УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА С МОДУЛЕМ

Простейшее уравнение с модулем $|x - x_0| = a$, где x_0, a – заданные действительные числа, при $a \geq 0$ равносильно, в соответствии с определением модуля действительного числа, каждой из совокупностей

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x - x_0 = a, \\ x - x_0 \geq 0; \end{cases} \\ \begin{cases} -(x - x_0) = a, \\ \quad x - x_0 < 0; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - x_0 = a, \\ x - x_0 = -a; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = x_0 + a, \\ x = x_0 - a. \end{array}\right.$$

Таким образом, решением уравнения $|x - x_0| = a$ являются два числа $x_1 = x_0 - a$, $x_2 = x_0 + a$, удалённые на одинаковое расстояние от точки x_0.

Отмеченное свойство решений уравнения $|x - x_0| = a$ подсказывает ещё один способ его решения. Он основан на определении расстояния $\rho(x_1, x_2)$ между двумя точками x_1 и x_2 на числовой прямой. По определению

$$\rho(x_1, x_2) \overset{\text{def}}{=} |x_2 - x_1|. \tag{3.7}$$

С учетом этого определения решение уравнения $|x - x_0| = a$ заключается в поиске точек $x \in \mathbf{R}$ таких, что расстояние от каждой из них до точки x_0 равно a, т.е. $\rho(x, x_0) = a$.

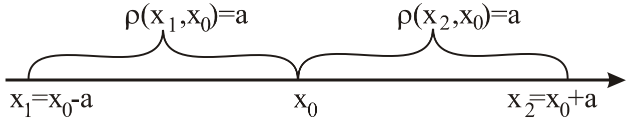

Рис. 3.3

Достаточно очевидно (рис.3.3), что этими точками являются $x_1 = x_0 - a$ и $x_2 = x_0 + a$.

Решим неравенство $\left|x - x_0\right| < a$. В соответствии с определением модуля действительного числа имеем

$$\left|x - x_0\right| < a \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x - x_0 < a, \\ x - x_0 \geq 0; \end{cases} \\ \begin{cases} -\left(x - x_0\right) < a, \\ \quad x - x_0 < 0; \end{cases} \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x - x_0 < a, \\ x - x_0 > -a. \end{cases}$$

Последнюю систему неравенств можно записать в виде двойного неравенства

$$-a < x - x_0 < a \quad \Leftrightarrow \quad x_0 - a < x < x_0 + a.$$

Таким образом, решением неравенства $\left|x - x_0\right| < a$ является интервал $\left(x_0 - a; x_0 + a\right)$ с центром в точке x_0 и радиусом a.

Графический метод решения неравенства $\left|x - x_0\right| < a$ заключается в построении графиков функций

$y_1 = \left|x - x_0\right|$, $y_2 = a$

и в выделении множества точек $\{x\}$, в которых $y_1(x) < y_2$ (график функции $y_1(x)$ расположен ниже прямой $y_2 = a$, рис. 3.4).

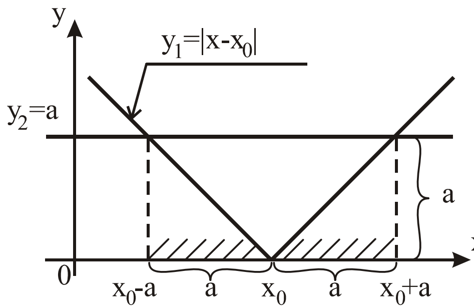

Рис. 3.4

Неравенство $\left|x - x_0\right| < a$ можно записать в равносильной форме $\rho\left(x, x_0\right) < a$. Решить неравенство $\rho\left(x, x_0\right) < a$ – значит найти все точки $\{x\}$, расстояние от каждой из которых до точки

x_0 меньше a. Достаточно очевидно, что этим множеством является интервал $(x_0 - a;\, x_0 + a)$ (рис.3.5).

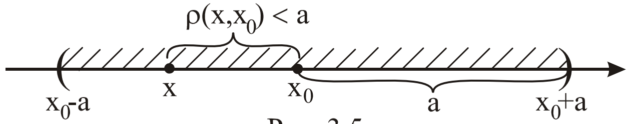

Рис. 3.5

В курсе математического анализа интервал с центром в точке x_0 и радиусом ε называется ε–окрестностью (эпсилон–окрестностью) точки x_0 и обозначается $U(x_0, \varepsilon)$ или $U_\varepsilon(x_0)$, а также $O_\varepsilon(x_0)$:

$$U_\varepsilon(x_0) \overset{\text{def}}{=} \{x \,|\, |x - x_0| < \varepsilon,\ x \in \mathbf{R}\}.$$

Здесь U – первая буква немецкого слова umgebung – окрестность.

