РАДИОТЕХНИЧЕСКИЕ И ИЗМЕРИТЕЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ

УДК 681.513.3

С.Н. Кириллов, А.Д. Токарь

ТЕОРЕТИКО – ИГРОВОЙ ПОДХОД В ОПРЕДЕЛЕНИИ ОПТИМАЛЬНЫХ СТРАТЕГИЙ ПОВЕДЕНИЯ ДВУХ ПРОТИВОБОРСТВУЮЩИХ ВОЗДУШНЫХ ОБЪЕКТОВ

Синтезированы на основе теории дифференциальных игр оптимальные стратегии поведения объекта управления (ОУ) и летательного аппарата (ЛА), обеспечивающие минимаксный конечный промах. Сформулированы рекомендации по возможным вариантам управления ОУ и ЛА. Доказано, что при наведении на маневрирующие ЛА значения конечного промаха для ОУ на 10…20 % меньше, по сравнению с традиционным методом пропорционального самонаведения.

Ключевые слова: *дифференциальная игра, комбинированный критерий качества, траектория полета, поперечное ускорение, оптимальные стратегии поведения.*

Введение. Снижение вероятности поражения ЛА является одним из основных направлений совершенствования авиационной техники [1]. В рамках этого направления используется совокупность различных приемов и технических решений, к наиболее употребляемым из которых относятся: использование средств радиоэлектронного подавления, применение различных ловушек, огневого уничтожения, угрожающих средств поражения и специальных маневров уклонения, выполняемых с различной степенью участия летчика [2]. Следует отметить, что из всех направлений одним из самых универсальных является использование маневров уклонения. Универсальность этого способа обусловлена тем, что он одинаково эффективен против ОУ с любыми типами систем наведения.

Цель работы – синтез и анализ оптимальных стратегий поведения ОУ и ЛА, обеспечивающих минимаксный конечный промах, то есть определение седлового решения дифференциальной игры поведения ОУ и ЛА.

Постановка задачи синтеза. В процессе решения рассматриваемой задачи ОУ строит свою стратегию поведения на основе априорной информации об ЛА. Современные ЛА способны выдерживать значительные перегрузки (до 12 единиц – беспилотные и до 8 единиц – пилотируемые). Это позволяет выполнять маневр с радиусом поворота до 400 м [2]. Такие ЛА способны резко изменять курс, что ведет к изменению отраженного сигнала. По информации, принятой бортовой радиолокационной станцией, можно определить, к какому классу относится данный ЛА, и оценить параметры его движения. Кроме того, можно спрогнозировать области возможных маневров ЛА, так как маневр может совершаться только в определенных областях воздушного пространства, а не на всем маршруте полета. Дифференциальную игру, то есть динамическую игру, динамика которой описывается дифференциальным уравнением, можно считать решенной, если для нее получен результат синтеза равновесных стратегий участников, то есть зависимость управляющих переменных от фазовых координат и времени. Из теории радиоуправления [1] известно, что в игре с управлением полета преследователя основной характеристикой является его трансверсальное ускорение $J_p(t)$, нормальное к направлению линии визирования (ЛВ) на преследуемый ЛА. В то же время при управлении преследуемого ЛА основной характеристикой также является его трансверсальное ускорение $J_ц(t)$, нормальное к направлению ЛВ. Задачу будем решать при условии, что ОУ является самонаводящимся.

Как было отмечено ранее, преследователь стремится минимизировать конечный промах $|h(t_к)|$, тогда как преследуемый хочет его максимизировать. Таким образом, за критерий качества можно взять:

$$I = \frac{1}{2}\left[h(t_к)\right]^2. \quad (1)$$

Обобщая всё вышесказанное, представим задачу синтеза оптимальных управлений ОУ и ЛА применительно к теории дифференциальных игр [4] следующим образом. Дана динамическая система, характеризующая перемещение ОУ и ЛА. Требуется определить такие оптимальные стратегии управления ОУ и ЛА, чтобы выполнялись следующие неравенства [4]:

$$I\left(J_p^0(t), J_ц(t)\right) \le I\left(J_p^0(t), J_ц^0(t)\right) \le I\left(J_p(t), J_ц^0(t)\right), \quad (2)$$

где $J_p^0(t)$, $J_ц^0(t)$ – оптимальные стратегии (управления) ОУ и ЛА, обеспечивающие седловое решение дифференциальной игры.

Синтез будет выполняться при условии, что будут выполняться следующие допущения.

1. ОУ и ЛА рассматриваются как материальные точки с единичными массами.

2. Объект управляется так, что модуль скорости сближения остается постоянным.

Теоретические исследования. При самонаведении [3] положение ОУ относительно ЛА однозначно определяется расстоянием между ОУ и ЛА и направлением в пространстве ЛВ ОУ – ЛА. Введем понятие текущего промаха, который определим как длину перпендикуляра, опущенного из точки расположения ЛА на направление вектора $\vec{V}_0$в текущий момент времени, где $\vec{V}_0$– это вектор скорости ОУ относительно ЛА (рисунок 1).

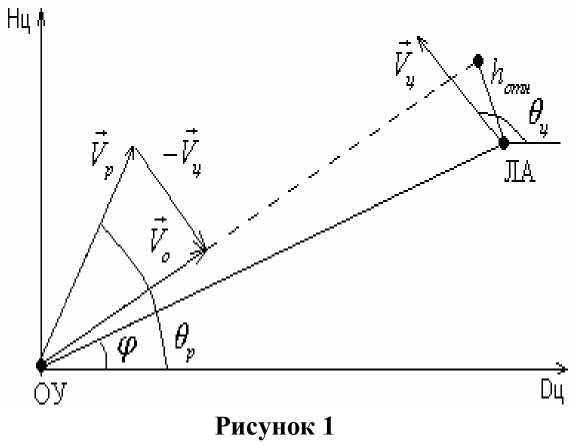


Рисунок 1

Для того чтобы описать состояние системы ОУ – ЛА фазовыми координатами, которые будут определять значение текущего промаха $h_{отн}$, необходимо перейти к системе уравнений, которые будут определять линейную скорость вращательного движения ОУ (скорость изменения текущего промаха), а также ускорение изменения текущего промаха. Здесь текущий промах $h_{отн}$ определен как перпендикуляр к ЛВ.

Относительная скорость изменения текущего промаха $V_{отн} = \dot{h}_{отн}$ перпендикулярна к той же ЛВ (линейная скорость вращательного движения ОУ). Согласно [3] $V_{отн}$будет определяться как производная от произведения дальности между ОУ и ЛА (D) и углом наклона ЛВ (φ): $V_{отн} = (D\varphi)' = D\dot{\varphi}$**.** Однако в нашем случае D является переменной величиной, поэтому линейная скорость вращательного движения ОУ будет определяться следующим выражением:

$$V_{отн} = (D\varphi)' = \dot{D}\varphi + D\dot{\varphi}. \quad (3)$$

Подставляя в выражение (3) уравнение [3]

$$D\dot{\varphi} = V_ц \sin(\theta_ц - \varphi) - V_p \sin(\theta_p - \varphi), \quad (4)$$

получаем:

$$V_{отн} = V_ц \sin(\theta_ц - \varphi) - V_p (\theta_p - \varphi) + \dot{D}\varphi. \quad (5)$$

Тогда относительное ускорение сближения ОУ и ЛА можно записать в следующем виде:

$$\dot{V}_{отн} = (D\omega)' = \dot{D}\omega + D\dot{\omega}. \quad (6)$$

Дифференцируя уравнение (5), получаем

$$\dot{D}\dot{\varphi} + D\ddot{\varphi} = V_ц\dot{\theta}_ц \cos(\theta_ц - \varphi) - V_p\dot{\theta}_p \cos(\theta_p - \varphi) - \dot{\varphi}\dot{D}$$

и с учетом того, что [3]

$$-V_ц \cos(\theta_ц - \varphi) + V_p \cos(\theta_p - \varphi) = -\dot{D},$$

представим результат в следующем виде:

$$D\dot{\omega} = J_ц \cos(\theta_ц - \varphi) - J_p \cos(\theta_p - \varphi) - 2\dot{D}\omega. \quad (7)$$

Используя уравнение (7), преобразуем выражение (6):

$$\dot{V}_{отн} = J_ц \cos(\theta_ц - \varphi) - J_p \cos(\theta_p - \varphi) - \dot{D}\omega. \quad (8)$$

Таким образом, система уравнений, характеризующая относительное перемещение ОУ и ЛА, примет следующий вид:

$$\begin{cases} \dot{V}_{отн} = J_ц \cos(\theta_ц - \varphi) - J_p \cos(\theta_p - \varphi) - \dot{D}\omega, \\ \dot{h}_{отн} = V_{отн} = V_ц \sin(\theta_ц - \varphi) - V_p \sin(\theta_p - \varphi) + \dot{D}\varphi. \end{cases} \quad (9)$$

Сделаем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} G &= J_ц \cos(\theta_ц - \varphi) - J_p \cos(\theta_p - \varphi), \\ W &= V_ц \sin(\theta_ц - \varphi) - V_p \sin(\theta_p - \varphi). \end{aligned} \quad (10)$$

С учетом теории дифференциальных игр [4] общая процедура решения данного класса задач состоит из двух этапов.

1. Определение $J_p^0(t), J_ц^0(t)$ путем решения двухточечной краевой задачи или с помощью метода динамического программирования [1, 4].

2. Раздельная проверка неравенств (2) путем решения двух обычных задач управления с использованием $J_p^0(t),\ J_ц^0(t)$ в разомкнутой или замкнутой форме.

Проверка 2-го этапа необходима при установлении $\max\limits_{ЛА} \min\limits_{ОУ} h(t_к)$ решения дифференциальной игры поведения ОУ и ЛА. Проверочный этап 2 приводит к необходимым условиям второго порядка [4], согласно которым для того, чтобы выполнялся минимум промаха $h(t_к)$ по управлению $J_p^0(t)$, необходимо, чтобы выполнялось неравенство:

$$\partial^2 H / \partial J_p{}^2 \geq 0\,, \tag{11}$$

а для выполнения максимума промаха $h(t_к)$ по управлению $J_ц^0(t)$ необходимо выполнение другого неравенства:

$$\partial^2 H / \partial J_ц{}^2 \leq 0\,. \tag{12}$$

Как было сказано ранее, решение двухточечной краевой задачи начинается с построения вспомогательной функции (гамильтониана), которая объединяет критерий качества (1) с ограничениями (10), используя систему неопределенных множителей $\lambda_\omega, \lambda_\varphi$:

$$H = \lambda_\omega (G - \dot{D}\omega) + \lambda_\varphi (W + \dot{D}\varphi). \tag{13}$$

Здесь неопределенные множители $\lambda_\omega, \lambda_\varphi$ неизвестны на момент постановки задачи. Как известно из [4], функция Гамильтона по определению есть полная энергия перемещения ОУ и ЛА. Следовательно, размерность функции Гамильтона (13) будет определяться $\left[м^2 / c^2 \right]$. Таким образом, множитель λ_ω выражается в $[м]$ и характеризует обобщенное расстояние между ОУ и ЛА (обобщенная координата системы), а размерность множителя λ_φ составляет $[м/c]$ и он характеризует обобщенный импульс системы ОУ – ЛА. Для определения изменения множителей $\lambda_\omega, \lambda_\varphi$ составим сопряженную систему уравнений:

$$\begin{cases} \dot{\lambda}_\varphi = -\partial H / \partial (D\varphi), \\ \dot{\lambda}_\omega = -\partial H / \partial (D\omega). \end{cases} \tag{14}$$

Так как дифференцирование в уравнениях (14) ведется по переменным φ и ω, то значение D в обоих уравнениях можно вынести за знак дифференциала. Дифференцируя гамильтониан (13) по ω, получаем

$$\dot{\lambda}_\omega = \left(\dot{D} \lambda_\omega \right) / D$$

и, перенося функцию λ_ω в левую часть, представляем дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными λ_ω и D [5] в виде:

$$\dot{\lambda}_\omega / \lambda_\omega = D / \dot{D}\,. \tag{15}$$

Для того чтобы получить выражение для λ_ω, необходимо проинтегрировать левую и правую части уравнения (15)

$$\ln \lambda_\omega = \ln D + \ln C_1\,,$$

где C_1 – постоянная интегрирования. С учетом $\lambda_\omega(t_к) = D_к$, значение постоянной интегрирования равно единице. Следовательно, выражение для функции λ_ω примет вид:

$$\lambda_\omega = D\,. \tag{16}$$

Для определения функции λ_φ продифференцируем гамильтониан (13) по переменной φ:

$$\dot{\lambda}_\varphi = -\left[G_\varphi \lambda_\omega + \lambda_\varphi \left(-V_ц \cos(\theta_ц - \varphi) + V_p \cos(\theta_p - \varphi) + \dot{D} \right) \right] / D, \tag{17}$$

но с учетом того, что

$$-V_ц \cos(\theta_ц - \varphi) + V_p \cos(\theta_p - \varphi) = -\dot{D}\,,$$

выражение (17) запишем как:

$$\dot{\lambda}_\varphi = -\lambda_\omega G_\varphi\,, \tag{18}$$

где $G_\varphi = J_p \sin(\theta_p - \varphi) - J_ц \sin(\theta_ц - \varphi)$.

Интегрируя (18), с учетом (16) получаем следующее выражение:

$$\lambda_\varphi = \int\limits_0^t \left(J_p \sin(\theta_p - \varphi) - J_ц \sin(\theta_ц - \varphi) \right) dt + C_2\,, \tag{19}$$

где C_2 – постоянный коэффициент интегрирования дифференциального уравнения (19).

Используя начальное условие $\lambda_\varphi(t_к) = 0$ и подставляя его в уравнение (19), получаем следующий результат:

$$\lambda_\varphi = -\int\limits_t^{t_к} \left(J_p \sin(\theta_p - \varphi) - J_ц \sin(\theta_ц - \varphi) \right) dt\,.$$

После составления гамильтониана и расчета множителей $\lambda_\omega, \lambda_\varphi$ необходимо определить оптимальные управления $J_p^0(t), J_ц^0(t)$, которые будут доставлять экстремумы функции Гамильтона (13). С этой целью необходимо решить следующую систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \partial H / \partial J_ц = 0, \\ \partial H / \partial J_p = 0. \end{cases} \qquad (20)$$

Дифференцируя функцию Гамильтона (13) по переменной J_p, с учетом того, что $V_p = J_p / \dot{\theta}_p$; $V_ц = J_ц / \dot{\theta}_ц$, получаем следующее уравнение:

$$-DY_1 - X_1 \cdot Z_1 + \left(J_ц{}^0 \cdot X_2 - J_p{}^0 \cdot X_1 + \dot{D}\varphi\right) \cdot Z_2 = 0, \quad (21)$$

где сделаны следующие обозначения:

$X_1 = \sin(\theta_p - \varphi) / \dot{\theta}_p$, $X_2 = \sin(\theta_ц - \varphi) / \dot{\theta}_ц$,

$Y_1 = \cos(\theta_p - \varphi)$, $Y_2 = \cos(\theta_ц - \varphi)$,

$$Z_1 = -\int_t^{t_к} \left(J_p{}^0 \sin(\theta_p - \varphi) - J_ц{}^0 \sin(\theta_ц - \varphi)\right) dt,$$

$$Z_2 = -\int_t^{t_к} \sin(\theta_p - \varphi)\, dt.$$

Аналогичным образом дифференцируем функцию Гамильтона (16) по переменной $J_б$. После преобразований получим следующее уравнение:

$$DY_2 + X_2 \cdot Z_1 - \left(J_ц{}^0 \cdot X_2 - J_p{}^0 \cdot X_1 + \dot{D}\varphi\right) \cdot Z_3 = 0, \quad (22)$$

где $Z_3 = -\int_t^{t_к} \sin(\theta_ц - \varphi)\, dt$.

Таким образом, систему дифференциальных уравнений (20) с учетом (21,22) перепишем в виде:

$$\begin{cases} Z_4 \cdot Z_2 - X_1 \cdot Z_1 = DY_1, \\ -X_2 \cdot Z_1 + Z_4 \cdot Z_3 = DY_2, \end{cases} \qquad (23)$$

где $Z_4 = J_ц{}^0 \cdot X_2 - J_p{}^0 \cdot X_1 + \dot{D}\varphi$.

Окончательно выражения оптимальных управлений примут вид:

$$J_p^0 \sin\left(\theta_p - \varphi\right) = \frac{\dot{\theta}_p \dot{\theta}_ц}{\dot{\theta}_p - \dot{\theta}_ц}\left(\dot{D}\varphi - Z_4\right) - \frac{\dot{\theta}_p \dot{Z}_1}{\dot{\theta}_p - \dot{\theta}_ц}. \quad (24)$$

$$J_ц^0 \sin\left(\theta_ц - \varphi\right) = \frac{\dot{\theta}_p \dot{\theta}_ц}{\dot{\theta}_p - \dot{\theta}_ц}\left(\dot{D}\varphi - Z_4\right) - \frac{\dot{\theta}_ц \dot{Z}_1}{\dot{\theta}_p - \dot{\theta}_ц}. \quad (25)$$

Таким образом, оптимальные стратегии $J_p^0, J_ц^0$ будут определяться следующими величинами: направлениями полета ОУ и ЛА, текущим значением D, угловыми скоростями вращения $\dot{\theta}_p, \dot{\theta}_ц$, а также углом ЛВ φ.

Существование решений (24), (25) не означает, что седловая точка достижима. Как известно из [4], в теории оптимального управления различают теоретико – игровую седловую точку и седловую точку в дифференциальном исчислении, при этом два типа седловых точек могут не совпадать.

Для того чтобы стратегии $J_p^0, J_ц^0$ (24). (25) являлись теоретико–игровой точкой, нужно, чтобы они удовлетворяли необходимым условиям (11), (12). С этой целью продифференцируем еще раз выражения (24), (25). После выполнения данной математической операции для выполнения условия $\max\limits_{ОУ} \min\limits_{ЛА} h(t_к)$ неравенства (11), (12) можно переписать в следующем виде:

$$\begin{cases} -2X_1 \cdot Z_2 \ge 0, \\ -2X_2 \cdot Z_3 \le 0. \end{cases} \qquad (26)$$

Для того чтобы выполнялось первое неравенство (26), необходимо выполнение следующих условий: $\dot{\theta}_p \ge 0$, но $\sin(\theta_p - \varphi) \ge 0$, $Z_2 \ge 0$ или $\sin(\theta_p - \varphi) \le 0$, $Z_3 \le 0$, но при этом также $\dot{\theta}_p \ge 0$, Математически данные варианты можно представить в виде условия для ОУ:

$$\dot{\theta}_p \ge 0, \ (\theta_p - \varphi) \in]0;\, 2\pi[. \qquad (27)$$

Проводя аналогичные рассуждения со вторым неравенством системы (26), приходим к аналогичному условию для ЛА:

$$\dot{\theta}_ц \le 0, \ (\theta_ц - \varphi) \in]0;\, 2\pi[. \qquad (28)$$

Для понимания полученного условия (27) интерпретируем его в графическом виде. На рисунке 2 изображено взаимное перемещение ОУ и ЛА, при котором со стороны ОУ выполняется условие (27).

Разобьем условно все пространство вокруг ОУ и ЛА на четыре сектора I…IV. Анализируя вид полученных траекторий, можно сделать ряд выводов.

1. Если ЛА совершает маневр в секторе I, то для обеспечения условия (27) ОУ должен совершать наведение по кривой погони. Это приводит [6] к увеличению требуемых перегрузок в районе точки встречи.

