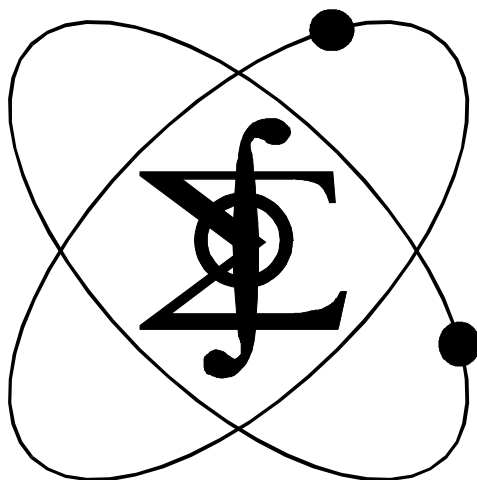


**ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
РЯЗАНСКАЯ ГОСУДАРСТВЕННАЯ РАДИОТЕХНИЧЕСКАЯ АКАДЕМИЯ**

А.И. НОВИКОВ

**ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ,
УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА**



Рязань 2005

Федеральное агентство по образованию
Рязанская государственная радиотехническая академия

А.И. НОВИКОВ

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ.
УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА

Пособие для поступающих
Издание второе,
исправленное и дополненное

Рязань 2005

УДК 514.11

Тригонометрические функции, уравнения и неравенства:
Пособие для поступающих /А.И.Новиков; Рязан. гос. радиотехн.
акад. Рязань, 2005. 288 с. ISBN 5-7722-0248-0.

Содержит подробное изложение курса тригонометрии в
примерах и задачах.

Предназначено для использования в системе довузовской
подготовки, в школах и классах физико-математического
профиля, а также для самостоятельного изучения курса
тригонометрии.

Табл. 3. Ил. 94. Библиограф.: 5 назв.

Печатается по решению методического совета Рязанской
государственной радиотехнической академии.

Рецензент: кафедра высшей математики Рязанской
государственной радиотехнической академии (зам. зав.
кафедрой канд. физ-мат. наук, доц. М.Е. Ильин)

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	3
1. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ	5
1.1. Определение и свойства тригонометрических функций.....	5
1.1.1. Функции синус и косинус	5
1.1.2. Функции тангенс и котангенс	7
1.1.3. Функции секанс и косеканс	9
1.1.4. Знаки тригонометрических функций	12
1.1.5. Формулы приведения	12
1.1.6. Некоторые значения тригонометрических функций	15
1.2. Задачи на свойства тригонометрических функций.....	17
1.2.1. Связь градусной и радианной мер угла	17
1.2.2. Вычисление значений тригонометрических функций	25
1.2.3. Четность и нечетность тригонометрических функций	28
1.2.4. Периодичность тригонометрических функций	32
1.2.5. Монотонность тригонометрических функций. Экстремумы	38
1.2.6. Построение графиков тригонометрических функций	52
1.3. Задачи для самостоятельного решения	53
1.4. Ответы	59
2. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФОРМУЛЫ,	

ТОЖДЕСТВА И ВЫЧИСЛЕНИЯ	65
2.1. Тригонометрические формулы	65
2.2. Тригонометрические тождества.....	72
2.3. Вычисление тригонометрических выражений	80
2.4. Задачи для самостоятельного решения	92
2.5. Ответы	98
3. ОБРАТНЫЕ ФУНКЦИИ.	
ОБРАТНЫЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ....	99
3.1. Обратные функции.....	99
3.2. Обратные тригонометрические функции.....	114
3.2.1. Функции арксинус и арккосинус	115
3.2.2. Функции арктангенс и арккотангенс	118
3.2.3. Свойства обратных тригонометрических функций	121
3.2.4. Вычислительные задачи с обратными тригонометрическими функциями...	124
3.2.5. Уравнения и неравенства с обратными тригонометрическими функциями..	141
3.3. Задачи для самостоятельного решения.....	154
3.4. Ответы	162
4. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ.....	169
4.1. Простейшие уравнения	169
4.2. Метод введения вспомогательного угла	176
4.3. Уравнения относительно одной	

тригонометрической функции	181
4.4. Однородные и приводящиеся к однородным	
уравнения	183
4.4.1. Однородные уравнения	183
4.4.2. Уравнения, приводящиеся к однородным	189
4.5. Решение уравнений вида $R(\sin^{2n} x, \cos^{2k} x) = 0$	192
4.6. Решение уравнений вида $R(\sin x \pm \cos x, \sin 2x) = 0$	198
4.7. Решение уравнений с использованием основных	
тригонометрических формул	200
4.8. Замена переменной $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$	
(универсальная подстановка)	205
4.9. Метод оценок и другие специальные приемы решения	
тригонометрических уравнений.....	213
4.10. Уравнения с радикалами и модулем	
.....	217
4.11. Уравнения с дополнительными условиями.	
Отбор корней.....	223
4.12. Задачи для самостоятельного решения	226
4.13. Ответы	231
5. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ НЕРАВЕНСТВА.....	245
5.1. Простейшие тригонометрические неравенства	245
5.2. Различные тригонометрические неравенства	251
5.3. Задачи для самостоятельного решения	268
5.4. Ответы	270

6. ТЕМАТИЧЕСКИЕ КОНТРОЛЬНЫЕ РАБОТЫ	274
6.1. Контрольная работа № 1:	
Свойства тригонометрических функций.....	274
6.2. Контрольная работа № 2:	
Тригонометрические тождества, вычисления.....	276
6.3. Контрольная работа № 3:	
Обратные функции,	
обратные тригонометрические функции.....	279
6.4. Контрольная работа № 4:	
Тригонометрические уравнения и неравенства	282
СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ	282

ВВЕДЕНИЕ

Пособие для системного повторения и изучения курса тригонометрии рассчитано на аудитории с различным уровнем математической подготовки. Задачи, адресованные аудиториям с углубленным изучением математики, в пособии отмечены значком * (звездочка).

Пособие состоит из пяти основных разделов, имеющих однотипную структуру. В начале каждого раздела, подраздела или пункта даются краткие теоретические сведения. Затем подробно разбирается решение типовых задач, иллюстрирующих теоретический материал или расширяющих теоретические положения. Завершается каждый раздел обширной подборкой задач для самостоятельного решения. Окончание доказательства утверждений, тождеств отмечается значком ■ (заштрихованный квадрат).

В первом разделе – «Тригонометрические функции» - подобраны задачи, позволяющие понять и глубже усвоить основные свойства тригонометрических функций. Второй раздел как по структуре, так и по содержанию является традиционным для пособий такого типа.

Особое место в пособии занимает третий раздел – «Обратные функции. Обратные тригонометрические функции». Этот раздел, как правило, слабо изучается в средней школе; не уделяется ему должное внимание и в стандартных вузовских курсах математики. В традиционных учебниках и учебных пособиях по математике, предназначенных для средней школы, изучение обратных функций сводится в основном к обратным тригонометрическим функциям. В настоящем пособии достаточно широко представлены задачи на нахождение обратных функций и построение их графиков для различных классов функций. Рассматриваются уравнения, решаемые с использованием свойств взаимно обратных функций. Тщательно изучаются и обратные тригонометрические функции.

Тригонометрические уравнения и неравенства достаточно полно представлены соответственно в четвертом и пятом разделах.

В шестом разделе пособия приведены тематические контрольные работы, соответствующие тематике основных разделов.

Многие задачи тригонометрии можно решать различными способами, не обязательно равноценными, но приводящими к искомому результату. Владение широким спектром решения задач является, с одной стороны, составной частью математической культуры человека, а, с другой, существенно повышает шансы на успешное решение задач на экзамене. Этому аспекту уделено достаточно большое внимание во всех разделах пособия, но прежде всего в третьем и в четвертом разделах.

Пособие предназначено для использования в системе организованной довузовской подготовки (подготовительные курсы, факультеты довузовской подготовки и т.д.), а также в школах и классах физико-математического профиля. Предлагаемые пособием способы изучения материала (теоретические сведения $\rightarrow$ решение типовых задач $\rightarrow$ самостоятельное решение аналогичных задач) позволяют рекомендовать его и тем абитуриентам, которые самостоятельно готовятся к вступительным экзаменам.

Пособие можно использовать для подготовки к экзаменам, проводимым как в классической, так и в тестовой формах. Условиям тестовых экзаменов соответствуют задачи первого и второго разделов, а также отдельные задачи остальных разделов.

Основная цель пособия: подготовка не только к вступительным экзаменам в вуз, но и к обучению в вузе. С учетом сказанного, автор надеется, что пособие отвечает запросам системы довузовской подготовки, профильных классов с углубленным изучением математики и представляет интерес для преподавателей математики школ, лицеев и гимназий.

1. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

Основным вопросом для любого класса функций является изучение свойств функций, входящих в этот класс. Первый раздел пособия полностью посвящен изучению свойств тригонометрических функций. Предполагается, что читатель знаком с основными понятиями и способами исследования функций. Вместе с тем, в одноимённых пунктах данного раздела приводятся определения четной (нечетной) функции, интервалов возрастания (убывания), локальных экстремумов и наибольших (наименьших) значений функции на промежутке. Изучение каждого свойства функции осуществляется через решение специальных подборок задач.

1.1. Определение и свойства тригонометрических функций

1.1.1. Функции синус и косинус

На координатной плоскости $O\tilde{x}\tilde{y}$ построим окружность единичного радиуса с центром в точке O . Пусть M_x - произвольная точка окружности и вектор $\overline{OM_x}$ образует угол x радиан с положительным направлением оси $O\tilde{x}$. При этом величина угла x считается положительной, если отсчет ведется от оси $O\tilde{x}$ против хода часовой стрелки, и отрицательным – по ходу часовой стрелки.

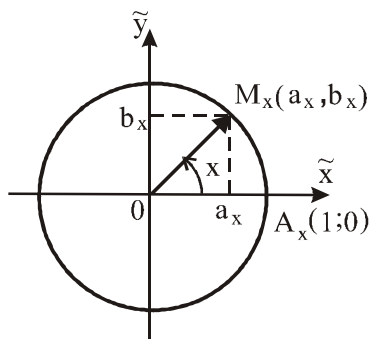


Рис. 1.1

Определение 1.1. Синусом угла x называется число b_x , равное ординате конца M_x единичного радиуса $\overline{OM_x}$, образующего угол x с положительным направлением оси $O\tilde{x}$. Обозначается это число $\sin x$.

Определение 1.2. Косинусом угла x называется число a_x , равное абсциссе конца M_x единичного радиуса $\overline{OM_x}$, образующего угол x с положительным направлением оси $O\tilde{x}$. Обозначается это число $\cos x$.

Таким образом, $b_x = \sin x$, $a_x = \cos x$.

Каждому действительному числу x (углу в x радиан) отвечают единственное число $\sin x$ и единственное число $\cos x$, поэтому отображения $x \rightarrow \sin x$ и $x \rightarrow \cos x$, $x \in \mathbb{R}$ являются функциями.

Свойства функций $\sin x$ и $\cos x$

1. Область определения: $D(f) = \mathbb{R}$.
2. Область значений: $E(f) = [-1; 1]$.
3. Периодичность: периодические с основным (наименьшим положительным) периодом 2π .
4. Четность и нечетность: $\sin x$ - нечетная функция; $\cos x$ - четная.
5. Интервалы монотонности:

$\sin x$ возрастает при $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right)$ $n \in \mathbb{Z}$;

убывает при $x \in \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right)$ $n \in \mathbb{Z}$.

$\cos x$ возрастает при $x \in (-\pi + 2\pi n, 2\pi n)$, $n \in \mathbb{Z}$;

убывает при $x \in (2\pi n, \pi + 2\pi n)$, $n \in \mathbb{Z}$.

6. Экстремальные значения:

$\max_{x \in \mathbb{R}} \sin x = 1$ и достигается в точках $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$;

$\min_{x \in \mathbb{R}} \sin x = -1$ в точках $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$;

$\max_{x \in \mathbb{R}} \cos x = 1$ в точках $x = 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$;

$\min_{x \in \mathbb{R}} \cos x = -1$ в точках $x = \pi + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

7. Для любого угла x : $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

8. Графики функций $\sin x$ и $\cos x$ приведены на рис. 1.2 и 1.3 соответственно.

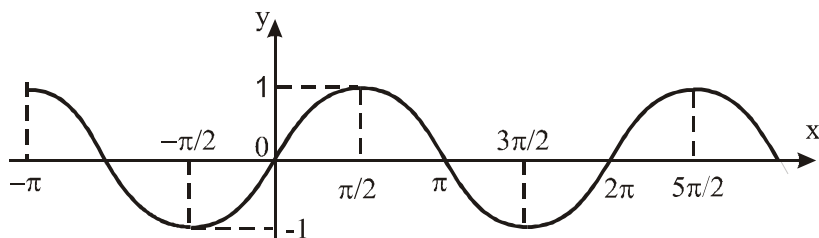


Рис. 1.2. График функции $y = \sin x$

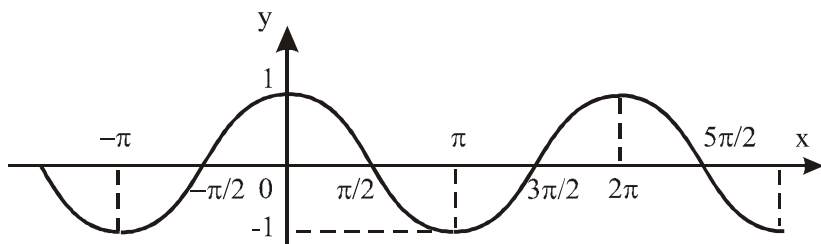


Рис. 1.3. График функции $y = \cos x$

1.1.2. Функции тангенс и котангенс

Определение 1.3. Тангенсом угла x называется отношение ординаты b_x точки M_x (рис. 1.1) к абсциссе a_x и обозначается $\operatorname{tg} x$.

Поскольку $b_x = \sin x$, $a_x = \cos x$, то

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}. \quad (1.1)$$

Определение 1.4. Котангенсом угла x называется отношение абсциссы a_x точки M_x (рис. 1.1) к ординате b_x и обозначается $\operatorname{ctg} x$.

Поскольку $b_x = \sin x$, $a_x = \cos x$, то

$$\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}, \quad x \neq \pi n, n \in \mathbb{Z}. \quad (1.2)$$

Свойства функций $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$

1. Область определения:

$$D(\operatorname{tg} x) = \left\{ x \mid x \in \mathbb{R}, x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \right\};$$

$$D(\operatorname{ctg} x) = \{ x \mid x \in \mathbb{R}, x \neq \pi n, n \in \mathbb{Z} \}.$$

2. Область значений: $E(\operatorname{tg} x) = \mathbb{R}$, $E(\operatorname{ctg} x) = \mathbb{R}$.
3. Периодичность: периодические с основным периодом π .
4. Четность и нечетность: нечетные функции.
5. Интервалы монотонности:

$\operatorname{tg} x$ строго возрастает на каждом интервале

$$\left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n \right), \quad n \in \mathbb{Z};$$

$\operatorname{ctg} x$ строго убывает на каждом интервале

$$(\pi n, \pi + \pi n), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

6. Экстремальные значения: нет.
7. Для всех допустимых x : $\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x = 1$.

8. Графики функций $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$ приведены на рис. 1.4 и 1.5 соответственно.

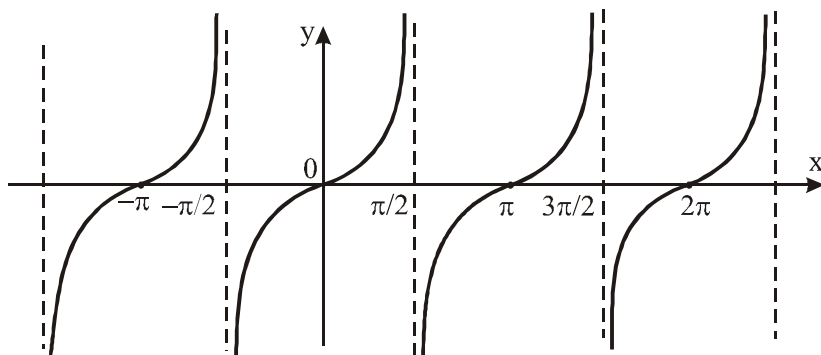


Рис. 1.4. График функции $y = \operatorname{tg} x$

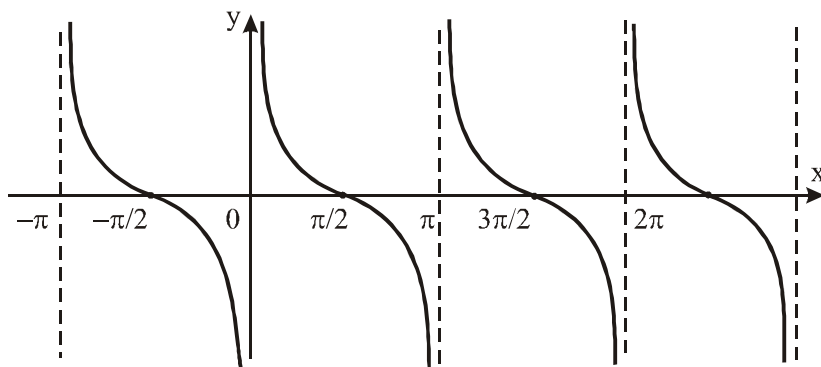


Рис. 1.5. График функции $y = \operatorname{ctg} x$

1.1.3. Функции секанс и косеканс

Функции секанс $y = \sec x$ и косеканс $y = \operatorname{cosec} x$ определяются формулами

$$\boxed{\sec x = \frac{1}{\cos x}} \quad \boxed{\operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x}} \quad (1.3)$$

Их свойства

1. Область определения:

$$D(\sec x) = \left\{ x \mid x \in \mathbb{R}, x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \right\};$$

$$D(\operatorname{cosec} x) = \{x \mid x \in \mathbb{R}, x \neq \pi n, n \in \mathbb{Z}\}.$$

2. Область значений: $E(f) = (-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$ для $\sec x$ и $\operatorname{cosec} x$.

3. Периодичность: периодические с периодом 2π .

4. Четность и нечетность: $\sec x$ - четная функция,

$\operatorname{cosec} x$ - нечетная.

5. Интервалы монотонности: $\sec x$ убывает на каждом интервале

$$\left(-\pi + 2\pi n; -\frac{\pi}{2} + 2\pi n \right) \left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; 2\pi n \right) n \in \mathbb{Z};$$

и возрастает на каждом интервале

$$\left(2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n \right) \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \pi + 2\pi n \right) n \in \mathbb{Z};$$

$\operatorname{cosec} x$ убывает на каждом интервале

$$\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi n, 2\pi n \right) \left(2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n \right) n \in \mathbb{Z};$$

и возрастает на интервалах

$$\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \pi + 2\pi n \right) \left(\pi + 2\pi n; \frac{3}{2}\pi + 2\pi n \right) n \in \mathbb{Z}.$$

6. Локальные экстремумы:

$\sec x$: точки локального минимума $x = 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$

$$(\sec 2\pi n = 1),$$

точки локального максимума $x = \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$

$$(\sec(\pi + 2\pi n) = -1);$$

$\cos \operatorname{ес} x$: точки локального минимума $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$

$$\left(\cos \operatorname{ес} \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n \right) = 1 \right),$$

точки локального максимума $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$

$$\cos \operatorname{ес} \left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi n \right) = 1.$$

7. Графики функций $\sec x$ и $\cos \operatorname{ес} x$ приведены на рис. 1.6 и 1.7 соответственно.

