АРИФМЕТИЧЕСКАЯ ПРОГРЕССИЯ.

ФОРМУЛА n-ГО ЧЛЕНА И СУММЫ ПЕРВЫХ n ЧЛЕНОВ АРИФМЕТИЧЕСКОЙ ПРОГРЕССИИ

Определение. ***Арифметической прогрессией*** называется числовая последовательность $a_1, a_2, ..., a_n, ...$ каждый член которой, начиная со второго, равен предыдущему члену, сложенному с одним и тем же числом.

Таким образом, арифметическая прогрессия (a_n) определяется следующими условиями

1) $a_1 = a$, где a - заданное число;

2) для любого $n \in N$: $a_{n+1} = a_n + d$, где d - ***разность арифметической прогрессии***.

Разность d может быть любым числом. Если $d > 0$, то арифметическая прогрессия (a_n) называется возрастающей. Если $d < 0$, то арифметическая прогрессия называется убывающей. Если $d = 0$, то все члены последовательности (a_n) равны между собой, и арифметическая прогрессия называется постоянной последовательностью.

Из определения арифметической прогрессии следует, что для любого $n \in N$ верно равенство $a_{n+1} - a_n = d$.

Утверждение 1. Для любых $n \in N$ справедливо равенство

$$a_n = a_1 + d(n-1), \tag{1}$$

называемое формулой n-го члена арифметической прогрессии.

Доказательство. Доказательство проведем методом математической индукции. При $n = 1$ формула (1) верна: $a_1 = a_1 + (1`-1)d = a_1$.

Допустим, что она верна при $n - 1$, т.е.

$$a_{n-1} = a_1 + ((n-1`) - 1)d = a_1 + (n-2)d.$$

Докажем справедливость формулы (1) при n:

$$a_n = a_{n-1} + d = a_1 + (n-2)d + d = a_1 + (n-1)d. +$$

Утверждение 2. Сумма n первых членов арифметической прогрессии равна

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n \tag{2}$$

<u>Доказательство</u>. Запишем сумму арифметической прогрессии S_n дважды, поменяв во втором случае порядок слагаемых на обратный:

$$S_n = a_1 + a_2 + ... + a_{n-1} + a_n,$$

$$S_n = a_n + a_{n-1} + ... + a_2 + a_1.$$

Сложим почленно эти равенства:

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + ... + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1).$$

Докажем, что сумма $(a_k + a_{n-k+1})$, $k = 1,2,..., n-1$ в каждой скобке правой части равенства равна $(a_1 + a_n)$. В соответствии с формулой (1) имеем

$$a_k + a_{n-k+1} = (a_1 + (k-1)d) + (a_1 + (n-k)d) =$$
$$= a_1 + (a_1 + (n-k+k-1)d) = a_1 + (a_1 + (n-1)d) = a_1 + a_n .$$

Число таких слагаемых $(a_k + a_{n-k+1} = a_1 + a_n)$ равно n, поэтому

$$2S_n = n(a_1 + a_n) \quad \Rightarrow \quad S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n. +$$

<u>Утверждение 3</u>. Для любых $k \in N$ и $n \in N$ таких, что $1 \le k < n$ справедливо равенство

$$a_{n-k} + a_{n+k} = 2a_n, \tag{3}$$

в частности при $k = 1$:

$$a_{n-1} + a_{n+1} = 2a_n.$$

<u>Доказательство</u>. В соответствии с формулой (1) имеем

$$a_{n-k} + a_{n+k} = (a_1 + (n-k-1)d) + (a_1 + (n+k-1)d) =$$
$$= 2a_1 + (n-k-1+k+n-1)d = 2(a_1 + (n-1)d) = 2a_n .$$

Заметим, что формулой (3) удобно пользоваться при решении многих задач с арифметической прогрессией.

Литература

1. Математика: Пособие для поступающих в РГРТА /А.И. Новиков, И.П. Карасев, А.В. Лоскутов, Л.В. Артемкина, А.И. Сюсюкалов; Рязан. гос. радиотехн. акад. Рязань, 2003. 164 с. ISBN 5-7722-0156-5.