2. При полете ЛА в секторе II для

обеспечения условия (27) ОУ, с одной стороны, стремится совершать наведение по траектории, близкой к кривой погони, с другой – он может заходить ЛА в хвост с любой из сторон (на рисунке 2 ОУ заходит справа), так как другие требования к траектории наведения кроме выполнения условия (27) отсутствуют. В результате увеличиваются значения требуемых поперечных ускорений в районе точки встречи, а также время наведения ОУ.

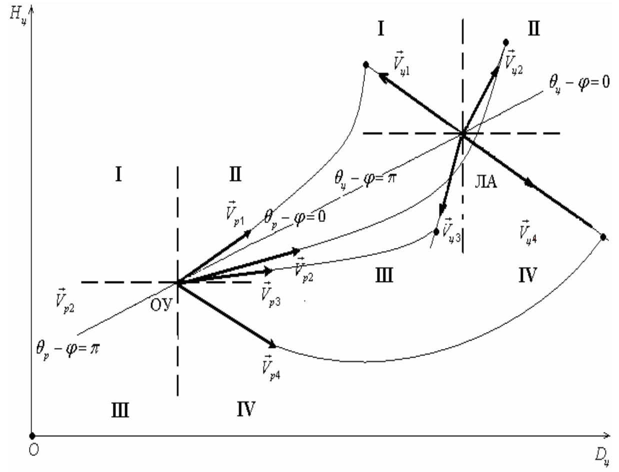


Рисунок 2

3. В случае когда ЛА пытается уйти от преследования ОУ в направлении сектора III, так же как и в ранее рассмотренных случаях, необходимое условие (27) диктует ОУ совершать полет по кривой погони, что в свою очередь приводит к резкому увеличению требуемых перегрузок в районе точки встречи.

4. При уходе ЛА в сектор IV траектория наведения ОУ также близка к кривой погони, что ведет к увеличению требуемых перегрузок в районе точки встречи. При этом для того, чтобы отодвинуть по времени момент схода ОУ с траектории, то есть уменьшить величину промаха, необходимо уменьшать произведение скоростей ОУ и ЛА [6].

5. Следует обратить внимание, что при маневре ЛА в секторах II, IV (при стрельбе вдогон), чтобы обеспечить выполнение необходимого условия (27), а также для гарантированной встречи двух игроков, ОУ требуется выполнение условия $V_p / V_ц > 2$.

Далее рассмотрим, какие должны быть оптимальные стратегии поведения ЛА, которые будут обеспечивать выполнение необходимого условия (28). На рисунке 3 представлено противоборство двух игроков, при котором со стороны ЛА выполняется условие (28).

Из анализа рисунка следует, что для обеспечения максимального конечного промаха, ЛА может уходить от преследования ОУ в любом из направлений $\vec{V}_{ц1}, \vec{V}_{ц2}\ \vec{V}_{ц3}\ \vec{V}_{ц4}$, но при этом на всем протяжении уклонения от преследования скорость изменения угла визирования $\dot{\theta}_ц$ должна иметь отрицательное значение.

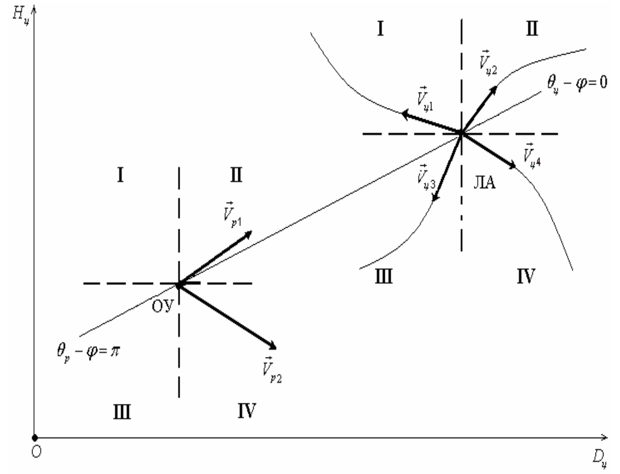


Рисунок 3

Далее рассмотрим, в каких случаях полученные оптимальные стратегии $J_p^0, J_ц^0$ (24), (25) будут являться седловой точкой в дифференциальном исчислении. Из [4] известно, что $J_p^0, J_ц^0$ будут являться седловой точкой в дифференциальном исчислении, если будет выполняться неравенство:

$$\left(\partial^2 H / \partial J_ц^{\,2}\right)\left(\partial^2 H / \partial J_p^{\,2}\right) - \left(\partial^2 H / \partial J_ц \partial J_p\right)^2 \le 0\,. \quad (29)$$

Дифференцируя функцию Гамильтона (13) первоначально по переменной J_p, затем по $J_ц$ получаем:

$$\partial^2 H / \partial J_ц \partial J_p = X_2 Z_2 + X_1 Z_3\,. \quad (30)$$

Подставляя выражения вторых производных функции Гамильтона по переменной J_p, $J_ц$, а также (30) в неравенство (29), получаем следующий результат:

$$4 X_1 X_2 Z_2 Z_3 - \left(X_2 Z_2 + X_1 Z_3\right)^2 \le 0. \quad (31)$$

Ряд преобразований выражения (31) приводит к виду:

$$-\left(X_2 Z_2 - X_1 Z_3\right)^2 \le 0. \quad (32)$$

Анализ неравенства (32) показывает, что оно справедливо при любых значениях $\theta_ц, \dot{\theta}_ц, \theta_p, \dot{\theta}_p$. Таким образом, стратегии $J_p^0, J_ц^0$ [выражения (24), (25)] являются седловой точкой в дифференциальном исчислении.

Из [4] известно, что два типа седловых

точек будут совпадать, если:

$$\partial^2 H \big/ \partial J_ц \partial J_p = 0 .$$

Приравнивая выражение (30) к нулю, получаем

$$X_2 Z_2 = -X_1 Z_3 , \qquad (33)$$

и, проводя ряд преобразований, приходим к следующему результату:

$$\dot{\theta}_p = \Phi_1 \cdot \dot{\theta}_ц , \qquad (34)$$

где $\Phi_1 = -\dfrac{Z_2 \cdot \sin\left(\theta_ц - \varphi\right) \int_t^{t_н} \sin\left(\theta_p - \varphi\right) dt}{Z_3 \cdot \sin\left(\theta_p - \varphi\right) \int_t^{t_н} \sin\left(\theta_ц - \varphi\right) dt}$.

Таким образом, стратегии $J_p^0, J_ц^0$ (24), (25) с учетом уравнения (34) будут являться как теоретико – игровой седловой точкой, так и седловой точкой в дифференциальном исчислении дифференциальной игры преследования ОУ и ухода от погони ЛА.

Докажем, что для данной дифференциальной игры преследования ОУ и ухода от преследования ЛА справедливо равенство:

$$\max_{ЛА} \min_{ОУ} h(t_к) = \min_{ОУ} \max_{ЛА} h(t_к) . \qquad (35)$$

Для этого рассмотрим ситуацию, когда $\max_{ЛА} \min_{ОУ} h(t_к)$. При этом ЛА в процессе уклонения строит свою стратегию на основе априорной информации, получаемой от станции предупреждения о пуске ОУ [7]. По данным этой станции, ЛА способен фиксировать момент пуска по нему ОУ, определять тип, а также оценивать параметры движения ОУ.

Дифференцируя функцию Гамильтона (13) первоначально по переменной $J_ц$, затем по J_p, получаем:

$$\partial^2 H \big/ \partial J_p \partial J_ц = X_2 Z_2 + X_1 Z_3 . \qquad (36)$$

Таким образом, анализируя выражения (30), (33), (36), а также траектории ОУ и ЛА, изображенные на рисунках 2 и 3, можно сформулировать ряд выводов.

1. В дифференциальной игре поведения ОУ и ЛА оптимальные стратегии $J_p^0, J_ц^0$ (24), (25) являются седловой точкой, при этом выполняется равенство $\max_{ОУ} \min_{ЛА} h(t_к) = \max_{ЛА} \min_{ОУ} h(t_к)$. Выигрыш (цена игры) равен $X_2 Z_2 + X_1 Z_3$.

2. Седловое решение достижимо, если:

- верно равенство в выражении (33), которое означает, что ОУ и ЛА должны совершать полет с углами упреждения:
$$\sin\left(\theta_p - \varphi\right) = -\sin\left(\theta_ц - \varphi\right);$$
- траектории полета ОУ и ЛА должны быть такими, чтобы выполнялось равенство $\dot{\theta}_p = \dot{\theta}_ц$. Если учесть, что располагаемые ускорения ОУ в несколько раз превышают предельно допустимые боковые ускорения ЛА, то задача обеспечения максимального конечного промаха со стороны ЛА является трудно разрешаемой.

Экспериментальная часть. Проверка эффективности полученного алгоритма самонаведения (26) и сравнение его с методом пропорционального наведения осуществлялись с помощью имитационного моделирования, которое было направлено на выявление особенностей функционирования полученного метода в различных ситуациях.

В качестве показателей эффективности самонаведения использовались текущие значения промахов. Текущий промах наведения в каждой плоскости управления определялся выражением [6]:

$$h \approx D^2 \cdot \omega_P / V_{сб} . \qquad (37)$$

На рисунке 4 приведены зависимости относительных текущих промахов h_t/h_0 от времени для двух объектов управления, один из которых (обозначен цифрой 1) использует традиционное пропорциональное самонаведение, а второй– синтезированный алгоритм (24) (обозначенный цифрой 2), где h_0-максимальное значение текущего промаха.

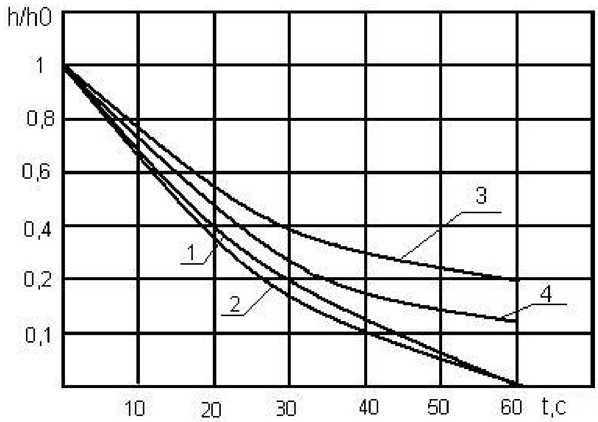


Рисунок 4

При этом ЛА – неманеврирующий. Там же представлены аналогичные зависимости относительных текущих промахов h_t/h_0 от времени для двух объектов управления, когда маневрирующий ЛА движется с ускорением при использовании метода традиционного пропорционального самонаведения (обозначен цифрой 3), 4-синтезированный алгоритм (24) (обозначен цифрой 4).

Из анализа рисунка 4 следует, что при наведении ОУ на маневрирующие ЛА полученным алгоритмом (24) значения конечного промаха на 10…20 % меньше по сравнению с традиционным методом пропорционального самонаведения.

Выводы. Таким образом, была рассмотрена дифференциальная игра преследования ОУ и ухода от погони ЛА, где в качестве критерия учитывался только минимаксный конечный промах и не учитывались энергетические затраты на управление. Основной недостаток предложенного подхода в том, что характер поведения ОУ и ЛА определяется только значениями и знаком таких величин, как $\theta_p - \varphi$, $\theta_ц - \varphi$, $\dot{\theta}_p, \dot{\theta}_ц$. Результаты исследования показали, что при наведении на неманеврирующие ЛА полученный алгоритм имеет те же показатели эффективности, что и традиционный метод пропорционального самонаведения, однако полученный алгоритм более эффективен при наведении на маневрирующие ЛА.

Библиографический список

1. *Канащенков А.И., Меркулов В.И.* Авиационные системы радиоуправления. Т.1. - М.: Радиотехника, 2003. - С. 190.

2. Авиация ПВО России и научно-технический прогресс. Боевые комплексы и системы вчера, сегодня, завтра / под ред. Е.А. Федосова. – М.: Дрофа, 2005. - С. 815.

3. *Канащенков А.И., Меркулов В.И.* Авиационные системы радиоуправления. Т.2. - М.: Радиотехника, 2003. - С. 389.

4. *Брайсон А., Хо Ю – Ши.* Прикладная теория оптимального управления. - М.: МИР,1972. - С. 544.

5. *Ванько В.И., Ермошина О.В.* Вариационное исчисление и оптимальное управление. - М.: МГТУ им. Баумана, 2001. - С. 487.

6. *Вейцель В.А.* Радиосистемы управления. – М.: Дрофа, 2005. - С. 415.

7. *Зимин Г.В.* Справочник офицера противовоздушной обороны. - М.: Воениздат, 2001. - С.510.

УДК 629.783

С.Н. Бузыканов

АЛГОРИТМ ОБРАБОТКИ РЕЗУЛЬТАТОВ ТРАЕКТОРНЫХ ИЗМЕРЕНИЙ В ВЕСОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ СОБОЛЕВА

Рассмотрена задача определения траектории движения космического аппарата с применением обработки измерений в весовом пространстве Соболева W_2^1. Предложена структурная схема системы обработки, и обоснован алгоритм определения оптимального с точки зрения минимума среднеквадратической ошибки определения параметров движения весового коэффициента α, что позволяет снизить влияние ошибок в каналах измерений по сравнению с аналогичными системами в пространстве L_2. Показано, что для моделируемых систем выигрыш может составлять 30 %..

Ключевые слова: *весовое пространство Соболева W_2^1, определение траектории движения космического объекта.*

Введение. В практике космических полетов наибольшее распространение получило определение орбит и параметров движения космических аппаратов (КА) с использованием внешнетраекторных измерений (ВТИ). Появление понятия ВТИ объясняется тем, что получаемая в результате измерительная информация прямо или косвенно связана с траекторией движения или параметрами орбит КА.

В общем случае для определения вектора состояния КА в каждый момент времени необходимы шесть независимых соотношений, связывающих составляющие вектора скорости и координаты в этот момент с результатами измерений [1]. Это справедливо, если все измерения абсолютно достоверны, а формулы связи точны, однако на практике эти условия соблюсти очень сложно. На полученные результаты накладываются различные случайные ошибки измерений, которые в процессе математической обработки должны быть нивелированы, а грубые – по возможности выявлены и исключены. Другой особенностью служит наличие избыточности получаемых данных, что связано с особенностями реальной работы технических средств. Наличие указанных особенностей делает задачу определения орбиты КА недетерминированной, и для ее решения используют различные статистические методы [2…5].

При математической обработке результатов измерений наибольшее распространение получил метод наименьших квадратов. Сущность данного метода заключается в аналитическом представлении искомой функциональной зависимости, т.е. в отыскании такого соотношения, которое бы наилучшим образом описывало полученные результаты измерений. Особенностью задачи является то, что наличие случайных ошибок измерений делает нецелесообразным определение «строгой» зависимости, которая включала бы все опытные значения. Другими словами, график искомой функции не должен обязательно проходить через все имеющиеся измеренные точки. В основе метода лежит принцип наименьших квадратов [1]: «наивероятнейшим» значением, которое можно получить из ряда измерений одинаковой точности, является такое значение, для которого сумма квадратов разностей этого значения и результатов измерений является наименьшей. Для повышения точности используемых методов целесообразно ввести предварительную обработку, обеспечивающую снижение дисперсии измерений.

Цель работы: разработка и анализ алгоритма предварительной обработки траекторных измерений в весовом пространстве Соболева W_2^1.

Теоретические исследования. При разработке алгоритмов обработки ВТИ обычно по умолчанию предполагается, что вся работа ведется в пространстве L_2. Однако данное пространство не учитывает наличия дополнительной информации, которая зачастую присутствует при измерениях: информации об изменении измеряемой величины. Рассмотрим особенности задачи обработки ВТИ в более соответствующем данному случаю пространстве - весовом пространстве Соболева W_2^1 [6,7]. Весовое пространство Соболева определяется скалярным произведением функций в виде:

$$\big(f(x), g(x)\big)_W = (1-\alpha)\int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x)dx + \\ +\alpha\int_{-\infty}^{\infty}\frac{df(x)}{dx}\frac{dg(x)}{dx}dx, \tag{1}$$

где $0 \le \alpha < 1$ - коэффициент весового пространства Соболева [6].

Определим возможность применения данного пространства для ослабления действия аддитивных шумов, определяемых неточностью систем измерений. Пусть в системе измерения присутствуют два независимых канала: канал непосредственно измеряемой величины (например, угла визирования) и канал измерения ее производной (рисунок 1, где, $n_1(t)$, $n_2(t)$, $n_{вых}(t)$ – реализации аддитивных шумов, действующих в каналах непосредственного измерения и производной, а также на выходе системы соответственно; $f_{вых1}(t)$ - сигнал на выходе системы, K_1 и K_2 - фильтры обработки).

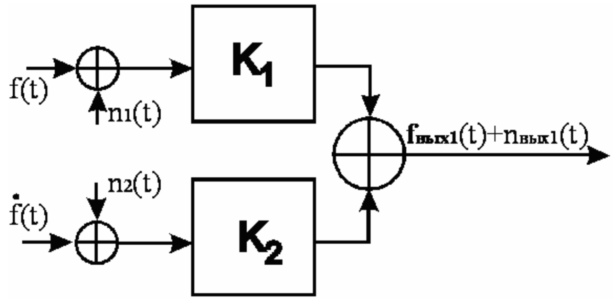


Рисунок 1 - Двухканальная система обработки результатов измерений

Данная система отражает реальную ситуацию, когда, например, мы измеряем угол визирования КА и скорость его изменения при оптических и инфракрасных измерениях. При этом для получения некоррелированных ошибок целесообразно производить измерения в каждом канале в разных диапазонах, например, саму величину измерять в оптическом диапазоне, а ее производную в инфракрасном или наоборот.

На вход системы подаются результаты измерений – отсчеты функций f_n и f'_n, взятые через равные промежутки времени. Таким образом, работа системы сводится к решению классической задачи восстановления сигнала на основе его отсчетов (теорема Котельникова). Как показано в [7], решение данной задачи в весовом пространстве Соболева W_2^1 имеет вид:

$$f_в(t) = \pi\sqrt{\frac{1-\alpha}{\alpha}}\sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n \exp\left(-\sqrt{\frac{1-\alpha}{\alpha}}\left|t-n\Delta t_Д\right|\right) + \\ +\pi\sum_{n=-\infty}^{\infty} sign(t-n\Delta t_Д)f'_n \exp\left(-\sqrt{\frac{1-\alpha}{\alpha}}\left|t-n\Delta t_Д\right|\right), \tag{2}$$

или в спектральной области

$$S(w) = \frac{1-\alpha}{1-\alpha+\alpha w^2}\sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n \exp(-jwn\Delta t) - \\ -\frac{jw\alpha}{1-\alpha+\alpha w^2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\dot{f}_n \exp(-jwn\Delta t). \tag{3}$$

Из (2) следует, что предложенный алгоритм восстановления функции $f(t)$ позволяет провести распараллеливание операций обработки в каналах сигнала и производной.

Рассмотрим применение данного алгоритма для систем обработки ВТИ. Пусть нам известны отсчеты измеряемой величины и ее производной в определенные моменты времени. В частности, такой величиной может являться скорость КА и ее изменение, местоположение КА и его скорость, угловое значение линии визирования КА и ее изменение и т.д. Точное восстановление любой из перечисленных величин позволит определить орбиту КА, т. е. выбор исследуемой величины следует проводить исходя из имеющихся в наличии средств измерений. Рассмотрим прохождение сигналов аддитивных ошибок, возникающих в процессе измерения величины $f(t)$ через систему обработки в весовом пространстве Соболева W_2^1. В этом случае измеряемые отсчеты можно представить в виде:

$$\tilde{f}_k = f_k + n1_k\,,\ \tilde{f}'_k = f'_k + n2_k\,,$$

где f_k и f'_k - точные значения измеряемой величины и скорости ее изменения, $n1_k$ и $n2_k$ - аддитивные шумы в канале измерения величины и канале измерения производной (скорости изменения) соответственно.