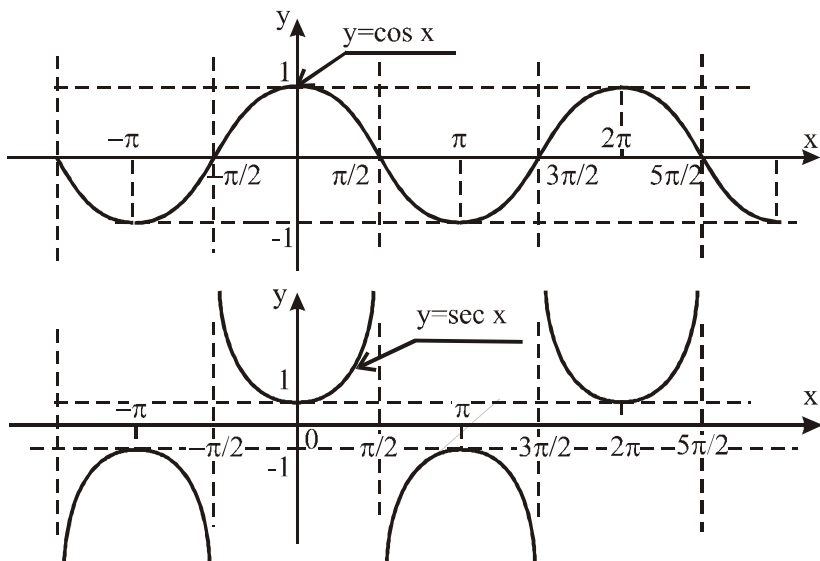


Рис. 1.6. Графики функции $\cos x$ и $\sec x$

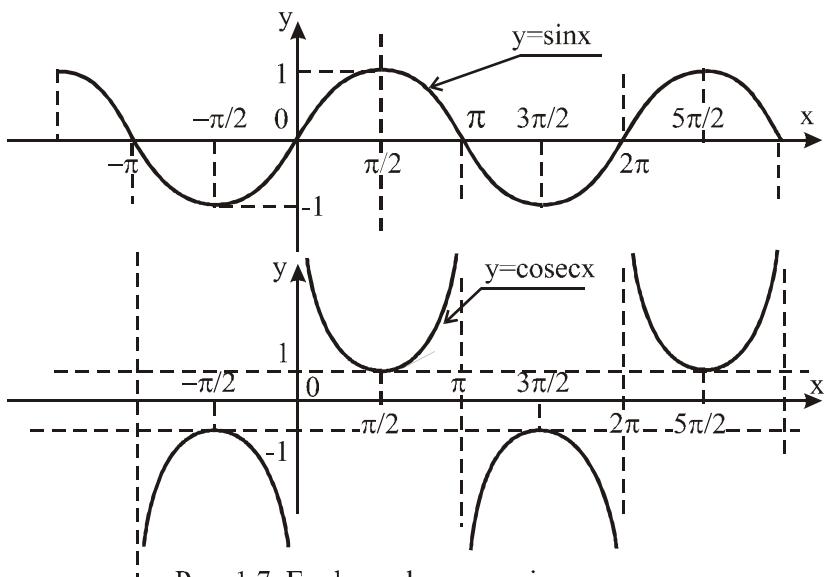
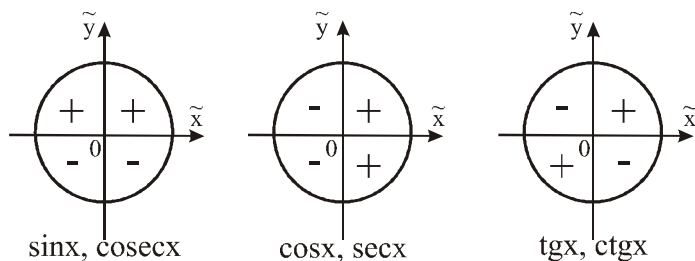


Рис. 1.7. Графики функции $\sin x$ и $\operatorname{cosec} x$.

1.1.4. Знаки тригонометрических функций



1.1.5. Формулы приведения

Формулы приведения (см. табл.1.1) позволяют выразить значения тригонометрических функций любого аргумента x через значения тригонометрических функций аргумента $\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, лежащего в первой четверти. Однако справедливы эти формулы для любого допустимого значения аргумента α .

Таблица 1.1

Формулы приведения

Тригонометрическая функция	Угол						
	$\frac{\pi}{2} - \alpha$	$\frac{\pi}{2} + \alpha$	$\pi - \alpha$	$\pi + \alpha$	$\frac{3}{2}\pi - \alpha$	$\frac{3}{2}\pi + \alpha$	$2\pi - \alpha$
sin	$\cos \alpha$	$\cos \alpha$	$\sin \alpha$	$-\sin \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\sin \alpha$
cos	$\sin \alpha$	$-\sin \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\sin \alpha$	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$

tg	ctg α	-ctg α	-tg α	tg α	ctg α	-ctg α	-tg α
ctg	tg α	-tg α	-ctg α	ctg α	tg α	-tg α	-ctg α

Для вычисления значений тригонометрических функций произвольного аргумента x при $x > \pi/2$ рекомендуется руководствоваться следующим алгоритмом.

1. Если аргумент x функций $\sin x$ и $\cos x$ больше 2π , т.е. $x = t + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, где $0 < t < 2\pi$, то переходят к этим же функциям аргумента t :

$$\sin(t + 2\pi n) = \sin t; \cos(t + 2\pi n) = \cos t.$$

В этом случае говорят, что «отбрасывают» наибольшую, кратную числу 2π , часть числа x .

Аналогично для функций $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$. Если $x > \pi$, т.е. $x = t + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, где $0 < t < \pi$, то переходят к $\operatorname{tg} t$ и $\operatorname{ctg} t$:
 $\operatorname{tg}(t + \pi n) = \operatorname{tg} t$, $\operatorname{ctg}(t + \pi n) = \operatorname{ctg} t$.

2. Если $0 < t < \frac{\pi}{2}$, то дополнительные преобразования не требуются. Если же $\frac{\pi}{2} < t < 2\pi$, то это число можно

представить в зависимости от величины t в виде $\frac{\pi}{2} + \alpha$; $\pi \pm \alpha$;

$\frac{3}{2}\pi \pm \alpha$; $2\pi - \alpha$. Затем необходимо воспользоваться формулами приведения (табл. 1.1).

3. Запоминать формулы приведения в виде набора тождеств из таблицы 1.1 неудобно и нецелесообразно. Рекомендуется использовать следующие правила:

а) при переходе через углы $\frac{\pi}{2}$ и $\frac{3}{2}\pi$ наименование тригонометрической функции меняется на кофункцию ($\sin$ на $\cos$, $\cos$ на $\sin$, tg на ctg , ctg на tg). При переходе через углы π и 2π наименование функции сохраняется;

б) знак перед приведенной функцией определяется знаком приводимой функции в зависимости от четверти, которой принадлежит ее аргумент t .

Например, $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos \alpha$, $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin \alpha$,
 $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\operatorname{ctg} \alpha$. Наименования функций изменены на

кофункции, так как аргумент $t = \frac{\pi}{2} + \alpha$ содержит слагаемое $\frac{\pi}{2}$.

Знаки в правых частях формул соответствуют знакам функций $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$ соответственно во второй четверти.

Пример 1.1. Вычислите

а) $\sin 570^\circ$; б) $\cos 420^\circ$; в) $\operatorname{tg} 750^\circ$; г) $\sin 1140^\circ$;

д) $\operatorname{ctg} 1035^\circ$; е) $\sin \frac{23}{6}\pi$; ж) $\cos \frac{20}{3}\pi$; з) $\operatorname{tg} \frac{29}{4}\pi$.

Решение.

а) $\sin 570^\circ = \sin(360^\circ + 210^\circ) = \sin 210^\circ =$
 $= \sin(180^\circ + 30^\circ) = -\sin 30^\circ = -\frac{1}{2};$

б) $\cos 420^\circ = \cos(360^\circ + 60^\circ) = \cos 60^\circ = \frac{1}{2};$

$$\text{в) } \operatorname{tg} 750^{\circ} = \operatorname{tg}(180^{\circ} \cdot 4 + 30^{\circ}) = \operatorname{tg} 30^{\circ} = \frac{1}{\sqrt{3}};$$

$$\text{г) } \sin 1140^{\circ} = \sin(360^{\circ} \cdot 3 + 60^{\circ}) = \sin 60^{\circ} = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\begin{aligned} \text{д) } \operatorname{ctg} 1035^{\circ} &= \operatorname{ctg}(180^{\circ} \cdot 5 + 135^{\circ}) = \\ &= \operatorname{ctg}(90^{\circ} + 45^{\circ}) = -\operatorname{tg} 45^{\circ} = -1; \end{aligned}$$

$$\text{е) } \sin \frac{23}{6} \pi = \sin \left(4\pi - \frac{\pi}{6} \right) = \sin \left(-\frac{\pi}{6} \right) = -\sin \frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2};$$

$$\begin{aligned} \text{ж) } \cos \frac{20}{3} \pi &= \cos \left(6\pi + \frac{2}{3} \pi \right) = \cos \frac{2}{3} \pi = \\ &= \cos \left(\pi - \frac{\pi}{3} \right) = -\cos \frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}; \end{aligned}$$

$$\text{з) } \operatorname{tg} \frac{29}{4} \pi = \operatorname{tg} \left(7\pi + \frac{\pi}{4} \right) = \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1.$$

$$\text{Ответ: а) } -\frac{1}{2}; \text{ б) } \frac{1}{2}; \text{ в) } \frac{1}{\sqrt{3}}; \text{ г) } \frac{\sqrt{3}}{2}; \text{ д) } -1;$$

$$\text{е) } -\frac{1}{2}; \text{ ж) } -\frac{1}{2}; \text{ з) } 1.$$

1.1.6. Некоторые значения тригонометрических функций

В задачах тригонометрии и в её приложениях часто встречаются значения тригонометрических функций для углов $\frac{\pi}{6}n$, $n = 0, 1, 2, \dots, 12$ и $\frac{\pi}{4}m$, $m = 1, 3, 5, 7$. Связано это с тем, что

значения тригонометрических функций для этих углов имеют достаточно простые по форме записи числовые значения. Они приведены в таблице 1.2 для углов (значений аргумента) $0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}$. Для нахождения значений тригонометрических функций в углах $\frac{2}{3}\pi, \frac{3}{4}\pi, \frac{5}{6}\pi, \pi$ и т.д. необходимо использовать формулы приведения.

Таблица 1.2

Функции	Аргумент				
	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\operatorname{tg} \alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	не определён
$\operatorname{ctg} \alpha$	не определён	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0
$\operatorname{cosec} \alpha$	не определён	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	1
$\sec \alpha$	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$	2	не определён

Иногда возникает необходимость вычисления значений тригонометрических функций аргументов $\frac{\pi}{12}(15^\circ)$, $\frac{\pi}{10}(18^\circ)$, $\frac{\pi}{5}(36^\circ)$ и других. Однако запоминать эти значения (например,

$$\sin \frac{\pi}{10} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}, \cos \frac{\pi}{10} = \frac{\sqrt{5}+\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}, \operatorname{tg} \frac{\pi}{10} = \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}},$$

сложно и нецелесообразно. Их необходимо уметь вычислять с помощью формул тригонометрии (см. раздел 2, примеры 2.17 и 2.18).

Значения тригонометрических функций, приведённые в таблице 1.2, разумеется, необходимо знать наизусть.

1.2. Задачи на свойства тригонометрических функций

1.2.1. Связь градусной и радианной мер угла

Напомним, что радианной мерой x угла AOB , вписанного в окружность радиусом R и с центром в точке O – вершине угла AOB , - называется отношение длины l дуги AB , на которую опирается этот угол, к радиусу R (рис.1.8):

$$x = \frac{l}{R}.$$

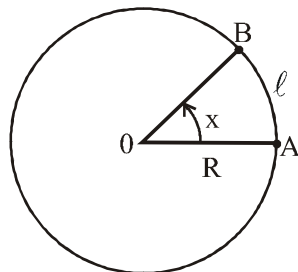


Рис. 1.8

В соответствии с этим определением углом в 1 радиан будет угол, опирающийся на дугу AB , длина l которой равна радиусу R , т.е. $l = R$. Углу 180° отвечает π радиан, поэтому углу в 1 радиан соответствует $\frac{180^\circ}{\pi} \cong 57^\circ 17' 8''$.

Если α - величина угла в градусах, то перевод в радианную меру осуществляется по формуле

$$x_{\text{рад}} = \frac{\alpha^0}{180^0} \cdot \pi. \quad (1.4)$$

Перевод из радианной меры x угла в градусы осуществляется соответственно по формуле

$$\alpha^0 = \frac{x_{\text{рад}} \cdot 180^0}{\pi}. \quad (1.5)$$

Эти формулы часто забываются абитуриентами. Их достаточно легко вывести, воспользовавшись пропорциями:

$$180^0 : \alpha^0 = \pi_{\text{рад}} : x_{\text{рад}} \Rightarrow x_{\text{рад}} = \frac{\alpha^0 \cdot \pi}{180^0}; \quad \alpha^0 = \frac{x_{\text{рад}} \cdot 180^0}{\pi}.$$

Заметим, что аналогично можно вспомнить формулы площади сектора $S = \frac{1}{2} R^2 \alpha$ радиуса R с центральным углом α и длины дуги сектора (сегмента) $l = R \alpha$. Для этого достаточно помнить площадь круга $S = \pi R^2$ и длину окружности: $L = 2\pi R$. Действительно, $2\pi_{\text{рад}} \sim \pi R^2$, $\alpha_{\text{рад}} \sim S_{\text{сект}}$, откуда

$$\pi R^2 : 2\pi = S_{\text{сект}} : \alpha_{\text{рад}} \Rightarrow S_{\text{сект}} = \frac{\alpha \cdot \pi R^2}{2\pi} = \frac{1}{2} R^2 \alpha,$$

$$2\pi \sim 2\pi R, \quad \alpha_{\text{рад}} \sim l \Rightarrow 2\pi R : 2\pi = l : \alpha_{\text{рад}} \quad \text{и}$$

$$l = \frac{\alpha \cdot 2\pi R}{2\pi} = R \cdot \alpha.$$

Пример 1. 2. Переведите из градусной в радианную меру углы: $5^0, 10^0, 15^0, 18^0, 20^0, 25^0, 30^0, 36^0$,

$40^0, 45^0, 60^0, 70^0, 72^0, 75^0, 80^0, 90^0$.

Решение. Воспользовавшись формулами (1.4), получим:

α^0	5^0	10^0	15^0	18^0	20^0	25^0	30^0	36^0
$x_{\text{рад}}$	$\frac{\pi}{36}$	$\frac{\pi}{18}$	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{10}$	$\frac{\pi}{9}$	$\frac{5\pi}{36}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{5}$

α^0	40^0	45^0	60^0	70^0	72^0	75^0	80^0	90^0
$x_{\text{рад}}$	$\frac{2\pi}{9}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{18}$	$\frac{2\pi}{5}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{4\pi}{9}$	$\frac{\pi}{2}$

Пример 1.3. Дан сектор радиусом $\frac{8}{\pi}$ с центральным углом $22^030'$. Найдите длину дуги сектора и его площадь^{*)}.

Решение. В формулах площади сектора и длины дуги угол α дан в радианах, поэтому находим $\alpha_{\text{рад}} = \frac{45^0}{180^0} \cdot \pi = \frac{\pi}{8}$.

$$\text{Тогда } l = \frac{8}{\pi} \cdot \frac{\pi}{8} = 1; \quad S_{\text{сект}} = \frac{1}{2} \left(\frac{8}{\pi} \right)^2 \cdot \frac{\pi}{8} = \frac{4}{\pi}.$$

$$\text{Ответ: } l = 1; \quad S = \frac{4}{\pi}.$$

^{*)} $30' = 30$ минут, 1 минута $= \frac{1}{60}$ градуса, поэтому

$$22^030' = \left(22 \frac{1}{2} \right)^0 = \frac{45^0}{2}.$$

Пример 1.4. Вершины вписанного треугольника делят окружность на части в отношении 3:5:10. Найдите внутренние углы треугольника.

Решение. $3+5+10=18$,

$$360^0 : 18 = 20^0.$$

Дуги АВ, ВС и АМС рис. 1.9 содержат соответственно

$$20^0 \cdot 3 = 60^0; \quad 20^0 \cdot 5 = 100^0;$$

$$20^0 \cdot 10 = 200^0.$$

Как известно, угол, вписанный в окружность равен половине отвечающего ему центрального угла или половине градусной меры дуги, на которую он опирается. Поэтому

$$\angle A = \frac{1}{2} \text{BC} = \frac{1}{2} 100^0 = 50^0 \quad \text{или} \quad \frac{5}{18} \pi;$$

$$\angle B = \frac{1}{2} \text{АМС} = \frac{1}{2} 200^0 = 100^0 \quad \text{или} \quad \frac{5}{9} \pi;$$

$$\angle C = 180^0 - (50^0 + 100^0) = 30^0 \quad \text{или} \quad \frac{\pi}{6}.$$

Ответ: $\frac{5}{18} \pi$; $\frac{5}{9} \pi$; $\frac{\pi}{6}$.

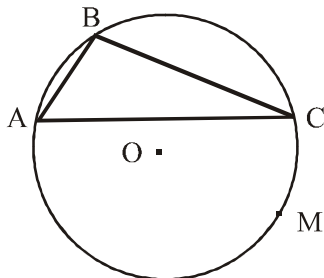


Рис. 1.9

При решении задач с тригонометрическими функциями, особенно с обратными тригонометрическими функциями, часто приходится определять положение числа x (x радиан) на числовой прямой относительно чисел вида $\frac{\pi}{2}n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Пример 1.5. Укажите отрезки вида $\left[\frac{\pi}{2}n, \frac{\pi}{2}(n+1) \right]$, $n \in \mathbb{Z}$,

которым принадлежат числа а) 4; б) $\frac{9}{2}$; в) 6; г) 8; д) 13; е) 15 и отметьте на тригонометрическом круге точки, отвечающие этим числам.

Решение. Натуральное число n , при котором заданное действительное число $x_{\text{рад}}$ принадлежит отрезку

$\left[\frac{\pi}{2}n; \frac{\pi}{2}(n+1) \right]$, может быть найдено различными способами.

Однако все они основаны на замене чисел π ($\pi = 3,141592653\dots$) или градусной меры $\alpha(1)$ одного радиана ($\alpha(1) = 57,295779513^0\dots$) их приближенными значениями.

Способ 1. Умножив равенство $\frac{2}{\pi} = 0,636619772\dots$ на $\frac{\pi}{2}$, получим $1 = (0,636619772\dots) \cdot \frac{\pi}{2}$. Это равенство позволяет записать неравенства

$$0,63\frac{\pi}{2} < 1 < 0,64\frac{\pi}{2}; \quad 0,636\frac{\pi}{2} < 1 < 0,637\frac{\pi}{2};$$

$$0,63661\frac{\pi}{2} < 1 < 0,63662\frac{\pi}{2} \text{ и т.д.}$$

Они (неравенства) отличаются точностью, с которой оценивается число 1 (1 рад). Для решения задач а) ... е) данного примера, как увидим сейчас, достаточно первой оценки:

$$0,63\frac{\pi}{2} < 1 < 0,64\frac{\pi}{2}.$$

а) Умножив двойное неравенство $0,63\frac{\pi}{2} < 1 < 0,64\frac{\pi}{2}$ на 4,

получим $2,52 \frac{\pi}{2} < 4 < 2,56 \frac{\pi}{2}$.

