ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ И ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЕ ЧИСЛА

Иррациональные числа

Простейший пример об измерении длины диагонали единичного квадрата показывает, что операция извлечения квадратного корня из рационального числа не всегда возможна на множестве $\mathbf{Q}$. Числа $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{7}, \sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{3}$ и т.д. не являются рациональными, т.е. не могут быть представлены несократимыми дробями $\frac{m}{n}$, $m, n \in \mathbf{N}$.

Доказывается это утверждение однотипно для всех корней вида $\sqrt[n]{a}$, $n \geq 2$, при соответствующих значениях $a \in \mathbf{Q}$. Докажем в качестве примера, что $\sqrt{3} \notin \mathbf{Q}$, т.е. не существует несократимой дроби $\frac{m}{n}$ такой, что $\frac{m}{n} = \sqrt{3}$. Допустим противное, а именно $\sqrt{3} \in \mathbf{Q}$ и потому существует несократимая дробь $\frac{m}{n}$, $m, n \in \mathbf{N}$, такая, что $\frac{m}{n} = \sqrt{3}$ или $m^2 = 3n^2$.Отсюда следует, что $m^2 \vdots 3$, а значит, и $m \vdots 3$. Пусть $m = 3m_1$, $m_1 \in \mathbf{N}$, тогда

$$m^2 = 3n^2 \Leftrightarrow 9m_1^2 = 3n^2 \Leftrightarrow n^2 = 3m_1^2.$$

Отсюда аналогично делаем вывод о том, что $n^2 \vdots 3$ и $n = 3n_1$, $n_1 \in \mathbf{N}$. Но тогда $\frac{m}{n} = \frac{3m_1}{3n_1} = \frac{m_1}{n_1}$, что противоречит предположению о несократимости дроби $\frac{m}{n}$ и потому не существует числа $a \in \mathbf{Q}$ такого, что $a = \sqrt{3}$.

Если все рациональные числа расположить на числовой прямой, то на ней останется бесконечное множество незаполненных «дырок». Эти дырки занимают так называемые иррациональные числа. Иррациональные числа не представимы конечными или бесконечными, но периодическими десятичными дробями. Их десятичное представление содержит бесконечное число цифр после запятой, не образующих периода какой-нибудь конечной длины.

Иррациональных чисел существенно больше (в определённом смысле), чем рациональных. Образно это утверждение можно проиллюстрировать следующей условной схемой. Если на прозрачную числовую прямую нанести все точки с рациональными координатами, то прямая останется почти такой же прозрачной. Если же на прозрачную прямую нанести все точки с иррациональными координатами, то прямая станет «тёмной».

Множество иррациональных чисел, естественно, не исчерпывается числами вида $\sqrt[n]{a}$, $n \geq 2$, для соответствующих значений $a \in \mathbf{Q}$. В это множество входят числа вида $\sin 1^\circ$, $\cos 1^\circ$, $\sin 2^\circ$, $\cos 2^\circ$, $\log_2 3$, $\mathrm{loq}_3 5$ и т.д., а также числа, имеющие свои имена: π (пи), число e.

Основное назначение чисел – измерение длины, площади, объема геометрических многообразий, а также значений различных физических величин (температуры, давления, массы, скорости, напряженности и т.д.). Для решения бытовых и многих научно-технических задач вполне достаточно множества рациональных чисел. Они позволяют вычислять искомые значения либо точно, если каждое такое значение является рациональным числом, либо приближенно, но с любой наперёд заданной точностью, если искомое значение не является рациональным числом.

Иррациональные числа необходимы, во-первых, для построения числовой системы, замкнутой относительно всех основных арифметических операций, и, во-вторых, для создания на этой основе здания математического анализа, включающего в себя теорию пределов, дифференциальное и интегральное исчисления.

Определение. Множество бесконечных непериодических десятичных дробей называется ***множеством иррациональных чисел.*** Обозначим это множество буквой $\mathbf{I}$:

$$\mathbf{I} \overset{\text{def}}{=} \{\alpha_0, \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n \ldots\}.$$

Здесь $\alpha_0 \in \mathbf{Z}$ – целая часть иррационального числа, а $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots$ – цифры, образующие дробную часть иррационального числа. При этом никакая группа последовательных цифр $\alpha_{i+1}\alpha_{i+2}\ldots\alpha_{i+m}$ для любых $i, m \in \mathbf{N}$ не повторяется, т.е. десятичная дробь непериодическая.