Простейшие уравнения и неравенства с модулем и отвечающие им решения:

$$|x - x_0| = a \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = x_0 - a,\ x_2 = x_0 + a;$$

$$|x - x_0| < a \quad \Leftrightarrow \quad -a < x - x_0 < a \quad \Leftrightarrow \quad x \in (x_0 - a;\, x_0 + a);$$

$$|x - x_0| \le a \quad \Leftrightarrow \quad -a \le x - x_0 \le a \quad \Leftrightarrow \quad x \in [x_0 - a;\, x_0 + a];$$

$$|x - x_0| > a \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x - x_0 > a, \\ x - x_0 < -a; \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad x \in (-\infty; -a) \cup (a; +\infty);$$

$$|x - x_0| \ge a \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x - x_0 \ge a, \\ x - x_0 \le -a; \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad x \in (-\infty; -a] \cup [a; +\infty).$$

Уравнения и неравенства с модулем

Пример 3.9. Решите уравнение

$$|x + 2| + |x - 3| = a$$

для трёх значений параметра a: $a = 3$, $a = 5$ и $a = 7$.

Решение. Способ 1. Аналитический. Нули выражений, находящихся под знаком модуля $(x=-2,\ x=3)$, разбивают числовую прямую на три промежутка $(-\infty;-2)$, $[-2;3)$ и $[3;+\infty)$. Рассмотрим уравнение на каждом из этих промежутков:

1) $x<-2$. Тогда $|x+2|=-x-2$, $|x-3|=3-x$ и потому получаем $-x-2+3-x=a \quad \Leftrightarrow \quad x=\dfrac{1-a}{2}$.

$a=3: \quad x=\dfrac{1-3}{2}=-1, \quad x\notin(-\infty,-2);$

$a=5: \quad x=\dfrac{1-5}{2}=-2, \quad x\notin(-\infty,-2);$

$a=7: \quad x=\dfrac{1-7}{2}=-3, \quad x\in(-\infty,-2).$

Таким образом, на промежутке $(-\infty;-2)$ исходное уравнение имеет решение $x=-3$ только при $a=7$;

2) $-2\le x<3$. На этом промежутке $|x+2|=x+2$, $|x-3|=3-x$ потому

$$x+2+3-x=a \quad \Leftrightarrow \quad a=5.$$

Данное неравенство является верным только при $a=5$.

Поэтому на промежутке $[-2;3)$ исходное уравнение имеет решение при $a=5$, причем решением являются все $x\in[-2;3)$;

3) $x\ge 3$. Здесь $|x+2|=x+2$, $|x-3|=x-3$ и

$$x+2+x-3=a \quad \Leftrightarrow \quad x=\frac{a+1}{2};$$

$a=3: \quad x=\dfrac{3+1}{2}=2, \quad x\notin[3;+\infty);$

$a=5: \quad x=\dfrac{5+1}{2}=3, \quad x\in[3;+\infty);$

$$a = 7: \quad x = \frac{7+1}{2} = 4, \quad x \in [3; +\infty).$$

На рассматриваемом промежутке $[3; +\infty)$ решения имеют уравнения $|x+3| + |x-2| = 5$, $x = 3$ и $|x+3| + |x-2| = 7$, $x = 4$.

Объединяя результаты пунктов 1, 2, 3, получаем окончательно ответ.

Ответ: $a = 3: \quad \varnothing$ (нет решения); $\quad a = 5: \quad x \in [-2; 3]$;
$a = 7: \quad x_1 = -3; x_2 = 4$.

Способ 2. Графический. Введём в рассмотрение функцию $y(x) = |x+2| + |x-3|$ и построим её график. Поскольку $y_1 = x + 2$ и $y_2 = x - 3$ – линейные функции, то кусочно-линейной будет функция $y(x)$. Поэтому для построения графика этой функции достаточно вычислить её значения в точках «излома» – в нулях подмодульных выражений: $y(-2) = 5$, $y(3) = 5$. При $x < -2$ $y = -2x + 1$, т.е. угловой коэффициент $k = -2$, и изменению x на 1 соответствует изменение y на 2 единицы. Поэтому $y(-3) = 5 + 2 = 7$. Аналогично при $x > 2$: $y = 2x - 1$, $k = 2$ и $y(4) = 5 + 2 = 7$.

