VII Межрегиональная студенческая физико-математическая Олимпиада имени Г.Н. Шуппе (II тур Всероссийской студенческой олимпиады) Рязанский государственный радиотехнический университет 24 марта 2018 года

<u>Задача 1.</u> Пусть для $\forall x \in \mathbb{R}$ выполнено: $f(x)+f(-x)=1$. Вычислите интеграл $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{f(x)\sin nx}{\sin x}dx$

Предложите примеры (за каждый пример могут быть начислены дополнительные баллы) для $f(x)$.

<u>Решение.</u>

Пусть $I_n = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{f(x)\sin nx}{\sin x}dx$. Тогда,

$$I_n = \int\limits_{0}^{\pi} \frac{f(x)\sin nx}{\sin x}dx + \int\limits_{-\pi}^{0} \frac{f(x)\sin nx}{\sin x}dx = \int\limits_{0}^{\pi} \frac{f(x)\sin nx}{\sin x}dx + \int\limits_{0}^{\pi} \frac{f(-x)\sin nx}{\sin x}dx = \int\limits_{0}^{\pi} \frac{\sin nx}{\sin x}dx.$$

При $n \geq 2$:

$$I_n - I_{n-2} = \int\limits_{0}^{\pi} \frac{\sin nx - \sin(n-2)x}{\sin x}dx = 2\int\limits_{0}^{\pi} \cos(n-1)x dx = 0.$$

Откуда $I_n = \begin{cases} 0 & n = 2k \\ \pi & n = 2k+1 \end{cases}$.

<u>Пример:</u> $f(x) = \frac{1}{1+e^x}$.

<u>Замечание:</u> Данная задача является «усложненным» вариантом задачи №7 Рязанской математической олимпиады от 2017 г. Рекомендуем будущим участникам, при подготовке к Рязанским олимпиадам, внимательно изучать задачи прошлых лет.

<u>Задача 2.</u> Найти предел $\lim\limits_{x\to 1-0}\left[(1-x)\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{1+x^n}\right]$.

<u>Решение.</u>

Вычисление подобных пределов, содержащих бесконечные суммы, удобно сводить к интегральным суммам, т.е. задача сводится к вычислению определенного интеграла. Заметим, что

$$\frac{x^n}{1+x^n}=\frac{1}{1+e^{-n\ln x}}\text{, и }\lim_{x\to 1-0}\frac{1-x}{-\ln x}=1.$$

Тогда $\lim\limits_{x\to 1-0}\left[(1-x)\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{1+x^n}\right]=\lim\limits_{x\to 1-0}\left[\frac{(1-x)}{-\ln x}(-\ln x)\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+e^{-n\ln x}}\right]=\lim\limits_{x\to 1-0}\left[(-\ln x)\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+e^{-n\ln x}}\right]$

Проводя замену $h=-\ln x$, получим

$$\lim_{x\to 1-0}\left[(1-x)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{1+x^n}\right]=\lim_{h\to 0+0}\left[h\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+e^{nh}}\right]=\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+e^x}=\ln 2.$$

<u>Задача 3.</u> Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & 2017 & 2018 & 2019 \\ 2 & 1 & 2 & \dots & 2016 & 2017 & 2018 \\ 3 & 2 & 1 & \dots & 2015 & 2016 & 2017 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2017 & 2016 & 2015 & \dots & 1 & 2 & 3 \\ 2018 & 2017 & 2016 & \dots & 2 & 1 & 2 \\ 2019 & 2018 & 2017 & \dots & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$.