Интервал $\left(2,52 \frac{\pi}{2}; 2,56 \frac{\pi}{2}\right)$ содержится в отрезке $\left[2 \frac{\pi}{2}; 3 \frac{\pi}{2}\right] = \left[\pi; \frac{3}{2}\pi\right]$ и потому $4 \in \left[\pi; \frac{3}{2}\pi\right]$.

$$\text{б) } \frac{9}{2} \cdot 0,63 \frac{\pi}{2} < \frac{9}{2} < \frac{9}{2} \cdot 0,64 \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 2,835 \frac{\pi}{2} < \frac{9}{2} < 2,880 \frac{\pi}{2}.$$

Интервал $\left(2,835 \frac{\pi}{2}; 2,880 \frac{\pi}{2}\right)$ содержится в отрезке $\left[2 \frac{\pi}{2}; 3 \frac{\pi}{2}\right]$.

$$\text{в) } 6 \cdot 0,63 \frac{\pi}{2} < 6 < 6 \cdot 0,64 \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 3,78 \frac{\pi}{2} < 6 < 3,84 \frac{\pi}{2}.$$

Для нахождения искомого значения n нужно взять целые части чисел 3.78 и 3.84 ($[3,78]=3$, $[3,84]=3$); поскольку они, в данном случае равны, то $n=3$. Таким образом, здесь

$6 \in \left[3 \frac{\pi}{2}; 4 \frac{\pi}{2}\right]$. В противном случае - целые части чисел в левой

и правой частях двойного неравенства не равны - нужно использовать более точную оценку числа 1 в виде двойного неравенства (см. комментарий к данному примеру).

$$\text{г) } 8 \cdot 0,63 \frac{\pi}{2} < 8 < 8 \cdot 0,64 \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 5,04 \frac{\pi}{2} < 8 < 5,12 \frac{\pi}{2};$$

$$[5,04]=[5,12]=5 \Rightarrow n=5 \text{ и } 8 \in \left[5 \frac{\pi}{2}; 6 \frac{\pi}{2}\right].$$

$$\text{д) } 13 \cdot 0,63 \frac{\pi}{2} < 13 < 13 \cdot 0,64 \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 8,19 \frac{\pi}{2} < 13 < 8,32 \frac{\pi}{2};$$

$$[8,19]=[8,32]=8 \Rightarrow n=8 \text{ и } 13 \in \left[8\frac{\pi}{2}; 9\frac{\pi}{2}\right].$$

$$\text{е) } 15 \cdot 0,63\frac{\pi}{2} < 15 < 15 \cdot 0,64\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 9,45\frac{\pi}{2} < 15 < 9,60\frac{\pi}{2};$$

$$[9,45]=[9,60]=9 \Rightarrow n=9 \text{ и } 15 \in \left[9\frac{\pi}{2}; 10\frac{\pi}{2}\right].$$

Способ 2. Основан на использовании приближенного значения градусной меры $\alpha(1)$ одного радиана: $\alpha(1) \approx 57^{\circ}17'8''$ или $\alpha(1) = 57,295779...^{\circ}$. Последнее равенство позволяет записать неравенства

$$57,2^{\circ} < \alpha(1) < 57,3^{\circ}; \quad 57,29^{\circ} < \alpha(1) < 57,30^{\circ};$$

$$57,295^{\circ} < \alpha(1) < 57,296^{\circ} \text{ и т.д.}$$

Эти оценки отличаются точностью локализации числа $\alpha(1)$. Задачи а) ... е) в данном примере успешно решаются с помощью первой грубой оценки $\alpha(1)$: $57,2^{\circ} < \alpha(1) < 57,3^{\circ}$.

Рассмотрим некоторые задания из примера 1.4.

$$\text{а) } 4 \cdot 57,2^{\circ} < 4\alpha(1) < 4 \cdot 57,3^{\circ} \Leftrightarrow 228,8^{\circ} < 4\alpha(1) < 229,2^{\circ}.$$

Интервал $(228,8^{\circ}; 229,2^{\circ})$ содержится в отрезке $[180^{\circ}; 270^{\circ}]$ и потому $4\alpha(1) \in [180^{\circ}; 270^{\circ}]$ или $4 \in \left[\pi; \frac{3}{2}\pi\right];$

$$\text{в) } 6 \cdot 57,2^{\circ} < 6\alpha(1) < 6 \cdot 57,3^{\circ} \Leftrightarrow 343,2^{\circ} < 6\alpha(1) < 343,8^{\circ}.$$

Нетрудно видеть, что интервал $(343,2^{\circ}; 343,8^{\circ})$ содержится в отрезке $[270^{\circ}; 360^{\circ}] = [3 \cdot 90^{\circ}; 4 \cdot 90^{\circ}]$, т.е. $n=3$ и

$$6 \in \left[\frac{3}{2}\pi; 2\pi \right].$$

$$\text{г) } 15 \cdot 57,2^0 < 15\alpha(1) < 15 \cdot 57,3^0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 858,0^0 < 15\alpha(1) < 859,5^0.$$

Для определения n вычисляем целые

части чисел $\left\lfloor \frac{858^0}{90^0} \right\rfloor = 9$ и $\left\lfloor \frac{859,5^0}{90^0} \right\rfloor = 9$.

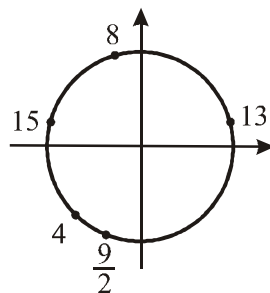


Рис.1.10

Поскольку оба значения совпали

$$(9=9), \text{ то } 15\alpha(1) \in [9 \cdot 90^0; 10 \cdot 90^0], \text{ т.е. } 15 \in \left[\frac{9}{2}\pi; 5\pi \right].$$

Расположение чисел $4, \frac{9}{2}, 6, 8, 13, 15$ на единичной окружности приведено на рис. 1.10.

Ответ: а) $\left[\pi; \frac{3}{2}\pi \right];$ б) $\left[\pi; \frac{3}{2}\pi \right];$ в) $\left[\frac{3}{2}\pi; 2\pi \right];$

г) $\left[\frac{5}{2}\pi; 3\pi \right];$ д) $\left[4\pi; \frac{9}{2}\pi \right];$ е) $\left[\frac{9}{2}\pi; 15\pi \right].$

Комментарий к примеру 1.5.

1. Если число $x_{\text{рад}}$ расположено «близко» к некоторому числу $\frac{\pi}{2}n$, то может потребоваться большая точность локализации числа $1_{\text{рад}}$ или $\alpha(1)$ (градусная мера одного радиана).

Поясним это утверждение следующим примером. Пусть

$x_{\text{рад}} = 11$. Тогда

$$11 \cdot 57,2^0 < 11 \cdot \alpha(1) < 11 \cdot 57,3^0 \Leftrightarrow 629,2^0 < 11\alpha(1) < 630,3^0.$$

Но интервал $(629,2^0; 630,3^0)$ не содержится ни в одном отрезке

вида $\left[\frac{\pi}{2}n; \frac{\pi}{2}(n+1) \right]$. Действительно $\left[\frac{629,2^0}{90^0} \right] = 6$, а

$$\left[\frac{630,3^0}{90^0} \right] = 7. \text{ Это означает, что для нахождения искомого}$$

значения n (отрезка $\left[\frac{\pi}{2}n; \frac{\pi}{2}(n+1) \right]$) необходимо повысить точность локализации числа $\alpha(1)$.

Пусть $57,29^0 < \alpha(1) < 57,30^0$, тогда

$$11 \cdot 57,29^0 < 11 \cdot \alpha(1) < 11 \cdot 57,30^0 \Leftrightarrow 630,19^0 < 11\alpha(1) < 630,3^0.$$

Интервал $(630,19^0; 630,3^0)$ содержится в отрезке

$$\left[630^0; 720^0 \right], \text{ т.е. } 11 \in \left[7\frac{\pi}{2}; 8\frac{\pi}{2} \right] \text{ или } 11 \in \left[\frac{7}{2}\pi; 4\pi \right].$$

Действительно здесь

$$\left[\frac{630,19^0}{90^0} \right] = \left[\frac{630,3^0}{90^0} \right] = 7.$$

2. В тех случаях, когда число $x_{\text{рад}}$ значительно отличается от ближайших к нему чисел $\frac{\pi}{2}n$ и $\frac{\pi}{2}(n+1)$ и n не слишком большое ($n \sim 10$), можно использовать упрощенный алгоритм

поиска соответствующего отрезка $\left[\frac{\pi}{2}n; \frac{\pi}{2}(n+1) \right]$.

Например, исходя из приближенной оценки $\frac{\pi}{2} \approx 1,57$, подбором n легко устанавливается, что

$$3 \cdot 1,57 < 6 < 4 \cdot 1,57 \Rightarrow 6 \in \left[\frac{3}{2}\pi; 2\pi \right];$$

$$5 \cdot 1,57 < 8 < 6 \cdot 1,57 \Rightarrow 8 \in \left[\frac{5}{2}\pi; 3\pi \right],$$

$$9 \cdot 1,57 < 13 < 10 \cdot 1,57 \Rightarrow 13 \in \left[9\frac{\pi}{2}; 5\pi \right] \text{ и т.д.}$$

Разумеется, если число $x_{\text{рад}}$ близко к некоторому числу $\frac{\pi}{2}n$, то такой способ может приводить к ошибкам.

Пример 1.6. Определите знак числа $\cos 11$.

Решение. Очевидно, что число 11 принадлежит интервалу $(3\pi; 4\pi)$. Знак числа $\cos 11$ будет зависеть от сравнения 11 с $\frac{7}{2}\pi$. Если $11 < \frac{7}{2}\pi$, то $\cos 11 < 0$ и $\cos 11 > 0$, если $11 > \frac{7}{2}\pi$. Отметим, что равенство $\frac{7}{2}\pi = 11$ невозможно (почему?).

Поскольку $3,142 > \pi$, то $\frac{7}{2} \cdot 3,142 > \frac{7}{2}\pi$, или $10,997 > \frac{7}{2}\pi$. Отсюда следует, что $11 > \frac{7}{2}\pi$ и соответственно $\cos 11 > 0$.

Ответ: число $\cos 11$ положительное.

1.2.2. Вычисление значений тригонометрических функций

Пример 1.7. Вычислите

$$\sin 870^0 \cdot \operatorname{cosec} 570^0 + \cos 690^0 \cdot \operatorname{ctg} 570^0.$$

Решение. $\sin 870^0 = \sin(2 \cdot 360^0 + 150^0) = \sin 150^0 =$

$$= \sin(180^0 - 30^0) = \sin 30^0 = \frac{1}{2};$$

$$\operatorname{cosec} 570^0 = \operatorname{cosec}(360^0 + 210^0) = \operatorname{cosec} 210^0 =$$

$$= \operatorname{cosec}(180^0 + 30^0) = -\operatorname{cosec} 30^0 = -\frac{1}{\sin 30^0} = -2;$$

$$\cos 690^0 = \cos(2 \cdot 360^0 - 30^0) = \cos 30^0 = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\operatorname{ctg} 570^0 = \operatorname{ctg}(180^0 \cdot 3 + 30^0) = \operatorname{ctg} 30^0 = \sqrt{3}.$$

Имеем $\frac{1}{2}(-2) + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{3} = \frac{1}{2}.$

Ответ: $\frac{1}{2}.$

Пример 1.8. Вычислите $\cos^2\left(\frac{21}{2}\pi - 2\right) + \sin^2\left(2 - \frac{183}{2}\pi\right).$

Решение. По формулам приведения

$$\cos\left(\frac{21}{2}\pi - 2\right) = \cos\left(10\pi + \frac{\pi}{2} - 2\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2\right) = \sin 2;$$

$$\begin{aligned}\sin\left(2 - \frac{183}{2}\pi\right) &= -\sin\left(\frac{183}{2}\pi - 2\right) = -\sin\left(90\pi + \frac{3}{2}\pi - 2\right) = \\ &= -\sin\left(\frac{3}{2}\pi - 2\right) = -(-\cos 2) = \cos 2.\end{aligned}$$

Поэтому

$$\cos^2\left(\frac{21}{2}\pi - 2\right) + \sin^2\left(2 - \frac{183}{2}\pi\right) = \sin^2 2 + \cos^2 2 = 1.$$

Ответ: 1.

Пример 1.9. Определите знак числа

$$A = \cos 755^0 \cdot \sec 943^0 \cdot \operatorname{tg} 284^0 \cdot \operatorname{ctg} 989^0.$$

Решение. $\sec 943^0 = \sec(360^0 \cdot 2 + 223^0) = \sec 223^0 < 0$;

$$\operatorname{tg} 284^0 = \operatorname{tg}(270^0 + 14^0) < 0;$$

$$\operatorname{ctg} 989^0 = \operatorname{ctg}(180^0 \cdot 5 + 89^0) = \operatorname{ctg} 89^0 > 0.$$

Таким образом, в рассматриваемом произведении два числа положительны, а два отрицательны, поэтому $A > 0$.

Ответ: $A > 0$.

Пример 1.10. Вычислите

$$\begin{aligned}A = & \sqrt{\sin^2 1120^0 - \operatorname{cosec} 510^0 \sin 405^0 \cos 50^0 + \sin 870^0 +} \\ & + \operatorname{tg} 580^0 \cdot \cos 760^0.\end{aligned}$$

Решение. Выполнив необходимые преобразования, получим

$$\sin 1120^0 = \sin 40^0; \quad \operatorname{cosec} 510^0 = \operatorname{cosec} 150^0 = 2;$$

$$\sin 405^0 = \sin 45^0 = \frac{1}{\sqrt{2}};$$

$$\cos 50^0 = \sin 40^0; \quad \operatorname{tg} 580^0 = \operatorname{tg} 40^0; \quad \cos 760^0 = \cos 40^0.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{\sin^2 40^0 - 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \sin 40^0 + \frac{1}{2}} + \operatorname{tg} 40^0 \cdot \cos 40^0 = \\ &= \sqrt{\left(\sin 40^0 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2} + \sin 40^0 = \left| \sin 40^0 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right| + \sin 40^0. \end{aligned}$$

Но $\sin 40^0 < \sin 45^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$, поэтому

$$\left| \sin 40^0 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right| = \frac{1}{\sqrt{2}} - \sin 40^0$$

и окончательно имеем

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}} - \sin 40^0 + \sin 40^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Ответ: $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

2.3. Четность и нечетность тригонометрических функций

Решение задач данного пункта основано на использовании определений четной и нечетной функций и свойств таких функций.

Определение 1.5. Функция $y = f(x)$, $x \in X$, называется четной, если

- а) область X определения (задания) функции $f(x)$ симметрична относительно точки $x = 0$;
- б) для любого $x \in X$: $f(-x) = f(x)$.

Функция $y = f(x)$, $x \in X$ называется нечетной, если

- а) область X определения (задания) функции $f(x)$ симметрична относительно точки $x = 0$;
- б) для любого $x \in X$: $f(-x) = -f(x)$.

Свойства

1. Сумма, разность и произведение четных функций $f(x)$ и $g(x)$ на множестве X также являются четными функциями на X .

2. Сумма и разность двух нечетных функций $f(x)$ и $g(x)$ на множестве X являются нечетными функциями на X .

3. Произведение двух нечетных функций на множестве X – четная функция на X .

4. Произведение четной и нечетной функций на множестве X является нечетной функцией на X .

5. График четной функции симметричен относительно оси ординат, а график нечетной функции симметричен относительно начала системы координат.

6. Всякую функцию $f(x)$, $x \in X$, с областью определения (задания) X , симметричной относительно точки

$x=0$, можно представить в виде суммы четной $f_1(x)$ и нечетной $f_2(x)$ функций:

$$f_1(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}, \quad f_2(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}.$$

7. Производная $f'(x)$ четной функции $f(x)$, $x \in X$, является нечетной функцией на X ; производная $f'(x)$ нечетной функции $f(x)$, $x \in X$, является четной функцией на X .

8. Функция $y = c$, $c \in \mathbb{R}$ является четной для любого $c \neq 0$. Функция $y = 0$ ($c = 0$) является одновременно четной и нечетной.

Пример 1.11. Установите, какие из приведенных функций являются четными или нечетными:

а) $y = \sin 3x$, $x \in [-100\pi; 102\pi]$;

б) $y = \cos \frac{x}{2} \cdot |\operatorname{tg} x|$, $x \in \mathbb{R}$, $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$;

в) $y = \sin(x^2 + 4)$, $x \in \mathbb{R}$;

г) $y = \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$, $x \in \mathbb{R}$; $x + \frac{\pi}{4} \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$;

д) $y = (x^3 - x) \cdot \operatorname{ctg} x$, $x \in \mathbb{R}$, $x \neq \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$;

е) $y = \cos x \cdot \operatorname{ctg} x$, $x \in \mathbb{R}$, $x \neq \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

ж) $y = c$, $c \in \mathbb{R}$.

Решение. а) отрезок $[-100\pi; 102\pi]$ не симметричен относительно точки $x=0$, поэтому функция $\sin 3x$ на указанном промежутке не является ни четной, ни нечетной;

б) четная как произведение двух четных функций;

в) четная, так как:

1) область задания симметрична относительно точки $x = 0$;

2) $\sin((-x)^2 + 4) = \sin(x^2 + 4)$ для всех $x \in \mathbb{R}$;

г) ни четная, ни нечетная, так как область определения не симметрична относительно точки $x = 0$ и

$$\operatorname{tg}(-x + \pi/4) \neq \operatorname{tg}(x + \pi/4), \quad x \neq 0;$$

$$\operatorname{tg}(-x + \pi/4) \neq -\operatorname{tg}(x + \pi/4);$$

д) четная как произведение двух нечетных функций;

е) нечетная как произведение четной и нечетной функций;

ж) четная, т.к. $y(-x) = y(x) = c$ для любого $x \in \mathbb{R}$. При $c = 0$ функция $y = 0$ является одновременно и четной, и нечетной.

Ответ: четные – б), в), д), ж); нечетные – е).

Пример 1.12. Установите, при каких значениях параметров a и b приведенные функции являются четными:

а) $y = a \sin x + b \cos x, \quad x \in \mathbb{R};$

б) $y = a \sin^2 x + b \operatorname{tg}|x|, \quad x \in \mathbb{R}, \quad x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z};$

в) $y = a \frac{\sin x}{\operatorname{tg} x} + b \frac{\operatorname{ctg} x}{\sin x}, \quad x \in \mathbb{R}; \quad x \neq \frac{\pi}{2} n, \quad n \in \mathbb{Z};$

г) $y = a \cos \sqrt{|x|-1} + b \sqrt[3]{x} \sin \sqrt[3]{x^2}, \quad |x| \geq 1;$

д) $y = a \cos \sqrt{|x-1|} + b \sqrt[3]{x} \sin \sqrt[3]{x}, \quad x \in \mathbb{R}.$

Решение. а) $y_1 = a \sin x$ - нечетная функция для всех $a \neq 0$,

$y_2 = b \cos x$ - четная функция для всех $b \in \mathbb{R}$.

