РАЦИОНАЛЬНЫЕ ЧИСЛА

3.1. Обыкновенные дроби

Определение 1. Дроби вида $\frac{m}{n}$, где $m \in \mathbf{Z}$, $n \in \mathbf{N}$, называются ***обыкновенными дробями***.

Обыкновенные дроби $\frac{m}{n}$, $m \in \mathbf{Z}$, $n \in \mathbf{N}$, подразделяют на правильные и неправильные.

Определение 2. Дробь $\frac{m}{n}$, $m \in \mathbf{Z}$, $n \in \mathbf{N}$, называется ***правильной***, если $m < n$ при $m \in \mathbf{Z}^{+}$ или $(-m) < n$ при $m \in \mathbf{Z}^{-1}$ и ***неправильной*** в противном случае, т.е. если $m \geq n$ или $(-m) \geq n$.

Всякую неправильную дробь можно представить в виде суммы целого числа k и правильной дроби $\frac{r}{n}$, где $0 \leq r < n$, причем такое разложение $\frac{m}{n} = k + \frac{r}{n}$ единственно.

Например, дробь $\frac{3}{7}$ – правильная; дробь $\frac{23}{6}$ – неправильная, а равенство $\frac{23}{6} = 3 + \frac{5}{6}$ даёт её разложение на сумму натурального числа 3 и правильной дроби $\frac{5}{6}$. Часто неправильную дробь записывают в форме смешанного числа: $\frac{23}{6} = 3\frac{5}{6}$, $\frac{57}{14} = 4\frac{1}{14}$. В записи $3\frac{5}{6}$ число 3 является целой частью этого числа, а $\frac{5}{6}$ – дробной частью.

Для отрицательной дроби $-\dfrac{23}{6}$ разложение имеет следующий вид: $-\dfrac{23}{6} = -4 + \dfrac{1}{6}$. Заметим, что формально верным является и альтернативное разложение: $-\dfrac{23}{6} = -3 - \dfrac{5}{6}$.

Числа $a = \dfrac{m}{n}$ и $b = \dfrac{n}{m}$, $m, n \in \mathbf{N}$, называются взаимно обратными. Задачи с такими числами часто встречаются на экзаменах и основываются, как правило, на простом, но очень важном свойстве: для любого $a > 0$ справедливо неравенство

$$\boxed{a + \frac{1}{a} \ge 2},$$

причем $a + \dfrac{1}{a} = 2 \quad \Leftrightarrow \quad a = 1$.

Если же $a < 0$, то

$$\boxed{a + \frac{1}{a} \le -2}$$

и $a + \dfrac{1}{a} = -2 \quad \Leftrightarrow \quad a = -1$.

Справедливость каждого неравенства следует из соответствующих неравенств:

$$a > 0: \quad (a-1)^2 \ge 0 \Leftrightarrow a^2 + 1 \ge 2a \Leftrightarrow a + \frac{1}{a} \ge 2;$$

$$a < 0: \quad (a+1)^2 \ge 0 \Leftrightarrow a^2 + 1 \ge -2a \Leftrightarrow a + \frac{1}{a} \ge -2.$$

Определение 3. Две дроби $\dfrac{m_1}{n_1}$ и $\dfrac{m_2}{n_2}$ называются ***равными***, если $m_1 n_2 = m_2 n_1$.

Например, $\dfrac{3}{8}=\dfrac{21}{56}$, так как $3\cdot 56=21\cdot 8$. Поскольку $\dfrac{21}{56}=\dfrac{3\cdot 7}{8\cdot 7}=\dfrac{3}{8}$, то любую дробь $\dfrac{m}{n}=\dfrac{m_1k}{n_1k}$, числитель и знаменатель которой содержат общий множитель k, можно сократить на k: $\dfrac{m}{n}=\dfrac{m_1k}{n_1k}=\dfrac{m_1}{n_1}$.

Сравнение неравных положительных дробей основывается на эквиваленциях

$$\frac{m_1}{n_1}<\frac{m_2}{n_2} \quad \Leftrightarrow \quad m_1n_2<m_2n_1;$$

$$\frac{m_1}{n_1}>\frac{m_2}{n_2} \quad \Leftrightarrow \quad m_1n_2>m_2n_1.$$

Например, $\dfrac{17}{19}<\dfrac{23}{25}$, так как $17\cdot 25<19\cdot 23$ или $425<437$.

При вычислении значений числовых выражений, содержащих в своём составе обыкновенные дроби, а также при сравнении дробей часто приходится приводить дроби к общему знаменателю.