<u>Решение.</u>

После преобразований, получим:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & 2017 & 2018 & 2019 \\ 2 & 1 & 2 & \dots & 2016 & 2017 & 2018 \\ 3 & 2 & 1 & \dots & 2015 & 2016 & 2017 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2017 & 2016 & 2015 & \dots & 1 & 2 & 3 \\ 2018 & 2017 & 2016 & \dots & 2 & 1 & 2 \\ 2019 & 2018 & 2017 & \dots & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}=.$$

$$=2020\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & 1 \\ 2 & 1 & 2 & \dots & 1 \\ 3 & 2 & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2019 & 2018 & 2017 & \dots & 1 \end{vmatrix}=2020\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & 1 \\ 1 & -1 & -1 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & -1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \end{vmatrix}=$$

$$=-2020\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & \dots & -1 \\ 1 & 1 & -1 & \dots & -1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & -1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{vmatrix}=-2020\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 2 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{vmatrix}=2020\cdot 2^{2017}.$$

<u>Задача 4.</u> Найти геометрическое место точек $z\in\mathbb{C}$ удовлетворяющих уравнению $A|z|^2+\bar{B}z+B\bar{z}+C=0$, где $A,C\in\mathbb{R}$, $B\in\mathbb{C}$, $A>0$, $AC<|B|^2$.

Решение.

Пусть $B = b_1 + ib_2$, $z = x + iy$. Тогда $A|z|^2 + \bar{B}z + B\bar{z} + C = A\left(x^2 + y^2\right) + 2\left(b_1 x + b_2 y\right) + C = 0$.

Выделяя полные квадраты, получим уравнение окружности: $\left(x + \frac{b_1}{A}\right)^2 + \left(y + \frac{b_2}{A}\right)^2 = \frac{|B|^2 - AC}{A^2}$ с радиусом $R = \frac{\sqrt{|B|^2 - AC}}{A}$ и центром $\left(-\frac{b_1}{A}, -\frac{b_2}{A}\right) = \left(-\frac{B}{A}\right)$.

Задача 5. Существуют ли функции $f(x)$ и $g(x)$ такие, что $\forall x \in \mathbb{R}$ выполнено $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)}{g'(x)}$?

Решение.

1 способ. Очевидное решение: $f(x) = 0$, $g(x)$ - любая функция такая, что $g(x) \neq 0$ и $g'(x) \neq 0$ для $\forall x \in \mathbb{R}$. Отметим, что это решение полностью соответствует условиям задачи и могло быть оценено максимальным баллом.

2 способ. Будем искать решение в виде $f = e^{u(x)}; g = e^{v(x)}$.

Тогда $\left(\frac{f}{g}\right)' = \left(e^{u-v}\right)' = \left(u' - v'\right)e^{u-v}$. Далее $f' = u'e^u$; $g' = v'e^v$ и $\frac{f'}{g'} = \frac{u'}{v'}e^{u-v}$. Откуда, $u' - v' = \frac{u'}{v'}$.

$u' - \frac{u'}{v'} = v'$. Тогда $u'\left(1 - \frac{1}{v'}\right) = v' \Rightarrow u' = \frac{(v')^2}{v' - 1}$.

Пусть, например, $v(x) = \frac{x^2}{2}$.

$$\frac{du}{dx} = \frac{x^2 - 1 + 1}{x - 1} = \frac{(x-1)(x+1) + 1}{x - 1} = x + 1 + \frac{1}{x - 1}.$$

$$\left.\begin{array}{l} u(x) = \frac{x^2}{2} + x + \ln|x - 1| \\ v(x) = \frac{x^2}{2} \end{array}\right\}$$

Ответ: $f(x) = (x - 1)e^{\frac{x^2}{2} + x}$; $g(x) = e^{\frac{x^2}{2}}$.

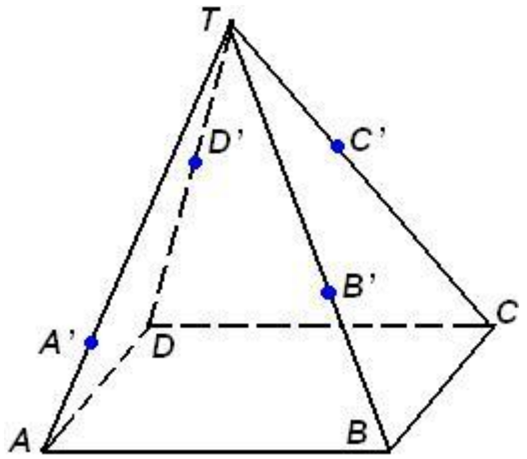
Задача 6. Из чисел $1, 2, \ldots, 2n$ выбрать максимальное количество таких чисел, чтобы ни одно из них не делилось на другое.