График функции $y(x)$ приведён на рис. 3.6. С учётом введённого обозначения исходное уравнение приняло вид $y(x) = a$ и теперь его решение заключается в нахождении значений x, при которых графики функции $y(x)$ и $y = a$ имеют общие точки. При $a = 3$ графики обеих функций не имеют общих точек, при $a = 5$ они совпа-

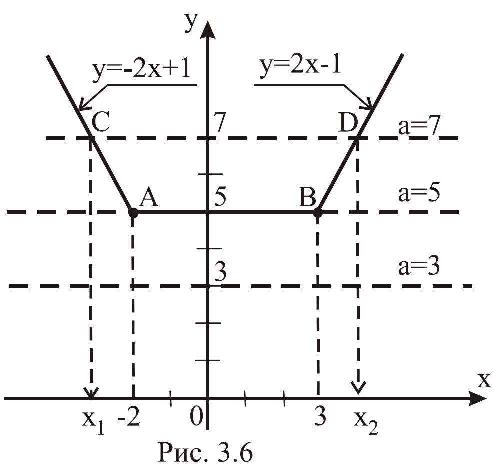

Рис. 3.6

дают на отрезке AB, т.е. для всех $x \in [-2;3]$, при $a = 7$ – пересекаются в точках $C\,(x_1 = -3)$ и $D\,(x_2 = 4)$.

Способ 3. Основан на использовании понятия расстояния между двумя точками на числовой прямой.

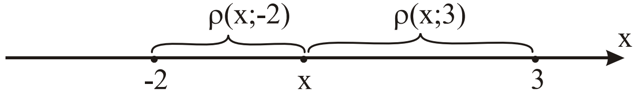

Рис. 3.7

В соответствии с условием задачи необходимо найти такие точки x на числовой прямой, сумма расстояний от каждой из которых (рис. 3.7) до точек (-2) и 3 равна a, т.е.

$$\rho(x;-2)+\rho(x;3)=a\,.$$

Из рис 3.7 следует, что для любой точки x, $x \in [-2;3]$ $\rho(x;-2)+\rho(x;3)=5$, а для любой точки x, $x \in \mathbf{R} \setminus [-2;3]$ $\rho(x;-2)+\rho(x;3)>5$ (рис.3.8).

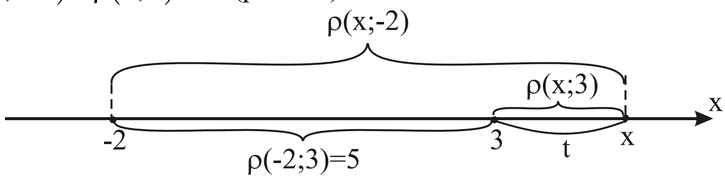

Рис. 3.8

Таким образом, $\forall x \in \mathbf{R} \Rightarrow \rho(x;-2)+\rho(x;3) \geq 5$. Поэтому уравнение $\rho(x;-2)+\rho(x;3)=a$ при $a<5$ и, в частности, при $a=3$ не имеет решений, при $a=5$, как уже установлено, решением являются все точки отрезка $[-2;3]$.

При $a=7$ уравнению $\rho(x;-2)+\rho(x;3)=7$ будут удовлетворять два значения x, расположенные на одинаковом расстоянии от точек $x=3$ и $x=-2$. Обозначим $\rho(x;3)=t$ при

$x > 3$ (рис.3.8). Тогда $\rho(x;-2) = \rho(-2;3) + \rho(x;3) = 5 + t$ и уравнение примет вид $t + 5 + t = 7$, откуда $t = 1$. Имеем $\rho(x;3) = 1$ при $x > 3$, т.е. $|x-3| = x - 3 = 1 \Rightarrow x = 4$. Аналогично находим $\rho(x;-2) = 1$ при $x < -2$ или $|x+2| = -2 - x = 1 \Rightarrow x = -3$.

Способ 4. Графический. Уравнение $|x+2| + |x-3| = a$ можно переписать в равносильной форме $|x+2| = a - |x-3|$. Введём в рассмотрение функции $y_1(x) = |x+2|$ и $y_2(x) = a - |x-3|$. Построим графики этих функций при $a = 3,5,7$ (рис. 3.9, 3.10, 3.11).