Пусть требуется вычислить разность $\dfrac{19}{28}-\dfrac{13}{36}$. Для вычисления значения этого числового выражения необходимо сначала привести обе дроби к общему знаменателю. Наименьший общий знаменатель – это НОК чисел 28 и 36. Вычисляем

$$\text{НОК }(28{,}36)=\text{НОК}\left(2^2\cdot 7;\, 2^2\cdot 9\right)=2^2\cdot 7\cdot 9.$$

Замечаем, что $2^2\cdot 7\cdot 9=28\cdot 9=36\cdot 7$.

Поэтому

$$\frac{19}{28}-\frac{13}{36}=\frac{19\cdot 9}{28\cdot 9}-\frac{13\cdot 7}{36\cdot 7}=\frac{171-91}{2^2\cdot 7\cdot 9}=\frac{80}{2^2\cdot 7\cdot 9}=\frac{20}{63}.$$

На практике при приведении дробей к общему знаменателю используют более компактные записи:

$$\frac{19}{28}^{\backslash 9} - \frac{13}{36}^{\backslash 7} = \frac{19\cdot 9 - 13\cdot 7}{4\cdot 7\cdot 9} = \frac{20}{63}.$$

3.2. Десятичные дроби

Определение. ***Десятичной дробью*** называется запись обыкновенной дроби $\frac{m}{n}$, $m, n \in \mathbf{N}$, в виде

$$\alpha_0, \alpha_1\alpha_2...\alpha_n.... \qquad (3.1)$$

Здесь α_0 – целая часть числа, $\alpha_1\alpha_2...\alpha_n...$ – дробная часть.

При этом α_0 – натуральное число, а $\alpha_1, \alpha_2, ...\alpha_n, ...$ – цифры, т.е. для любого $n \in \mathbf{N}$ $\alpha_n \in \{0,1,2,...,9\}$.

Если дробь $\frac{m}{n}$ правильная, то $\alpha_0 = 0$. Если дробь $\frac{m}{n}$ неправильная, то $\alpha_0 \neq 0$ и дробь (3.1) называется смешанной.

Всякое рациональное число $\frac{m}{n}$ может быть представлено либо в виде конечной десятичной дроби, либо в виде бесконечной, но в этом случае периодической. Например, $\frac{4}{5} = 0{,}8$; $\frac{36}{8} = 4{,}5$; $\frac{171}{8} = 21{,}375$ – конечные десятичные дроби, а $\frac{137}{333} = 0{,}411411411...$, $\frac{54287}{24975} = 2{,}17365365365...$ – бесконечные периодические дроби. Бесконечные периодические дроби принято записывать в краткой форме: $0,(411) = 0{,}411411...$; $2{,}17(365) = 2{,}17365365...$.

Группа цифр, стоящих в круглых скобках, называется периодом бесконечной десятичной периодической дроби. Если период начинается сразу после запятой, то дробь называется

чисто периодической: $0,(411)$; $3,(1273)$; $0,(13)$. Если же между запятой и периодом есть ещё цифры, то дробь называется ***смешанной периодической***: $2{,}17(365)$; $0{,}234(13)$; $0{,}317(8914)$.

При решении примеров, содержащих десятичные дроби, часто приходится обращать их в обыкновенные. Обращение конечной десятичной дроби в обыкновенную не представляет особого труда: $0{,}125 = \frac{125}{1000} = \frac{1}{8}$; $2{,}12 = 2 + \frac{12}{100} = 2 + \frac{3}{25} = \frac{53}{25}$.

Обращение же бесконечной периодической дроби в обыкновенную и обратный перевод требуют определённых навыков. Обратим для примера дробь $0,(411)$. Имеем

$$0,(411) = \frac{411}{1000} + \frac{411}{(1000)^2} + \ldots + \frac{411}{(1000)^n} + \ldots .$$

В первой части числового равенства имеем сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии с первым членом $b = \frac{411}{1000}$ и знаменателем $q = \frac{1}{1000}$. Поэтому

$$0,(411) = \frac{\frac{411}{1000}}{1 - \frac{1}{1000}} = \frac{411}{1000} \cdot \frac{1000}{999} = \frac{411}{999} .$$

Легко показать, что в случае произвольной чистой периодической дроби $0,(\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k)$ справедливо представление

$$\boxed{0,(\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k) = \frac{\overline{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k}}{99\ldots9}}. \qquad (3.2)$$

Таким образом, получили **правило обращения чисто периодической дроби**:

Для перевода чисто периодической дроби $0,(\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k)$ *в обыкновенную* $\frac{m}{n}$ *необходимо в числителе обыкновенной дроби* *записать группу цифр* $\alpha_1\alpha_2...\alpha_k$, *образующих период десятичной дроби, а в знаменателе – число* $\underbrace{99...9}_{\text{k раз}}$.