Решение. Можно выбрать n чисел: от $n+1$ до $2n$. Выбрать $n+1$ чисел нельзя: разобьем $\{1, 2, \dots, 2n\}$ на n цепочек

$$C_m = \{(2m-1)2^k : k = 0, 1, \dots\}, m = 1, \dots, n.$$

Тогда по принципу Дирихле среди $n+1$ чисел найдутся два из одной цепочки, и одно делится на другое.

Задача 7. Плоскость пересекает боковые ребра правильной пирамиды $TABCD$ в точках $A', B', C', D', AA' = 5, BB' = 10, CC' = 15, DD' = 14$. Найти длину боковых ребер.



Решение. Будем использовать базис из векторов

$$\vec{a} = \frac{\overrightarrow{TA}}{TA}, \vec{b} = \frac{\overrightarrow{TB}}{TB}, \vec{c} = \frac{\overrightarrow{TC}}{TC}$$

и примем длину бокового ребра за $x+5$. Тогда

$$\overrightarrow{TA} = (x+5)\vec{a}, \ \overrightarrow{TB} = (x+5)\vec{b}, \ \overrightarrow{TC} = (x+5)\vec{c},$$

$$\overrightarrow{TD} = \overrightarrow{TA} + \overrightarrow{AD} = (x+5)\vec{a} + (x+5)\vec{c} - (x+5)\vec{b}.$$

Расположение точек A', B', C', D' в одной плоскости равносильно компланарности векторов

$$\overrightarrow{A'B'} = (x+5)\vec{b} - x\vec{a}, \qquad \overrightarrow{A'C'} = (x-10)\vec{c} - x\vec{a},$$

$$\overrightarrow{A'D'} = (x-9)\left(\vec{a} + \vec{c} - \vec{b}\right) - x\vec{a} = -9\vec{a} - (x-9)\vec{b} + (x-9)\vec{c}.$$

Поскольку $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ не компланарны, должна быть вырожденной матрица перехода от них к векторам $\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'}, \overrightarrow{A'D'}$:

$$0 = \begin{vmatrix} -x & -x & -9 \\ x+5 & 0 & 9-x \\ 0 & x-10 & x-9 \end{vmatrix} = -4x^2 + 90x - 450 \Rightarrow x_1 = \frac{15}{2}, x_2 = 15.$$

По условию задачи боковое ребро $x + 5 \geq 15$, так что подходит только второй корень.

Ответ: длина бокового ребра 20.

<u>Задача 8.</u> Найти объём тела $A=\left\{x^2+y^2+z^2\le 1, z\le xy\right\}$.

<u>Решение.</u> Повернув A вокруг оси Oy на 180°, получим тело

$$A'=\left\{x^2+y^2+z^2\le 1, \quad -z\le -xy\right\}=\left\{x^2+y^2+z^2\le 1, \quad z\ge xy\right\}.$$

Очевидно,

$$A\cup A'=B=\left\{x^2+y^2+z^2\le 1\right\}.$$

При этом A и A' не имеют общих внутренних точек. Следовательно,

$$V(B)=V(A)+V(A')=2V(A).$$

Ответ: $V(A)=\dfrac{2\pi}{3}$.

<u>Задача 9</u>. Сходится ли ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\ln(1+n+n^2)}{n^2}$?