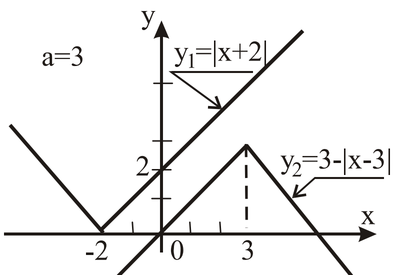

Рис. 3.9

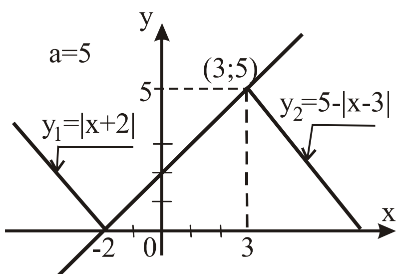

Рис. 3.10

Обратим внимание на то, что разноимённые (левые и правые) ветви графиков функций $y_1(x)$ и $y_2(x)$ параллельны.

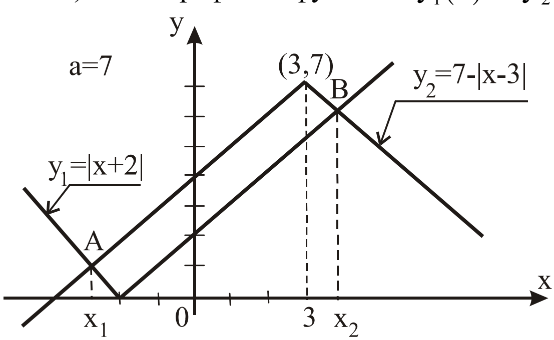

Рис. 3.11

Из рис. 3.9 следует, что при $a = 3$ графики функций $y_1(x)$ и $y_2(x)$ не имеют общих точек. При $a = 5$ (рис.3.10) они совпадают для всех $x \in [-2;3]$. При $a = 7$ графики функций $y_1(x)$ и $y_2(x)$ пересекаются в двух точках A и B с абсциссами x_1 и x_2 соответственно. В точке A пересекаются левые ветви графиков функций $y_1(x)$ и $y_2(x)$, поэтому $|x+2| = -x-2$ и $|x-3| = 3-x$. Из уравнения $-x-2 = 7-(3-x)$ находим $x_1 = -3$. В точке B пересекаются правые ветви графиков функций $y_1(x)$ и $y_2(x)$, поэтому $|x+2| = x+2$ и $|x-3| = x-3$. Из уравнения $x+2 = 7-(x-3)$ находим $x_2 = 4$.

Ответ: $a = 3 : \varnothing$; $a = 5 : x \in [-2;3]$; $a = 7 : x_1 = 7, x_2 = 4$.

Пример 3.10. Найдите площадь множества точек D, все точки $(x; y)$ которого удовлетворяют неравенству

$$|x| + 3|y| \le 6.$$

Решение. Для всех допустимых x и y $(|x| \le 6, |y| \le 2)$, $|-x| = |x|$, $|-y| = |y|$. Поэтому искомое множество D является симметричным относительно обеих осей $0x$ и $0y$. Отсюда следует, что достаточно построить часть D_1 этого множества, расположенную, например, в 1-й четверти:

$$D_1 : \begin{cases} x \ge 0, \\ y \ge 0, \\ x + 3y \le 6, \end{cases}$$

отобразить её симметрично относительно оси $0x$ (оси $0y$), а затем полученное множество D_2 отобразить симметрично относительно оси $0y$ (оси $0x$) из правой (из верхней) полуплоскости в левую (в нижнюю) полуплоскость.

Множества D_1, D_2 и D приведены на рис. 3.12, 3.13 и 3.14 соответственно.

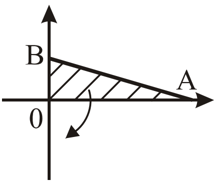

Рис. 3.12

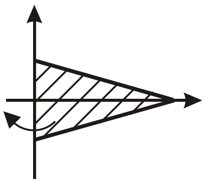

Рис. 3.13

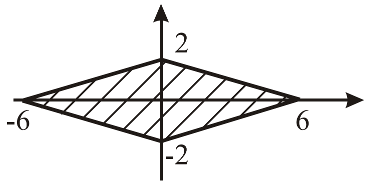

Рис. 3.14

Множество D – ромб с диагоналями $d_1 = 12$ и $d_2 = 4$. Поэтому $S_D = \frac{1}{2} 12 \cdot 4 = 24$.

Ответ: 24.

Литература

1. Элементарная математика: теория чисел, основы комбинаторики, неравенства: учеб. пособие / А.И. Новиков; Рязан. гос. радиотехн. ун-т. – Рязань, 2010. – 184 с.