Если множество $\mathbf{Q}$ рациональных чисел замкнуто относительно основных арифметических операций (сложение, вычитание, умножение и деление), то множество $\mathbf{I}$ иррациональных чисел не замкнуто относительно этих операций. Например, $\sqrt{3}$ и $\sqrt{12}$ – иррациональные числа, их сумма и разность – также иррациональные числа:

$$\Big(\sqrt{3} + \sqrt{12} = \sqrt{3} + 2\sqrt{3} = 3\sqrt{3}, \quad 3\sqrt{3} \in \mathbf{I},$$
$$\sqrt{12} - \sqrt{3} = 2\sqrt{3} - \sqrt{3} = \sqrt{3}, \quad \sqrt{3} \in \mathbf{I}\Big),$$

а произведение этих чисел $\sqrt{3} \cdot \sqrt{12} = \sqrt{36} = 6$ является рациональным числом. Сумма иррациональных чисел $\sqrt{3}$ и $5 - \sqrt{3}$ является рациональным числом $\sqrt{3} + \left(5 - \sqrt{3}\right) = 5$, $5 \in \mathbf{Q}$. Любая четная степень иррационального числа $\sqrt{3}$ является рациональным числом $\left(\sqrt{3}\right)^{2n} = 3^n$, $3^n \in \mathbf{Q}$ при $n \in \mathbf{N}$.

Действительные числа

Определение. Множество всех десятичных дробей (конечных и бесконечных) называется ***множеством действительных чисел*** и обозначается буквой $\mathbf{R}$.

Таким образом, множество действительных чисел – это объединение всех рациональных и иррациональных чисел:

$$\mathbf{R} = \mathbf{Q} \cup \mathbf{I}.$$

Множество действительных чисел замкнуто относительно операций сложения, вычитания, умножения, деления, возведения в степень и извлечения корня n-й степени (за исключением корня четной степени из отрицательного числа). Очень важным является следующее свойство действительных чисел.

Свойство непрерывности. Если для любых чисел $a \in A$, $A \subset \mathbf{R}$ и $b \in B$, $B \subset \mathbf{R}$ выполняется неравенство $a \le b$, то существует число $c \in \mathbf{R}$ такое, что $a \le c \le b$ для всех $a \in A$ и всех $b \in B$.

Это свойство означает, в частности, что между любыми двумя неравными действительными числами, но сколь угодно близкими друг к другу, расположено бесконечное множество отличных от них действительных чисел.

В частности, это свойство позволяет утверждать, что если последовательность действительных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ имеет конечный предел b, то $b \in \mathbf{R}$. Это свойство действительных чисел называется ещё свойством полноты.

Свойство полноты. Пусть $\mathbf{X}$ – некоторое числовое множество. Если любая сходящаяся последовательность $\{a\}_{n=1}^{\infty}$ $a_n \in \mathbf{X}$ имеет своим пределом число b из этого же множества, то **множество $\mathbf{X}$** называется **полным**.

Множество рациональных чисел не является полным. Следует это из того, что последовательность рациональных чисел $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, $n \in \mathbf{N}$, сходится к иррациональному числу e $(e = 2{,}718281828459045\ldots)$, т.е. $a_n \in \mathbf{Q}$, а $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \notin \mathbf{Q}$. На множестве действительных чисел всякая сходящаяся последовательность сходится к действительному числу, т.е. если $\{a_n\} \in \mathbf{R}$ и существует $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = b$, то $b \in \mathbf{R}$.

Для любых двух действительных чисел a и b имеет место одно и только одно из отношений: $a > b$, $a = b$, $a < b$. При этом по определению:

$$a > b \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} a - b > 0;$$

$$a < b \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} a - b < 0,$$

т. е. число a больше b тогда и только тогда, когда разность $a-b$ является положительным числом, и, наоборот, $a<b$ тогда и только тогда, когда разность $a-b$ является отрицательным числом. Например, $\frac{1}{6}<0{,}17$, поскольку

$$\frac{1}{6}^{\backslash 50}-\frac{17}{100}^{\backslash 3}=-\frac{1}{150}<0.$$

Для сравнения положительных чисел, записанных в виде десятичных дробей $a=\alpha_0,\alpha_1\alpha_2\ldots$, $b=\beta_0,\beta_1\beta_2\ldots$, можно пользоваться правилом: если $\alpha_0>\beta_0$, то $a>b$, если же $\alpha_0=\beta_0$, $\alpha_1=\beta_1,\ldots,$ $\alpha_i=\beta_i$, $\alpha_{i+1}>\beta_{i+1}$, то $a>b$.