<u>Решение</u>. 1) Покажем, что найдется такое натуральное число N, что

при всех $n\ge N$ $\ln(1+n+n^2)\le n^{1/2}$. (1)

По правилу Лопиталя

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(1+n+n^2)}{n^{1/2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^{1/2}(1+2n)}{1+n+n^2}=\left\|\begin{matrix}1+2n\sim 2n,\\ 1+n+n^2\sim n^2\end{matrix}\right\|=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^{1/2}\cdot 2n}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{4}{n^{1/2}}=0.$$

По определению предела найдется такое натуральное число N, что при всех $n\ge N$ $\dfrac{\ln(1+n+n^2)}{n^{1/2}}<1$ и потому справедлива оценка (1). Теперь при всех $n\ge N$ $0<\dfrac{\ln(1+n+n^2)}{n^2}\le\dfrac{n^{1/2}}{n^2}=\dfrac{1}{n^{3/2}}$. Поскольку ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{3/2}}$ сходится, то по признаку сравнения сходится и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\ln(1+n+n^2)}{n^2}$.

$n \ge N \quad \dfrac{\ln(1+n^2)}{n^{1/2}} < 1$ и потому $\ln(1+n^2) \le n^{1/2}$. Но тогда

$$\forall n \ge N \quad 0 < u_n \le \frac{\ln(1+n^2)}{n^2} \le \frac{n^{1/2}}{n^2} = \frac{1}{n^{3/2}}.$$

Поскольку ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^{3/2}}$ сходится, то по признаку сравнения сходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$.

<u>Задача 10</u>. Даны точки $A(-9,-10)$, $B(1,5)$ и $C(2,1)$. На замкнутой ломаной $\overline{ABCA}$ (границе треугольника ABC) найти точку, ближайшую к началу координат.

<u>Решение</u>. Напишем уравнения прямых

AB: $\dfrac{x+9}{10} = \dfrac{y+10}{15}$ или $3x - 2y + 7 = 0$;

AC: $\dfrac{x-2}{11} = \dfrac{y-1}{11}$ или $x - y - 1 = 0$;

BC: $\dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y-1}{-4}$ или $4x + y - 9 = 0$

и уравнения прямых OM, ON и OP, проходящих через начало координат перпендикулярно, соответственно, AB, AC и BC:

$$OM: y = -\frac{2}{3}x,\ ON: y = -x \ \text{ и } \ OP: y = \frac{x}{4}.$$

Найдем точки пересечения

$$M = AB \cap OM: \begin{cases} 3x - 2y + 7 = 0, \\ y = -\dfrac{2}{3}x; \end{cases} \qquad M\left(-\frac{21}{13},\ \frac{14}{13}\right);$$

$$N = AC \cap ON: \begin{cases} x - y - 1 = 0, \\ y = -x; \end{cases} \qquad N\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right);$$

$$P = BC \cap OP: \begin{cases} 4x + y - 9 = 0, \\ y = \dfrac{1}{4}x; \end{cases} \qquad P\left(\frac{36}{17}, \frac{9}{17}\right).$$

Так как $-\frac{21}{13} \in [-9,1]$, то $M \in [AB]$, расстояние от точки O до отрезка $[AB]$ совпадает с расстоянием $|OM| = \sqrt{\left(\frac{21}{13}\right)^2 + \left(\frac{14}{13}\right)^2}$ от O до M и M – ближайшая к O точка на $[AB]$.

Так как $\frac{1}{2} \in [-9,2]$, то $N \in [AC]$ и N – ближайшая к O точка на $[AC]$, находящаяся от $[AC]$ на расстоянии $|ON| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Так как $\frac{36}{17} \notin [1,2]$, то $P \notin [BC]$ и ближайшая к O точка на $[BC]$, либо B, либо C. Так как $|OB| = \sqrt{26}$, а $|OC| = \sqrt{5}$, то ближайшей к O точкой на $[BC]$, является C.

Поскольку из чисел $|OC| = \sqrt{5}$, $|OM| = \sqrt{\left(\frac{21}{13}\right)^2 + \left(\frac{14}{13}\right)^2} > 1$ и $|ON| = \frac{1}{\sqrt{2}}$ наименьшим является $|ON| = \frac{1}{\sqrt{2}}$, то $N\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ – ближайшая к O точка на ломанной $\overline{ABCA}$.