В результате на выходе системы имеем:

$$\begin{gathered} f_{вых}(t) = f(t) + \\ +\pi\sqrt{\frac{1-\alpha}{\alpha}}\sum_{k=-\infty}^{\infty} n1_k \exp\left(-\sqrt{\frac{1-\alpha}{\alpha}}\left|t-k\Delta t_Д\right|\right) + \\ +\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty} sign(t-k\Delta t_Д)\, n2_k \exp\left(-\sqrt{\frac{1-\alpha}{\alpha}}\left|t-k\Delta t_Д\right|\right), \end{gathered} \tag{4}$$

т.е. аддитивная смесь точной угловой траектории и помеховой составляющей, определяемой неточностями измерений. Следовательно, исходя из выражения (4), критерий минимума среднеквадратической ошибки определения параметров движения при нулевом математическом ожидании шумов сводится к минимуму дисперсии ошибки на выходе системы обработки. В спектральной области выражение (4) принимает вид:

$$\begin{gathered} F_{вых}(w) = F(w) + \frac{1-\alpha}{1-\alpha+\alpha w^2}\sum_{k=-\infty}^{\infty} n1_k \exp(-jwk\Delta t) - \\ -\frac{jw\alpha}{1-\alpha+\alpha w^2}\sum_{k=-\infty}^{\infty} n2_k \exp(-jwk\Delta t), \end{gathered} \tag{5}$$

или

$$\begin{gathered} F_{вых}(w) = F(w) + \frac{1-\alpha}{1-\alpha+\alpha w^2}N_1(w) - \\ -\frac{jw\alpha}{1-\alpha+\alpha w^2}N_2(w), \end{gathered} \tag{6}$$

где $N_1(w)$ и $N_2(w)$ - спектр реализаций шума $n_1(t)$ и $n_2(t)$ соответственно. Если считать шумы $n_1(t)$ и $n_2(t)$ стационарными нормальными случайными процессами, некоррелированными между собой, то дисперсия шумов на выходе системы обработки результатов измерений будет иметь вид:

$$\begin{gathered} \sigma_ш^2 = \int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{1-\alpha}{1-\alpha+\alpha w^2}\right|^2 G_1(w)dw + \\ +\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{jw\alpha}{1-\alpha+\alpha w^2}\right|^2 G_2(w)dw, \end{gathered} \tag{7}$$

где $G_1(w)$, $G_2(w)$ - СПМ шумов $n_1(t)$ и $n_2(t)$ соответственно. Тогда на выходе системы обработки получим:

$$\begin{gathered} \sigma_ш^2 = \frac{1}{4\pi F_{\max}}\int_{-2\pi F_{\max}}^{2\pi F_{\max}}\left|\frac{1-\alpha}{1-\alpha+\alpha w^2}\right|^2 G_1(w)dw + \\ +\frac{1}{4\pi F_{\max}}\int_{-2\pi F_{\max}}^{2\pi F_{\max}}\left|\frac{jw\alpha}{1-\alpha+\alpha w^2}\right|^2 G_2(w)dw, \end{gathered} \tag{8}$$

где $\left[-F_{\max}, F_{\max}\right]$ - полоса пропускания системы обработки. Раскрыв в (8) модуль, преобразуем данное выражение к виду:

$$\sigma_ш^2 = \frac{1}{4\pi F_{\max}}\int_{-2\pi F_{\max}}^{2\pi F_{\max}}\frac{(1-\alpha)^2 G_1(w) + w^2\alpha^2 G_2(w)}{\left(1-\alpha+\alpha w^2\right)^2}dw\,. \tag{9}$$

Для определения оптимального значения α, минимизирующего среднеквадратическую ошибку (СКО) отклонения измеренной траектории от реальной, возьмем производную подынтегрального выражения и приравняем ее к нулю:

$$\begin{gathered} \frac{d\left(\dfrac{(1-\alpha)^2 G_1(w) + w^2\alpha^2 G_2(w)}{\left(1-\alpha+\alpha w^2\right)^2}\right)}{d\alpha} = \\ = 2w^2\frac{\alpha\left(G_1(w)+G_2(w)\right) - G_1(w)}{\left(1-\alpha+\alpha w^2\right)^3} = 0. \end{gathered} \tag{10}$$

В результате для грубой оценки, при условии $w^2 - 1 >> 1$, получим:

$$\alpha_{opt} = \frac{\int\limits_{-2\pi F_{\max}}^{2\pi F_{\max}} G_1(w)dw}{\int\limits_{-2\pi F_{\max}}^{2\pi F_{\max}} G_1(w) + G_2(w)dw}, \quad (11)$$

а выражение (9) преобразуется к виду:

$$\sigma_{ш}^2 = \frac{1}{4\pi F_{\max}} \int\limits_{-2\pi F_{\max}}^{2\pi F_{\max}} \frac{G_1(w)G_2(w)}{G_1(w)w^2 + G_2(w)} dw. \quad (12)$$

Если шумы обладают равномерной СПМ (белый шум) $G_1(w) = G_2(w) = G$, тогда выражение (7) можно записать в виде:

$$\sigma_{ш}^2 = G \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{(1-\alpha)^2 + w^2\alpha^2}{\left(1-\alpha+\alpha w^2\right)^2} dw = G * A(\alpha), \quad (13)$$

где $A(\alpha) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{(1-\alpha)^2 + w^2\alpha^2}{\left(1-\alpha+\alpha w^2\right)^2} dw$ - функционал, зависящий только от значения α. Нормированная к значению $A(0)$ зависимость данного функционала от коэффициента α приведена на рисунке 2.

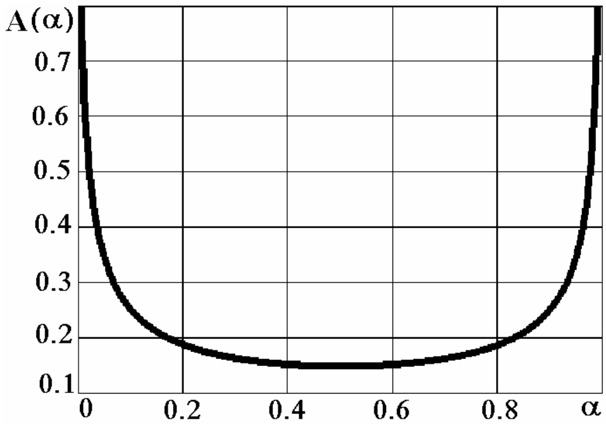


Рисунок 2- Зависимость значения коэффициента $A(\alpha)$ от α

Из анализа рисунка 2 видно, что в этом случае обработка результатов измерений в весовом пространстве Соболева позволит снизить дисперсию шума до 10 раз.

При идентичности шумов в каналах обработки $G_1(w) = G_2(w)$ получим $\alpha_{opt} = 0.5$. В этом случае выражения (12) и (13) преобразуются к виду:

$$\sigma_{ш}^2 = \frac{1}{4\pi F_{\max}} \int\limits_{-2\pi F_{\max}}^{2\pi F_{\max}} \frac{1}{w^2+1} dw = \frac{\arctan(2\pi F_{\max})}{2\pi F_{\max}}. \quad (14)$$

На рисунке 3 приведены зависимости дисперсии шумов на выходе системы $\sigma_{ш}^2$ от ширины полосы пропускания $F_{\max}$. Из анализа рисунка следует, что с ростом ширины пропускания системы обработки дисперсия шумов на выходе падает по экспоненциальному закону.

Экспериментальные исследования. Для проведения практического эксперимента были промоделированы результаты наблюдений за КА с помощью телескопа. На рисунке 4 приведена фотография звездного неба с выделяющимся КА.

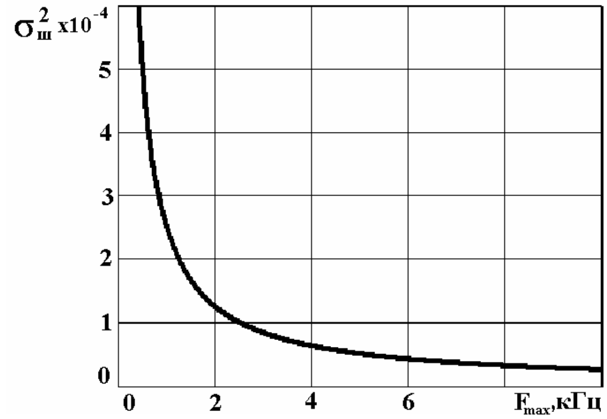


Рисунок 3 - Зависимость значения дисперсии шумов на выходе системы $\sigma_{ш}^2$ от ширины полосы пропускания $F_{\max}$

Рисунок 4 – Фотография звездного неба, снятого с помощью телескопа (полет спутника Iridium)

В результате последовательности наблюдений получаем несколько кадров со смещающейся отметкой КА. Результат моделирования таких наблюдений с учетом неточности измерений представлен на рисунке 5.

Для приведенной реализации наблюдений были проведены исследования по оценке оптимального значения α. Результаты исследований приведены на рисунке 6, где 1 - нормированная СКО измеренной величины, 2 - нормированная СКО после фильтрации в весовом пространстве Соболева W_2^1.

Из анализа рисунка 6 видно, что уменьшение СКО определения траектории движения КА может достигать 60 %.

Статистические исследования предложенного алгоритма были проведены при следующих условиях: с помощью разработанной независимо модели наблюдения полета КА были получены отдельные реализации, имитирующие результаты на выходе телескопа.

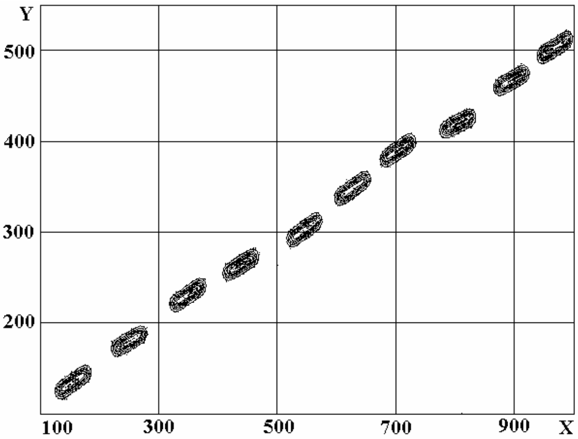


Рисунок 5 – Результат моделирования наблюдений

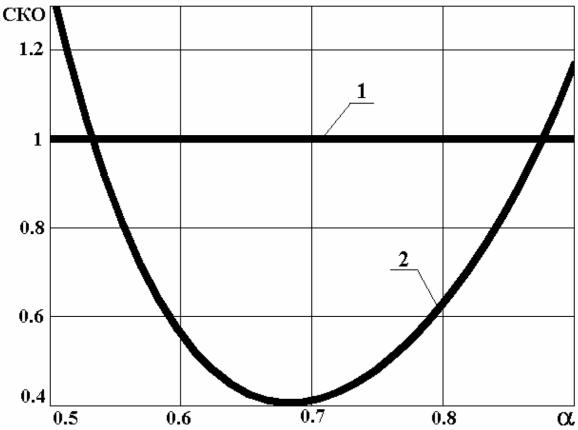


Рисунок 6 – Зависимости СКО измеренной величины от коэффициента α

На рисунке 7 приведены зависимости средней нормированной СКО определения траектории КА от значения коэффициента α при обработке 100 реализаций наблюдения.

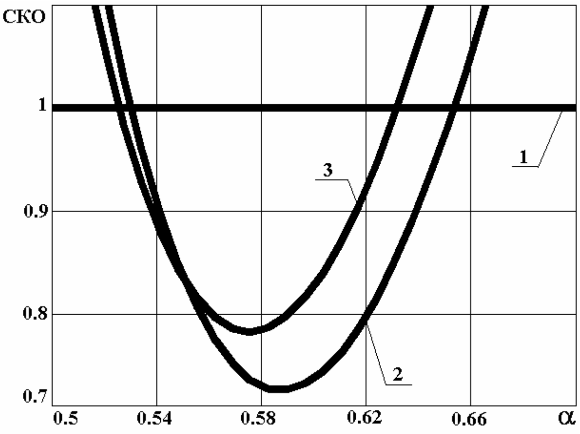


Рисунок 7 – Результат статистических исследований предлагаемого алгоритма

Кривая 1 соответствует обработке сигналов в пространстве L_2, кривая 2 - обработке сигналов в пространстве W_2^1 при СКО исходных измерений $\sigma = 10$, кривая 3 - обработке сигналов в пространстве W_2^1 при СКО исходных измерений $\sigma = 15$. Из анализа рисунка следует, что применение предложенного алгоритма позволяет снизить СКО на 25-30 %.

Выводы. Таким образом, в результате проведенных исследований показано, что применение обработки результатов ВТИ в весовом пространстве Соболева позволит снизить среднеквадратическую ошибку на 25-30 % по сравнению с алгоритмами, основанными на обработке сигналов в пространстве L_2. Отличительной особенностью предложенного алгоритма является то, что значение оптимального весового коэффициента α определяется только отношением СПМ шумов в каналах измерения, т.е. такая система обработки обладает робастными свойствами по отношению к априорной информации о СПМ измеряемой величины. Применение данного алгоритма возможно для различных схем проведения ВТИ: например, измерение угла места визирования в оптическом диапазоне, а скорости изменения данного угла - в инфракрасном; или определение координат КА в оптическом диапазоне, а скорости КА - в радиодиапазоне; или определение скорости КА в радиодиапазоне, а значений ускорений - с бортовых навигационных систем и т.д.

Работа выполнена при поддержке гранта Президента Российской Федерации для государственной поддержки молодых российских ученых МК-1581.2009.8 (договор №02.120.11.1581-МК).

Библиографический список

1. *Иванов Н.М., Лысенко Л.Н.* Баллистика и навигация космических аппаратов. -М.: 2004. - 544 с.

2. *Решетнев М.Ф.* Управление и навигация искусственных спутников Земли на околокруговых орбитах / М.Ф. Решетнев, А.А. Лебедев, В.А. Бартенев и др. – М.: Машиностроение, 1988. – 336 с.

3. *Попович П.Р.* Баллистическое проектирование космических систем / П.Р. Попович, Б.С. Скребушевский. – М.: Машиностроение, 1987. – 240 с.

4. *Аксенов Е.П.* Теория движения искусственных спутников Земли. – М.: Наука, 1977. – 360 с.

5. Основы теории полета космических аппаратов / Ред. Г.С. Нариманова, М.К. Тихонравова. – М.: Машиностроение, 1972. – 608 с.

6. *Кириллов С.Н., Бузыканов С.Н.* Алгоритм дискретного спектрального анализа сигналов в модифицированном пространстве Соболева // Автометрия. 2003. № 1. С.88-94.

7. *Кириллов С.Н., Бузыканов С.Н.* Алгоритм восстановления аналогового сигнала в модифицированном пространстве Соболева // Автометрия. 2005. № 2. С.75-80.

УДК 621.396

В.Г. Андреев

ВЕКТОРНЫЙ РЕГРЕССИОННЫЙ СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ОТРАЖЕНИЙ ОТ ВРАЩАЮЩЕГОСЯ ОБЪЕКТА

Рассмотрена задача спектрального анализа отражений от вращающегося объекта при его одновременных наблюдениях в различных диапазонах длин электромагнитных волн. Предложено использовать переопределенную векторную авторегрессионную модель. Показано, что её применение даёт возможность по короткой (два-три оборота объекта) экспериментальной выборке наблюдений выявить факт вращения и измерить его частоту. В задаче слежения за искусственным спутником Земли в трёх видимых диапазонах длин волн предложенный метод позволяет в 1,5…4 раза уменьшить относительную ошибку оценки частоты вращения объекта по сравнению с обычной векторной регрессией того же порядка p=2…5. Выигрыш достигается за счет учета ошибок линейного предсказания, выходящих за длину p лага.

Ключевые слова: *векторная линейная авторегрессия, спектр, спектральное параметрическое оценивание, векторное моделирование временных рядов, переопределённая система уравнений Юла-Уолкера, квазиобратная матрица, минимизация среднего квадрата ошибки.*

Введение. В ряде практических приложений результаты наблюдений за объектом, поступающие по M различным информационным каналам, могут быть представлены в виде реализации $\mathbf{X}$ дискретного марковского векторного M-мерного случайного процесса конечной связанности:

$$\mathbf{X}=[\mathbf{x}_0;\ \mathbf{x}_1;\ \dots;\ \mathbf{x}_t;\ \dots;\ \mathbf{x}_{T-1}],\qquad (1)$$

где $\mathbf{x}_t=[x_{0,t};\ x_{1,t};\ \dots;\ x_{m,t};\ \dots;\ x_{M-1,t}]^{\mathrm{T}}$ — M-мерный векторный t-й временной отсчёт процесса наблюдения; $x_{m,t}$ — значение t-го наблюдения в m-м канале; T — количество векторных отсчётов $\mathbf{x}_t$ в реализации $\mathbf{X}$; $m=0, 1, \dots, M-1$; $t=0, 1, \dots, T-1$; $^{\mathrm{T}}$ — знак транспонирования.

Примерами реализаций $\mathbf{X}$ таких процессов могут служить данные многочастотной локации, диагностическая или навигационная информация, поступающая от серии из $M\geq 2$ датчиков, и т.п. Ниже в качестве примера рассмотрены результаты одновременного слежения за искусственным спутником Земли в M=3 диапазонах длин видимых электромагнитных волн: красном (R), зелёном (G) и синем (B). Подобное разложение на цвета осуществляется при цифровой записи оптических наблюдений за астрономическими объектами.

Для выявления периодических изменений в реализации $\mathbf{X}$ анализируемого процесса, связанных, в частности, с вращением объекта наблюдения, эффективно применение авторегрессионных моделей [1]. При наличии нескольких каналов наблюдения обычно используют два подхода. Первый из них предполагает объединение всех M каналов путём их аддитивного взвешенного суммирования для последующего скалярного спектрального анализа. Второй подход состоит в выявлении одного канала, в котором зафиксированы наибольшие изменения интенсивности, для дальнейшей обработки. Оба этих подхода неполно используют информацию о межканальной корреляции, неявно полагая либо синхронное изменение объединяемых компонент векторного процесса, либо, при исключении $M-1$ каналов из рассмотрения, отсутствие статистической связи между каналами наблюдения. Фактически оба подхода сводят векторную задачу к скалярному спектральному анализу временного ряда $\mathbf{x}$:

$$\mathbf{x}=[x_0;\ x_1;\ \dots;\ x_t;\ \dots;\ x_{T-1}],\qquad (2)$$

где $x_t=\mathbf{w}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}_t$, $t=0, 1, \dots, T-1$; $\mathbf{w}^{\mathrm{T}}=[w_0;\ w_1;\ \dots;\ w_m;\ \dots;\ w_{M-1}]$ — весовой вектор аддитивной суммы M каналов наблюдения; $0\leq w_m\leq 1$, $m=0, 1, \dots, M-1$. При выделении только одного канала достаточно положить не соответствующие ему компоненты w_m весового вектора **w** нулевыми, а при объединении всех каналов полагается $1 \geq w_m > 0$. В частности, предположение о равном вкладе всех M компонент приводит к их простому сложению с единичными весами $w_m=1$.