Так, в рассматриваемом примере $a=0{,}1666..=0{,}1(6)$, $b=0{,}17$ и $\alpha_0=\beta_0=0$, $\alpha_1=\beta_1=1$, но $\alpha_2=6$, $\beta_2=7$ и $\alpha_2<\beta_2$, поэтому $a<b$.

Пример 3.3. Сравните числа $0{,}23(147)$ и $\frac{1927}{8325}$.

Решение. Способ 1. Пусть $a=23(147)$, $b=\frac{1927}{8325}$. Преобразуем число b. $b=\frac{1927}{8325}=\frac{1927\cdot 4}{8325\cdot 4}=\frac{7708}{33300}$; $\frac{7708}{33300}=\frac{7708\cdot 3}{33300\cdot 3}=\frac{23124}{99900}$.

В соответствии с правилом перевода смешанной периодической десятичной дроби в обыкновенную получаем:

$$124=\overline{mnk}-23\Rightarrow\overline{mnk}=124+23=147$$

и поэтому $\frac{1927}{8325}=\frac{23124}{99900}=0{,}23(147)$. Таким образом, $a=b$.

Способ 2. $a = 0{,}23(147) = \dfrac{23147 - 23}{99900} = \dfrac{23124}{99900}$. Числитель и знаменатель дроби делятся на 3 и на 4. Поэтому $a = 0{,}23(147) = \dfrac{1927}{8325} = b$.

Ответ: $0{,}23(147) = \dfrac{1927}{8325}$.

Основные свойства числовых неравенств.

1. *Если* $a > b$ *и* $b > c$*, то* $a > c$ *(свойство транзитивности).*

2. *Если* $a > b$*, то для любого* $c \in \mathbf{R}$*:* $a + c > b + c$.

3. *Если* $a > b$ *и* $c > 0$*, то* $ac > bc$*; если же* $c < 0$*, то* $ac < bc$.
Свойство 3 означает, что при умножении обеих частей верного неравенства на положительное число его знак не меняется.

4. *Если* $a > b$ *и* $c > d$*, то* $a + c > b + d$*, т.е. верные неравенства одного знака можно складывать.*

5. *Если* $a > b > 0$ *и* $c > d > 0$*, то* $ac > bd$*, т.е. верные неравенства одного знака с положительными числами можно почленно перемножать.*

6. *Если* $a > b$ *и* $c < d$*, то* $a - c > b - d$.

7. *Если* $a > b > 0$*, то* $\dfrac{1}{a} < \dfrac{1}{b}$.

Пример 3.4. Сравните три числа $\dfrac{19}{20}$; $\dfrac{3801}{4000}$ и $\dfrac{\sqrt{90}}{10}$.

Решение. Обозначим $a=\frac{19}{20}$; $b=\frac{3801}{4000}$; $c=\frac{\sqrt{90}}{10}$. Имеем $a=\frac{19}{20}=\frac{19\cdot 200}{20\cdot 200}=\frac{3800}{4000}$, т.к. $\frac{3800}{4000}<\frac{3801}{4000}$, то $a<b$. Сравним теперь числа a и c: $c=\frac{\sqrt{90}}{10}=\frac{2\cdot\sqrt{9\cdot 10}}{2\cdot 10}=\frac{\sqrt{18\cdot 20}}{20}$. Поскольку знаменатели дробей $a=\frac{19}{20}$ и $c=\frac{\sqrt{18\cdot 20}}{20}$ равны, то достаточно сравнить их числители. Имеем $\sqrt{18\cdot 20}=\sqrt{(19-1)(19+1)}=\sqrt{19^2-1}<19$. Поэтому $c<a$. В соответствии со свойством транзитивности из неравенств $a<b$ и $c<a$ следует неравенство $c<b$. Таким образом: $c<a<b$.

Ответ: $\frac{3\sqrt{10}}{10}<\frac{19}{20}<\frac{3801}{4000}$.

Литература

1. Элементарная математика: теория чисел, основы комбинаторики, неравенства: учеб. пособие / А.И. Новиков; Рязан. гос. радиотехн. ун-т. – Рязань, 2010. – 184 с.