Поэтому функция $y = a \sin x + b \cos x$ будет четной при $a = 0$; $b \in \mathbb{R}$;

б) четная для любых $a \in \mathbb{R}$ и $b \in \mathbb{R}$ как сумма двух четных функций;

в) область определения функции симметрична относительно нуля; функция $y_1 = a \frac{\sin x}{\operatorname{tg} x} = a \cos x$ является

четной на множестве $X = \{x\}$, $x \in \mathbb{R}$, $x \neq \frac{\pi}{2}n$; функция

$y_2 = b \frac{\operatorname{ctg} x}{\sin x} = b \frac{\cos x}{\sin^2 x}$ также является четной на указанном

множестве (как произведение двух четных функций $\cos x$ и

$\frac{1}{\sin^2 x}$). Поэтому функция $y = a \frac{\sin x}{\operatorname{tg} x} + b \frac{\operatorname{ctg} x}{\sin x}$ является четной

на ее естественной области определения для всех $a \in \mathbb{R}$ и $b \in \mathbb{R}$;

г) функция $y_1(x) = a \cos \sqrt{|x| - 1}$ является четной на множестве $|x| \geq 1$; функция $y_2(x) = b \sqrt[3]{x} \sin \sqrt[3]{x^2}$ - нечетная как произведение нечетной функции $\sqrt[3]{x}$ и четной $\sin \sqrt[3]{x^2}$. Поэтому функция $y(x) = y_1(x) + y_2(x)$ будет четной при $a \in \mathbb{R}$, $b = 0$.

д) функция $y = a \cos \sqrt{|x - 1|} + b \sqrt[3]{x} \sin \sqrt[3]{x}$ будет четной только при $a = 0$, $b \in \mathbb{R}$.

Ответ: а) $a = 0$, $b \in \mathbb{R}$; б) $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$; в) $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$;

г) $a \in \mathbb{R}$, $b = 0$; д) $a = 0$, $b \in \mathbb{R}$.

Пример 1.13. Найдите все значения параметра a , при которых уравнение

$$2^{|x|} - 2(a^2 - 1)\sin|x| + a^2 - 2 = 0$$

имеет единственное решение.

Решение. Рассмотрим функцию

$$y(x) = 2^{|x|} - 2(a^2 - 1)\sin|x| + a^2 - 2.$$

Она определена для всех $x \in \mathbb{R}$ и является линейной комбинацией четных функций $2^{|x|}$ и $\sin|x|$, поэтому $y(x)$ - четная функция. Если уравнение $y(x) = 0$ имеет единственное решение, то это $x = 0$. Действительно, если $x = x_0$, $x_0 \neq 0$ - решение уравнения $y(x) = 0$, где $y(x)$ - четная функция, то $x = -x_0$ также будет решением этого уравнения ($y(-x_0) = y(x_0) = 0$).

При $x = 0$ исходное уравнение принимает следующий вид:

$$a^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow a = \pm 1.$$

Покажем, что при $a = \pm 1$ других решений уравнение не имеет. Полагая $a = \pm 1$ в исходном уравнении, получаем

$$2^{|x|} - 1 = 0 \Leftrightarrow 2^{|x|} = 2^0 \Leftrightarrow |x| = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Ответ: $a = \pm 1$.

Комментарий к примеру 1.13

Существует достаточно большое число примеров, решение которых строится на использовании свойств корней уравнений $f(x) = 0$, где $f(x)$ -четная или нечетная функция.

1. Если в уравнении $f(x) = 0$ $f(x)$ - четная функция, то уравнение в общем случае имеет четное число корней; нечетное число корней такое уравнение может иметь лишь в одном случае, когда $x = 0$ является корнем такого уравнения.

2. Если уравнение $f(x)=0$, где $f(x)$ - непрерывная нечетная функция, имеет корни, то их количество является нечетным числом.

1.2.4. Периодичность тригонометрических функций

Решение задач данного пункта основано на определении и свойствах периодической функции.

Определение 1.6. Число $T \neq 0$ называется периодом функции $y = f(x)$, $x \in X$, если для любого $x \in X$ значения $x - T$ и $x + T$ также принадлежат X и выполняются равенства

$$f(x - T) = f(x) = f(x + T).$$

Функция $f(x)$ в этом случае называется периодической с периодом T .

Отметим, что, если T -период функции f , то каждое число $\pm 2T, \pm 3T, \dots$, также является периодом этой функции.

Определение 1.7. Наименьшее положительное число T будем называть основным периодом функции f .

Из определения периодической функции следует, что

а) ее областью определения является либо вся числовая прямая, либо объединение бесконечного числа промежутков одинаковой длины, кратной основному периоду. Так, например, $D(\sin x) = D(\cos x) = \mathbb{R}$,

$D(\operatorname{tg} x) = D(\sec x) = U(-\frac{\pi}{2} + \pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k), k \in \mathbb{Z}$, т. е. область определения функций $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \sec x$ является объединением бесконечного числа интервалов длины π , равной основному периоду функции $y = \operatorname{tg} x$ или половине основного периода функции $y = \sec x$.

б) любое значение y_0 из области значений $E(y)$ периодическая функция принимает бесконечное число раз. Поэтому график периодической функции является объединением бесконечного числа следующих друг за другом (периодически повторяющихся) одинаковых фрагментов.

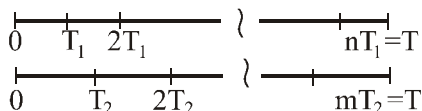
Свойства.

1. Если функция $f(x)$ является периодической с основным периодом $T > 0$, то функция $f(ax + b)$, $a \neq 0$ также является периодической с периодом $T_1 = \frac{T}{a}$.

2. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ являются периодическими с основными периодами T_1 и T_2 соответственно и при этом числа T_1 и T_2 соизмеримы, то функция $y = a f(x) + b g(x)$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0, b \neq 0$, также будет периодической с основным периодом T , кратным числам T_1 и T_2 . Соизмеримость чисел T_1 и T_2 означает, что существуют $n \in \mathbb{N}$ и $m \in \mathbb{N}$ такие, что $T = nT_1 = mT_2 = T$ и n, m взаимно просты.

Определение периода T линейной комбинации

$$a f(x) + b g(x)$$



двух периодических функций

Рис. 1.11

$f(x)$ и $g(x)$ эквивалентно нахождению отрезка минимальной длины T , в котором целое число раз укладывается каждый из отрезков длин T_1 и T_2 (рис. 1.11).

3. Если $f(x)$ - дифференцируемая периодическая функция с основным периодом T , то и ее производная $f'(x)$ будет периодической функцией с тем же периодом T .

Пример 1.14. Являются ли периодическими следующие функции а) $y = [x]$, $x \in \mathbb{R}$; б) $y = \{x\}$, $x \in \mathbb{R}$;

$$в*) y = x - 10k, 10k \leq x < 10(k+1), k \in \mathbb{Z};$$

$$г) y = \sin x, \quad x \in [-100\pi; 100\pi]$$

и если да, то определите их основные периоды.

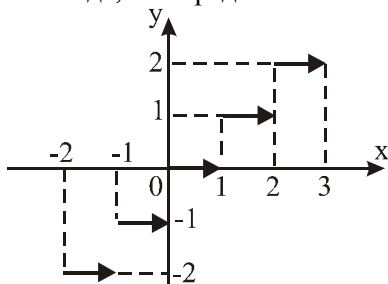


Рис. 1.12. График функции $y = [x]$

Решение: а) Функция $y = [x]$ называется целой частью действительного числа x или «антье от x ». По определению целая часть $[x]$ числа x равна наибольшему целому числу, не превосходящему x .

Например, $[5.3] = 5$; $[7.8] = 7$; $[-3.2] = -4$. График функции $y = [x]$ изображен на рис. 1.12. Очевидно, что не существует положительного числа T такого, что $[x + T] = [x]$ для любого $x \in \mathbb{R}$. Поэтому функция $y = [x]$ не является периодической.

Отметим одно важное свойство функции $[x]$: для любого $n \in \mathbb{Z}$ и любого $x \in \mathbb{R}$ справедливо свойство $[n + x] = n + [x]$.

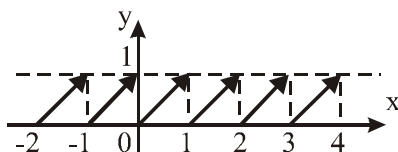


Рис. 1.13. График функции $y = \{x\}$

б) Функция $y = \{x\}$ называется дробной частью действительного числа x .

По определению

$$\{x\} = x - [x],$$

то есть дробная часть числа x равна разности между этим числом и его целой частью. График функции $y = \{x\}$ изображен на рис. 1.13.

Покажем, что функция $y = \{x\}$ является периодической с основным периодом $T=1$. В соответствии с определением периодической функции и с учетом свойств функции $[x]$ имеем

$$\{x+1\} = x+1 - [x+1] = x+1 - ([x]+1) = x - [x] = \{x\},$$

т.е. $\{x+1\} = \{x\}$ для любого $x \in \mathbb{R}$.

в) **Функция**
определена на всей
числовой оси. Покажем,
что она является
периодической с
периодом $T=10$. Пусть

$$x \in [10k; 10(k+1)),$$

$y = x - 10 \cdot k$, где $k \in \mathbb{Z}$ – некоторое фиксированное число.

Вычислим $y(x+10)$. Так как $x+10 \in [10(k+1), 10(k+2))$, то

$$\begin{aligned} y(x+10) &= x+10 - 10(k+1) = x+10 - 10k - 10 = \\ &= x - 10k = y(x). \end{aligned}$$

График функции $y = x - 10k$, $x \in [10k, 10(k+1))$, $k \in \mathbb{Z}$, изображен на рис. 1.14.

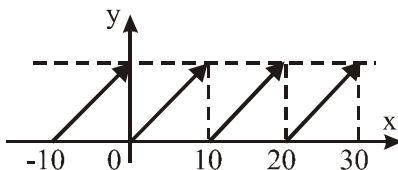


Рис. 1.14. График функции $y = x - 10k$, $x \in [10k, 10(k+1))$, $k \in \mathbb{Z}$

г) Функция $y = \sin x$, $x \in [-100\pi, 100\pi]$, не является периодической, так как множество, на котором задана эта функция, ограничено (отрезок конечной длины), а из определения периодической функции следует, что область ее определения (задания) должна быть бесконечной длины.

Ответ: а) непериодическая; б) $T=1$;

в) $T=10$; г) непериодическая.

Пример 1.15. Определите основной период функций

$$\text{а) } y = 3\sin\left(4x + \frac{\pi}{3}\right) \quad \text{б) } y = 2\cos\left(\frac{2}{5}x + 4\right);$$

$$\text{в) } y = \operatorname{tg} 6x; \quad \text{г) } y = 2\sec\left(\frac{8}{3}x + \frac{\pi}{4}\right).$$

$$\text{Решение: а) } T_y = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}; \quad \text{б) } T_y = \frac{2\pi}{(2/5)} = 5\pi;$$

$$\text{в) } T_y = \frac{\pi}{6}; \quad \text{г) } T_y = \frac{2\pi}{(8/3)} = \frac{3}{4}\pi.$$

$$\text{Ответ: а) } \frac{\pi}{2}; \quad \text{б) } 5\pi; \quad \text{в) } \frac{\pi}{6}; \quad \text{г) } \frac{3}{4}\pi.$$

Пример 1.16. Определите основной период функции

$$y = 2\sin 3x + \cos 12x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Решение. } T_{\sin 3x} = \frac{2\pi}{3}; \quad T_{\cos 12x} = \frac{2\pi}{12} = \frac{\pi}{6}.$$

$$\text{Тогда} \quad T_y = T = \frac{2}{3}\pi \cdot n = \frac{\pi}{6}m \Rightarrow n = \frac{m}{4}.$$

Наименьшее положительное m , делящееся на 4, равно 4.
Поэтому

$$T_y = \frac{\pi}{6} \cdot 4 = \frac{2}{3}\pi.$$

$$\text{Ответ: } \frac{2}{3}\pi.$$

Пример 1.17. Определите основной период функций

$$\text{а) } y = \cos \frac{8}{3}x + \sin \frac{12}{5}x; \quad \text{б) } y = \operatorname{tg} 6x + \sec 8x + \operatorname{ctg} 9x;$$

в) $y = \sin 2x \cdot \cos 2x$.

Решение: а) $T_{\cos \frac{8}{3}x} = \frac{2\pi}{(8/3)} = \frac{3}{4}\pi$; $T_{\sin \frac{12}{5}x} = \frac{2\pi}{(12/5)} = \frac{5}{6}\pi$.

Тогда $T_y = T$ и $T = n \cdot \frac{3}{4}\pi = m \frac{5}{6}\pi \Rightarrow n = \frac{4}{3} \cdot \frac{5}{6}m = \frac{10}{9}m$.

Имеем $m = 9$; $n = 10$ и $T_y = \frac{15}{2}\pi$;

б) $T_{\operatorname{tg} 6x} = \frac{\pi}{6}$; $T_{\operatorname{sec} 8x} = \frac{2\pi}{8} = \frac{\pi}{4}$; $T_{\operatorname{ctg} 9x} = \frac{\pi}{9}$.

Тогда $T_y = \frac{\pi}{6}n = \frac{\pi}{4}m = \frac{\pi}{9}k \Leftrightarrow \frac{n}{6} = \frac{m}{4} = \frac{k}{9}$.

Последние равенства означают, что

$n \models 6$; $m \models 4$; $k \models 9$, т.е. $n = 6$, $m = 4$, $k = 9$ и $T_y = \pi$;

в) $y = \sin 2x \cos 2x = \frac{1}{2} \sin 4x$ и $T_y = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$.

Ответ: а) $\frac{15}{2}\pi$; б) π ; в) $\frac{\pi}{2}$.

Пример 1.18. Определите основной период функции

$$y = \cos^2 8x.$$

Решение. Способ 1:

$$y' = 2 \cos 8x (-\sin 8x) \cdot 8 = -8 \sin 16x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T_{y'} = \frac{2\pi}{16} = \frac{\pi}{8} \Rightarrow T_y = \frac{\pi}{8}.$$

Способ 2: Используя формулу понижения степени, получаем

$$y = \frac{1 + \cos 16x}{2} \Rightarrow T_y = \frac{2\pi}{16} = \pi/8.$$

Ответ: $\frac{\pi}{8}$.

Пример 1.19. Установите, являются ли периодическими функции а) $y = \cos 4\pi x + \sin 2x$; б) $y = \cos 6x + \sin \sqrt{2}x$;

в) $y = \cos 4\pi x + \sin 6\pi x$

и если являются, то найдите их основной период.

Решение. а) $T_{\cos 4\pi x} = \frac{2\pi}{4\pi} = \frac{1}{2}$; $T_{\sin 2x} = \frac{2\pi}{2} = \pi$.

Функция $y = \cos 4\pi x + \sin 2x$ не будет периодической, так как равенство $\frac{1}{2}n = \pi m$ невозможно ни при каких рациональных n и m , кроме $n = m = 0$;

б) $T_{\cos 6x} = \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$; $T_{\sin \sqrt{2}x} = \frac{2\pi}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}\pi$.

И здесь равенство $\frac{\pi}{3}n = m\sqrt{2}\pi \Leftrightarrow \frac{n}{3} = m\sqrt{2}$ невозможно ни при каких рациональных n и m , кроме $n = m = 0$;

в) $T_{\cos 4\pi x} = \frac{2\pi}{4\pi} = \frac{1}{2}$; $T_{\sin 6\pi x} = \frac{2\pi}{6\pi} = \frac{1}{3} \Rightarrow T_y = T$

и

$$T = \frac{n}{2} = \frac{m}{3} \Rightarrow n = 2 \cdot \frac{m}{3} \Rightarrow \begin{cases} m = 3, \\ n = 2, \end{cases} T_y = 1.$$

Ответ: а) неперіодическая; б) неперіодическая; в) $T_y = 1$.

1.2.5. Монотонность тригонометрических функций.

Экстремумы

Определение 1.8. Функция $y = f(x)$, $x \in X$ называется:

а) строго возрастающей на интервале $(a, b) \subset X$, если для любых точек $x_1, x_2 \in (a, b)$ таких, что $x_1 < x_2$ выполняется неравенство

$$f(x_1) < f(x_2);$$

б) строго убывающей на интервале $(a, b) \subset X$, если для любых точек $x_1, x_2 \in (a, b)$ таких, что $x_1 < x_2$ выполняется неравенство

$$f(x_1) > f(x_2).$$

Строго возрастающие и строго убывающие функции называются строго монотонными.

Определение 1.9. Функция $y = f(x)$, $x \in X$ называется:

а) возрастающей на интервале $(a, b) \subset X$, если для любых точек $x_1, x_2 \in (a, b)$ таких, что $x_1 < x_2$ выполняется неравенство

$$f(x_1) \leq f(x_2);$$

б) убывающей на интервале $(a, b) \subset X$, если для любых точек $x_1, x_2 \in (a, b)$ таких, что $x_1 < x_2$ выполняется неравенство

$$f(x_1) \geq f(x_2).$$

Возрастающие и убывающие функции называются монотонными.

Достаточным условием строгого возрастания дифференцируемой на (a, b) функции $f(x)$, является выполнение неравенства $f'(x) > 0$ для всех $x \in (a, b)$. Если же $f'(x) < 0$, то $f(x)$ строго убывает на (a, b) .

Определение 1.10. Точка x_0 , принадлежащая области определения функции $y = f(x)$, $x \in X$, называется точкой локального максимума функции f , если существует интервал $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \subset X$, $\varepsilon > 0$ такой, что для всех точек x из этого интервала выполняется неравенство

$$f(x) \leq f(x_0).$$

Если неравенство строгое $f(x) < f(x_0)$, $x \neq x_0$, то говорят, что x_0 - точка строгого локального максимума функции $f(x)$.

Аналогично определяются точки локального минимума и строго локального минимума:

Определение 1.11. Точка x_0 , принадлежащая области определения функции $y = f(x)$, $x \in X$, называется точкой локального минимума функции f , если существует интервал $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \subset X$, $\varepsilon > 0$ такой, что для всех точек x из этого интервала выполняется неравенство

$$f(x) \geq f(x_0).$$

Если неравенство строгое $f(x) > f(x_0)$, $x \neq x_0$, то говорят, что x_0 - точка строгого локального минимума.

Точки локального максимума и локального минимума объединяют общим названием точек локального экстремума.

Для нахождения точек локального экстремума дифференцируемой функции используют необходимые (теорема Ферма) и достаточные условия.

Теорема Ферма. Если x_0 - точка локального экстремума функции $y = f(x)$, $x \in X$ и в точке x_0 существует конечная производная $f'(x_0)$, то $f'(x_0) = 0$.

Точки $x_0 \in X$, в которых $f'(x_0) = 0$, называются стационарными точками функции $f(x)$. Стационарные точки являются точками возможного экстремума функции f .

Теорема (достаточное условие локального экстремума).

Если x_0 - стационарная точка функции $f(x)$; $f(x)$ имеет конечную производную в некотором интервале $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$, то в стационарной точке x_0 будет:

- а) строгий локальный максимум, если $f'(x) > 0$ при $x \in (x_0 - \varepsilon; x_0)$ и $f'(x) < 0$ при $x \in (x_0; x_0 + \varepsilon)$;
- б) строгий локальный минимум, если $f'(x) < 0$ при $x \in (x_0 - \varepsilon; x_0)$ и $f'(x) > 0$ при $x \in (x_0; x_0 + \varepsilon)$.

Если же $f'(x)$ сохраняет знак в некоторой окрестности слева и справа от точки x_0 , то в стационарной точке x_0 нет экстремума.

Определение 1.12. Число M называется наибольшим значением функции $y = f(x)$, $x \in X$ на множестве X , если существует точка $x_M \in X$ такая, что

$$f(x) \leq M = f(x_M)$$

для всех $x \in X$, $x \neq x_M$.

В этом случае пишут

$$M = \max_{x \in X} f(x) = f(x_M).$$

Определение 1.13. Число m называется наименьшим значением функции $y = f(x)$, $x \in X$ на множестве X , если существует точка $x_m \in X$ такая, что

$$f(x) \geq m = f(x_m)$$

для всех $x \in X$, $x \neq x_m$.