Преимущества подобного перехода от векторной задачи анализа M-компонентной реализации **X** к скалярной обработке одномерного процесса **x** состоят в существенном упрощении аналитических средств и сокращении вычислительных затрат, необходимых для выявления информационных признаков из массивов наблюдений. Однако платой за подобное упрощение служит резкое снижение эффективности цифрового спектрального анализа, приводящее, в ряде случаев, к невозможности решения поставленной задачи по выявлению факта вращения объекта и измерению частоты этого вращения.

Цель работы — построение и оптимизация векторных регрессионных моделей (VAR) для задач спектрального анализа отражений от вращающихся объектов при их одновременном наблюдении в различных диапазонах длин электромагнитных волн.

Постановка задачи. Математическое описание векторного процесса **X** линейной регрессионной моделью предполагает, что текущий M-компонентный отсчёт $\mathbf{x}_t$ может быть выражен через аддитивную взвешенную сумму p предыдущих отсчётов этого процесса [2, 3]:

$$\mathbf{x}_t=\sum_{k=1}^{p}\mathbf{A}_k\mathbf{x}_{t-k}+\boldsymbol{\varepsilon}_t, \tag{3}$$

где $\boldsymbol{\varepsilon}_t$ — M-мерный вектор-столбец t-го векторного отсчёта $\boldsymbol{\varepsilon}_t=[\varepsilon_{0,t}; \varepsilon_{1,t}; \ldots; \varepsilon_{m,t}; \ldots; \varepsilon_{M-1,t}]^{\mathrm{T}}$ реализации $\boldsymbol{\varepsilon}=[\boldsymbol{\varepsilon}_0; \boldsymbol{\varepsilon}_1; \ldots; \boldsymbol{\varepsilon}_t; \ldots; \boldsymbol{\varepsilon}_{T-p-1}]$ векторного процесса ошибки линейного предсказания; $\mathbf{A}_k$ — $(M\times M)$-мерная матрица k-го коэффициента линейного предсказания. Предполагается, что векторный процесс $\boldsymbol{\varepsilon}$ ошибки представляет собой некоррелированный шум.

Для нахождения неизвестных p $(M\times M)$-мерных коэффициентов $\mathbf{A}_k$ удобно представить их как единую $(M\times pM)$-мерную матрицу $\mathbf{A}=[\mathbf{A}_1; \mathbf{A}_2; \ldots; \mathbf{A}_k; \ldots; \mathbf{A}_p]$, которая является аналогом вектора коэффициентов скалярной линейной регрессии при описании однокомпонентного процесса вида (2) [4]. Тогда уравнение (3) можно представить в следующем виде:

$$\mathbf{x}_t=\mathrm{A}\,\tilde{\mathbf{x}}_{t-1}+\varepsilon_t, \tag{4}$$

где $\tilde{\mathbf{x}}_{t-1}$ — pM-мерный вектор-столбец предыдущих $t-p$ значений реализации **X**, которые сгруппированы последовательно. Структура вектора $\tilde{\mathbf{x}}_{t-1}$ показана ниже:

$$\tilde{\mathbf{x}}_{t-1}^{\mathrm{T}}=[\,\mathbf{x}_{t-1}^{\mathrm{T}};\ \mathbf{x}_{t-2}^{\mathrm{T}};\ \ldots;\ \mathbf{x}_{t-k}^{\mathrm{T}};\ \ldots;\ \mathbf{x}_{t-p}^{\mathrm{T}}\,].$$

Для нахождения всей группы из p матричных коэффициентов **A** векторной регрессии помножим обе части уравнения (4) справа на вектор $\tilde{\mathbf{x}}_{t-1}^{\mathrm{T}*}$:

$$\mathbf{x}_t\,\tilde{\mathbf{x}}_{t-1}^{\mathrm{T}*}=\mathbf{A}\,\tilde{\mathbf{x}}_{t-1}\tilde{\mathbf{x}}_{t-1}^{\mathrm{T}*}+\boldsymbol{\varepsilon}_t\,\tilde{\mathbf{x}}_{t-1}^{\mathrm{T}*}, \tag{5}$$

где * — знак комплексного сопряжения. Усредняя (5) по t, получаем аналог скалярного уравнения Юла-Уолкера для авторегрессионного процесса в векторном виде:

$$\mathbf{k}=\mathbf{AK}+\mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{A}=\mathbf{kK}^{-1}, \tag{6}$$

где $\mathbf{k}$ — $(M\times pM)$-мерная автоковариационная матрица описываемого векторного процесса; $\mathbf{0}$ — $(M\times pM)$-мерная нулевая матрица, отражающая полагаемое отсутствие ковариации между процессом $\boldsymbol{\varepsilon}$ ошибки и отсчётами исходного процесса; $\mathbf{K}$ — $(pM\times pM)$-мерная ковариационная матрица процесса **X**, имеющая структуру теплицевой и эрмитовой блочной ленточной матрицы:

$$\mathrm{K}=\left[\begin{array}{c|c|c|c}\mathbf{K}_0 & \mathbf{K}_1 & \ldots & \mathbf{K}_{p-1}\\ \hline \mathbf{K}_1^{\mathrm{T}*} & \mathbf{K}_0 & \ddots & \vdots\\ \hline \vdots & \ddots & \ddots & \mathbf{K}_1\\ \hline \mathbf{K}_{p-1}^{\mathrm{T}*} & \ldots & \mathbf{K}_1^{\mathrm{T}*} & \mathbf{K}_0\end{array}\right], \tag{7}$$

где подматрицы $\mathbf{K}_k$, $k=0, 1, \ldots, p-1$, имеют смысл обобщённых матричных коэффициентов ковариации k-го порядка векторного процесса. Коэффициент $\mathbf{K}_k$ может быть представлен как $(M\times M)$-мерная матрица следующего вида:

$$\mathbf{K}_k=\begin{bmatrix} K_{0,0_k} & \ldots & K_{0,m_k} & \ldots & K_{0,M-1_k}\\ \vdots & & \vdots & & \vdots\\ K_{m,0_k} & \ldots & K_{m,m_k} & \ldots & K_{m,M-1_k}\\ \vdots & & \vdots & & \vdots\\ K_{M-1,0_k} & \ldots & K_{M-1,m_k} & \ldots & K_{M-1,M-1_k}\end{bmatrix},$$

где K_{j,m_k} — коэффициент ковариации k-го порядка между j-м и m-м процессами, входящими в качестве компонент в рассматриваемый векторный процесс, $j, m=0, 1, \ldots, M-1$. При $j=m$ величина K_{m,m_k} представляет собой автоковариационный коэффициент k-го порядка m-го процесса. Аналогично структуре **K** в (7) $(M\times pM)$-мерная автоковариационная матрица **k** имеет вид:

$$\mathbf{k}=[\mathbf{K}_1 \mid \mathbf{K}_2 \mid \ldots \mid \mathbf{K}_p]. \tag{8}$$

Матрицу **P** мощностей возбуждающего шума [1] с мерностью ($M\times M$) можно получить, решая линейную систему уравнений вида:

$$[\mathbf{P};\, \mathbf{0}]=[\mathbf{I};\, -\mathbf{A}]\left[\begin{array}{c|c|c|c} \mathbf{K}_0 & \mathbf{K}_1 & \ldots & \mathbf{K}_p \\ \hline \mathbf{K}_1^{\mathrm{T}*} & \mathbf{K}_0 & \ddots & \vdots \\ \hline \vdots & \ddots & \ddots & \mathbf{K}_1 \\ \hline \mathbf{K}_p^{\mathrm{T}*} & \ldots & \mathbf{K}_1^{\mathrm{T}*} & \mathbf{K}_0 \end{array}\right], \tag{9}$$

где **I** — ($M\times M$)-мерная единичная матрица. Отметим, что система (9) представляет собой обобщённое уравнение Юла-Уолкера для авторегрессионного процесса при его векторном представлении и получена из (7), (8) путём дополнения матрицы **K** левым верхним окаймлением в виде матрицы **k**:

$$[\mathbf{I};\, -\mathbf{A}]\left[\begin{array}{c|c} \mathbf{K}_0 & \mathbf{k} \\ \hline \mathbf{k}^{\mathrm{T}*} & \mathbf{K} \end{array}\right]=[\mathbf{P};\, \mathbf{0}]. \tag{10}$$

Тогда искомая матрица **P** дисперсий M-мерного возбуждающего шума находится из упрощенной системы линейных уравнений:

$$\mathbf{P}=[\mathbf{I};\, -\mathbf{A}]\left[\begin{array}{c} \mathbf{K}_0 \\ \hline \mathbf{k}^{\mathrm{T}*} \end{array}\right]. \tag{11}$$

Общим недостатком изложенного подхода является отсутствие возможности учёта при нахождении параметров **A** старших матричных коэффициентов $\mathbf{K}_k$ ковариации при $k>p$. Вместе с тем наращивание лага p, т.е. порядка векторной модели, не только придаёт ей излишнюю громоздкость, но и в практических приложениях, связанных с необходимостью спектрального анализа коротких выборок экспериментальных процессов, вызывает появление ложных спектральных пиков, затрудняющих определение доминирующей частоты изменения рассматриваемого параметра. Ложные спектральные пики возникают из-за неточных оценок коэффициентов ковариации старших порядков k, что обусловлено ограниченностью длины T выборки **X** исследуемого процесса. Однако низкие порядки p модели часто не дают возможность получить удовлетворительные спектральные оценки из-за неадекватности модели. Это обусловлено тем, что реальная связность исследуемого марковского процесса может оказаться выше, чем p, а ещё значительные по величине векторные коэффициенты обратной к **K** в (9) матрицы $\mathbf{K}^{-1}$ не участвуют в определении параметров **A** модели.

Предлагается компромиссное решение, которое состоит в построении переопределённой векторной модели небольшого порядка p=1…10, учитывающей дополнительные старшие коэффициенты ковариации $\mathbf{K}_k$ при $(p+P)\geq k>p$, где P — глубина переопределённости модели.

Аналитическое решение. При одновременном учёте серии из P ошибок $\boldsymbol{\varepsilon}_t, \boldsymbol{\varepsilon}_{t+1}, \ldots, \boldsymbol{\varepsilon}_{t+P}$ векторного линейного предсказания выражение (4) модифицируется:

$$\begin{gathered}[\mathbf{x}_t;\, \mathbf{x}_{t+1};\ldots;\, \mathbf{x}_{t+P}]= \\ =\mathbf{A}_{\mathrm{P}}[\,\tilde{\mathbf{x}}_{t-1};\tilde{\mathbf{x}}_t;\ldots;\tilde{\mathbf{x}}_{t+P-1}\,]+[\boldsymbol{\varepsilon}_t;\, \boldsymbol{\varepsilon}_{t+1};\, \ldots;\, \boldsymbol{\varepsilon}_{t+P}],\end{gathered} \tag{12}$$

где $\mathbf{A}_{\mathrm{P}}$ — матрица коэффициентов переопределённой векторной регрессионной модели.

Для решения переопределенной системы (12) из (P+1) матричных линейных уравнений с глубиной переопределённости P помножим обе части (12) на матрицу $[\,\tilde{\mathbf{x}}_{t-1};\tilde{\mathbf{x}}_t;\ldots;\tilde{\mathbf{x}}_{t+P-1}\,]^{\mathrm{T}*}$, обобщив полученное ранее выражение (5):

$$\begin{gathered}[\mathbf{x}_t;\, \mathbf{x}_{t+1}\ldots;\, \mathbf{x}_{t+P}][\,\tilde{\mathbf{x}}_{t-1};\tilde{\mathbf{x}}_t;\ldots;\tilde{\mathbf{x}}_{t+P-1}\,]^{\mathrm{T}*}= \\ =\mathbf{A}_{\mathrm{P}}[\,\tilde{\mathbf{x}}_{t-1};\tilde{\mathbf{x}}_t;\ldots;\tilde{\mathbf{x}}_{t+P-1}\,][\,\tilde{\mathbf{x}}_{t-1};\tilde{\mathbf{x}}_t;\ldots;\tilde{\mathbf{x}}_{t+P-1}\,]^{\mathrm{T}*}+ \\ +[\boldsymbol{\varepsilon}_t;\, \boldsymbol{\varepsilon}_{t+1};\, \ldots;\, \boldsymbol{\varepsilon}_{t+P}][\,\tilde{\mathbf{x}}_{t-1};\tilde{\mathbf{x}}_t;\ldots;\tilde{\mathbf{x}}_{t+P-1}\,]^{\mathrm{T}*}.\end{gathered} \tag{13}$$

После усреднения по t и учёта обстоятельства некоррелированности процесса $\boldsymbol{\varepsilon}$ ошибки линейного предсказания выражение (13) приобретает вид, аналогичный (6):

$$\mathbf{k}_{\mathrm{P}}=\mathbf{A}_{\mathrm{P}}\mathbf{K}_{\mathrm{P}}+\mathbf{0}_{\mathrm{P}} \iff \mathbf{A}_{\mathrm{P}}=\mathbf{k}_{\mathrm{P}}\mathbf{K}_{\mathrm{P}}^{-1}, \tag{14}$$

где $\mathbf{k}_{\mathrm{P}}$, $\mathbf{K}_{\mathrm{P}}$ — ($M\times pM$)-мерная и квадратная ($pM\times pM$) матрицы обобщённой ковариации (соответственно). Матрицу мощностей $\mathbf{P}_{\mathrm{P}}$ возбуждающего шума для переопределённой модели можно получить по выражению, аналогичному (11), заменив в нём матрицу **A** на найденные по (14) значения $\mathbf{A}_{\mathrm{P}}$:

$$\mathbf{P}_{\mathrm{P}}=[\mathbf{I};\, -\mathbf{A}_{\mathrm{P}}]\left[\begin{array}{c} \mathbf{K}_0 \\ \hline \mathbf{k}^{\mathrm{T}*} \end{array}\right]. \tag{15}$$

Как показали эксперименты, для решения рассмотренной ниже практической задачи можно считать $\mathbf{P}\approx\mathbf{P}_{\mathrm{P}}$ и пользоваться для переопределённой регрессионной модели рассчитанной ранее величиной **P** мощности возбуждающего векторного шума.

Экспериментальные исследования. Проанализируем предлагаемую методику спектрального анализа на примере описания экспериментальной последовательности **X**, представленной тремя (M=3) компонентами R, G, B видимого диапазона. Последовательность представляет собой реализацию модельного процесса отражений от вращающегося космического аппарата

Cassini. Изображения сформированы при помощи компьютерной графики по 3D модели конфигурации космического аппарата с учётом цветов его отдельных элементов. Методика построения изображения соответствует принятым в OpenGL принципам [5], т.е. получению наборов векторных графических примитивов в виде точек, линий и многоугольников с последующей математической обработкой полученных данных и построением растрового изображения.

Серии изображений аппарата Cassini при различных ракурсах были получены на основе его подробного изображения, пример которого приведён на рисунке 1.

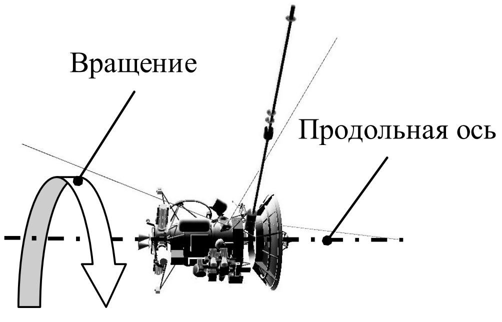


Рисунок 1

Из-за сложности и слабой предсказуемости влияния атмосферы на изображение космического объекта, а также наличия оптических аберраций самой системы наблюдения в модели предусмотрен комплексный учёт мешающих факторов в виде размытия контуров исходного подробного изображения (см. рисунок 1), регулирования общей интенсивности фиксируемого светового потока и коррекции его цветовой гаммы.

Для выявления зависимости характеристик наблюдаемого изображения космического объекта от ракурса предполагалось, что аппарат Cassini вращается, совершая относительно наблюдателя полный оборот. С шагом 10° при фиксированном положении солнца снимались модельные кадры с изображением космического аппарата. По каждому кадру, подверженному модификациям для учёта мешающих факторов, фиксировались интенсивности I для трёх цветов: I_R для красного (R), I_G для зелёного (G) и I_B для синего (B) в относительных единицах.

Зависимости центрированных относительных интенсивностей I_R, I_G, I_B от угла ζ поворота космического аппарата в поперечной плоскости изображены на рисунке 2. При этом подразумевается наблюдение двух полных оборотов космического объекта, т.е. ζ=0°, 10°, 20°, …, 710°.

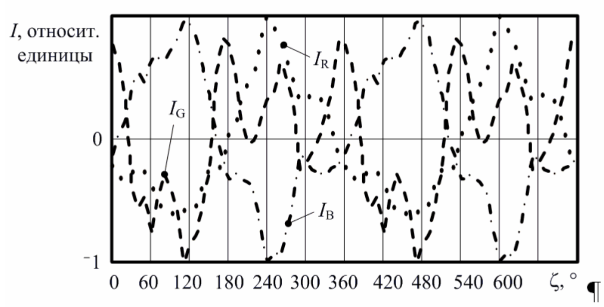


Рисунок 2

На рисунке 2 красная R компонента интенсивности I_R изображена точечной линией, зелёная G компонента I_G интенсивности — пунктирной, синяя B компонента I_B — штрих-пунктирной линиями.

В рассматриваемом примере анализа спектрального состава изменения интенсивности I световых отражений от космического объекта обычно актуально выделение одной-двух доминантных гармонических компонент. Поэтому целесообразно ограничиться спектральным анализом, основанным на векторной параметрической авторегрессионной модели второго порядка p=2. При этом в качестве трехкомпонентной реализации **X** векторного процесса рассматривается матрица

$$\mathbf{X}=\begin{bmatrix} I_{R,0} & I_{R,10} & \cdots & I_{R,710} \\ I_{G,0} & I_{G,10} & \cdots & I_{G,710} \\ I_{B,0} & I_{B,10} & \cdots & I_{B,710} \end{bmatrix},$$

имеющая смысл модели наблюдаемых с Земли изменений интенсивности световых отражений от космического объекта в трёх видимых диапазонах длин волн при его вращении с шагом 10°.

Результаты векторного спектрального анализа реализации **X** показаны на рисунке 3, где представлены оценки нормированных спектральных плотностей мощности $S(F)$. Через F обозначена относительная частота вращения, выраженная в оборотах космического аппарата. Присутствие спектральных компонент на частотах F>1, кратных одному обороту (F=2, 4), обусловлено наличием на теле исследуемого объекта нескольких цветовых пятен. Жирными линиями на рисунке 3 показаны оценки спектров методом векторной регрессии, а тонкими линиями — контрольные спектры. Они построены с помощью регрессионной модели тридцатого порядка по не зашумлённой модельной выборке и приняты в качестве истинного спектра. Как и на рисунке 2 оценка $S(F)$ спектральной плотности мощности при точечном начертании отображает оценку S_R спектра красной R компоненты, при пунктирном начертании — спектральную оценку S_G зелёной G компоненты, а оценка S_B синей B компоненты изображена штрихпунктирной линией.

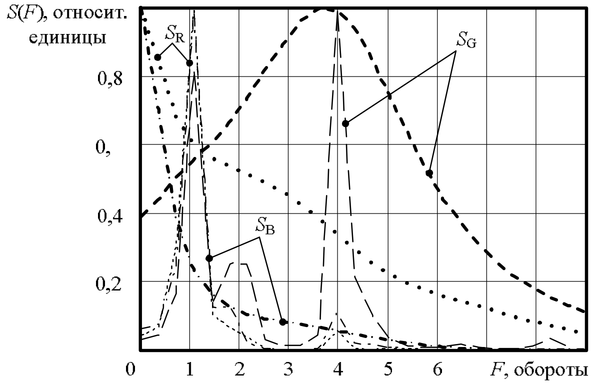


Рисунок 3

Из рисунка 3 видно, что векторная модель низкого (p=2) порядка не даёт возможности вскрыть истинный спектральный состав исследуемого процесса по его короткой выборке **X** длиной T=71. В приведённом примере не удаётся даже выявить действительную частоту F=1 вращения объекта.