Получим правило обращения смешанной десятичной периодической дроби в обыкновенную. Обратим дробь $2{,}17(365)$. Имеем

$$2{,}17(365) = 2 + \frac{17}{100} + \frac{365}{10^5} + \frac{365}{10^8} + ... + \frac{365}{10^{3n+2}} + ... =$$

$$= 2 + \frac{17}{100} + \frac{\frac{365}{10^5}}{1 - \frac{1}{10^3}} = 2 + \frac{17}{100} + \frac{165}{10^5} \cdot \frac{10^3}{999} =$$

$$= 2 + \frac{17}{100}^{\backslash 999} + \frac{365}{99900} = 2 + \frac{17 \cdot 999 + 365}{99900} =$$

$$= 2 + \frac{17(1000-1) + 365}{99900} = 2 + \frac{17365 - 17}{99900} =$$

$$= 2\frac{17348}{99900} = 2\frac{4337}{24975} = \frac{54287}{24975}.$$

В случае произвольной смешанной бесконечной периодической дроби $0,\alpha_1\alpha_2...\alpha_m(\alpha_{m+1}...\alpha_k)$, справедливо представление

$$\boxed{0,\alpha_1\alpha_2...\alpha_m(\alpha_{m+1}...\alpha_k) = \frac{\overline{\alpha_1\alpha_2...\alpha_m\alpha_{m+1}...\alpha_k} - \overline{\alpha_1\alpha_2...\alpha_m}}{\underbrace{99...9}_{k-m}\underbrace{00...0}_{m}}}. \quad (3.3)$$

Например,

$$0{,}137(2943) = \frac{1372943 - 137}{9999000} = \frac{1372806}{9999000} = \frac{76267}{555500};$$

$$0{,}224(17) = \frac{22417 - 224}{99000} = \frac{22193}{99000}.$$

Правило перевода смешанной периодической дроби в обыкновенную.

Для перевода смешанной периодической дроби $0,\alpha_1\alpha_2...\alpha_m(\alpha_{m+1}...\alpha_k)$ *в обыкновенную* $\frac{m}{n}$ *необходимо в числителе дроби* $\frac{m}{n}$ *записать разность*

$$\overline{\alpha_1\alpha_2...\alpha_m\alpha_{m+1}...\alpha_k}-\overline{\alpha_1\alpha_2...\alpha_m},$$

в составе которой первое число образовано всеми цифрами дробной части десятичной дроби, а второе – цифрами, предшествующими периоду; в знаменателе дроби записывается число 99…900…0, содержащее столько девяток, сколько цифр в периоде, и столько нулей, сколько цифр предшествует периоду.

Альтернативный способ перевода бесконечных периодических дробей в обыкновенные рассмотрим на примерах. Обратим чисто периодическое число $0,(411)=0,411411...$. Примем $x=0,411411...$ и умножим обе части равенства на 10^3, где 3 – число цифр в периоде. Получим

$$1000x=411,411411...=411,(411).$$

Вычтем $x=0,(411)$ из числа $1000x=411,(411)$. Получим $999x=411$, откуда $x=\frac{411}{999}$.

Обратим таким же способом смешанное периодическое число $2,17(365)$. Положим $x=0,17(365)$ и умножим обе части на 100 для получения чистой периодической дроби:

$$100x=17,(365). \qquad (3.4)$$

Умножим теперь обе части равенства (3.4) на 10^3:

$$100000x=17365,(365).$$

Вычтем $100x$ из $100000x$:

$$100000x - 100x = 17365,(365) - 17,(365)$$

или $$99900x = 17365 - 17,$$

откуда $x = \dfrac{17348}{99900} = \dfrac{4337}{24975}$ и, как следствие,

$$2,17(365) = 2\frac{4337}{24975}.$$

Пример 3.1. Решите уравнение

$$\frac{0,(24)x + 0,(3)}{1,(87)x + 0,8(3)} = 2.$$

Решение. $\dfrac{24}{99}x + \dfrac{3}{9} = 2\left(1\dfrac{87}{99}x + \dfrac{83-8}{90}\right);$

$$\frac{372x - 24x}{99} = \frac{1}{3} - \frac{75}{45}; \qquad \frac{348}{99}x = -\frac{4}{3}, \text{ откуда } x = -\frac{11}{29}.$$

Ответ: $x = -\dfrac{11}{29}$.