В этом случае пишут $m = \min_{x \in X} f(x) = f(x_m)$.

Наименьшее и наибольшее значения существуют не для всякой функции. Например, функции $y = x$, $x \in (a; b)$;

$y = \operatorname{tg} x$, $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ не имеют наибольшего и наименьшего значений.

Однако, если функция $y = f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a; b]$, то она достигает свои наибольшее M и наименьшее m значения.

Это утверждение носит название теоремы Вейерштрасса и имеет самые обширные приложения.

Пример 1.20. Найдите интервалы возрастания и убывания функций

$$\text{а) } y = \sin 3x; \quad \text{б) } y = \sin(3x - \pi/4).$$

Решение: а) График функции $y = \sin 3x$ получается из графика функции $y = \sin x$ сжатием последнего вдоль оси Ox в 3 раза. Период функции $y = \sin 3x$ также уменьшается в 3 раза и равен $\frac{2\pi}{3}$. Поэтому имеем:

интервалы возрастания: $\left(-\frac{\pi}{2 \cdot 3} + \frac{2}{3}\pi n; \frac{\pi}{6} + \frac{2}{3}\pi n\right)$, $n \in \mathbb{Z}$;

интервалы убывания: $\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2}{3}\pi n; \frac{3\pi}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\pi n\right)$, $n \in \mathbb{Z}$.

$$\text{б) } y = \sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = \sin 3\left(x - \frac{\pi}{12}\right).$$

График функции $y = \sin(3x - \pi/4)$ получается из графика $y = \sin 3x$ сдвигом на $\frac{\pi}{12}$ вправо вдоль оси Ox . Соответственно сместятся вправо на $\frac{\pi}{12}$ границы интервалов монотонности.

Интервалы возрастания:

$$\begin{aligned} & \left(-\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{12} + \frac{2}{3}\pi n; \quad \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{12} + \frac{2}{3}\pi n \right) = \\ & = \left(-\frac{\pi}{12} + \frac{2}{3}\pi n; \quad \frac{\pi}{4} + \frac{2}{3}\pi n \right), \quad n \in \mathbb{Z}; \end{aligned}$$

интервалы убывания:

$$\left(\frac{\pi}{4} + \frac{2}{3}\pi n; \quad \frac{7}{12}\pi + \frac{2}{3}\pi n \right), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Пример 1.21. Расположите в порядке возрастания числа

$$\sin 1, \sin 3, \sin 4, \sin 7, \sin 9, \sin 11.5.$$

Решение. Способ 1. Установим принадлежность чисел 1, 3, 4, 7, 9, 11.5 радиан отрезкам вида $\left[\frac{\pi}{2}n, \frac{\pi}{2}(n+1) \right]$ (см. пример 1.5). Имеем $1 \in \left[0; \frac{\pi}{2} \right]; \quad 3 \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi \right]; \quad 4 \in \left[\pi; \frac{3}{2}\pi \right];$
 $7 \in \left[2\pi; \frac{5}{2}\pi \right]; \quad 9 \in \left[\frac{5}{2}\pi; 3\pi \right]; \quad 11.5 \in \left[\frac{9}{2}\pi; 4\pi \right].$ Это означает, что углы 1, 3, 7 и 9 радиан принадлежат 1-й и 2-й четвертям тригонометрического круга, где $\sin \alpha \geq 0$, а углы 4 и 11.5 радиан – 3-й и 4-й четвертям, в которых $\sin \alpha \leq 0$. Поэтому сравнить между собой необходимо, с одной стороны,

положительные числа: $\sin 1, \sin 3, \sin 7, \sin 9$ и, с другой, - отрицательные: $\sin 4, \sin 11.5$.

Сравним $\sin 1$ и $\sin 7$:

$$\sin 1 - \sin 7 = -2 \sin 3 \cos 4,$$

но

$$\sin 3 > 0, \quad \cos 4 < 0 \quad \left(4 \in \left(\pi; \frac{3}{2}\pi \right) \right)$$

и потому

$$\sin 1 - \sin 7 > 0 \quad \text{или} \quad \sin 1 > \sin 7.$$

Сравним теперь числа $\sin 7, \sin 9$ и $\sin 3$:

$$\sin 7 - \sin 9 = -2 \sin 1 \cos 8 > 0$$

$$\left(8 \in \left(\frac{5}{2}\pi; 3\pi \right) \Rightarrow \cos 8 < 0 \right)$$

и потому $\sin 7 > \sin 9$;

$$\sin 7 - \sin 3 = 2 \sin 2 \cdot \cos 5 > 0 \Rightarrow \sin 7 > \sin 3.$$

Поскольку $\sin 7 > \sin 9$ и $\sin 7 > \sin 3$, то теперь достаточно сравнить числа $\sin 9$ и $\sin 3$:

$$\sin 9 - \sin 3 = 2 \sin 3 \cdot \cos 6 > 0 \Rightarrow \sin 9 > \sin 3.$$

Сравним теперь числа $\sin 4$ и $\sin 11.5$:

$$\sin 11.5 - \sin 4 = 2 \sin 3.75 \cdot \cos 7.75 < 0 \Rightarrow \sin 11.5 < \sin 4 < 0$$

$$\left. \begin{aligned} & \left(3.75 \in \left(\pi; \frac{3}{2}\pi \right) \Rightarrow \sin 3.75 < 0; \right. \\ & \left. 7.75 \in \left(2\pi; \frac{9}{2}\pi \right) \Rightarrow \cos 7.75 > 0 \right\} \end{aligned}$$

Окончательно получаем неравенства

$$\sin 1 > \sin 7 > \sin 9 > \sin 3 > \sin 4 > \sin 11.5.$$

Способ 2. Сравнение положительных значений синусов углов 1, 3, 7, 9 радиан можно заменить сравнением синусов эквивалентных им углов из интервала $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, на котором функция $y = \sin x$ также принимает положительные значения и является строго возрастающей, а синусов углов 4, 11.5 радиан – значениями синусов эквивалентных им углов из интервала $\left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$, на котором функция $y = \sin x$ принимает отрицательные значения и является строго возрастающей.

Имеем

$$\sin 3 = \sin(\pi - 3), \quad \sin 7 = \sin(7 - 2\pi), \quad \sin 9 = \sin(3\pi - 9)$$

и при этом углы $\pi - 3$, $7 - 2\pi$, $3\pi - 9$ и 1 радиан принадлежат интервалу $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$. Аналогично получаем

$$\sin 4 = \sin(\pi - 4) < 0, \quad \sin 11.5 = \sin(11.5 - 4\pi) < 0$$

и при этом углы $(\pi - 4)$ и $(11.5 - 4\pi)$ принадлежат интервалу $\left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$.

На каждом интервале $\left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$ и $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ функция $y = \sin x$ является монотонно возрастающей и потому

большему углу $\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ отвечает большее значение синуса этого угла. Сравним сначала углы из интервала $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

$$(\pi - 3) \vee (7 - 2\pi) \Leftrightarrow 3\pi \vee 10,$$

но $3\pi < 10$, тогда $\pi - 3 < 7 - 2\pi$ и потому $\sin 3 < \sin 7$.

Аналогично получаем

$$(\pi - 3) \vee (3\pi - 9) \Leftrightarrow 6 \vee 2\pi \Rightarrow 6 < 2\pi, \pi - 3 < 3\pi - 9$$

и $\sin 3 < \sin 9$;

$$(7 - 2\pi) \vee (3\pi - 9) \Leftrightarrow 16 \vee 5\pi \Rightarrow 16 > 5\pi, 7 - 2\pi > 3\pi - 9$$

и $\sin 7 > \sin 9$;

$$1 \vee (7 - 2\pi) \Leftrightarrow 2\pi \vee 6 \Rightarrow 2\pi > 6, 1 > 7 - 2\pi$$

и $\sin 1 > \sin 7$.

Объединяя полученные неравенства, получаем цепочку неравенств

$$\sin 1 > \sin 7 > \sin 9 > \sin 3 > 0.$$

Сравним теперь углы $\pi - 4$ и $11.5 - 4\pi$:

$$(\pi - 4) \vee (11.5 - 4\pi) \Leftrightarrow 5\pi \vee 15.5 \Rightarrow 5\pi > 15.5, \pi - 4 > 11.5 - 4\pi$$

и $\sin 11.5 < \sin 4 < 0$.

Окончательно получаем неравенства

$$\sin 1 > \sin 7 > \sin 9 > \sin 3 > \sin 4 > \sin 11.5.$$

Способ 3. Обозначим $\alpha(1)$, $\alpha(3)$, $\alpha(4)$, ..., $\alpha(11.5)$ – значения углов в градусах, отвечающие 1, 3, 4, 7, 9, 11.5 радианам соответственно. Поскольку $\alpha(1) \approx 57,3^0$, то можем записать неравенства:

$$\begin{aligned}
 57^0 &< \alpha(1) < 58^0, \\
 171^0 &< \alpha(3) < 174^0, \\
 228^0 &< \alpha(4) < 232^0, \\
 399^0 &< \alpha(7) < 406^0, \\
 513^0 &< \alpha(9) < 522^0, \\
 655.5^0 &< \alpha(11.5) < 667^0
 \end{aligned}$$

(рис. 1.15).

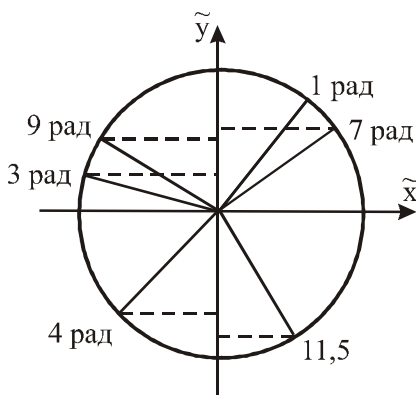


Рис. 1.15

Применив формулы приведения, получим

$$\begin{aligned}
 \sin 171^0 &= \sin(180^0 - 9^0) = \sin 9^0; & \sin 174^0 &= \sin 6^0; \\
 \sin 228^0 &= \sin(180^0 + 48^0) = -\sin 48^0; & \sin 232^0 &= -\sin 52^0; \\
 \sin 399^0 &= \sin 39^0; & \sin 406^0 &= \sin 46^0; \\
 \sin 513^0 &= \sin 153^0 = \sin 27^0; & \sin 522^0 &= \sin 162^0 = \sin 18^0; \\
 \sin 655.5^0 &= -\sin 64.5^0; & \sin 667^0 &= -\sin 53^0.
 \end{aligned}$$

С учетом монотонного возрастания функции $y = \sin x$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ получим неравенства для синусов углов:

$$\begin{aligned}
 -\sin 64.5^0 &< \sin 11.5 < -\sin 53^0 < 0; \\
 -\sin 52^0 &< \sin 4 < -\sin 48^0 < 0; & \sin 6^0 &< \sin 3 < \sin 9^0; \\
 \sin 18^0 &< \sin 9 < \sin 27^0; & \sin 39^0 &< \sin 7 < \sin 46^0; \\
 \sin 57^0 &< \sin 1 < \sin 58^0,
 \end{aligned}$$

откуда следует, что

$$\sin 11.5 < \sin 4 < \sin 3 < \sin 9 < \sin 7 < \sin 1.$$

Ответ: $\sin 11.5$; $\sin 4$; $\sin 3$; $\sin 9$; $\sin 7$; $\sin 1$.

Пример 1.22. Найдите область определения функции

$$y = \sqrt{\left(x - \cos \frac{\pi}{90}\right) \left(\operatorname{ctg} \frac{7}{30} \pi - x\right)}.$$

Решение. Введем обозначения $x_1 = \cos \frac{\pi}{90}$, $x_2 = \operatorname{ctg} \frac{7}{30} \pi$.

Из неравенства $0 < \frac{\pi}{90} < \frac{\pi}{2}$ и свойств функции $y = \cos x$ следует, что $0 < x_1 < 1$. Функция $y = \operatorname{ctg} x$ строго убывает на интервале $(0; \pi)$, а $\frac{7}{30} \pi = \frac{42}{180} \pi < \frac{45}{180} \pi = \frac{\pi}{4}$ и потому $\operatorname{ctg} \frac{7}{30} \pi > \operatorname{ctg} \frac{\pi}{4} = 1$, т. е. $x_2 > 1$.

Из неравенств $0 < x_1 < 1$, $x_2 > 1$ следует, что $x_1 < x_2$. Поэтому область определения $D(y)$ будет задаваться каждым из неравенств

$$(x - x_1)(x_2 - x) \geq 0 \Leftrightarrow (x - x_1)(x - x_2) \leq 0 \Leftrightarrow x_1 \leq x \leq x_2,$$

т.е.
$$\cos \frac{\pi}{90} \leq x \leq \operatorname{ctg} \frac{7}{30} \pi.$$

Ответ: $x \in \left[\cos \frac{\pi}{90}; \operatorname{ctg} \frac{7}{30} \pi \right].$

Пример 1.23. Решите неравенство

$$\left(x - \operatorname{ctg} \frac{7}{6} \pi\right) \left(x - \sin \frac{7}{4} \pi\right) (\cos 2 - \cos 5) \geq 0.$$

Решение. $\operatorname{ctg} \frac{7}{6} \pi = \operatorname{ctg} \left(\pi + \frac{\pi}{6} \right) = \operatorname{ctg} \frac{\pi}{6} = \sqrt{3};$

$$\sin \frac{7}{4} \pi = \sin \left(2\pi - \frac{\pi}{4} \right) = -\sin \frac{\pi}{4} = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Так как $\frac{\pi}{2} < 2 < \pi$ и $\cos 2 < 0$ а $\frac{3}{2} \pi < 5 < 2\pi$ и $\cos 5 > 0$
то $\cos 2 - \cos 5 < 0$. Поэтому имеем неравенство

$$(x - \sqrt{3}) \left(x + \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \leq 0 \Rightarrow x \in \left[-\frac{1}{\sqrt{2}}; \sqrt{3} \right].$$

Ответ: $x \in \left[-\frac{1}{\sqrt{2}}; \sqrt{3} \right].$

Пример 1.24. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции

$$y = 2 \cos^2 x - \sin x + 1.$$

Решение. Способ 1:

$$\begin{aligned} y &= 2(1 - \sin^2 x) - \sin x + 1 = 3 - 2 \sin^2 x - \sin x = \\ &= 3 - 2 \left(\sin^2 x + \frac{1}{2} \sin x + \frac{1}{16} \right) + \frac{1}{8} = 3 \frac{1}{8} - 2 \left(\sin x + \frac{1}{4} \right)^2. \end{aligned}$$

Поскольку $0 \leq \left(\sin x + \frac{1}{4} \right)^2 \leq \left(\frac{5}{4} \right)^2$, то

$$\max_{x \in \mathbb{R}} y(x) = 3 \frac{1}{8} - 2 \cdot 0 = \frac{25}{8}; \quad \min_{x \in \mathbb{R}} y(x) = \frac{25}{8} - 2 \cdot \frac{25}{16} = 0.$$

Способ 2. Обозначив $\sin x = t$, $t \in [-1; 1]$, получим задачу:
найти наибольшее $y_{\text{наиб}}$ и наименьшее $y_{\text{наим}}$ значения функции

$y(t) = 3 - 2t^2 - t$ на отрезке $[-1; 1]$. В соответствии с теоремой Вейерштрасса непрерывная на отрезке функция принимает свои наибольшее и наименьшее значения $y_{\text{наиб}}$ и $y_{\text{наим}}$. Поэтому вычисляем:

1) значения функции на концах отрезка:

$$y(-1) = 3 - 2 + 1 = 2; \quad y(1) = 3 - 2 - 1 = 0.$$

2) значения функции в стационарных точках:

$$y'_t = -4t - 1 = 0 \quad \text{при } t = -\frac{1}{4} \text{ и } y\left(-\frac{1}{4}\right) = 3 - 2 \cdot \frac{1}{16} + \frac{1}{4} = \frac{25}{8}.$$

$$3) \quad y_{\text{наиб}} = \max\left\{0; 2; \frac{25}{8}\right\} = \frac{25}{8}; \quad y_{\text{наим}} = \min\left\{0; 2; \frac{25}{8}\right\} = 0.$$

$$\text{Ответ: } y_{\text{наиб}} = \frac{25}{8}; \quad y_{\text{наим}} = 0.$$

Пример 1.25*. Найдите точки локальных экстремумов функции

$$y = 3 \sec x + 4 \cos x$$

и значения функции в этих точках.

Решение. Для решения задачи необходимо:

а) найти критические точки функции $y(x)$;

б) исследовать их характер.

$$\begin{aligned} \text{а) } y' &= \left(\frac{3}{\cos x} + 4 \cos x \right)' = \frac{3 \sin x}{\cos^2 x} - 4 \sin x = \\ &= \frac{\sin x (3 - 4 \cos^2 x)}{\cos^2 x} = 4 \frac{\sin x \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \cos x \right) \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \cos x \right)}{\cos^2 x}. \end{aligned}$$

Находим стационарные точки функции

$$y' = 0: \begin{cases} \sin x = 0, \\ \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}, \\ \cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}, \\ x = \pm \frac{\pi}{6} + 2\pi m, \quad m \in \mathbb{Z}, \\ x = \pm \frac{5}{6}\pi + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Производная $y'(x)$ не существует в точках $x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$, в которых не определена и сама функция.

б) исследуем поведение функции в окрестности стационарных точек. В малой окрестности точек $x = \pi n, n \in \mathbb{Z}$, выражение $(3 - 4 \cos^2 x)$ отрицательно, так как $3 - 4 \cos^2(\pi n) = 3 - 4 = -1$, а функция $\sin x$ меняет знак при переходе через точку πn с «+» на «-» при нечетных n и с «-» на «+» – при четных n . Поэтому в точках $x = 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$, функция $y(x)$ будет иметь локальные максимумы $y(2\pi n) = 3 + 4 = 7$, а в точках $x = (2n + 1)\pi, n \in \mathbb{Z}$, – локальные минимумы $y((2n + 1)\pi) = -3 - 4 = -7$.

С учетом четности функции $y = \cos x$ и ее периодичности достаточно исследовать далее только стационарные точки $\frac{\pi}{6}$ и $\frac{5}{6}\pi$. В точке $\frac{\pi}{6}$ и в малой ее окрестности

$$\sin x \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \cos x \right) > 0, \quad \left(\sin \frac{\pi}{6} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \cos \frac{\pi}{6} \right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \right).$$

Выражение $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \cos x \right)$, а значит и производная $y'(x)$,

меняет знак с «-» на «+» при переходе через точку $x = \frac{\pi}{6}$.

Поэтому в точке $x = \frac{\pi}{6}$, а значит и в точках $x = \pm \frac{\pi}{6} + 2\pi n$,

функция $y(x)$ имеет локальные минимумы:

$$\left(y\left(\pm \frac{\pi}{6} + 2\pi n \right) = 3 / \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right) + 4 \frac{\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3} < 7 \right).$$

Аналогично показывается, что в точках $x = \pm \frac{5}{6}\pi + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, функция $y(x)$ будет иметь локальные

максимумы $\left(y\left(\pm \frac{5}{6}\pi + 2\pi n \right) = -4\sqrt{3} > -7 \right)$

На рис. 1.16 приведен график функции $y = 3\sec x + 4\cos x$.