Попытка увеличить порядок p векторной модели при сохранении того же объёма статистического материала приводит к большому числу ложных пиков, затрудняющих выделение доминантных гармонических компонент в $S(F)$.

Так, например, при p=10 появляются ложные выбросы на частотах F=2, 4, 6 оборотов синего B и красного R цветов. Вместе с тем спектральные оценки, полученные с помощью переопределённой векторной модели низкого порядка p=2, носят адекватный характер.

На рисунке 4 представлены нормированные спектральные плотности мощности $S(F)$, полученные с помощью векторной авторегрессионной модели второго порядка (p=2) при глубине переопределённости P=8. Сопоставление рисунков 3 и 4 даёт возможность качественно оценить эффективность предлагаемого метода, а для количественной оценки необходимо ввести формальный критерий. Рассмотрим в его качестве для каждого из R, G, B цветов относительные отклонения оцененных доминантных частот $\hat{F}$ от истинных F, выраженные в процентах.

Анализ эффективности. Проведём оценку результативности предложенной методики спектрального анализа по критерию:

$$\Delta F = \frac{\left|\hat{F} - F\right|}{F} \, 100\ \%. \tag{16}$$

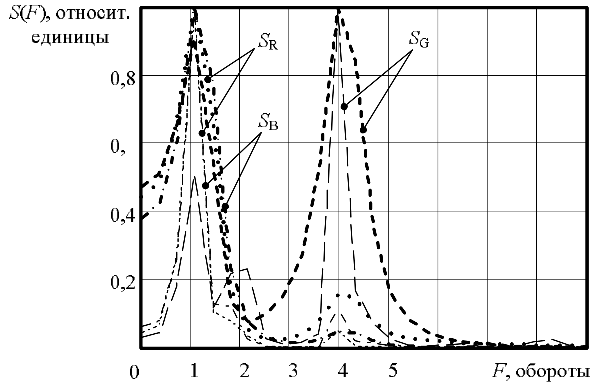


Рисунок 4

Зависимости ΔF от глубины P переопределённости для рассмотренного выше примера приведены на рисунке 5, на котором относительные отклонения ΔF_R, ΔF_G, ΔF_G для красного R, зелёного G и синего B цветов изображены точечной, пунктирной и штрихпунктирной линиями (соответственно), аналогично рисункам 2-4.

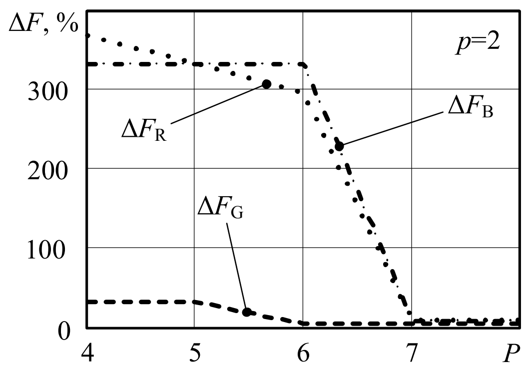


Рисунок 5

Из рисунка 5 видно, что относительные отклонения ΔF существенно (до 3…3,5 раза) уменьшаются при наращивании глубины P переопределённости векторной модели анализируемого порядка p=2. Тенденция по улучшению адекватности рассматриваемого параметричекого метода векторного спектрального анализа сохраняется при увеличении порядка p. Так, для приведённого примера при p=3 усреднённое относительное отклонение $\overline{\Delta F}$ =(ΔF_R+ΔF_G+ΔF_B)/3 составляет 200 %, а при введении в модель того же порядка p=3 переопределённости глубиной P=6 величина $\overline{\Delta F}$ падает до 19 %.

Выводы. Таким образом, имеется возможность повышения точности параметрических векторных спектральных оценок по критерию (16) процесса отражений от вращающегося объекта путём введения в векторную авторегрессионную (VAR) модель заданного порядка p переопределённости оптимизируемой глубины

P. Выигрыши составляют несколько (1,5…4) раз и достигаются за счёт учёта (*P*–*p*) старших матричных коэффициентов $\mathbf{K}_k$ ковариации при нахождении матрицы $\mathbf{A}_P$ параметров векторной регрессионной модели.

Библиографический список

1. *Марпл-мл. С.Л.* Цифровой спектральный анализ и его приложения: пер. с англ.— М.: Мир, 1990.— 584 с.

2. *Миронов М.А., Башаев А.В., Полосин С.А.* Оптимальная оценка параметров модели авторегрессии векторных гауссовских процессов по экспериментальным данным // Радиотехника.— 2002.— № 7.— С. 6-11.

3. *Juselius K.* The cointegrated VAR model. Methodology and applications.— New York: Oxford University Press Inc., 2006.– 440 p.

4. *Takamitsu Kurita, Nielsen B.* Cointegrated Vector Autoregressive Models with Adjusted Short-Run Dynamics // Quantitative and Qualitative Analysis in Social Sciences.– 2009.– Volume 3.– Issue 3.– PP. 43-77.— (http://www.qass.org.uk/2009/Vol_3/paper3.pdf).

5. *Херн Д., Бейкер М.П.* Компьютерная графика и стандарт OpenGL = Computer Graphics with OpenGL.— 3-е изд.— М.: Вильямс, 2005.— 1168 с.

УДК 621.01.512

С.С. Мамонов

ДИНАМИКА АСТАТИЧЕСКОЙ ПОИСКОВОЙ СИСТЕМЫ ЧАСТОТНО-ФАЗОВОЙ АВТОПОДСТРОЙКИ ЧАСТОТЫ

Рассматривается астатическая поисковая система частотно-фазовой автоподстройки частоты. Получены оценки областей притяжения для состояния равновесия и условия существования вращательных режимов. Показано, что добавление частотного кольца может привести к увеличению проекционной части области притяжения для состояний равновесия (более чем на 70 %).

Ключевые слова: *режимы синхронизации, предельные циклы, частотная автоподстройка.*

Введение. В работе рассматривается поисковая система частотно-фазовой автоподстройки частоты (ЧФАПЧ). Динамика системы ЧФАПЧ описывается дифференциальным уравнением вида [1-5]

$$p\sigma(t)+\Omega_1 K_1(p)F_1(\sigma(t))+ \\ +\Omega_2 K_2(p)F_2(p\sigma(t))=\Omega_н+f(t), \qquad (1)$$

где $p={}^{d}\!/_{dt}$ - оператор дифференцирования, $\sigma(t)$ - разность фаз эталонного и подстраиваемого генераторов, Ω_1 - полоса удержания кольца фазовой автоподстройки, Ω_2 - полоса удержания кольца частотной автоподстройки, $K_1(p)$ и $K_2(p)$ -коэффициенты передачи фильтров нижних частот в фазовой и частотных цепях управления, $F_1(\sigma)$ и $F_2(\sigma)$ - характеристики фазового и частотного детекторов, $F_1(\sigma)-\Delta$ - периодическая непрерывно дифференцируемая функция, $\Omega_н=const$ - начальная расстройка, $f(t)$– функция, характеризующая закон поиска кольца фазовой автоподстройки [1]. Уравнение (1) также описывает динамику системы ЧФАПЧ с изменяющейся частотой входного сигнала, $f(t)$– функция, характеризующая закон изменения частоты входного сигнала [2]. В случае дробно-рациональных интегрирующих фильтров $K_1(p)=B(p)Q^{-1}(p)$, $K_2(p)=D(p)Q^{-1}(p)$, где $B(p)$, $Q(p)$, $D(p)$ - многочлены относительно оператора дифференцирования, для устранения зависимости фазовой ошибки от времени рассматриваются интегрирующие фильтры, для которых выполняется соотношение $Q(p)f(t)= =const$, в этом случае уравнение (1) описывает динамику астатической поисковой системы ЧФАПЧ [1]. В случае нелинейной характеристики частотного детектора $F_2(p\sigma)=\dfrac{2\beta p\sigma}{1+(\beta p\sigma)^2}$, где β– расстройка по частоте, при которой напряжение на выходе частотного детектора максимально уравнение (1) приводится к системе дифференциальных уравнений [4]

$$\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{A}\mathbf{x}+\mathbf{b}\varphi(\sigma)+\mathbf{d}\frac{2\alpha\beta\mathbf{c}^T\mathbf{x}}{1+\beta^2\left(\mathbf{c}^T\mathbf{x}\right)^2},$$

$$\dot{\sigma} = \mathbf{c}^T \mathbf{x}, \tag{2}$$

где $\mathbf{x}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbf{R}^n$. Система (2) рассматривается в случае, когда $\varphi(\sigma)$ является непрерывно дифференцируемой и Δ - периодической функцией. Особенностью системы (2), соответствующей астатической поисковой системе ЧФАПЧ, является равенство определителя матрицы $\mathbf{A}$ нулю $(\det \mathbf{A} = 0)$.

Рабочими режимами для системы ЧФАПЧ являются режимы синхронизации. Нахождение синхронных режимов связано с условиями глобальной устойчивости и определением областей притяжения состояний равновесия системы (2). Система вида (2) изучалась в работах [5-13], где качественно-численными методами получены условия устойчивости, соответствующие режимам синхронизации фазовой автоподстройки, условия существования и числа предельных циклов второго рода. В случае отсутствия частотного кольца система (2) изучалась в работе [10]. Известно, что добавление частотного кольца в систему фазовой автоподстройки частоты приводит к увеличению области параметров системы для режимов синхронизации [5, 6, 9].

Цель работы: определить области притяжения состояний равновесия, найти условия существования седловых предельных циклов второго рода, рассмотреть влияние частотного кольца на режимы синхронизации поисковой системы ЧФАПЧ.

В статье на основе метода нелокального сведения [7, 8] предложена методика нахождения областей притяжения состояний равновесия, показано, что структура области притяжения определяется седловым [11] предельным циклом второго рода. На примере системы ЧФАПЧ с фильтрами второго порядка исследуется влияние частотного кольца на область притяжения состояний равновесия.

Теоретические исследования

Теорема 1. Пусть для системы (2) справедливы утверждения:

1) матричные уравнения

$$\mathbf{A}^T\mathbf{H} + \mathbf{H}\mathbf{A} = -2\tau_1^2 \mathbf{c}\mathbf{c}^T + 2\tau_1\tau_2\left(\mathbf{c}\mathbf{q}^T + \mathbf{q}\mathbf{c}^T\right) - 2\tau_2^2 \mathbf{q}\mathbf{q}^T - \mathbf{L}_1, \tag{3}$$

$$\left(\mathbf{A} + 2\alpha\beta\mathbf{d}\mathbf{c}^T\right)^T\mathbf{H} + \mathbf{H}\left(\mathbf{A} + 2\alpha\beta\mathbf{d}\mathbf{c}^T\right) = -2\alpha_1^2\mathbf{c}\mathbf{c}^T + \alpha_2\left(\mathbf{c}\mathbf{q}^T + \mathbf{q}\mathbf{c}^T\right) - 2\alpha_3^2\mathbf{q}\mathbf{q}^T - \mu_1\mathbf{H}_0 - \mathbf{L}_2, \tag{4}$$

$$\mathbf{H}\mathbf{b} = -\mathbf{c}, \tag{5}$$

$$\mathbf{H} = \Gamma^{-1}\mathbf{c}\mathbf{c}^T + h\mathbf{q}\mathbf{q}^T + \mathbf{H}_0. \tag{6}$$

где $\mathbf{L}_1 \ge 0$, $\mathbf{L}_2 \ge 0$, $\mathbf{H}_0 \ge 0$, $\mathbf{c}^T\mathbf{b} = -\Gamma < 0$, $h > 0$, $\mathbf{q} \in \mathbf{R}^n$, имеют решение $\mathbf{H} = \mathbf{H}^T > 0$;

2) $\mu_2 = 2\alpha_3^2 - \alpha_2^2 > 0$, $\left(\mu_2 h^{-1} - \mu_1\right)\mathbf{H}_0 \le 0$;

3) $\varepsilon_2^2 = 2\alpha_1^2 - 1 - \mu_2(\Gamma h)^{-1} > 0$,

$4s^2\beta^2\Gamma < \mu_2\varepsilon_2^2 h^{-1}$;

4) $\varphi(\sigma_2) = 0$, $\int\limits_{\sigma_2}^{\sigma}\varphi(\xi)d\xi < 0$, $\int\limits_{0}^{\Delta}\varphi(\xi)d\xi < 0$, $\dot{\varphi}(\sigma_2) < 0$ при $\sigma \in (\sigma_2; +\infty)$;

5) система уравнений

$$\dot{y} = -\lambda y - \varphi(\sigma) - \frac{2s\beta_0 y}{1 + (\beta_0 y)^2}, \quad \dot{\sigma} = y \tag{7}$$

при $\lambda = 0$, $\beta_0 = \beta\sqrt{\Gamma}$, имеет предельный цикл второго рода $F_0(\sigma) > 0$ для любого $\sigma \in (-\infty; +\infty)$;

6) система уравнений (7) имеет решение $(y(t), \sigma(t))$, определяющее функцию $F(\sigma)$, для которой $\lim\limits_{\sigma\to-\infty}(F_0(\sigma) - F(\sigma)) = 0$, $F(\sigma_2) = 0$, $F(\sigma) > 0$ при $\sigma \in (-\infty; \sigma_2)$;

тогда система (2) имеет область притяжения состояний равновесия $\Omega = \left\{\mathbf{z} = (\mathbf{x}, \sigma) : \Gamma^{-1}\left(\mathbf{c}^T\mathbf{x}\right)^2 + h\left(\mathbf{q}^T\mathbf{x}\right)^2 + \mathbf{x}^T\mathbf{H}_0\mathbf{x} \le F_0^2(\sigma)\right\}$.

Доказательство. Рассмотрим функцию $V_1(\mathbf{z}) = \mathbf{x}^T\mathbf{H}\mathbf{x} - F^2(\sigma)$, где $F(\sigma)$ удовлетворяет условию 6) теоремы 1. Пусть $\Omega_1 = \left\{\mathbf{z} : \mathbf{x}^T\mathbf{H}\mathbf{x} \le F^2(\sigma),\ \sigma \le \sigma_2 + k\Delta, k \in N\right\}$, тогда из соотношения (6) получим, что если $\mathbf{z} \in \Omega_1$, то выполняется неравенство:

$$\Gamma^{-1}\left(\mathbf{c}^T\mathbf{x}\right)^2 + h\left(\mathbf{q}^T\mathbf{x}\right)^2 \le F^2(\sigma). \tag{8}$$

Используя условия 1, 2, 3 теоремы 1 и соотношения (3), (4), (5), (6), (8), находим производную функции $V_1(\mathbf{z})$ в силу системы (2) на множестве $\partial\Omega_1 = \left\{\mathbf{z} : \mathbf{x}^T\mathbf{H}\mathbf{x} = F^2(\sigma), \sigma \le \sigma_2 + k\Delta, k \in N\right\}$:

$$\dot{V}_1(\mathbf{z}) = \mathbf{x}^T\left(\mathbf{A}^T\mathbf{H} + \mathbf{H}\mathbf{A}\right)\mathbf{x} - 2\mathbf{c}^T\mathbf{x}\varphi(\sigma) - 2\frac{dF(\sigma)}{d\sigma} \times F(\sigma)\mathbf{c}^T\mathbf{x} + \mathbf{x}^T\left(\left(2\alpha\beta\mathbf{d}\mathbf{c}^T\right)^T\mathbf{H} + \mathbf{H}\left(2\alpha\beta\mathbf{d}\mathbf{c}^T\right)\right)\mathbf{x} \times \frac{1}{1 + \beta^2\left(\mathbf{c}^T\mathbf{x}\right)^2} \le \mathbf{x}^T\left(\mathbf{A}^T\mathbf{H} + \mathbf{H}\mathbf{A}\right)\mathbf{x} + \frac{4s\beta\sqrt{\Gamma}F(\sigma)}{1 + \beta^2\Gamma F^2(\sigma)} \times \left|\mathbf{c}^T\mathbf{x}\right| + \frac{1}{1 + \beta^2\left(\mathbf{c}^T\mathbf{x}\right)^2}\mathbf{x}^T\left(\left(2\alpha\beta\mathbf{d}\mathbf{c}^T\right)^T\mathbf{H} + \mathbf{H}\left(2\alpha\beta\mathbf{d}\mathbf{c}^T\right)\right)\mathbf{x} \le \frac{1}{1 + \beta^2\left(\mathbf{c}^T\mathbf{x}\right)^2}\left(-2\beta^2\left(\mathbf{c}^T\mathbf{x}\right)^2 \times \left(\tau_1\mathbf{c}^T\mathbf{x} - \tau_2\mathbf{q}^T\mathbf{x}\right)^2 - 2\alpha_1^2\left(\mathbf{c}^T\mathbf{x}\right)^2 + 2\alpha_2\mathbf{c}^T\mathbf{x}\mathbf{q}^T\mathbf{x} - \right.$$

$$-2\alpha_3^2\left(\mathbf{q}^T\mathbf{x}\right)^2-\mu_1\mathbf{x}^T\mathbf{H}_0\mathbf{x}+4s\beta\sqrt{\Gamma}F(\sigma)\left|\mathbf{c}^T\mathbf{x}\right|\Big)\le$$

$$\le\frac{1}{1+\beta^2\left(\mathbf{c}^T\mathbf{x}\right)^2}\Big(\left(1-2\alpha_1^2\right)\left(\mathbf{c}^T\mathbf{x}\right)^2-\mu_2\left(\mathbf{q}^T\mathbf{x}\right)^2-$$

$$-\mu_1\mathbf{x}^T\mathbf{H}_0\mathbf{x}+4s\beta\sqrt{\Gamma}F(\sigma)\left|\mathbf{c}^T\mathbf{x}\right|\Big)\le\frac{1}{1+\beta^2\left(\mathbf{c}^T\mathbf{x}\right)^2}\times$$

$$\times\Bigg(F^2(\sigma)\left(\left(2s\beta\sqrt{\Gamma}\right)^2\varepsilon_2^{-2}-\mu_2h^{-1}\right)-$$

$$-\left(\varepsilon_2\left|\mathbf{c}^T\mathbf{x}\right|-2\varepsilon_2^{-1}s\beta\sqrt{\Gamma}F(\sigma)\right)^2\Bigg)\le 0\,. \qquad (9)$$

Из соотношения (9) получим, что множество Ω_1 является положительно инвариантным.

