АРИФМЕТИЧЕСКИЙ КОРЕНЬ.
КОРЕНЬ НЕЧЕТНОЙ СТЕПЕНИ

Пусть a – неотрицательное действительное число, $n \in \mathbf{N}$ и $n \geq 2$.

Определение 1. ***Арифметическим корнем*** n-й степени из неотрицательного числа a называется такое ***неотрицательное число*** b, что $b^n = a$.

Такое число b, и при этом единственное, существует для каждого неотрицательного числа a. Обозначают арифметический корень символом $\sqrt[n]{a}$; число a называют **подкоренным числом**, а n – **показателем корня**.

Из определения арифметического корня $\left(\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a\right)$ следует равенство $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$ для любого $a \geq 0$.

Необходимость введения понятия арифметического корня обусловлена тем, что корень четной степени $2n$ из отрицательного числа не существует. Действительно, для любого $b \in \mathbf{R}$ $b^{2n} = \left(b^2\right)^n \geq 0$ и если $a < 0$, то равенство $b^{2n} = a$ невозможно ни при каких b.

Для нечетных значений $2n+1$ показателя корня из отрицательного числа a такие значения b $(b < 0)$ существуют.

Определение 2. ***Корнем степени*** $2n+1$, $n \in \mathbf{N}$, из отрицательного числа a называется такое отрицательное число b, что $b^{2n+1} = a$, т.е.

$$\sqrt[2n+1]{a} = b \quad \Leftrightarrow \quad b^{2n+1} = a.$$

Например, $\sqrt[3]{-64}=-4$, так как $(-4)^3=-64$; $\sqrt[5]{-\frac{1}{32}}=-\frac{1}{2}$,

так как $\left(-\frac{1}{2}\right)^5=-\frac{1}{32}$.

Свойства арифметических корней $(a\ge 0,\ b\ge 0,\ n, m\in \mathbf{N})$:

1) $\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}$.

2) $\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$.

3) $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m=\sqrt[n]{a^m}$.

4) $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}=\sqrt[nm]{a}$.

Литература

1. Элементарная математика: теория чисел, основы комбинаторики, неравенства: учеб. пособие / А.И. Новиков; Рязан. гос. радиотехн. ун-т. – Рязань, 2010. – 184 с.