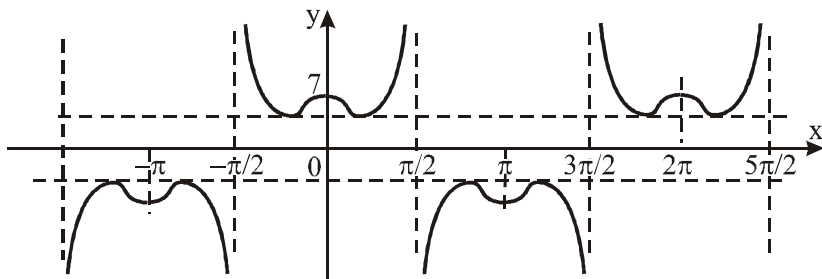


Рис. 1.16. Графики функции $y = 3\sec x + 4\cos x$

Ответ: $y_{\min} = -7$ в точках $x = \pi + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$;

$y_{\min} = 4\sqrt{3}$ в точках $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$;

$y_{\max} = 7$ в точках $x = 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$;

$$y_{\max} = -4\sqrt{3} \text{ в точках } x = \pm \frac{5}{6}\pi + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Пример 1.26. Найдите множество значений функций

$$\text{а) } y = \frac{1}{\sin x - \frac{1}{2}}; \quad \text{б) } y = \sqrt{1 + \frac{1}{\left(\sin x - \frac{1}{2}\right)^3}}.$$

Решение. Нахождение множества значений сложной функции удобно осуществлять в виде поэтапной процедуры, сводя на каждом шаге задачу к нахождению множества значений некоторой элементарной функции.

$$\text{а) } y = \frac{1}{\sin x - \frac{1}{2}} \Leftrightarrow y = \frac{1}{t}, \quad \text{где } t = \sin x - \frac{1}{2}.$$

1. Находим множество значений функции

$$t = \sin x - \frac{1}{2}, \quad x \in \mathbb{R}. \quad \text{Поскольку}$$

$E(\sin x) = [-1; 1]$, то с учетом свойств функции $y = f(x) + a$ имеем

$$E(t) = \left[-1 - \frac{1}{2}; 1 - \frac{1}{2}\right] = \left[-\frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right].$$

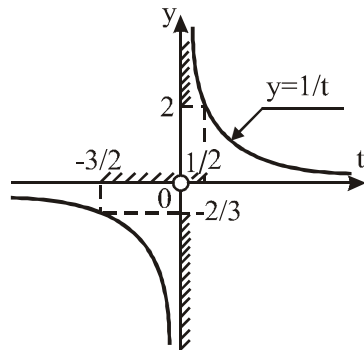


Рис. 1.17

2. Находим множество значений функции

$$y = \frac{1}{t}, \quad t \in \left[-\frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right], \quad t \neq 0.$$

Из рис.1.17 следует, что $E(y) = \left(-\infty; -\frac{2}{3}\right] \cup [2; +\infty)$.

б) введём функции $t = \sin x - \frac{1}{2}$; $p = \frac{1}{t}$; $s = 1 + p^3$; $y = \sqrt{s}$

и найдём последовательно множество значений каждой из введенных функций.

$$1. t = \sin x - \frac{1}{2} \Rightarrow E(t) = \left[-\frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right].$$

$$2. p = \frac{1}{t}, t \in \left[-\frac{3}{2}; 0\right) \cup \left(0; \frac{3}{2}\right] \Rightarrow E(p) = \left(-\infty; -\frac{2}{3}\right] \cup [2; +\infty).$$

$$3. s = 1 + p^3, p \in \left(-\infty; -\frac{2}{3}\right] \cup [2; +\infty).$$

Функция $s(p)$ является строго возрастающей на области задания, поэтому

$$E(s) = \left(-\infty; 1 + \left(-\frac{2}{3}\right)^3\right] \cup [1 + 2^3; +\infty) = \left(-\infty; \frac{19}{27}\right] \cup [9; +\infty).$$

$$4. y = \sqrt{s}, s \in \left[0; \frac{19}{27}\right] \cup [9; +\infty).$$

Функция $y = \sqrt{s}$ также является строго возрастающей на области задания и поэтому $E(y) = \left[0; \sqrt{\frac{19}{27}}\right] \cup [3; +\infty).$

$$\text{Ответ: а) } \left(-\infty; -\frac{2}{3}\right] \cup [2; +\infty); \text{ б) } \left[0; \sqrt{\frac{19}{27}}\right] \cup [3; +\infty).$$

1.2.6. Построение графиков тригонометрических функций

Пример 1.27. Постройте график функции $y = \cos x \cdot |\sin x|$.

Решение. Функция $y(x)$ является четной и 2π -периодической. Поэтому достаточно построить график функции на отрезке $[0; \pi]$; затем отобразить его симметрично относительно оси Oy на отрезок $[-\pi; 0]$ и далее продолжить периодически построенный на отрезке $[-\pi; \pi]$ график на всю числовую прямую. На отрезке $[0; \pi]$ $|\sin x| = \sin x$ и соответственно $y = \cos x \cdot \sin x = \frac{1}{2} \sin 2x$.

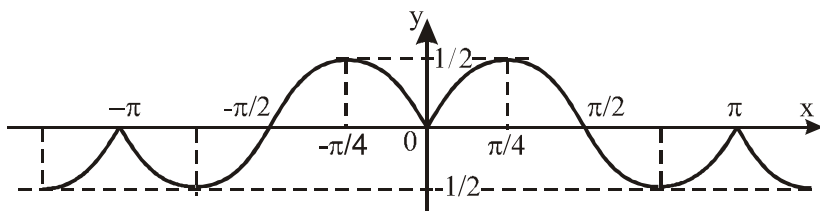


Рис. 1.18. График функции $y = \cos x \cdot |\sin x|$

Искомый график функции $y = \cos x \cdot |\sin x|$ приведен на рис. 1.18.

Пример 1.28. Постройте график функции $y = \left| \frac{\sin 2x}{\sin x} \right|$.

Решение. $y(x) = \left| \frac{2 \sin x \cdot \cos x}{\sin x} \right| = 2|\cos x|$, если

$x \neq \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$ (рис. 1.19).

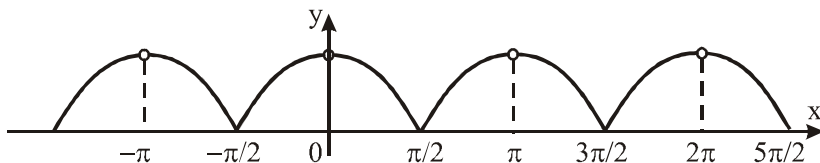


Рис. 1.19. График функции $y = \left| \frac{\sin 2x}{\sin x} \right|$

Пример 1.29. Постройте график функции

$$y = x + \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x.$$

Решение.

$$y = x + \operatorname{tg} x \operatorname{ctg} x = x + 1,$$

если $x \neq \frac{\pi}{2}n, \quad n \in \mathbb{Z}$

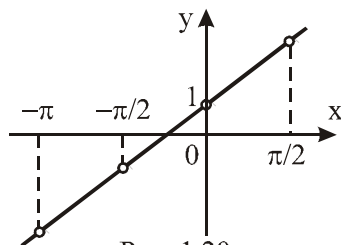


Рис. 1.20.

График функции $y = x + \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x$

(рис. 1.20).

1.3. Задачи для самостоятельного решения

1. Вычислите: а) $\sin(-570^\circ)$; б) $\cos 840^\circ$; в) $\operatorname{tg} 870^\circ$;
 г) $\operatorname{ctg}(-420^\circ)$; д) $\cos(-510^\circ)$; е) $\sec 600^\circ$.
2. Вычислите: а) $\sin \frac{13}{3}\pi$; б) $\cos \frac{217}{6}\pi$; в) $\operatorname{tg} \frac{287}{4}\pi$;
 г) $\sec \frac{29}{3}\pi$; д) $\operatorname{cosec} \frac{113}{6}\pi$.

Пункт 1.2.1

3. Переведите из радианной в градусную меру:

$$\frac{2}{3}\pi; \quad \frac{3}{4}\pi; \quad \frac{5}{6}\pi; \quad \frac{7}{6}\pi; \quad \frac{5}{4}\pi; \quad \frac{4}{3}\pi; \quad \frac{5}{3}\pi; \quad \frac{7}{4}\pi; \quad \frac{11}{6}\pi.$$

4. Переведите из градусной в радианную меру:

$$390^\circ, 450^\circ, 510^\circ, 570^\circ, 600^\circ, 780^\circ,$$

$$810^\circ, 840^\circ, 900^\circ, 930^\circ, 1000^\circ.$$

5. Вычислите длину дуги и площадь сектора радиусом 12 см с центральным углом $37^\circ 30'$.

6. Длина дуги сегмента в круге радиусом 4 равна $\frac{10}{3}\pi$.

Найдите центральный угол, отвечающий этому сегменту, и площадь сегмента.

7. Вершины вписанного в окружность четырехугольника ABCD делят окружность в отношении 3: 6: 7: 8. Найдите внутренние углы четырехугольника (в радианах).
8. Укажите отрезки вида $[\pi n; \pi(n+1)]$, $n \in \mathbb{Z}$, которым принадлежат числа

а) 5; б) $\frac{17}{2}$; в) $\frac{29}{2}$; г) 23; д) $\frac{63}{2}$.

Пункт 1.2.2

9. Определите знак числа $A = \cos 12^\circ \cdot \operatorname{tg} \frac{35}{2}$.
10. Определите знак числа $A = \cos 21^\circ \cdot \operatorname{ctg} 14^\circ \cdot \operatorname{cosec} 17^\circ$.
11. Определите знак числа $A = \cos 3^\circ \cdot \cos 5^\circ \cdot \cos 6^\circ \cdot \cos 8^\circ$.
12. Вычислите $A = \frac{\operatorname{ctg} 10^\circ + \operatorname{tg} 40^\circ}{1 - \operatorname{ctg} 10^\circ \cdot \operatorname{ctg} 50^\circ}$.
13. Вычислите $\operatorname{tg} 690^\circ \cdot \sin 480^\circ - \operatorname{ctg} 870^\circ \cdot \cos 570^\circ$.
14. Вычислите $\operatorname{cosec} 870^\circ \cdot \operatorname{ctg} 855^\circ + \sec 1020^\circ \cdot \sin 810^\circ$.
15. Вычислите: а) $\cos^2 22^\circ 30'$; б) $\sin^2 22^\circ 30'$; в) $\operatorname{tg} 22^\circ 30'$.
16. Вычислите $\cos^2\left(\frac{19}{2}\pi - 3\right) - \sin^2\left(3 - \frac{27}{2}\pi\right)$.
17. Вычислите $\sqrt{\cos^2 659^\circ - \sin 749^\circ + \frac{1}{16} \operatorname{cosec}^2 690^\circ + \sin 511^\circ}$.
18. Вычислите $\cos\left(\frac{9}{2}\pi - \alpha\right) \operatorname{ctg}(7\pi + \alpha) \sec(11\pi + \alpha)$.

Пункт 1.2.3

19. Установите, какие из приведенных функций являются четными или нечетными

а) $y = \sin|x|$; б) $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{3}{4}\pi + x\right)$;

в) $y = \sin\left|x - \frac{\pi}{3}\right|$; г) $y = \cos x \operatorname{tg} x$, $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$;

д) $y = \operatorname{tg} x \operatorname{tg} 2x \operatorname{tg} 3x$, $x \neq \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}$, $n \in \mathbb{Z}$; $x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{\pi m}{2}$, $m \in \mathbb{Z}$.

20. Установите, при каких значениях параметров a и b приведенные функции являются четными или нечетными:

а) $y = a \sec x + b \operatorname{cosec} x$, $x \neq \frac{\pi n}{2}$;

б) $y = a\sqrt[3]{x} \sin x + b\sqrt[3]{x^2} \cos x^3$;

в) $y = a x \operatorname{tg}|x| + b \operatorname{ctg} x$; $x \neq \frac{\pi}{2} n$, $n \in \mathbb{Z}$;

г) $y = a x \sin \frac{|x|}{x} + b \frac{|x|}{x} \cos x$.

21. Установите, какие из приведенных функций являются четными или нечетными:

а) $y = \sin 3x + \cos 2x$; б) $y = \sin 3|x| + \cos 2x$;

в) $y = \sin 3x + \sin 2x$; г) $y = \sin 3x \cdot \cos 2x$;

д) $y = \sin 3x \sin 2x$; е) $y = \cos 3x \cdot \cos 2x$.

22. Найдите все значения параметра a , при которых уравнение

$$\cos^2 x - 2a \cos x + a^2 + x^2 = 0$$

имеет единственное решение.

23*. Найдите все значения параметра a , при которых уравнение

$$\cos^4 x - (a^2 - 2)\cos^2 x - 2a^2 = 0$$

имеет четное число корней на любом отрезке $[-b, b]$,

$$b \geq \frac{\pi}{2}.$$

24*. Найдите все значения параметра a , при которых уравнение

$$\cos^4 x - (a^2 - 2)\cos^2 x - 2a^2 = 0$$

имеет нечетное число корней на любом отрезке $[-b, b]$,

$$b > 0.$$

Пункт 1.2.4

25. Определите основной период функций

а) $y = 5\operatorname{tg}\left(\frac{19}{6}x + \frac{\pi}{4}\right);$

б) $y = 3\cos\operatorname{ec}\left(8x + \frac{\pi}{3}\right);$

в) $y = 2\sin\left(\frac{4}{5}x + 3\right);$

г) $y = \operatorname{ctg} 11x.$

26. Определите основной период функций

а) $y = \cos \frac{10}{3}x + \sin \frac{14}{5}x;$ б) $y = \operatorname{tg} \frac{4}{9}x + \operatorname{ctg} \frac{8}{3}x + \sec 4x;$

в) $y = \cos\left(\frac{\pi}{4} - 3x\right)\sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right).$

27. Определите основной период функций

а) $y = \cos^3 2x;$ б) $y = \cos^4 x;$

в) $y = \cos^2 2x \cdot \sin 6x;$ г) $y = \sin^n x, n \in \mathbb{N}.$

28. Установите, являются ли периодическими функции и если являются, то найдите основной период

а) $y = \operatorname{tg} \pi x + \operatorname{ctg} 3x$; б) $y = \operatorname{tg} \pi x + \operatorname{ctg} \frac{3}{4} \pi x$;

в) $y = \cos 2\sqrt{3}x + \sin 12x$; г) $y = \cos \sqrt{2}x + \sin \sqrt{8}x$.

29. Определите основной период функций:

а) $y = \sin \frac{5}{3}x \cos \frac{3}{2}x$; б) $y = \sin \frac{4}{9}\pi x \cdot \cos \frac{16}{3}\pi x$;

в) $y = 2 \sin \left(\frac{10}{3}x - \frac{\pi}{4} \right) + \frac{2}{5}\pi$; г) $y = \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x + 1$.

Пункт 1.2.5

30. Найдите интервалы возрастания (убывания) и точки локальных экстремумов функций:

а) $y = \cos 4x$; б) $y = \cos \left(\frac{\pi}{3} - 4x \right)$;

в) $y = \operatorname{tg} 3x$; г) $y = \operatorname{tg} \left(3x - \frac{\pi}{3} \right)$.

31. Расположите в порядке возрастания числа

$$\cos 1, \quad \cos 3, \quad \cos 5, \quad \cos 6, \quad \cos 8.$$

32. Расположите в порядке возрастания числа

а) $\sin 41^\circ, \cos 41^\circ, \operatorname{ctg} 41^\circ$; б) $\sin 53^\circ, \cos 53^\circ, \operatorname{tg} 53^\circ$;

в) $\sin 230^\circ, \cos 230^\circ, \operatorname{tg} 230^\circ$;

33. Расположите в порядке возрастания числа

$$\operatorname{tg} 142^\circ; \operatorname{tg} 46^\circ; \operatorname{ctg} 43^\circ; \operatorname{ctg} 148^\circ; \cos 43^\circ; \sin 46^\circ.$$

34. Найдите область определения функции

$$y = \sqrt{-\left(x + \operatorname{tg} \frac{34}{45} \pi\right) \left(x + \cos 2\right)}.$$

35. Найдите область определения функции

$$y = \sqrt{(\sin 2 - x) \left(x - \operatorname{tg} \frac{113}{90} \pi\right)}.$$

36. Решите неравенство

$$x \left(x - \sec \frac{11}{6} \pi\right) \left(x - \operatorname{ctg} \frac{19}{6} \pi\right) \left(x - \operatorname{tg} \sqrt{2}\right) \leq 0.$$

37. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции

$$y = 3 \sin^2 x - 4 \cos x + 2.$$

38. Найдите множество значений функции

$$y = -2 \cos^2 x + 4 \sin x + 3.$$

Найдите множество значений функции (примеры 39...47)

$$39. y = \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x. \quad 40. y = \frac{3}{2 \sin x - 1}. \quad 41. y = \frac{3}{\sin x - 2}.$$

$$42. y = \frac{5}{2 \sin x + 3}. \quad 43. y = \log_3 \frac{1}{\sin x + 2}. \quad 44. y = 2^{\frac{3}{2 \sin x - 1}}.$$

$$45. y = \frac{\sqrt{2}}{\cos x + \sin x}. \quad 46. y = \frac{4}{\cos^2 x - 3 \cos x}.$$

$$47. y = \sqrt{\frac{3 \cos^2 x - 9 \cos x + 4}{\cos^2 x - 3 \cos x}}.$$

Найдите наименьшее и наибольшее значения функции
(примеры 48...52)

48. $y = \cos x - \sin x$. 49. $y = 2 \cos^2 3x - 3 \cos 3x$.
50. $y = 3^{-|\cos x|}$. 51. $y = 3^{-|\operatorname{tg} x|}$. 52. $y = \sqrt{7 - 3 \sin^2 x - 2 \cos x}$.
- 53*. Найдите локальные экстремумы и множество $E(y)$ значений функции $y = \sin x + \frac{1}{2} \operatorname{cosech} x$.

Пункт 1.2.6

Постройте графики функций

54. $y = |\sin x + \sqrt{3} \cos x|$. 55. $y = |\sin x| + |\cos x|$.
56. $y = 2 - \sin|x|$. 57. $y = \sin\left|x - \frac{\pi}{2}\right|$. 58. $y = \frac{\sin x}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x}}$.
59. $y = \frac{\sqrt{2} \cos \frac{x}{2}}{\sqrt{1 + \cos x}}$. 60. $y = \frac{\sqrt{2} \sin 2x}{\sqrt{1 - \cos 2x}}$.
61. $y = \sin x |\cos x| + \cos |\sin x|$. 62. $y = \sin x + \frac{1}{2} \operatorname{cosech} x$.

1.4. Ответы

1. а) $\frac{1}{2}$; б) $-\frac{1}{2}$; в) $-\frac{1}{\sqrt{3}}$; г) $-\frac{1}{\sqrt{3}}$; д) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; е) -2.
2. а) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; в) -1; г) 2; д) 2.

3.

$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	$\frac{7}{6}\pi$	$\frac{5}{4}\pi$	$\frac{4}{3}\pi$	$\frac{5}{3}\pi$	$\frac{7}{4}\pi$	$\frac{11}{6}\pi$
120°	135°	150°	210°	225°	240°	300°	315°	330°

4.

390^0	450^0	510^0	570^0	600^0	780^0
$\frac{13}{6}\pi$	$\frac{5}{2}\pi$	$\frac{17}{6}\pi$	$\frac{19}{6}\pi$	$\frac{10}{3}\pi$	$\frac{13}{3}\pi$

810^0	840^0	900^0	930^0	1000^0
$\frac{9}{2}\pi$	$\frac{14}{3}\pi$	5π	$\frac{31}{6}\pi$	$\frac{50}{9}\pi$

5. $l = \frac{5}{2}\pi$ см; $S = 15\pi$ см². 6. $\alpha = \frac{5}{6}\pi$; $S = \frac{4(5\pi-3)}{3}$.