Пусть $\Omega_\varepsilon=\left\{\mathbf{z}:W_\varepsilon(\mathbf{z})=\mathbf{x}^T\mathbf{H}\mathbf{x}-F_0^2(\sigma)+\varepsilon<0,\ \varepsilon>0\right\}$, где $F_0(\sigma)$ удовлетворяет условию 5 теоремы 1. В силу соотношения (9) производная функции $W_\varepsilon(\mathbf{z})$ в силу системы (2) на множестве $\partial\Omega_\varepsilon=\left\{\mathbf{z}:\mathbf{x}^T\mathbf{H}\mathbf{x}=F_0^2(\sigma)-\varepsilon\right\}$ удовлетворяет неравенству:

$$\dot W_\varepsilon(\mathbf{z})\le\frac{1}{1+\beta^2\left(\mathbf{c}^T\mathbf{x}\right)^2}\Big(-\mu_2h^{-1}\mathbf{x}^T\mathbf{H}\mathbf{x}-\varepsilon_2^2\left(\mathbf{c}^T\mathbf{x}\right)^2+$$

$$+4s\beta\sqrt{\Gamma}F_0(\sigma)\left|\mathbf{c}^T\mathbf{x}\right|\Big)=\frac{1}{1+\beta^2\left(\mathbf{c}^T\mathbf{x}\right)^2}\Big(\mu_2h^{-1}\varepsilon+$$

$$+F_0^2(\sigma)\left(\left(2s\beta\sqrt{\Gamma}\right)^2\varepsilon_2^{-2}-\mu_2h^{-1}\right)\Big). \qquad (10)$$

Из соотношения (10) следует, что при $\varepsilon<\dfrac{h}{\mu_2}\left(\dfrac{\mu_2}{h}-\dfrac{\left(2s\beta\sqrt{\Gamma}\right)^2}{\varepsilon_2^2}\right)\min\limits_\sigma F_0^2(\sigma)=\varepsilon_0$ множество Ω_ε является положительно инвариантным.

Рассмотрим функцию $W(\mathbf{z})=2\int\limits_{\sigma_2}^{\sigma}\varphi(\xi)d\xi+\mathbf{x}^T\mathbf{H}\mathbf{x}$. Используя условие 4 теоремы 1 и соотношения (3), (4), (5), (6), (9), находим производную функции $W(\mathbf{z})$ в силу системы (2):

$$\dot W(\mathbf{z})=\mathbf{x}^T\left(\mathbf{A}^T\mathbf{H}+\mathbf{H}\mathbf{A}\right)\mathbf{x}+\frac{2\alpha\beta}{1+\beta^2\left(\mathbf{c}^T\mathbf{x}\right)^2}\times$$

$$\times\mathbf{x}^T\left(\mathbf{c}\mathbf{d}^T\mathbf{H}+\mathbf{H}\mathbf{d}\mathbf{c}^T\right)\mathbf{x}\le\frac{1}{1+\beta^2\left(\mathbf{c}^T\mathbf{x}\right)^2}\times$$

$$\times\left(-\mu_2h^{-1}\mathbf{x}^T\mathbf{H}\mathbf{x}\right)\le 0\,. \qquad (11)$$

Из соотношения (11) и того, что $\mathbf{H}>0$, следует, что множество $Q=\left\{\mathbf{z}:\dot W(\mathbf{z})=0\right\}$ не содержит целых траекторий.

Рассмотрим множество $\Omega_2=\Big\{\mathbf{z}:\mathbf{x}^T\mathbf{H}\mathbf{x}\le\le-2\int\limits_{\sigma_2}^{\sigma}\varphi(\xi)d\xi,\ \sigma\ge\sigma_2\Big\}$. В силу соотношения (11) множество Ω_2 является положительно инвариантным. Из условий $\varphi(\sigma_2)=0$, $\dot\varphi(\sigma_2)<0$, $\frac{1}{\Delta}\int\limits_0^\Delta\varphi(\xi)d\xi<0$ получим, что $-\lim\limits_{\sigma\to+\infty}2\int\limits_{\sigma_2}^{\sigma}\varphi(\xi)d\xi==+\infty$. Следовательно, существует $\sigma_3\in(\sigma_2;+\infty)$ такое, что выполняется соотношение $F_0^2(\sigma_3)==-2\int\limits_{\sigma_2}^{\sigma_3}\varphi(\xi)d\xi$. Из условия 6) теоремы 1 следует существование функции $F(\sigma)$, для которой выполняются соотношения $\lim\limits_{\sigma\to-\infty}\left(F_0(\sigma)-F(\sigma)\right)=0$, $F(\sigma_2)=0$. Следовательно, существует $\sigma_4\in\in(-\infty;\sigma_2)$, для которого $F(\sigma_4)=F_0(\sigma_4)-\varepsilon$, где $0<\varepsilon<\varepsilon_0$. Пусть $k\in N$ такое, что $\sigma_4+k\Delta>\sigma_3$, $F_k(\sigma)$ - функция, определяемая решением системы (7), для которой $\lim\limits_{\sigma\to-\infty}\left(F_0(\sigma)-F_k(\sigma)\right)=0$, $F_k(\sigma_2+k\Delta)=0$, тогда в силу цилиндричности фазового пространства системы (7) получим, что $F_k(\sigma_4+k\Delta)=F_0(\sigma_4+k\Delta)-\varepsilon$. Рассмотрим множество $\Omega_3=\left\{\mathbf{z}:\mathbf{x}^T\mathbf{H}\mathbf{x}\le F_k(\sigma),\ \sigma\le\sigma_2+k\Delta\right\}$. Из соотношения (9) следует, что множество Ω_3 положительно инвариантно. Множество $\Omega=\Omega_3\cap\cap\Omega_\varepsilon\cap\Omega_2$ положительно инвариантно при $\varepsilon\in(0;\varepsilon_0)$ и ограничено. Множество $Q==\left\{\mathbf{z}:\dot W(\mathbf{z})=0\right\}$ не содержит целых траекторий системы (2). Из леммы 2.3.1 [8] будет следовать дихотомичность системы (2). Следовательно, множество $\Omega=\left\{\mathbf{z}:\Gamma^{-1}\left(\mathbf{c}^T\mathbf{x}\right)^2+h\left(\mathbf{q}^T\mathbf{x}\right)^2+\mathbf{x}^T\mathbf{H}_0\mathbf{x}\le\le F_0^2(\sigma)\right\}$ является областью притяжения состояний равновесия системы (2).

<u>Определение</u> [7]. Решение $\mathbf{z}(t,\mathbf{z}_0)=\begin{pmatrix}\mathbf{x}(t,\mathbf{x}_0)\\ \sigma(t,\sigma_0)\end{pmatrix}$ системы (2) называется предельным циклом второго рода, если существует $\tau>0$, целое число $j\neq 0$, такие, что $\sigma(t+\tau,\sigma_0)=\sigma(t,\sigma_0)+\Delta j$, $\mathbf{x}(t,\mathbf{x}_0)=\mathbf{x}(t+\tau,\mathbf{x}_0)$.

<u>Теорема 2.</u> Пусть для системы (2) при $n=2$ выполнены условия:

1) $\mathbf{c}^T\mathbf{b}=-\Gamma<0$, $\mathbf{c}^T\mathbf{A}=\mathbf{l}^T$, $\mathbf{l}^T\mathbf{b}=\nu>0$, $\mathbf{l}^T\mathbf{A}==-a\mathbf{l}^T$, $\mathbf{l}^T\mathbf{d}=0$, $\mathbf{c}^T\mathbf{d}=-\delta_1$, $rang\|\mathbf{c},\mathbf{l}\|=2$, $M==\max\limits_\sigma\varphi(\sigma)>0$, $\min\limits_\sigma\varphi(\sigma)=-m<0$;

2) система уравнений (7) при $\lambda=\lambda_1$, $\beta_0=\beta\sqrt{\Gamma}$, $s=\delta_1\alpha\Gamma^{-1}$ имеет предельный цикл

второго рода $F(\sigma)>0$ для любого $\sigma\in(-\infty;+\infty)$;

3) система уравнений (7) при $\lambda=0$, $\beta_0=\beta\sqrt{\Gamma}$, $s=s_1<\delta_1\alpha\Gamma^{-1}$ имеет предельный цикл второго рода $\Phi(\sigma)<F(\sigma)$, $0<m_2\le$ $\le\dfrac{2\beta_0\Phi(\sigma)}{1+\beta_0^2\Phi^2(\sigma)}$ для любого $\sigma\in(-\infty;+\infty)$;

4) система уравнений (7) при $\lambda=\lambda_1$, $\beta_0=$ $=\beta\sqrt{\Gamma}$, $s=\delta_1\alpha\Gamma^{-1}$ имеет решение $(y(t),\sigma(t))$, определяющее функцию $F_1(\sigma)>0$, $F_1(\sigma)<\Phi(\sigma)$ для любого $\sigma\in[\sigma_0;\sigma_0+\Delta]$, $\min\limits_{\sigma\in[\sigma_0;\sigma_0+\Delta]}F_1(\sigma)=$ $=m_1>0$;

5) $\nu a^{-1}m<\lambda_1\Gamma m_1$;

6) $\nu\alpha^{-1}M<m_2(\delta_1\alpha-s_1\Gamma)$;

тогда система (2) имеет предельный цикл второго рода.

Доказательство. Рассмотрим функции $W_1(\mathbf{z})=\mathbf{c}^T\mathbf{x}-\sqrt{\Gamma}F(\sigma)$, $W(\mathbf{z})=\mathbf{c}^T\mathbf{x}-\sqrt{\Gamma}\Phi(\sigma)$, $V_1(\mathbf{z})=\mathbf{l}^T\mathbf{x}+\varepsilon$, $\varepsilon>0$, $V_2(\mathbf{z})=\mathbf{l}^T\mathbf{x}-r$, $r>0$. Пусть $\Omega=\{\mathbf{z}:W_1(\mathbf{z})\le 0,W(\mathbf{z})\ge 0,V_1(\mathbf{z})\ge 0,V_2\le 0\}$, тогда граница множества Ω имеет вид: $\partial\Omega=$ $=\partial\Omega_1\cup\partial\Omega_2\cup\partial\Omega_3\cup\partial\Omega_4$, где

$$\partial\Omega_1=\{\mathbf{z}:\ W_1(\mathbf{z})=0,\ V_1(\mathbf{z})\ge 0,V_2(\mathbf{z})\le 0\},$$
$$\partial\Omega_2=\{\ \mathbf{z}:\ V_1(\mathbf{z})=0,\ W_1(\mathbf{z})\le 0,\ W(\mathbf{z})\ge 0\ \},$$
$$\partial\Omega_3=\{\mathbf{z}:\ W(\mathbf{z})=0,\ V_1(\mathbf{z})\ge 0,\ V_2(\mathbf{z})\le 0\},$$
$$\partial\Omega_4=\{\mathbf{z}:V_2(\mathbf{z})=0,W_1(\mathbf{z})\le 0,\ W(\mathbf{z})\ge 0\}.$$

В силу условия $rang\|\mathbf{c},\mathbf{l}\|=2$ теоремы 2, для множества Ω выполняется неравенство: $\Omega\ne\varnothing$. Для множества Ω возьмем значение ε, удовлетворяющее неравенству:

$$\nu a^{-1}m<\varepsilon<\lambda_1\Gamma m_1. \qquad (12)$$

В силу условия 5 теоремы 2 существует значение ε, для которого выполняется неравенство (12). Если $\mathbf{z}\in\partial\Omega_1$, то справедливы соотношения:

$$\mathbf{c}^T\mathbf{x}=\sqrt{\Gamma}F(\sigma), \qquad (13)$$

$$\mathbf{l}^T\mathbf{x}\ge-\varepsilon. \qquad (14)$$

Используя условия 1, 2 теоремы 2 и соотношения (12), (13), (14), находим производную функции $W_1(\mathbf{z})$ в силу системы (2) на множестве $\partial\Omega_1$:

$$\dot W_1(\mathbf{z})=\mathbf{l}^T\mathbf{x}-\Gamma\varphi(\sigma)-\frac{2\alpha\delta_1\beta\sqrt{\Gamma}F(\sigma)}{1+\beta^2\Gamma F^2(\sigma)}-$$
$$-\Gamma F(\sigma)\frac{dF(\sigma)}{d\sigma}\ge-\varepsilon+\lambda_1\Gamma m_1>0. \qquad (15)$$

Рассмотрим границу $\partial\Omega_2$. Если $\mathbf{z}\in\partial\Omega_2$, то выполняется соотношение:

$$\mathbf{l}^T\mathbf{x}=-\varepsilon. \qquad (16)$$

Используя условие 1 теоремы 2 и соотношения (12), (16), находим производную функции $V_1(\mathbf{z})$ в силу системы (2) на множестве $\partial\Omega_2$:

$$\dot V_1(\mathbf{z})=-a\mathbf{l}^T\mathbf{x}+\nu\varphi(\sigma)\ge a\varepsilon-\nu m>0. \qquad (17)$$

Для множества Ω возьмем значение r, удовлетворяющее неравенству:

$$\nu\alpha^{-1}M<r<m_2(\delta_1\alpha-s_1\Gamma). \qquad (18)$$

В силу условия 6 теоремы 2 существует значение r, для которого выполняются неравенства (18). Пусть $\mathbf{z}\in\partial\Omega_3$, тогда выполняются соотношения:

$$\mathbf{c}^T\mathbf{x}=\sqrt{\Gamma}\Phi(\sigma), \qquad (19)$$

$$\mathbf{l}^T\mathbf{x}\le r. \qquad (20)$$

Используя условия 1, 3 теоремы 2 и соотношения (18), (19), (20), находим производную функции $W(\mathbf{z})$ в силу системы (2) на множестве $\partial\Omega_3$:

$$\dot W(\mathbf{z})=\mathbf{l}^T\mathbf{x}-\Gamma\varphi(\sigma)-\frac{2\alpha\delta_1\beta\mathbf{c}^T\mathbf{x}}{1+\beta^2(\mathbf{c}^T\mathbf{x})^2}-\sqrt{\Gamma}\mathbf{c}^T\mathbf{x}\frac{d\Phi(\sigma)}{d\sigma}\le$$
$$\le r-\frac{2\beta\sqrt{\Gamma}\Phi(\sigma)}{1+\beta^2\Gamma\Phi^2(\sigma)}(\delta_1\alpha-s_1\Gamma)\le$$
$$\le r-m_2(\delta_1\alpha-s_1\Gamma)<0. \qquad (21)$$

Рассмотрим границу $\partial\Omega_4$. Если $\mathbf{z}\in\partial\Omega_4$, то выполняется соотношение:

$$\mathbf{l}^T\mathbf{x}=r. \qquad (22)$$

Используя условие 1 теоремы 2 и соотношения (18), (22), находим производную функции $V_2(\mathbf{z})$ в силу системы (2) на множестве $\partial\Omega_4$:

$$\dot V_2(\mathbf{z})=-a\mathbf{l}^T\mathbf{x}+\nu\varphi(\sigma)\le-ar+\nu M<0. \qquad (23)$$

Рассмотрим функцию $M^+(\mathbf{z})=\mathbf{c}^T\mathbf{x}-\sqrt{\Gamma}F_1(\sigma)$, где $F_1(\sigma)$ удовлетворяет условию 4 теоремы 2. Пусть $Q=\{\mathbf{z}:W_1(\mathbf{z})\ge 0,V_1(\mathbf{z})\ge 0,V_2(\mathbf{z})\le 0\}$, $D=$ $=\{\ \mathbf{z}:M^+(\mathbf{z})\ge 0,W(\mathbf{z})\le 0,\ V_1(\mathbf{z})\ge 0,V_2(\mathbf{z})\le 0,\ \sigma_0\le$ $\le\sigma\le\sigma_0+\Delta\}$, тогда в силу соотношений (15), (17), (21), (23) множества D, Q являются положительно инвариантными по переменным x_1,x_2.

Из условия $rang\|\mathbf{c},\mathbf{l}\|=2=n$ теоремы 2, следует, что для матрицы $\mathbf{B}=\|\mathbf{l},\mathbf{c}\|$ существует обратная матрица $\mathbf{B}^{-1}$. В системе (2) сделаем замену переменных $\mathbf{x}=\left(\mathbf{B}^T\right)^{-1}(\tilde{\mathbf{x}}+\mathbf{q})$, $\mathbf{q}=\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}$, $q_1=0$, $q_2=\frac{1}{2}\sqrt{\Gamma}\left(F(\sigma_0)+\Phi(\sigma_0)\right)$, $q_0=\sqrt{\Gamma}\times$ $\times\frac{1}{2}\left(F(\sigma_0)-\Phi(\sigma_0)\right)$, $\tilde{\mathbf{x}}=\mathbf{B}^T\mathbf{x}-\mathbf{q}$, получим: $\mathbf{l}^T\mathbf{x}=\tilde{x}_1$, $\mathbf{c}^T\mathbf{x}=\tilde{x}_2+q_2$. После сделанной замены переменные $\tilde{\mathbf{x}}$ переобозначим через переменные $\mathbf{x}$. Множество Ω будет иметь вид: $\Omega=$ $=\{\mathbf{x}: x_2\le q_0, x_2\ge -q_0, x_1\le r, x_1\ge -\varepsilon\}$.

Рассмотрим множества $G=\Omega\cap P_0$, $P_0=$ $=\{\mathbf{z}:\sigma=\sigma_0\}$, $P_\Delta=\{\mathbf{z}:\sigma=\sigma_0+\Delta\}$, $\overline{G}=P_\Delta\cap$ $\cap(Q\cup\Omega\cup D)$. В силу неравенства $F_1(\sigma)>0$ для $\sigma\in[\sigma_0;\sigma_0+\Delta]$ получим, что любая траектория $(\mathbf{x}(t),\sigma(t))$, начинающаяся при $t=0$ на множестве G, попадает через конечное время $t_{\mathbf{x}}$ на множество $\overline{G}$. Введем отображение G в $\overline{G}$ соотношением: $T(\mathbf{x},\sigma_0)=(\mathbf{x}(t_{\mathbf{x}}),\sigma_0+\Delta)$. Пусть S – отображение сдвига фазового пространства [7], определенное равенством: $S(\mathbf{x},\sigma)=(\mathbf{x},\sigma-\Delta)$. Отображение ST – непрерывное, $ST(G)\subset P_0$. Если $(\mathbf{x},\sigma_0)\in G$, то $ST(\mathbf{x},\sigma_0)=(\overline{\mathbf{x}},\sigma_0)$. Для множества $\overline{\Omega}=\{\mathbf{x}:(\mathbf{x},\sigma_0)\in G\}$ определим отображение U: $\mathbf{x}\in\overline{\Omega}\to U(\mathbf{x})=\overline{\mathbf{x}}$. Отображение U определяет векторное поле $S_0(\mathbf{x})=\mathbf{x}-U\mathbf{x}$ на границе $\partial\overline{\Omega}$ ограниченной области $\overline{\Omega}$. Для векторного поля S_0 рассмотрим линейное векторное поле $S_2(\mathbf{x})=\mathbf{x}-S_1(\mathbf{x})$, $S_1(\mathbf{x})=\overline{\overline{\mathbf{x}}}$, $\overline{\overline{x}}_1=\frac{x_1}{2}$, $\overline{\overline{x}}_2=$ $=\frac{3x_2}{2}$. В силу свойств множеств Q, Ω, D получим, что для любого $\mathbf{x}\in\partial\overline{\Omega}$ справедливо неравенство: $S_3(\mathbf{x})=\frac{S_0(\mathbf{x})}{\|S_0(\mathbf{x})\|}+\frac{S_2(\mathbf{x})}{\|S_2(\mathbf{x})\|}\ne 0$, следовательно, вращения векторных полей S_0 и S_2 на $\partial\overline{\Omega}$ одинаковы [14]. Вращение $\gamma(S_2,\partial\overline{\Omega})$ линейного векторного поля S_2 на $\partial\overline{\Omega}$ определяется соотношением: $\gamma(S_2,\partial\overline{\Omega})=-1\ne 0$ [14]. В силу теоремы 5.15 [14] оператор U на $\overline{\Omega}$ имеет по крайней мере одну неподвижную точку $\mathbf{x}^*\in\overline{\Omega}$, $U\mathbf{x}^*=\mathbf{x}^*$. Точка $(\mathbf{x}^*,\sigma_0)$ является неподвижной для оператора ST, $ST(\mathbf{x}^*,\sigma_0)=(\mathbf{x}^*,\sigma_0)$. Из определения отображений T и S для решения с начальным условием $(\mathbf{x}^*,\sigma_0)$ вытекают равенства: $\mathbf{x}(t_{\mathbf{x}^*})=\mathbf{x}^*$, $\sigma(t_{\mathbf{x}^*})=\sigma_0+\Delta$. Система (2) имеет седловой предельный цикл второго рода [11], содержащийся во множестве Ω.

