \mathbf{R}\}, \\ E(f) &= \{y\} = \{y \in \mathbf{Z}\}; \end{aligned}$$



4) $y = \operatorname{sign} x$ определяет знак x ,

$$\operatorname{sign} x = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$



2. Неявное задание:

1) $e^{xy} + \sin x - y = 0$. Нельзя в явном виде выразить y через x ;

2) уравнение $F(x, y) = 0$ может определять не одну, а несколько функций вида $y = f(x)$. Так, уравнение $x^2 + y^2 - 1 = 0$ определяет две функции:

$$y = f_1(x) = +\sqrt{1-x^2} \quad \text{и} \quad y = f_2(x) = -\sqrt{1-x^2}.$$

3. Параметрическое задание:

$$\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin t, \end{cases} \quad 0 \leq t \leq \pi.$$

Данная система задает верхнюю половину окружности единичного радиуса.

Аналитический способ задания функции является наиболее точным и предпочтительным для дальнейшего исследования функции методами математического анализа. Графическое и табличное описание возникает, например, при исследовании экспериментально наблюдаемых функциональных зависимостей, но и в этом случае обычно подбирают подходящую аналитическую формулу, с достаточной степенью точности воспроизводящую экспериментальные данные (так называемая *аппроксимация*).

Литература

1. Опорные конспекты по высшей математике. Часть 1: учеб. пособие / К.В. Бухенский; Рязан. гос. радиотехн. ун-т. – Рязань, 2010. – 168 с.