7. $\angle A = \frac{13}{24}\pi$; $\angle B = \frac{5}{8}\pi$; $\angle C = \frac{11}{24}\pi$; $\angle D = \frac{3}{8}\pi$.

8. а) $[\pi; 2\pi]$; б) $[2\pi; 3\pi]$; в) $[4\pi; 5\pi]$; г) $[7\pi; 8\pi]$; д) $[10\pi; 11\pi]$.

9. $A < 0$. 10. $A > 0$. 11. $A > 0$. 12. $-\sqrt{3}$. 13. -2. 14. 0.

15. а) $\frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}$; б) $\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}$; в) $\sqrt{2}-1$. 16. $-\cos 6$. 17. $\frac{1}{2}$. 18. -1.

19. а), б) – четные; г), д) – нечетные.

20. а) четная при $a \in \mathbb{R}, b = 0$, нечетная при $b \neq 0, a = 0$;

б) четная при $a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}$; в) нечетная при $a^2 + b^2 \neq 0$;

г) четная при $a \in \mathbb{R}, b = 0$, нечетная при $b \in \mathbb{R}, a = 0$.

21. б), д), е) – четные; в), г) – нечетные. 22. $a = 1$. 23. $|a| < 1$.

24. $|a| = 1$. 25. а) $\frac{6}{19}\pi$; б) $\frac{\pi}{4}$; в) $\frac{5}{2}\pi$; г) $\frac{\pi}{11}$.

26. а) 15π ; б) $\frac{9}{2}\pi$; в) $\frac{\pi}{3}$.

27. а) π ; б) π ; в) π ; г) $T = \pi$ при n четном; $T = 2\pi$ при n нечетном. 28. а) не является периодической; б) $T = 4$;

в) не является периодической; г) $T = \sqrt{2}\pi$.

29. а) 12π ; б) $\frac{9}{2}$; в) $\frac{3}{5}\pi$; г) $\frac{9}{2}$.

30. а) $\left(-\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}; \frac{\pi n}{2}\right)$, $n \in \mathbb{Z}$, - интервалы возрастания;

$\left(\frac{\pi n}{2}; \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}\right)$, $n \in \mathbb{Z}$, - интервалы убывания;

$x = -\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$, - точки локальных минимумов;

$x = \frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$, - точки локальных максимумов;

б) $\left(-\frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{2}; \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}\right)$, $n \in \mathbb{Z}$, - интервалы возрастания;

$\left(\frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}; \frac{\pi}{3} + \frac{\pi n}{2}\right)$, $n \in \mathbb{Z}$, - интервалы убывания;

$x = -\frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$, - точки локальных минимумов;

$x = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$, - точки локальных максимумов.

31. $\cos 3, \cos 8, \cos 5, \cos 1, \cos 6$

$(\cos 3 < \cos 8 < \cos 5 < \cos 1 < \cos 6)$.

$$32. \text{ а) } \sin 41^0, \cos 41^0, \operatorname{ctg} 41^0; \quad \text{б) } \cos 53^0, \sin 53^0, \operatorname{tg} 53^0;$$

$$\text{в) } \operatorname{tg} 230^0, \sin 230^0, \cos 230^0.$$

$$33. \operatorname{ctg} 148^0, \operatorname{tg} 142^0, \sin 46^0, \cos 43^0, \operatorname{tg} 46^0, \operatorname{ctg} 43^0.$$

$$34. \left[-\cos 2; -\operatorname{tg} \frac{34}{45} \pi \right]. \quad 35. \left[\sin 2; \operatorname{tg} \frac{113}{90} \pi \right].$$

$$36. \left[0; \frac{2}{\sqrt{3}} \right] \cup [\sqrt{3}; \operatorname{tg} \sqrt{2}]. \quad 37. y_{\min} = -2; \quad y_{\max} = \frac{19}{3}.$$

$$38. E_y = [-1; 7]. \quad 39. (-\infty; -2] \cup [2; +\infty). \quad 40. (-\infty; -1] \cup [3; +\infty).$$

$$41. [-3; -1]. \quad 42. [1; 5]. \quad 43. [-1; 0]. \quad 44. \left(0; \frac{1}{2} \right] \cup [8; +\infty).$$

$$45. (-\infty; -1] \cup [1; +\infty). \quad 46. (-\infty; -2] \cup [1; +\infty).$$

$$47. (0; 1] \cup [2; +\infty). \quad 48. y_{\text{наим.}} = -\sqrt{2}; \quad y_{\text{наиб.}} = \sqrt{2}.$$

$$49. y_{\text{наим.}} = -\frac{9}{8}; \quad y_{\text{наиб.}} = 5. \quad 50. y_{\text{наим.}} = \frac{1}{3}; \quad y_{\text{наиб.}} = 1.$$

$$51. y_{\text{наим.}} \text{ не достигается; } y_{\text{наиб.}} = 1.$$

$$52. y_{\text{наим.}} = \sqrt{\frac{11}{3}}; \quad y_{\text{наиб.}} = 3.$$

$$53. y_{\min} = \sqrt{2} \text{ в точках } x = \frac{\pi}{2} \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z};$$

$$y_{\min} = -\frac{3}{2} \text{ в точках } x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z};$$

$$y_{\max} = -\sqrt{2} \text{ в точках } x = -\frac{\pi}{2} \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z};$$

$$y_{\max} = \frac{3}{2} \text{ в точках } x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

$$E_y = (-\infty; -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}; +\infty).$$

$$54. y = |\sin x + \sqrt{3} \cos x| = 2 \left| \sin \left(x + \frac{\pi}{3} \right) \right| \quad (\text{рис. 1.21})$$

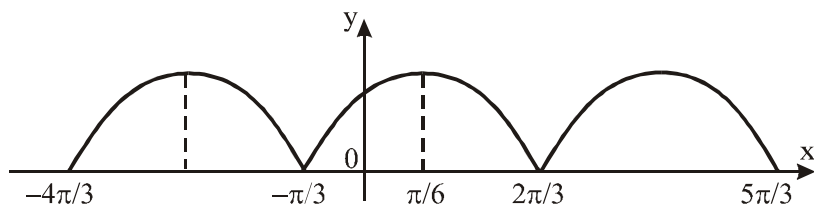


Рис. 1.21

55. Указание. Функция $y = |\sin x| + |\cos x|$ является четной и периодической с основным периодом $T = \pi$. Построить график функции на отрезке $[0; \pi]$ и затем продолжить периодически на всю числовую ось (рис. 1.22).

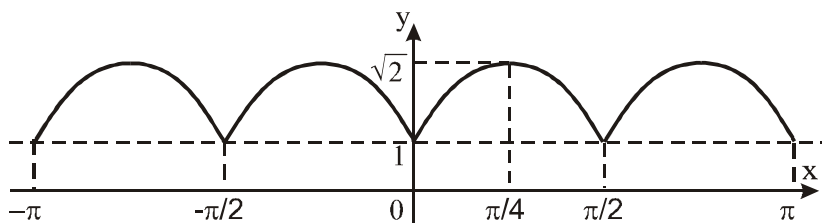


Рис. 1.22

56. Рисунок 1.23.

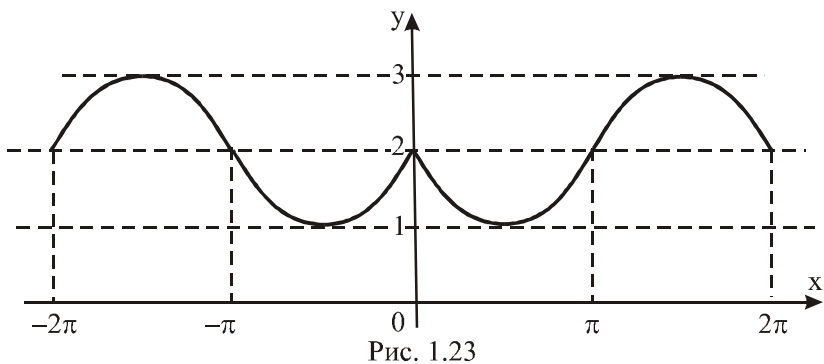


Рис. 1.23

57. Рисунок 1.24

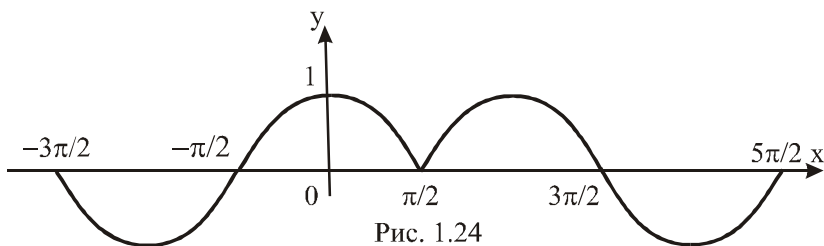


Рис. 1.24

58. $y = \frac{\sin x}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x}} = \sin x \cdot |\cos x|, x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$ (рис. 1.25).

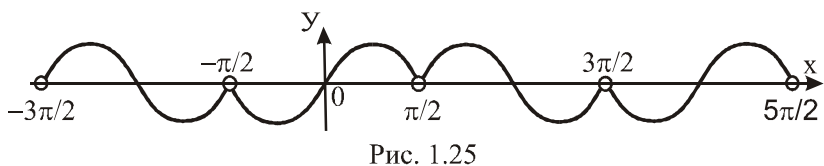


Рис. 1.25

59.

$$y = \frac{\sqrt{2} \cos \frac{x}{2}}{2} = \frac{\cos \frac{x}{2}}{2} = \frac{\cos \frac{x}{2}}{|\cos \frac{x}{2}|}$$

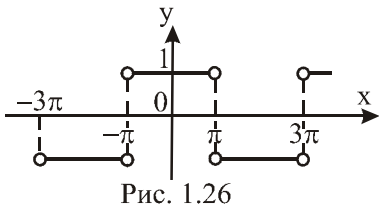
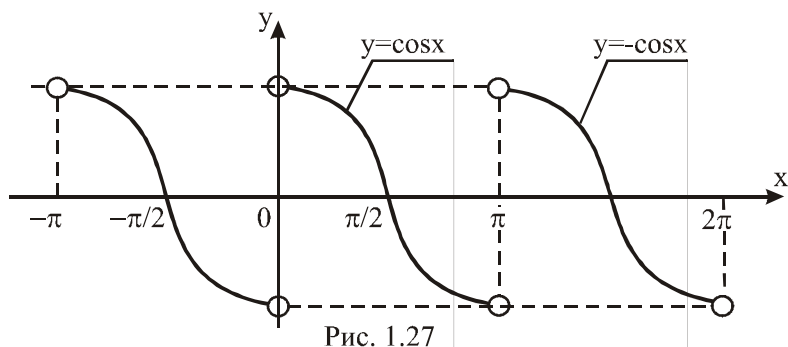


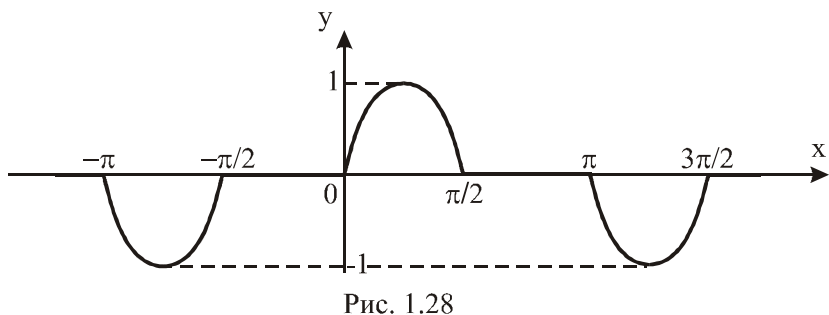
Рис. 1.26

$$= \begin{cases} 1, & -\pi + 2\pi n < x < \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}, \\ -1, & \pi + 2\pi n < x < 3\pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}. \end{cases} \quad (\text{рис. 1.26}).$$

$$60. y = \frac{\sqrt{2} \sin 2x}{\sqrt{1 - \cos 2x}} = 2 \frac{\sin x}{|\sin x|} \cdot \cos x \quad (\text{рис. 1.27}).$$



61. Рисунок 1.28.



62. Рисунок 1.29 (см. пример 1. 25).

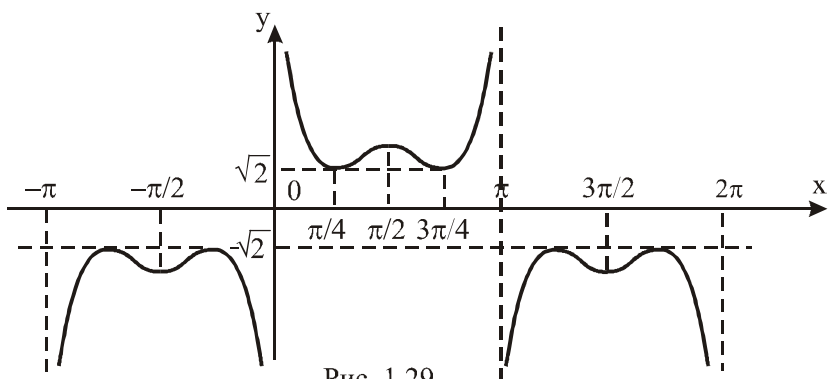


Рис. 1.29

2. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФОРМУЛЫ, ТОЖДЕСТВА И ВЫЧИСЛЕНИЯ

2.1. Тригонометрические формулы

Успех решения тригонометрических уравнений и неравенств, доказательства тригонометрических тождеств и решения вычислительных задач в значительной мере определяются знанием основных формул тригонометрии. Это непростая задача для каждого изучающего тригонометрию, потому что только основных формул тригонометрии более 30. Одновременно необходимо знать различные приемы преобразования тригонометрических выражений из одного вида в другой (тригонометрические тождества).

Данное замечание в полной мере относится и к обратным тригонометрическим функциям (раздел 3.2) и связанным с ними формулам. Это еще больше увеличивает формульную базу тригонометрии. Поэтому каждому, кто начинает изучать расширенный курс тригонометрии, нужно настроиться на серьезную и систематическую работу. Правильный путь изучения и запоминания формул тригонометрии заключается в последовательном выводе этих формул. Механическое заучивание формул приводит к тому, что они быстро забываются и перемешиваются в сознании.

Замечание 1. Следуя сложившейся традиции, будем обозначать аргументы тригонометрических функций в приводимых ниже формулах буквами α, β, γ греческого алфавита, а не латинского x, y, z , что вытекает из логики обозначений, которые использовались в первом разделе.

Замечание 2. Для придания тригонометрическим формулам лучшей читаемости будем записывать их без указания допустимых значений входящих в них аргументов.

1. Соотношения между тригонометрическими функциями одного аргумента

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \quad (2.1)$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}; \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \quad (2.2)$$

$$\frac{1}{\cos^2 \alpha} = 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha \quad (2.3)$$

$$\frac{1}{\sin^2 \alpha} = 1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha \quad (2.4)$$

2. Тригонометрические функции суммы и разности углов

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \quad (2.5)$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta \quad (2.6)$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \quad (2.7)$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \quad (2.8)$$

$$\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta}{1 \mp \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta} \quad (2.9)$$

3. Тригонометрические функции двойного и тройного аргументов

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha \quad (2.10)$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \quad (2.11)$$

$$\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 \quad (2.12)$$

$$\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha \quad (2.13)$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} \quad (2.14)$$

$$\sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha \quad (2.15)$$

$$\cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha \quad (2.16)$$

4. Формулы понижения степени

$$\boxed{\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}} \quad (2.17)$$

$$\boxed{\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}} \quad (2.18)$$

5. Тригонометрические функции половинного аргумента

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}} \quad (2.19)$$

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}} \quad (2.20)$$

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}} = \quad (2.21)$$

$$= \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} = \quad (2.22)$$

$$= \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha} \quad (2.23)$$

Замечание 3. Знаки в правых частях формул (2.19), (2.20), (2.21) («+» или «-») выбираются соответственно знаку функции, стоящей в левой части равенства.

6. Формулы преобразования произведения

тригонометрических функций в сумму

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)] \quad (2.24)$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)] \quad (2.25)$$

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)] \quad (2.26)$$

7. Формулы преобразования суммы

тригонометрических функций в произведение

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \quad (2.27)$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \quad (2.28)$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \quad (2.29)$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\beta - \alpha}{2} \quad (2.30)$$

$$\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\cos \alpha \cos \beta} \quad (2.31)$$

8. Формулы, выражающие $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$ через $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$

(универсальная подстановка)

$$\sin \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}} \quad (2.32)$$

$$\cos \alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}} \quad (2.33)$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}} \quad (2.34)$$

Покажем как выводятся некоторые из приведенных формул.

1. Основное тригонометрическое тождество (2.1) следует непосредственно из определения функций синус и косинус (см. п. 1.1.1, рис. 1.1).

Докажем тождество (2.3):

$$\begin{aligned} \frac{1}{\cos^2 \alpha} &= \frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} + \frac{\cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \\ &= 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha, \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Аналогично доказывается тождество (2.4).

2. Тождества (2.5)-(2.8) являются основными в списке формул тригонометрии, поскольку все остальные формулы (2.9)-(2.34) выводятся из них либо прямо, либо опосредствованно.

Выведем формулу (2.8). Возьмем на единичной окружности точки $M_\alpha(\cos \alpha, \sin \alpha)$, $M_\beta(\cos \beta, \sin \beta)$ (рис. 2.1) и образуем векторы $\overrightarrow{OM_\alpha}$ и $\overrightarrow{OM_\beta}$.

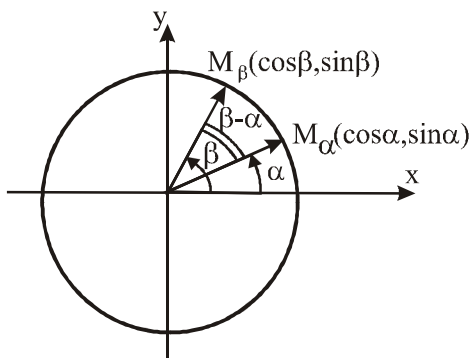


Рис. 2.1

Вычислим скалярное произведение $(\overrightarrow{OM_\alpha}, \overrightarrow{OM_\beta})$. В соответствии с определением скалярного произведения $\left((\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \left(\widehat{\vec{a}, \vec{b}} \right) \right)$ имеем

$$(\overrightarrow{OM_\alpha}, \overrightarrow{OM_\beta}) = |\overrightarrow{OM_\alpha}| \cdot |\overrightarrow{OM_\beta}| \cos(\beta - \alpha) = \cos(\alpha - \beta). \quad (2.35)$$

С другой стороны, векторы $\overline{OM_\alpha}$ и $\overline{OM_\beta}$ заданы своими координатами и потому, в соответствии с правилом вычисления скалярного произведения векторов в координатной форме, имеем

$$(\overline{OM_\alpha}, \overline{OM_\beta}) = \cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta. \quad (2.36)$$

Из (2.35) и (2.36) следует, что

$$\boxed{\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta}. \blacksquare$$

Для вывода формулы (2.9) достаточно воспользоваться определением тангенса и формулами (2.5), (2.7) синуса и косинуса суммы углов:

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} = \frac{\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta}.$$

Разделив числитель и знаменатель на $\cos \alpha \cdot \cos \beta$ при условии $\cos \alpha \neq 0, \cos \beta \neq 0$, получим искомый результат:

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta}, \quad \alpha; \beta; \alpha + \beta \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

3. Формулы двойного аргумента (угла) (2.10), (2.11) и (2.14) следуют из формул (2.5), (2.7) и (2.9) соответственно, если в последних принять $\beta = \alpha$. Например,

$$\cos(\alpha + \alpha) = \cos 2\alpha = \cos \alpha \cdot \cos \alpha - \sin \alpha \sin \alpha \text{ или}$$

$$\boxed{\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}.$$

Из этой формулы с учетом основного тригонометрического тождества (2.1) следуют формулы (2.12) и (2.13).