Результаты моделирования. Рассмотрим астатическую поисковую систему фазовой автоподстройки с добавлением частотного кольца (ЧФАП) [1,2], динамика которой описывается дифференциальным уравнением

$$p\sigma(t)+\Omega_1K_1(p)F_1(\sigma(t))+$$
$$+\Omega_2K_2(p)F_2(p\sigma(t))=\Omega_н+f(t).$$

Перейдем в уравнении (1) к новому времени $\tau=$ $=\Omega_1 t$. Переменную τ переобозначим через переменную t. В случае дробно-рациональных фильтров $K_1(p)=\frac{ap+1}{\delta p^2+p}$, $K_2(p)=\frac{\delta\delta_1 p+\delta_1}{\delta p^2+p}$, нелинейной характеристики частотного детектора $F_2(p\sigma)=\frac{2\beta p\sigma}{1+(\beta p\sigma)^2}$ и функции $f(t)=a_0t+a_1$ [2] заменой переменных $\dot{\sigma}=x_2$, $\dot{x}_2=x_1-$ $-\Gamma\varphi(\sigma)-\delta_1\psi(\dot{\sigma})$, $\varphi(\sigma)=F_1(\sigma)-\gamma$, $\gamma=a_0\Omega_1^{-1}$, $\psi(\dot{\sigma})=\frac{2\alpha\beta\dot{\sigma}}{1+\beta^2(\dot{\sigma})^2}$, $\alpha=\frac{\Omega_2}{\Omega_1}$, $\Gamma=a\delta^{-1}$ уравнение (1) приводится к системе дифференциальных уравнений

$$\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{A}\mathbf{x}+\mathbf{b}\varphi(\sigma)+\mathbf{d}\frac{2\alpha\beta\mathbf{c}^T\mathbf{x}}{1+\beta^2\left(\mathbf{c}^T\mathbf{x}\right)^2},\quad \dot{\sigma}=\mathbf{c}^T\mathbf{x} \qquad (24)$$

для которой $\mathbf{x}\in\mathbf{R}^2$, $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} -\delta^{-1} & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b}=\begin{pmatrix} \nu \\ -\Gamma \end{pmatrix}$,

$\Gamma=a\delta^{-1}$, $\nu=\delta^{-1}(\Gamma-1)$, $\mathbf{c}=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{d}=\begin{pmatrix} 0 \\ -\delta_1 \end{pmatrix}$.

Система (24) в случае отсутствия частотного кольца изучалась в работе [10]. Пусть $\mathbf{H}=$ $=\begin{pmatrix} h & h\nu\Gamma^{-1} \\ h\nu\Gamma^{-1} & h\nu^2\Gamma^{-2}+\Gamma^{-1} \end{pmatrix}$, $\mathbf{H}_0=0$, $h=\delta\Gamma\nu^{-1}>0$, $\mathbf{q}=colon(1,\nu\Gamma^{-1})$, $\tau_1^2=\nu\Gamma^{-2}$, $\tau_2^2=\nu^{-1}$, $\alpha_1^2=\nu\Gamma^{-2}+$ $+2\alpha\beta\delta_1\Gamma^{-1}>0$, $\alpha_2=2\left(\Gamma^{-1}-\alpha\beta\delta_1\delta\right)$, $\alpha_3^2=\nu^{-1}>0$, $\mathbf{L}_1=0$, $\mathbf{L}_2=0$, тогда выполняется условие 1 теоремы 1.

Рассмотрим систему (24), для которой $\nu=k\Gamma\sqrt{\Gamma}$, $\Gamma-1=0.5k$, $a=\delta^{-1}=\frac{\nu}{\Gamma-1}=2\Gamma\sqrt{\Gamma}$, $\nu a^{-1}=0.5k$, $\varphi(\sigma)=\sin\sigma-\gamma$. Пусть для системы (24) выполнены соотношения: $\delta_1\alpha\Gamma^{-1}=1.4$, $\beta\sqrt{\Gamma}=1$, $k=0.01$, $\gamma=0.35$. Для теоремы 1 найдем

$$\alpha_1^2 = \frac{k}{\sqrt{\Gamma}} + \frac{1}{\Gamma} 2\alpha\beta\delta_1 = 2.803\,,$$

$$\alpha_2 = \frac{2}{\Gamma}\left(1 - \frac{\alpha\beta\delta_1}{2\sqrt{\Gamma}}\right) = 0.597\,,$$

$$\alpha_3^2 = \frac{1}{k\Gamma\sqrt{\Gamma}} = 99.255\,,$$

$$\mu_2 = 2\alpha_3^2 - \alpha_2^2 = 198.175\,,$$

$$\varepsilon_2^2 = 2\alpha_1 - 1 - 2\mu_2 k\Gamma = 0.623\,,$$

$$s_0^2 = \frac{\mu_2\varepsilon_2^2}{4\beta^2\Gamma} h^{-1} = \frac{\mu_2\varepsilon_2^2}{4\beta^2\Gamma} 2k\Gamma^2 = 0.624\,.$$

Для системы (24) выполняются условия 2, 3, 4 теоремы 1. Система уравнений (7) при $\varphi(\sigma) = \sin\sigma - \gamma$, $\gamma = 0.35$, $\beta\sqrt{\Gamma} = 1$, $s = 0.789 < s_0 = 0.79$ имеет предельный цикл второго рода $F_0(\sigma)$ и решение $(y(t), \sigma(t))$, определяющее функцию $F(\sigma)$.

На рисунке 1 верхняя линия определяется функцией $F_0(\sigma)$, нижняя функцией $F(\sigma)$. Численными методами показывается, что $0 = \lim\limits_{\sigma\to-\infty}(F_0(\sigma) - F(\sigma))$. В силу теоремы 1 система (24) имеет область притяжения состояний равновесия $\Omega = \{\mathbf{z} : x_2^2 + (x_1 + x_2)^2 \le 2F_0^2(\sigma)\}$.

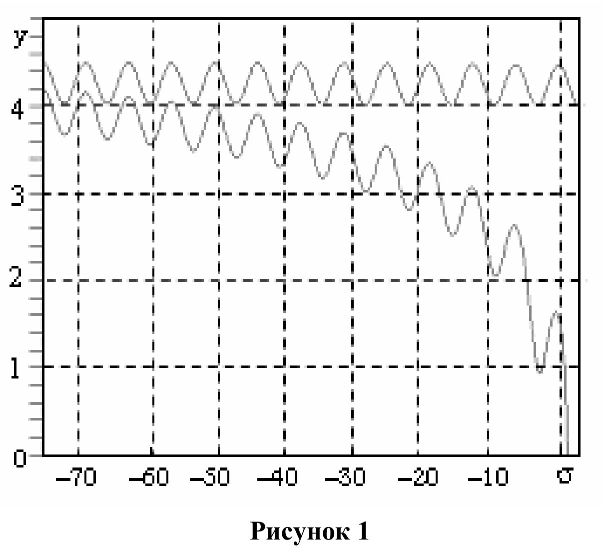


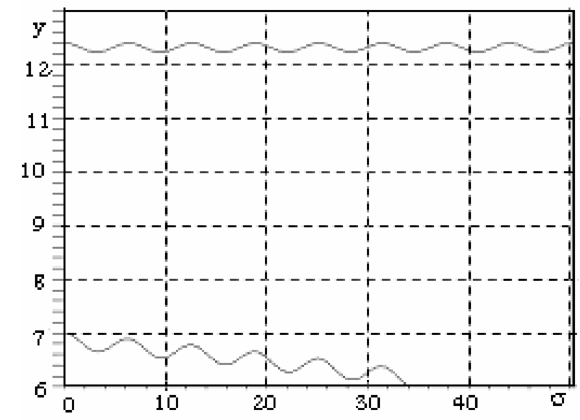
Рисунок 1

Условия 5, 6 теоремы 2 примут вид:

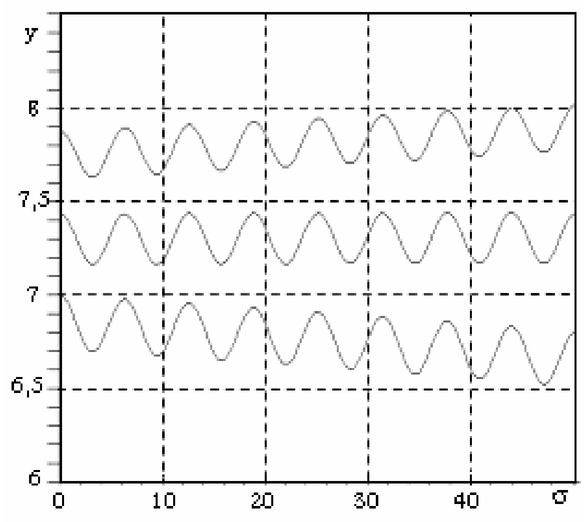
$$km < 2\lambda_1\Gamma m_1\,,\;\; kM < 2\Gamma m_2\left(\delta_1\alpha\Gamma^{-1} - s_1\right). \quad (25)$$

Система (7) при $\lambda = \lambda_1 = 0.01$, $\beta_0 = 1$, $s = 1.4$ имеет предельный цикл второго рода $F(\sigma)$. Система уравнений (7) при $\lambda = 0$, $\beta_0 = 1$, $s = s_1 = 1.3$ имеет предельный цикл второго рода $\Phi(\sigma)$. Если $\lambda = \lambda_1 = 0.01$, $\beta_0 = 1$, $s = 1.4$, то система (7) имеет решение $(y(t), \sigma(t))$, определяющее функцию $F_1(\sigma)$.

На рисунке 2,а верхняя линия определяется предельным циклом $F(\sigma)$, нижняя линия определяется функцией $F_1(\sigma)$. На рисунке 2,б изображены предельный цикл второго рода $\Phi(\sigma)$ и траектории из окрестности предельного цикла $\Phi(\sigma)$. Численными методами показывается, что выполняются соотношения $\frac{2\beta_0\Phi(\sigma)}{1+\beta_0^2\Phi^2(\sigma)} \ge 0.25 = m_2$, $\min\limits_{\sigma\in[0;2\pi]} F_1(\sigma) = m_1 = 6.6$, $\max\limits_{\sigma}\varphi(\sigma) = 0.65 = M$, $\min\limits_{\sigma}\varphi(\sigma) = -m = -1.35$ из которых следует справедливость неравенств (25). В силу теоремы 2 система (24) имеет предельный цикл второго рода.



а

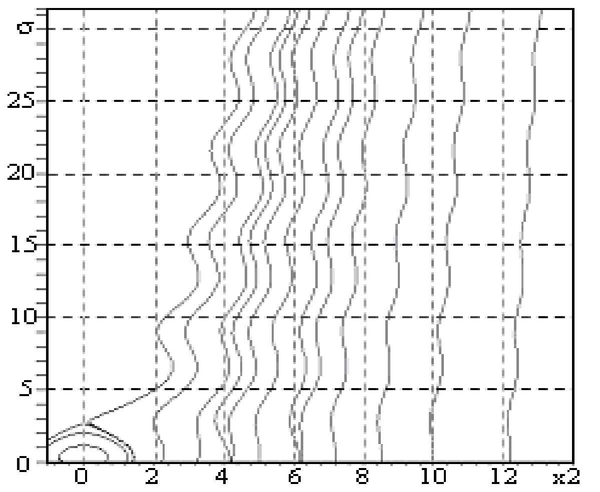


б

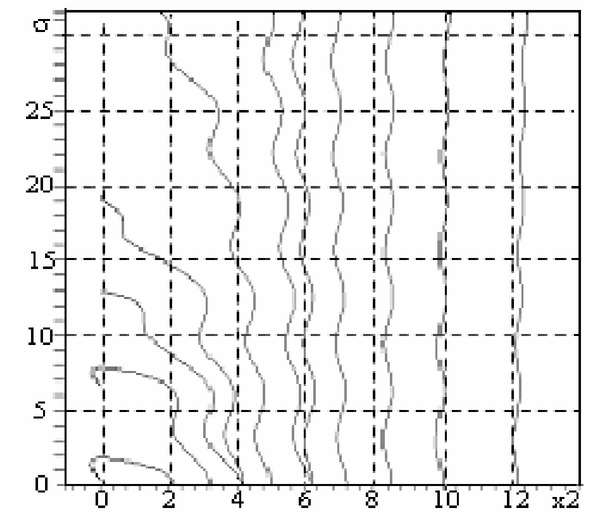
Рисунок 2

На рисунке 3,а изображены траектории с начальными значениями из множества Ω для системы (24) без частотного кольца $(\alpha = 0)$.

На рисунке 3,б изображены траектории с начальными значениями из множества Ω для системы (24) с учетом влияния частотного кольца. Численными методами показывается, что уменьшение параметра γ приводит к увеличению множества Ω. Таким образом, добавление частотного кольца в поисковую систему фазовой автоподстройки частоты привело к расширению области притяжения состояний равновесия.



а



б

Рисунок 3

Заключение. В работе предложена методика нахождения областей притяжения для состояний равновесия и получены условия существования седловых предельных циклов второго рода астатической системы ЧФАПЧ. Наличие предельного цикла второго рода обеспечивает отсутствие глобальной устойчивости поисковой системы, но приводит к появлению области притяжения состояний равновесия, определяющей начальные условия режимов синхронизации. Определение области притяжения связано с нахождением решения системы матричных уравнений. Показано, что исследование многомерных систем ЧФАПЧ основано на результатах, полученных для систем дифференциальных уравнений второго порядка. Прикладное значение полученных результатов заключается в том, что рабочими режимами системы ЧФАПЧ являются режимы синхронизации, когда разность фаз $\sigma(t)$ стремится к постоянному значению; частота управляемого генератора в этом случае равна частоте эталонного генератора. Нахождение области притяжения состояний равновесия позволяет определить начальные условия решений, для которых $\lim\limits_{t\to+\infty}\sigma(t)=const$. Таким образом, полученные результаты позволяют определить область параметров системы ЧФАПЧ для режимов синхронизации. В силу наличия бесконечного множества состояний равновесия область притяжения является неограниченным множеством. Установлено, что добавление частотного кольца приводит к расширению области притяжения. Показано также, что добавление частотного кольца может привести к увеличению проекции для области притяжения состояний равновесия на две положительные фазовые переменные σ, x_2 на периоде более чем на 70 %.

Библиографический список

1. *Витерби Э.Д.* Принципы когерентной связи / Э.Д. Витерби. - М.: Сов. радио, 1970.-392 с.

2. *Шахгильдян В.В.* Системы фазовой автоподстройки частоты / В.В. Шахгильдян, А.А. Ляховкин. - М.: Связь, 1972.- 448 с.

3. *Капранов М.В.* Теория колебаний в радиотехнике / М.В. Капранов, В.Н. Кулешов, Г.М. Уткин. - М.:Наука, 1984. - 320 с.

4. *Шахтарин Б.И.* Анализ кусочно-линейных систем с фазовым регулированием / Б.И. Шахтарин. - М.: Машиностроение, 1991.- 192 с.

5. *Шалфеев В.Д.* К исследованию нелинейной системы частотно-фазовой автоподстройки частоты с одинаковыми интегрирующими фильтрами в фазовой и частотной цепях / В.Д. Шалфеев // Радиофизика.- 1969. -Т.12.- №7.- С.1037-1051.

6. *Пономаренко В.П.* Сложная динамика автогенератора, управляемого петлей частотной автоподстройки / В.П. Пономаренко, В.В. Матросов // Радиотехника и электроника. - 1997.- Т.42. -№9. – С.1125-1133.

7. *Леонов Г.А.* Частотные методы в теории колебаний / Г.А. Леонов, И.М. Буркин, А.И. Шепелявый. - СПб.: Изд-во СПбГУ. 1992.- 368 с.

8. *Гелиг А.Х.* Устойчивость нелинейных систем с неединственным состоянием равновесия / А.Х. Гелиг, Г.А. Леонов, В.А. Якубович. –М: Наука. 1978.- 400 с.

9. *Леонов Г.А.* Устойчивость системы частотно-фазовой синхронизации / Г.А. Леонов, А.М. Томаев, Т.Л. Чшиева // Радиотехника и электроника. -1992.- Т.37. - №4.- С.671-679.

10. *Белых В.Н.* Качественное исследование сис-

темы трех дифференциальных уравнений из теории фазовой синхронизации / В.Н. Белых, В.И. Некоркин // Прикладная математика и механика. -1975.- Т.39.- №4.- С.642- 649.

11. *Белых В.Н.* О качественном исследовании многомерной фазовой системы / В.Н. Белых, В.И. Некоркин // Сибирский математический журнал. - 1977.- Т.18.- №4.- С.723- 735.

12. *Матросов В.В.* Нелинейная динамика системы фазовой автоподстройки частоты с фильтром второго порядка / В.В. Матросов // Изв. вузов. Радиофизика. - 2006. -Т.49.- №3.- С.267-278.

13. *Барбашин Е.А.* Динамические системы с цилиндрическим фазовым пространством / Е.А. Барбашин, В.А. Табуева. -М.: Наука, 1969.- 300 с.

14. *Красносельский М.А.* Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений / М.А. Красносельский. - М.: Наука, 1966.-332 с.

УДК 004.383

М.Л. Гришин, Ф.А. Данилкин

ПРОЕКТИРОВАНИЕ УСТРОЙСТВ ДЛЯ СБОРА ДАННЫХ О ПОЗИЦИИ И ДРУГОЙ ТЕЛЕМЕТРИИ ПОДВИЖНОГО ОБЪЕКТА В РЕАЛЬНОМ ВРЕМЕНИ

Предложена система обработки и организации данных в устройствах для сбора телеметрии подвижных объектов с возможностью передачи данных в реальном времени, а также методика проектирования подобных устройств, опробованная на практике.

Ключевые слова: *мониторинг, регистратор, телеметрия, обработка данных.*

Введение. Устройства сбора данных о позиции и дополнительной телеметрии подвижного объекта (далее регистраторы или просто устройства) применяются в самых разных областях человеческой деятельности – от систем мониторинга различной подвижной техники до присмотра за домашними питомцами. Учитывая широту применения подобных устройств и непрерывное развитие микроэлектроники, важно выработать удобный подход к их проектированию, исключающий грубые и неявные ошибки, а также предложить набор готовых решений для ключевых моментов разработки, уделив особое внимание таким параметрам, как надежность и универсальность.