Для вычисления значений числовых выражений, в состав которых входят десятичные периодические дроби, необходимо преобразовать эти дроби в обыкновенные дроби.

Пример 3.2. Найдите значение числового выражения. Результат запишите в виде обыкновенной и десятичной дробей

$$4 \cdot 2,5(3) - 3 \cdot 33,(14).$$

Решение.

$$4 \cdot 2,5(3) - 3 \cdot 3,(14) = 4\left(2 + \frac{53-5}{90}\right) - 3 \cdot \left(3 + \frac{14}{99}\right) =$$

$$= -1 + \frac{4 \cdot 48}{90} - \frac{3 \cdot 14}{99} = -1 + \frac{4 \cdot 16^{\backslash 11}}{3 \cdot 10} - \frac{14^{\backslash 10}}{3 \cdot 11} =$$

$$=-1+\frac{4(176-35)}{3\cdot 10\cdot 11}=-1+\frac{2\cdot 47}{5\cdot 11}=\frac{39}{55}.$$

Преобразуем обыкновенную дробь $\frac{39}{55}$ в десятичную:

$$\frac{39}{55}=\frac{39\cdot 9\cdot 2}{11\cdot 5\cdot 9\cdot 2}=\frac{702}{990}.$$

Отсюда следует, что искомая десятичная дробь должна иметь две цифры в периоде и одну – до периода. Цифра до периода 7, а цифры в периоде найдём из правила обращения смешанной десятичной периодической дроби в обыкновенную:

$$02=\overline{mn}-7\Rightarrow \overline{mn}=02+07=09.$$

Поэтому $\frac{39}{55}=0{,}7(09)$.

Ответ: $\frac{39}{55}$ или $0{,}7(09)$.

3.3. Рациональные числа

Определение. Множество обыкновенных дробей $\left\{\frac{m}{n}\right\}$, $m\in\mathbf{Z}$, $n\in\mathbf{N}$, называется ***множеством рациональных чисел*** и обозначается буквой $\mathbf{Q}$.

Таким образом, по определению

$$\mathbf{Q}\overset{\text{def}}{=}\left\{\frac{m}{n}\,\middle|\, m\in\mathbf{Z}, n\in\mathbf{N}\right\}. \tag{3.5}$$

Множество $\mathbf{Q}$ замкнуто относительно операций сложения, вычитания, умножения, деления и возведения в целую степень, т.е. для любых

$$a,b\in\mathbf{Q},\ m\in\mathbf{Z}:\ (a+b)\in\mathbf{Q},\ (a-b)\in\mathbf{Q},$$

$$a\cdot b\in\mathbf{Q},\ \frac{a}{b}\in\mathbf{Q}\quad (b\neq 0)\ \text{и}\ a^m\in\mathbf{Q}.$$

Выделим наиболее важные подмножества множества рациональных чисел:

1) $\mathbf{Q}^{+} = \left\{ \dfrac{m}{n} \middle| m \in \mathbf{Z}_{+}, n \in \mathbf{N} \right\}$ – множество положительных рациональных чисел;

2) $\mathbf{Q}^{-} = \left\{ \dfrac{m}{n} \middle| m \in \mathbf{Z}_{-}, n \in \mathbf{N} \right\}$ – множество отрицательных рациональных чисел;

3) $\mathbf{Z} = \left\{ \dfrac{m}{1} \right\}$, $m \in \mathbf{Z}$, – множество целых чисел;

4) $\mathbf{N} = \left\{ \dfrac{m}{1} \right\}$, $m \in \mathbf{N}$, – множество натуральных чисел.

Множество $\mathbf{N}$ натуральных чисел является подмножеством множества $\mathbf{Z}$ целых чисел, а оно, в свою очередь, является подмножеством множества $\mathbf{Q}$ рациональных чисел, т.е. $\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q}$. Справедливы также включения $\mathbf{Q}^{+} \subset \mathbf{Q}$, $\mathbf{Q}^{-} \subset \mathbf{Q}$, $\mathbf{Z}^{+} \subset \mathbf{Q}^{+}$, $\mathbf{Z}^{-} \subset \mathbf{Q}^{-}$.

Литература

1. Элементарная математика: теория чисел, основы комбинаторики, неравенства: учеб. пособие / А.И. Новиков; Рязан. гос. радиотехн. ун-т. – Рязань, 2010. – 184 с.