<u>Задача 11.</u> На покоящийся вначале груз пружинного маятника с коэффициентом упругости k и массой m в течение промежутка времени T действовала постоянная сила F в направлении растяжения пружины. Найти, в каком промежутке меняется амплитуда при изменении времени T действия силы.

<u>Решение.</u> Решаем задачу Коши

$$m\ddot{x} + kx = f(t), \quad x(0) = \dot{x}(0) = 0; \quad f(t) = \begin{cases} F, 0 \le t \le T \\ 0, t > t. \end{cases}$$

На интервале $[0;T]$ получаем $x(t) = \frac{F}{k}(1 - \cos\omega t)$, $\dot{x}(t) = \frac{\omega F}{k}\sin\omega t$, где $\omega = \sqrt{k/m}$. Для $t > T$ общее решение имеет вид $x(t) = C_1 \sin\omega t + C_2 \cos\omega t = x_{\max}\sin(\omega t + \varphi)$.

Амплитуду $x_{\max}$ и начальную фазу φ можно найти из начальных условий $x(T) = \frac{F}{k}(1 - \cos\omega T)$, $\dot{x}(T) = \frac{\omega F}{k}\sin\omega T$.

Используя закон сохранения энергии, получим для амплитуды установившихся после прекращения действия внешней силы F колебаний груза:

$$\frac{kx_{\max}{}^2}{2}=\frac{k\left(x(T)\right)^2}{2}+\frac{m\left(\dot{x}(T)\right)^2}{2}.$$

Тогда $x_{\max}{}^2=\left(x(T)\right)^2+\frac{m}{k}\left(\dot{x}(T)\right)^2=\left(\frac{F}{k}\left(1-\cos(\omega T)\right)\right)^2+\frac{m}{k}\left(\omega\frac{F}{k}\sin(\omega T)\right)^2=\left[\frac{2F}{k}\sin\left(\frac{\omega T}{2}\right)\right]^2$,

откуда $x_{\max}=\frac{2F}{k}\left|\sin\left(\frac{\omega T}{2}\right)\right|$.

Отсюда видно, что амплитуда меняется от 0 при $T=n\frac{2\pi}{\omega}=nT_{своб}$ до максимального значения $\frac{2F}{k}$ при $T=(2n+1)\frac{\pi}{\omega}=\left(n+\frac{1}{2}\right)T_{своб}$, где $n=0,1,2,\ldots$.

Замечание: известно (легко доказывается математически), что приложенная постоянная сила не меняет характер и частоту гармонических колебаний системы, а лишь сдвигает положение равновесия на величину $\frac{F}{k}$. Поскольку начальная скорость груза равна нулю, первоначально он находится в положении максимального отклонения от положения равновесия. Поэтому работа, совершенная внешней, будет минимальной (равной 0), если груз за время её действия T совершит целое число колебаний (пройдёт время $T=nT_{своб}$), и максимальной (равной $A=Fs=F\frac{2F}{k}=\frac{2F^2}{k}$), если груз за время её действия совершит полуцелое число колебаний (пройдёт время $T=\left(n+\frac{1}{2}\right)T_{своб}$). В соответствии с законом сохранения энергии $\frac{kx_{\max}{}^2}{2}=A=\frac{2F^2}{k}$ амплитуда последующих колебаний груза будет меняться в диапазоне от 0 до $\frac{2F}{k}$.

<u>Задача 12.</u> На плоскости задана декартова система координат. В начальный момент времени частица находится в точке $O(0,0)$. Каждую секунду частица смещается на 1 единицу в одном из 4 направлений (влево, вправо, вверх или вниз) с равной вероятностью. Найти вероятность того, что через 5 секунд частица окажется в точке $A(1,2)$.