Теоретическая часть. Регистраторы независимо от сферы их применения можно свести к единой структуре (рисунок 1), в которую входят пять основных элементов:

1) микроконтроллер с набором необходимых для периферии интерфейсов;

2) модуль определения глобальной позиции – это приемник сигналов систем ГЛОНАСС, GPS или какой-либо другой системы. Как правило, подобные модули поддерживают протокол вещания NMEA;

3) беспроводной модем используется для доступа к серверу телеметрии. Доступ может осуществляться средствами: спутниковой связи – главным образом морской транспорт и везде, где важен глобальный и непрерывный мониторинг объекта; сотовой связи – хорошо подходит для гражданского применения в пределах зоны покрытия; децентрализованных сетей – сеть динамически формируется самими модемами (например, модулями стандарта IEEE 802.15.4), такой подход позволяет сократить расходы пользователя на услугах связи, в ряде случаев снизить энергопотребление конечного устройства, но эффективен лишь при достаточной плотности устройств;

4) энергонезависимая память служит для хранения настроек и записи телеметрии при отсутствии связи с сервером. Самым оптимальным на данный момент является использование флеш-памяти;

5) порт отладки предназначен для отладки, диагностики и расширения функциональности устройства, наличие данного порта необязательно, но настоятельно рекомендуется. Большинство микроконтроллеров имеют отладочный интерфейс, совмещенный с последовательным интерфейсом, который можно задействовать в данной роли, когда контроллер работает в штатном режиме, для сокращения числа выводов на разъеме проектируемого регистратора. Под датчиками подразумевается набор интерфейсов (линии прерываний, аналоговые входы и более сложные соединения) с разного рода дополнительными устройствами, необходимыми для

формирования телеметрии согласно специфике проектируемого регистратора. Например, датчик топлива в транспортных средствах, счетчик Гейгера для мониторинга радиационной обстановки, различные биометрические датчики для живых объектов и другие источники телеметрии.

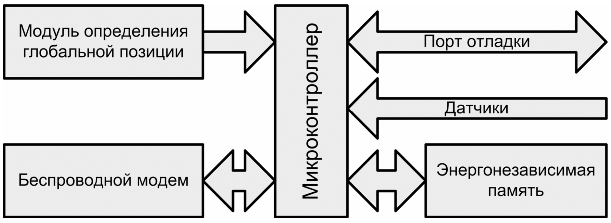


Рисунок 1 – Структурная схема регистратора

Систему обработки данных (рисунок 2), реализуемую регистратором, удобно разбить на пять основных подсистем, каждая из которых налагает свои требования на компоненты проектируемого устройства.

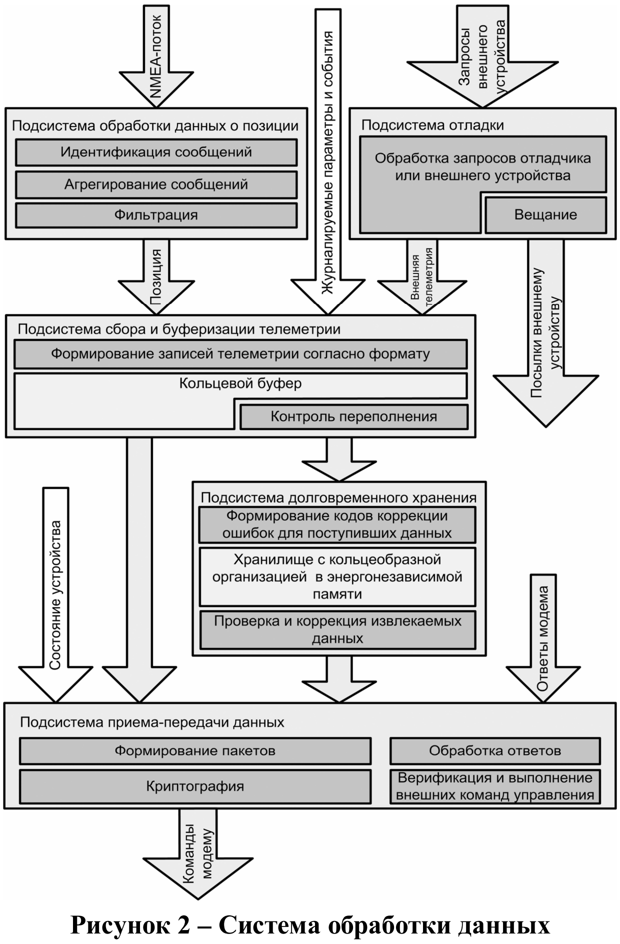


Рисунок 2 – Система обработки данных

Подсистема обработки данных о позиции обеспечивает преобразование потока данных о позиции во внутреннее представление. В качестве протокола входных данных рекомендуется использовать NMEA, так как данный протокол является общепринятым и в случае замены модуля на аналог другого производителя изменения данной подсистемы не потребуются или будут минимальны. В ходе идентификации NMEA-сообщений выполняется проверка их контрольной суммы и типа, на основании чего принимается решение об их пригодности для дальнейшей обработки. Поскольку протокол NMEA поддерживает различные типы сообщений, то, как правило, требуется агрегировать выборку нескольких разных сообщений в одно внутреннее, соответствующее входному формату фильтра, пример агрегирования приведен в таблице.

NMEA-выборка:	
*$GPGGA,**180254.000,5406.4783,N,03734.2094,E**,1,10,0.7,**198.2,M**,94.4,M,,0000*5B* *$GPGSA,A,**3**,09,14,17,29,05,12,11,28,04,26,,,1.4,**0.7,1.2***3E* *$GPRMC,180254.000,A,5406.4783,N,03734.2094,E,0.14,24.79,**130607**,,*34*	
Внутреннее сообщение:	
Время	13.06.07 18:02:54.000
Широта	54°06".4783 с.ш.
Долгота	37°34".2094 в.д.
Высота	198.2 м.
Режим определения позиции	Трехмерный
Горизонтальный фактор потери точности	0.7
Вертикальный фактор потери точности	1.2

Фильтрация данных о позиции [1] позволяет существенно уменьшить поток телеметрии за счет отсева данных, которые не дают принципиально новой информации о местоположении наблюдаемого объекта. На выходе фильтра можно формировать не только данные о текущей позиции, но и некоторые события, например начало движения, потеря и обнаружение сигналов со спутников.

Подсистема отладки и расширений обеспечивает набор отладочных функций, прием дополнительной внешней телеметрии для последующей передачи серверу и вещание данных, формируемых регистратором, внешнему устройству, например данных о позиции бортовому компьютеру в транспортном средстве. Протокол отладки рекомендуется строить по принципу запрос-ответ, где мастером будет внешнее устройства, такой подход позволит ограничить размер FIFO-буфера для интерфейса отладки в регистраторе одним запросом и избежать жестких требований по частоте опроса буфера. Когда регистратор будет готов к серийному производству, большинство функций отладки можно заблокировать, оставив только те, которые необходимы для сервисной диагностики неисправностей, обновления программного кода и настройки параметров функционирования.

Подсистема сбора и буферизации телеметрии отвечает за формирование записей телеметрии согласно принятому разработчиком формату с последующим помещением их в кольцевой буфер, а также осуществляет контроль переполнения буфера, решая, куда направить накопившуюся телеметрию – в подсистему долговременного хранения или приема-передачи данных. Кольцевой буфер необходим для компенсации нарушений связи с сервером и обеспечения блочной записи данных в хранилище.

Подсистема долговременного хранения предоставляет набор функций для работы с флешь-памятью и осуществляет контроль корректности данных. Поскольку флешь-память имеет ограниченное число циклов перезаписи $C = 10000...1000000$ (в зависимости от типа), хранилище телеметрии (рисунок 3) реализуется в форме кольца, чтобы обеспечить равномерное использование секторов и тем самым максимально продлить срок службы устройства. Хранилище не должно иметь отдельных областей для хранения указателей на вершину и основание кольца, вместо этого в каждом секторе содержатся индекс I (беззнаковое целое) и указатель на основание кольца.

Индекс служит для двух целей, первая – определение вершины кольца при включении устройства, вершина определяется по одному из условий:

1) сектор S_i содержит данные, а S_{i+1} чистый (заполнен единицами),

2) $I_{i+k} - I_i > n$,

где i - номер сектора, а n обычно равно 1, за исключением случаев, когда приходится пропускать неисправные сектора. Вторая – определение отправленных секторов, для этого при передаче данных из хранилища серверу вместе с телеметрией необходимо передавать индекс, чтобы затем в случае перезапуска регистратора иметь возможность запросить последний переданный серверу индекс, тем самым сократив трафик и упростив работу с хранилищем. Максимальный индекс $I_{\max}$ должен быть больше числа секторов N_s, выделенных под хранилище телеметрии $I_{\max} > N_s$.

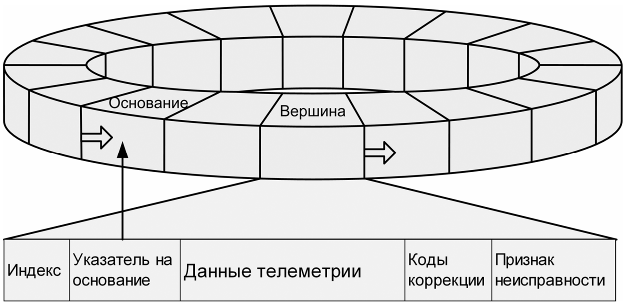


Рисунок 3 – Хранилище телеметрии

Контроль целостности данных осуществляется за счет кодов коррекции ошибок, в качестве которых можно использовать коды Рида-Соломона [2], и с помощью установки признака неисправности сектора в случае неудачной верификации записанных данных. Признак неисправности может находиться либо в самом секторе, либо в отдельной таблице, отражающей исправность секторов хранилища, и представляет собой один байт, если его значение 0xff (соответствует состоянию памяти после операции стирания) – сектор исправен, если 0 – неисправен. В случае промежуточного значения (ошибка в самом признаке) предпочтительно предположить, что сектор содержит данные, и проверить их с помощью кодов коррекции ошибок. В случае переполнения хранилища самая старая телеметрия будет заменяться новой.

Подсистема приема-передачи данных контрлирует диалог с сервером согласно протоколу разработчика, который помимо доставки телеметрии и информирования о текущем статусе устройства может включать функции поддержки администрирования устройства со стороны сервера, сжатие информации для уменьшения трафика и шифрование для защиты от несанкционированного доступа, подделки и перехвата данных.

Алгоритм работы регистратора (рисунок 4) можно разделить на две основных части, границей меж которыми служит кольцевой буфер телеметрии. Первая включает подсистемы обработки данных о позиции и отладки, а также подсистему сбора и буферизации телеметрии за исключением той части, которая контролирует переполнение кольцевого буфера. Вторая включает все оставшиеся части системы и является основным циклом программы. Первая часть на схеме алгоритма обозначена как процедура задержки, она вызывается каждый раз, когда в основном цикле возникает необходимость в ожидании какого-либо события. В основном процедура задержки требуется при взаимодействии с модемом и флешь-памятью, блоки, в которых используется данная процедура, выделены толстым контуром.

Методическая часть. Первым этапом проектирования регистратора являются выбор средств определения глобальной позиции и передачи данных, а также определение требований, предъявляемых к устройству:

1) время работы без доступа к серверу или время хранения телеметрии $t_{\max}$;

2) минимальная $f^u_{\min}$ и максимальная $f^u_{\max}$ частоты обновления данных на сервере;

3) максимальная скорость потока теле-

метрии $\upsilon_{\max}$ (байт в секунду), которая складывается из потока данных о позиции, внутренней и внешней телеметрии, а также небольшого запаса на случай непредвиденных изменений. Данный параметр никогда не должен превышать возможности канала передачи данных;

4) минимальная частота сбора телеметрии (вызова процедуры задержки) f_w.

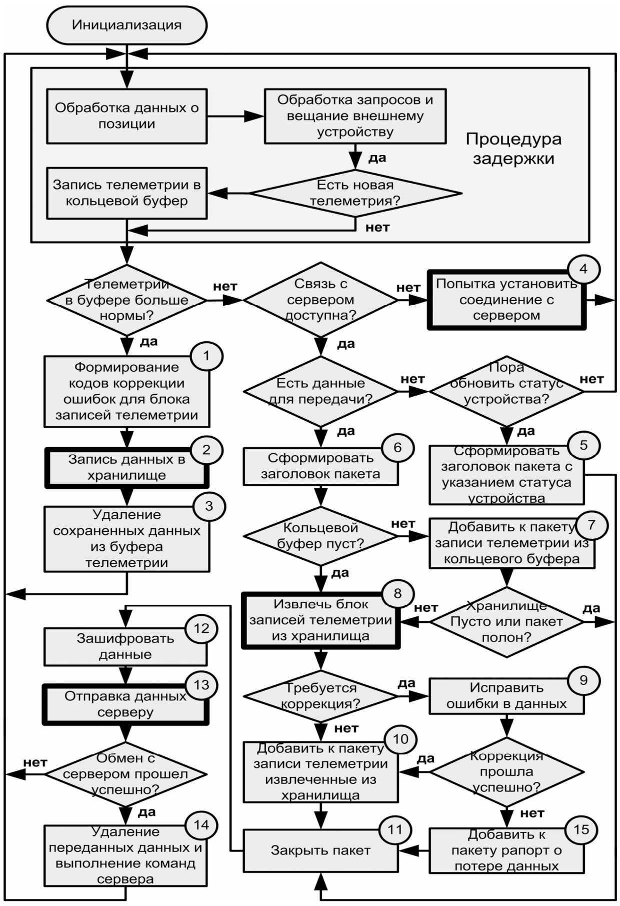


Рисунок 4 – Обобщенная блок-схема алгоритма работы устройства

Второй этап требует определиться с тем, какого рода алгоритмы будут применяться, и реализовать симулятор будущего устройства на компьютере, симулируя, эмулируя или подключая всю необходимую периферию. В дальнейшем симулятор регистратора послужит прототипом программы управления и окажет неоценимую помощь при тестировании серверной части на предмет максимальной нагрузки и выявления разного рода ошибок.

Третий этап заключается в подборе основных компонентов регистратора с последующим созданием макета. При выборе флешь-памяти необходимо рассчитать ее минимально необходимый объем:

$$V_{flash} = t_{\max}\upsilon_{\max}(1 + p_{sys}),$$

где p_{sys} – издержки на хранение системной информации (кодов коррекции, индексов и пр.). Время наработки на отказ составит $t_o = t_{\max}C$, оно может быть увеличено за счет выбора более надежной памяти с большим числом циклов перезаписи C или путем увеличения ее объема.

Методика выбора микроконтроллера включает в себя определение производительности, объема ОЗУ, объема памяти программ и необходимого набора интерфейсов для подключения периферии.

Для определения необходимой производительности микроконтроллера нужно оценить вычислительную нагрузку в пронумерованных блоках (рисунок 4), процедуре задержки и прерываниях с разумным запасом. В качестве оценки можно взять примерное число простых операций (условных инструкций), затрачиваемых на вычисления. Чтобы не проводить подсчеты вручную, можно проанализировать код симулятора какой-либо системой расчета метрик программного кода. Например, метрики Холстеда [3] могут быть использованы для примерной оценки размера программы O' в простых операциях. Число возможных операций, выполняемых в блоке O_j (где j - номер блока, рис.4), можно легко подсчитать, определив число условных инструкций и максимальное число итераций в циклах, если они есть. Аналогично определяется число операций в процедуре задержки O_w и в прерываниях через O_l, где l - номер прерывания. Производительность, необходимая для работы основного цикла P_m без учета вызовов функции задержки, вероятнее всего будет соответствовать последовательности передачи данных серверу с извлечением телеметрии из хранилища и последующей коррекцией данных:

$$P_m = f_{\max}^{u} \sum_{j=6}^{14} O_j .$$

Для процедуры задержки необходимое количество операций в секунду составит:

$$P_w = f_w O_w .$$

Далее нужно определить, сколько операций в секунду требуется прерываниям:

$$P_{\text{int}} = \sum O_l f_l ,$$

где f_l - частота прерывания. Прерывания могут использоваться при приеме данных от периферии, поэтому, во избежание потери данных, необходимо соблюсти условие, чтобы производительность микроконтроллера P_{mcu} была строго больше произведения наибольшей из частот прерываний на сумму операций во всех прерываниях. Таким образом, имеется два требования к производительности микроконтроллера:

$$P_{mcu} > \max(f_l)\sum O_l ,$$

$$P_{mcu} > P_m + P_w + P_{\text{int}} .$$

После определения минимальной производительности необходимо проверить наличие интервалов вызова процедуры задержки, превышающих допустимый предел $\frac{1}{f_w}$, наиболее вероятно возникновение подобных задержек на следующих последовательностях блоков: (1), (6, 7, 11, 12), (9, 10, 11, 12) и (14). Таким образом, необходимо проверить четыре условия:

$$f_w < \frac{P_{mcu}}{O_1},$$

$$f_w < \frac{P_{mcu}}{O_6 + O_7 + O_{11} + O_{12}},$$

$$f_w < \frac{P_{mcu}}{O_9 + O_{10} + O_{11} + O_{12}},$$

$$f_w < \frac{P_{mcu}}{O_{14}},$$

если какие-либо условия не выполняются, необходимо вставить дополнительные вызовы процедуры задержки.

Размер ОЗУ можно оценить по формуле:

$$V_{ram} = V_{ring} + V_{\text{var}} + \sum V_k ,$$

где V_{var} - место, необходимое под различные переменные и стек, можно приблизительно оценить по коду симулятора устройства. Размер кольцевого буфера V_{ring} приблизительно можно рассчитать по неравенству:

$$V_{ring} > \frac{\upsilon_{\max}}{f_{\min}^{u}}.$$

Аналогичным образом можно рассчитать размеры FIFO-буферов для входных и выходных потоков данных:

$$V_k > \frac{\upsilon_k}{f_k},$$

где υ_k - скорость потока в байтах в секунду, f_k - минимальная частота обращений к буферу, k - номер потока.

На четвертом этапе проектирования выполняется портирование кода симулятора на микроконтроллер. В случае если код не вмещается, что маловероятно, если код симулятора был разработан полностью и вычисления проведены корректно, лучше выбрать более емкий контроллер или оптимизировать программу. Для последующей отладки регистратора в стационарном режиме удобно эмулировать поток данных о позиции через порт отладки, используя вместо реального потока заранее подготовленные NMEA-треки.

Заключительным этапом разработки является оптимизация системы путем профилирования кода микроконтроллера. Получив данные профилирования по каждому блоку программы (на этот раз реальные значения O_j, O_w и O_l), необходимо повторно проверить все требования к производительности микроконтроллера и размеру буферов для потоков данных. В случае нехватки производительности или объема памяти можно компенсировать одно за счет другого, например если памяти под буферы не хватает – необходимо увеличить частоту их опроса. Если не хватает производительности, но достаточно памяти, можно увеличить размер буферов и снизить частоту их опроса, тем самым, высвободив часть вычислительных ресурсов микроконтроллера. В ситуации, когда не хватает ни того, ни другого, лучше подумать о замене микроконтроллера на более мощный или попытаться оптимизировать код, возможно даже отказаться от некоторых функций устройства. В случае значительных избытков памяти или производительности можно заменить микроконтроллер менее мощным аналогом по экономическим соображениям или для снижения энергопотребления, что может быть немаловажно для портативного применения.

Заключение. Предложенный подход был успешно опробован при разработке прототипа регистратора для мониторинга транспортных средств «Око-4», в качестве основных компонентов которого использованы GPS-приемник (LEA-5A), GSM/GPRS-модем (SIM300D), микроконтроллер (ATmega644p) и NAND-флешь память на 2Гбит для хранения телеметрии минимум полгода без доступа к серверу. Благодаря использованию предложенной методики прототип был разработан в значительно более сжатые сроки по сравнению с предыдущими моделями и полностью соответствовал техническому заданию без дополнительных доработок и изменений состава основных компонентов.

Библиографический список

1. *Гришин М.Л., Данилкин Ф.А.* Метод быстрой фильтрации потока данных о глобальной позиции наблюдаемого объекта на примере GPS-телеметрии // Геоинформатика. 2008. № 3. С. 21 - 28.

2. *Касперски К.* Могущество кодов Рида-Соломона или информация, воскресшая из пепла // Системный администратор. 2003. № 8. С. 88-94.

3. *Холстед М.Х.* Начала науки о программах. М.: Финансы и статистика, 1981. 128 с.