<u>Решение.</u>

<u>1 способ:</u>

Частица может попасть в точку $A(1,2)$ из начала координат одним из двух способов: совершив 3 шага вверх, 1 шаг вниз, 1 шаг вправо и 0 шагов влево, либо 2 шага вверх, 0 шагов вниз, 2 шага вправо и 1 шаг влево. При вычислении вероятностей каждого из способов необходимо учесть возможное количество разбиений 5 шагов по 4 направлениям (влево, вправо, вверх и вниз). Тогда вероятность попадания будет равна:

$$P\left(A\right)=\frac{5!}{3!\cdot 1!\cdot 0!\cdot 1!}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^5+\frac{5!}{2!\cdot 0!\cdot 2!\cdot 1!}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^5=\frac{20}{1024}+\frac{30}{1024}=\frac{25}{512}.$$

2 способ:

Рассмотрим одномерный случай. Пусть частица находится в начале координат и за 1 секунду делает «скачок» влево или вправо с одинаковой вероятностью. Найдем вероятность $P_n\left(x\right)$ того, что после n шагов частица окажется в точке x данной одномерной решетки. Задачу удобно решать в комплексных числах: пусть

$$f\left(\varphi\right)=\frac{1}{2}\left(e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}\right) \qquad \text{где } \varphi\in\left[-\pi,\pi\right].$$

Тогда коэффициент при $e^{i\varphi}$ будет вероятностью шага на одну единицу вправо, а коэффициент при $e^{-i\varphi}$ - влево. Вероятность того, после n шагов частица окажется в точке x, будет равна коэффициенту при $e^{in\varphi}$ в разложении бинома:

$$\frac{1}{2^n}\left(e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}\right)^n=\frac{1}{2^n}e^{in\varphi}+\ldots+P_n\left(x\right)e^{in\varphi}+\ldots+\frac{1}{2^n}e^{-in\varphi}.$$

Умножим на $\frac{1}{2\pi}e^{-i\varphi}$ и проинтегрируем по $\varphi\in\left[-\pi,\pi\right]$. Получим:

$$P_n\left(x\right)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{1}{2}\left(e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}\right)\right]^n e^{-in\varphi}d\varphi,$$

так как $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{-i\varphi(n-m)}d\varphi=\begin{cases}1 & n=m\\ 0 & n\neq m\end{cases}$.

Таким образом, «одномерная» вероятность будет равна

$$P_n\left(x\right)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos^n\varphi e^{-in\varphi}d\varphi.$$

Для двумерной решетки получаем вероятность попадания в точку $\left(x,y\right)$ будет равна

$$P_n\left(x,y\right)=\frac{1}{\left(2\pi\right)^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{1}{2}\left(\cos\varphi_1+\cos\varphi_2\right)\right]^n e^{-i\left(\varphi_1 x+\varphi_2 y\right)}d\varphi_1 d\varphi_2.$$

Тогда $P_5\left(1,2\right)=\frac{25}{512}$

Задача 13. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x} - \arccos x}{x^3}$.

Решение

Сделаем замену $t = 1/x$ и вновь перейдем к переменной x.

Так как $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\operatorname{arctg} x - \arccos\dfrac{1}{x}\right) = 0$, то имеем неопределённость ($0\cdot\infty$). При $x \to +\infty$

$$\left(\operatorname{arctg} x - \arccos\frac{1}{x}\right) \sim \operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg} x - \arccos\frac{1}{x}\right) = \frac{x-\sqrt{x^2-1}}{1+x\sqrt{x^2-1}} =$$

$$= \frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}\frac{1}{x^2\left(\dfrac{1}{x^2}+\sqrt{1-\dfrac{1}{x^2}}\right)} \sim \frac{1}{x^2}\frac{1}{x\left(1+\sqrt{1-\dfrac{1}{x^2}}\right)} \sim \frac{1}{2x^3}.$$

Итак, главной частью функции $\left(\operatorname{arctg} x - \arccos\dfrac{1}{x}\right)$ является функция $1/2x^3$, а искомый предел равен

$$\lim_{x\to +\infty}\left(\operatorname{arctg} x - \arccos\frac{1}{x}\right)x^3 = \frac{1}{2x^3}x^3 = \frac{1}{2}.$$