Докажем справедливость тождества (2.15). Поскольку

$$3\alpha = 2\alpha + \alpha, \text{ то}$$

$$\sin 3\alpha = \sin(2\alpha + \alpha) = \sin 2\alpha \cos \alpha + \cos 2\alpha \cdot \sin \alpha.$$

Заменив $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$, а $\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha$, получим, что

$$\begin{aligned}\sin 3\alpha &= 2 \sin \alpha \cos^2 \alpha + (1 - 2 \sin^2 \alpha) \cdot \sin \alpha = \\ &= 2 \sin \alpha (1 - \sin^2 \alpha) + \sin \alpha - 2 \sin^3 \alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha. \quad \blacksquare\end{aligned}$$

Аналогично доказывается тождество (2.16).

4. Формулы понижения степени (2.17) и (2.18) следуют из формул (2.12) и (2.13). Действительно

$$\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 \Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2};$$

$$\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha \Rightarrow \sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}.$$

Выделение формул понижения степени «рамочкой» призвано подчеркнуть их важную роль как в школьном курсе тригонометрии, так и во многих разделах высшей математики.

5. Формулы (2.19) и (2.20) следуют непосредственно из формул (2.17) и (2.18). Необходимо лишь в этих формулах заменить аргумент α на $\frac{\alpha}{2}$.

Докажем формулы (2.22) и (2.23):

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}} = \frac{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}}{2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha}, \alpha \neq \pi(2n+1), n \in \mathbb{Z};$$

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}} = \frac{2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}} = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha}, \alpha \neq \pi n, n \in \mathbb{Z}. \quad \blacksquare$$

6. Сложив левые и правые части формул (2.5) и (2.6), получим

$$\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) = 2 \sin \alpha \cos \beta,$$

откуда

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)].$$

Аналогично из (2.7) и (2.8) выводятся формулы (2.25) и (2.26).

7. Формулы (2.27)-(2.30) выводятся из формул (2.24)-(2.26). Покажем, как выводится формула (2.27). Примем в (2.24) обозначения

$$\alpha + \beta = x, \quad \alpha - \beta = y \Rightarrow \alpha = \frac{x+y}{2}; \quad \beta = \frac{x-y}{2}.$$

В новых обозначениях получим

$$\sin \frac{x+y}{2} \cdot \cos \frac{x-y}{2} = \frac{1}{2} (\sin x + \sin y),$$

откуда

$$\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2},$$

а это и есть формула (2.27), только в иных обозначениях аргументов. ■

Применив этот прием к формулам (2.25), (2.26), получим формулы (2.29) и (2.30).

8. Покажем, как выражаются $\sin \alpha$ и $\cos \alpha$ через $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$:

$$\sin \alpha = \frac{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}}{1} = \frac{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}}{\cos^2 \frac{\alpha}{2} + \sin^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}};$$

$$\cos \alpha = \frac{\cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{1} = \frac{\cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{\cos^2 \frac{\alpha}{2} + \sin^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}.$$

2.2. Тригонометрические тождества

Приведенные в п.2.1 формулы, как уже отмечалось, являются основными тригонометрическими тождествами. Вообще же список тригонометрических тождеств существенно шире. Некоторые из них носят тренировочный характер и призваны способствовать лучшему усвоению основных тригонометрических тождеств. Другие сами являются важными тригонометрическими тождествами и на них следует обратить особое внимание, равно как и на процесс доказательства этих тождеств. Такие тождества отмечены в данном разделе и в разделе «Задачи для самостоятельной работы» значком (!).

(!) Пример 2.1. Докажите тождества:

$$\text{а) } \sin^4 x + \cos^4 x = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2x; \quad (2.37)$$

$$\text{б) } \sin^6 x + \cos^6 x = 1 - \frac{3}{4} \sin^2 2x. \quad (2.38)$$

Решение. а) Способ 1. Возведем обе части тождества $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ в квадрат. Получим

$$\begin{aligned} \sin^4 x + 2 \sin^2 x \cos^2 x + \cos^4 x &= 1 \Rightarrow \\ \Rightarrow \sin^4 x + \cos^4 x &= 1 - 2 \sin^2 x \cos^2 x \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \sin^4 x + \cos^4 x &= 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2x \end{aligned}$$

Способ 2. Выполнив очевидные тождественные преобразования, будем иметь

$$\begin{aligned}\sin^4 x + \cos^4 x &= \\&= \left[(\sin^2 x)^2 + 2 \sin^2 x \cos^2 x + (\cos^2 x)^2 \right] - 2 \sin^2 x \cos^2 x = \\&= (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - \frac{1}{2} (2 \sin x \cos x)^2 = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2x. \quad \blacksquare\end{aligned}$$

б) Способ 1. $(\sin^2 x + \cos^2 x)^3 = 1^3 \Leftrightarrow$

$$\begin{aligned}\Leftrightarrow \sin^6 x + 3 \sin^4 x \cos^2 x + 3 \sin^2 x \cos^4 x + \cos^6 x &= 1 \Rightarrow \\ \Rightarrow \sin^6 x + \cos^6 x &= 1 - 3 \sin^2 x \cos^2 x (\sin^2 x + \cos^2 x) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \sin^6 x + \cos^6 x &= 1 - \frac{3}{4} \sin^2 2x.\end{aligned}$$

Способ 2. Воспользовавшись формулой суммы кубов $(a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2))$, получим

$$\begin{aligned}\sin^6 x + \cos^6 x &= (\sin^2 x)^3 + (\cos^2 x)^3 = \\&= (\sin^2 x + \cos^2 x) \left((\sin^2 x)^2 - \sin^2 x \cos^2 x + (\cos^2 x)^2 \right) = \\&= \left[(\sin^2 x)^2 + 2 \sin^2 x \cos^2 x + (\cos^2 x)^2 \right] - 3 \sin^2 x \cos^2 x = \\&= (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - \frac{3}{4} (2 \sin x \cos x)^2 = 1 - \frac{3}{4} \sin^2 2x. \quad \blacksquare\end{aligned}$$

Пример 2.2. Докажите тождество

$$\sin x + \cos x + \sin 5x + \cos 5x = 2\sqrt{2} \cos 2x \cdot \sin \left(3x + \frac{\pi}{4} \right).$$

Решение. Перегруппируем слагаемые в левой части тождества и преобразуем суммы синусов и косинусов в произведение по формулам (2.27) и (2.29):

$$\begin{aligned}
 & (\sin x + \sin 5x) + (\cos x + \cos 5x) = \\
 &= 2 \sin \frac{x+5x}{2} \cos \frac{x-5x}{2} + 2 \cos \frac{x+5x}{2} \cos \frac{x-5x}{2} = \\
 &= 2 \cos 2x (\sin 3x + \cos 3x) = 2 \cos 2x \left(\sin 3x + \sin \left(\frac{\pi}{2} + 3x \right) \right) = \\
 &= 2 \cos 2x \cdot 2 \sin \left(3x + \frac{\pi}{4} \right) \cos \frac{\pi}{4} = 2\sqrt{2} \cos 2x \sin \left(3x + \frac{\pi}{4} \right) \blacksquare
 \end{aligned}$$

Пример 2.3. Докажите тождество

$$\frac{\sin x - 2 \sin 2x + \sin 3x}{\cos x - 2 \cos 2x + \cos 3x} = \operatorname{tg} 2x, \quad x \neq 2\pi n, x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}.$$

Решение. В соответствии с формулами (2.27) и (2.29) получаем

$$\begin{aligned}
 \frac{(\sin x + \sin 3x) - 2 \sin 2x}{(\cos x + \cos 3x) - 2 \cos 2x} &= \frac{2 \sin 2x \cos x - 2 \sin 2x}{2 \cos 2x \cos x - 2 \cos 2x} = \\
 &= \frac{2 \sin 2x (\cos x - 1)}{2 \cos 2x (\cos x - 1)} = \operatorname{tg} 2x. \blacksquare
 \end{aligned}$$

(!) Пример 2.4. Докажите тождество

$$16 \cos x \cos 2x \cos 4x \cos 8x = \frac{\sin 16x}{\sin x}, \quad x \neq \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Решение. $16 \cos x \cos 2x \cos 4x \cos 8x =$

$$= 16 \frac{\sin x}{\sin x} \cdot \cos x \cos 2x \cos 4x \cos 8x.$$

Но $2 \sin x \cos x = \sin 2x$, $2 \sin 2x \cos 2x = \sin 4x$,

$$2 \sin 4x \cos 4x = \sin 8x, \quad 2 \sin 8x \cos 8x = \sin 16x$$

$$\text{и потому} \quad 16 \sin x \cos x \cos 2x \cos 4x \cos 8x = \sin 16x$$

и окончательно

$$16 \cos x \cos 2x \cos 4x \cos 8x = \frac{\sin 16x}{\sin x}. \blacksquare$$

(!) Пример 2.5. Докажите тождество

$$\begin{aligned} & \sin x + \sin 2x + \sin 3x + \dots + \sin nx = \\ &= \frac{\sin \frac{nx}{2} \sin \frac{(n+1)x}{2}}{\sin \frac{x}{2}}, \quad x \neq 2\pi m, \quad m \in \mathbb{Z}. \quad (2.39) \end{aligned}$$

Решение. $A(x) \equiv \sin x + \sin 2x + \sin 3x + \dots + \sin nx =$

$$\begin{aligned} &= \frac{2 \sin \frac{x}{2}}{2 \sin \frac{x}{2}} (\sin x + \sin 2x + \dots + \sin nx) = \\ &= \frac{1}{2 \sin \frac{x}{2}} \left(2 \sin \frac{x}{2} \sin x + 2 \sin \frac{x}{2} \sin 2x + \dots + 2 \sin \frac{x}{2} \sin nx \right). \end{aligned}$$

Преобразовав произведения $2 \sin \frac{x}{2} \sin kx$, $k=1,2,\dots,n$, в суммы по формуле (2.26), т.е.

$$\begin{aligned} 2 \sin \frac{x}{2} \sin kx &= \cos \left(\frac{x}{2} - kx \right) - \cos \left(\frac{x}{2} + kx \right) = \\ &= \cos \frac{2k-1}{2} x - \cos \frac{2k+1}{2} x, \end{aligned}$$

получим

$$\begin{aligned}
 A(x) &= \frac{1}{2 \sin \frac{x}{2}} \left[\left(\cos \frac{x}{2} - \cos \frac{3}{2} x \right) + \left(\cos \frac{3}{2} x - \cos \frac{5}{2} x \right) + \right. \\
 &\quad \left. + \left(\cos \frac{5}{2} x - \cos \frac{7}{2} x \right) + \dots + \left(\cos \frac{2n-1}{2} x - \cos \frac{2n+1}{2} x \right) \right] = \\
 &= \frac{\cos \frac{x}{2} - \cos \frac{2n+1}{2} x}{2 \sin \frac{x}{2}} = \frac{2 \sin \frac{(n+1)x}{2} \sin \frac{nx}{2}}{2 \sin \frac{x}{2}}.
 \end{aligned}$$

На последнем шаге разность косинусов преобразована в произведение с помощью формулы (2.30). ■

В примерах 2.4 и 2.5 использован прием домножения произведения (пример 2.4) или алгебраической суммы (пример 2.5) тригонометрических функций на некоторую тригонометрическую функцию. Последняя подбирается так, чтобы применение соответствующих формул привело к упрощению всего выражения.

В примере 2.4 выбор такой функции подсказывает последовательное удвоение аргументов косинусов и структура формулы синуса двойного аргумента. В примере 2.5 функция, на которую умножается алгебраическая сумма синусов, выбирается так, чтобы последующее применение формулы преобразования произведения синусов в разность косинусов (формула 2.26), привело к взаимному уничтожению максимального числа слагаемых.

Прием домножения является эффективным способом решения многих задач тригонометрии (см. примеры 2.19, 2.20, 4.26).

Пример 2.6. Докажите тождество

$$\frac{\sqrt{1+\cos x} - \sqrt{1-\cos x}}{\sqrt{1+\cos x} + \sqrt{1-\cos x}} = \frac{1-|\sin x|}{\cos x}, \quad x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Решение. Умножив числитель и знаменатель левой части тождества на выражение $\sqrt{1+\cos x} - \sqrt{1-\cos x}$, сопряженное к $\sqrt{1+\cos x} + \sqrt{1-\cos x}$, получим

$$\begin{aligned} & \frac{(\sqrt{1+\cos x} - \sqrt{1-\cos x})^2}{(\sqrt{1+\cos x})^2 - (\sqrt{1-\cos x})^2} = \\ &= \frac{1+\cos x - 2\sqrt{1-\cos^2 x} + 1-\cos x}{1+\cos x - 1+\cos x} = \\ &= \frac{2(1-\sqrt{\sin^2 x})}{2\cos x} = \frac{1-|\sin x|}{\cos x}. \blacksquare \end{aligned}$$

Пример 2.7. Докажите тождество

$$\sqrt{1+\cos 4x} + \sqrt{1-\cos 4x} = 2\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right),$$

$$\pi n \leq x \leq \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Решение. Воспользуемся формулами (2.17) и (2.18) для преобразования выражений под знаками радикалов:

$$\begin{aligned} A(x) &\equiv \sqrt{1+\cos 4x} + \sqrt{1-\cos 4x} = \\ &= \sqrt{2\cos^2 2x} + \sqrt{2\sin^2 2x} = \sqrt{2}(|\cos 2x| + |\sin 2x|). \end{aligned}$$

При $\pi n \leq x \leq \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$:

$$|\cos 2x| = \cos 2x, \quad |\sin 2x| = \sin 2x.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} A(x) &= \sqrt{2}(\cos 2x + \sin 2x) = \sqrt{2} \left(\sin \left(\frac{\pi}{2} + 2x \right) + \sin 2x \right) = \\ &= 2\sqrt{2} \sin \left(2x + \frac{\pi}{4} \right) \cos \frac{\pi}{4} = 2 \sin \left(2x + \frac{\pi}{4} \right). \blacksquare \end{aligned}$$

Пример 2.8. Докажите тождество

$$\cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cos 4x = 4 \cos \frac{x}{2} \cos x \cos \frac{5}{2} x.$$

Решение. Аналогично примеру (2.2) получаем

$$\begin{aligned} A(x) &\equiv (\cos x + \cos 4x) + (\cos 2x + \cos 3x) = \\ &= 2 \cos \frac{5}{2} x \cos \frac{3}{2} x + 2 \cos \frac{5}{2} x \cos \frac{x}{2} = \\ &= 2 \cos \frac{5}{2} x \left(\cos \frac{3}{2} x + \cos \frac{x}{2} \right) = 4 \cos \frac{x}{2} \cos x \cos \frac{5}{2} x. \blacksquare \end{aligned}$$

Пример 2.9. Докажите тождества:

$$\text{а) } 4(\cos^6 x + \sin^6 x) - 3\cos^2 2x = 1;$$

$$\text{б) } \frac{\sin^6 x + \cos^6 x - 1}{\sin^4 x + \cos^4 x - 1} = \frac{3}{2}, \quad x \neq \frac{\pi}{2}n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Решение. Воспользуемся результатами примера 2.1:

$$\text{а) } 4 \left(1 - \frac{3}{4} \sin^2 2x \right) - 3\cos^2 2x = 4 - 3(\sin^2 2x + \cos^2 2x) = 1;$$

$$\text{б) } \frac{\sin^6 x + \cos^6 x - 1}{\sin^4 x + \cos^4 x - 1} = \frac{1 - \frac{3}{4} \sin^2 2x - 1}{1 - \frac{1}{2} \sin^2 2x - 1} = \frac{3}{2}.$$

Пример 2.10. Докажите, что для всех $x \in \mathbb{R}$, $x \neq \frac{\pi}{2}m$, $m \in \mathbb{Z}$, справедливо неравенство

$$\cos^{2n} x + \sin^{2k} x < 1, \quad n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N}, \quad n \geq 2, k \geq 2.$$

Решение. Если $x = \frac{\pi}{2}m$, $m \in \mathbb{Z}$, то $\cos^{2m} x + \sin^{2k} x = 1$.

Для $x \neq \frac{\pi}{2}m$, $m \in \mathbb{Z}$: $|\cos x| < 1$ и $|\sin x| < 1$. Поэтому

$$0 < \cos^{2n} x < \cos^2 x \quad \text{и} \quad 0 < \sin^{2k} x < \sin^2 x.$$

Складывая эти неравенства, получаем

$$0 < \cos^{2n} x + \sin^{2k} x < \cos^2 x + \sin^2 x < 1. \quad \blacksquare$$

(!) Пример 2.11. Докажите тождества:

$$\text{а) } \sin^4 x + \cos^4 x = \frac{3 + \cos 4x}{4} \quad (2.40)$$

$$\text{б) } \sin^6 x + \cos^6 x = \frac{5 + 3 \cos 4x}{8} \quad (2.41)$$

$$\text{в) } \cos^4 x - \sin^4 x = \cos 2x \quad (2.42)$$

$$\begin{aligned} \text{г) } \cos^6 x - \sin^6 x &= \frac{1}{4} \cos 2x (3 + \cos^2 x) = \\ &= \frac{1}{8} \cos 2x (7 + \cos 4x) \end{aligned} \quad (2.43)$$

Решение. а), б) Заменив в тождествах (2.37) и (2.38) (пример 2.1) $\sin^2 2x$ на $\frac{1 - \cos 4x}{2}$, получим тождества (2.40) и (2.41);

$$\text{в) } \cos^4 x - \sin^4 x = (\cos^2 x - \sin^2 x)(\cos^2 x + \sin^2 x) = \cos 2x;$$

$$\begin{aligned}
r) \cos^6 x - \sin^6 x &= (\cos^2 x)^3 - (\sin^2 x)^3 = \\
&= (\cos^2 x - \sin^2 x) \left[(\cos^2 x)^2 + \cos^2 x \sin^2 x + (\sin^2 x)^2 \right] = \\
&= \cos 2x \left[\left((\cos^2 x)^2 + 2 \cos^2 x \sin^2 x + (\sin^2 x)^2 \right) - \cos^2 x \sin^2 x \right] = \\
&= \cos 2x \left(1 - \frac{1}{4} \sin^2 2x \right) = \frac{1}{4} \cos 2x (4 - (1 - \cos^2 2x)) = \\
&= \frac{1}{4} \cos 2x (3 + \cos^2 2x) = \frac{1}{4} \cos 2x \left(3 + \frac{1 + \cos 4x}{2} \right) = \\
&= \frac{1}{8} \cos 2x (7 + \cos 4x). \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

2.3. Вычисление тригонометрических выражений

(!) Пример 2.12. Вычислите: а) $\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x$;

б) $\operatorname{tg}^3 x + \operatorname{ctg}^3 x$;

в) $\operatorname{tg}^4 x + \operatorname{ctg}^4 x$,

если $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = a$, $|a| \geq 2$.

Решение. а) Возведя в квадрат равенство $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = a$, получим

$$\operatorname{tg}^2 x + 2 + \operatorname{ctg}^2 x = a^2 \Rightarrow \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x = a^2 - 2.$$

Аналогично:

б) $(\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x)^3 = a^3 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \operatorname{tg}^3 x + 3\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x (\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x) + \operatorname{ctg}^3 x = a^3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \operatorname{tg}^3 x + \operatorname{ctg}^3 x = a^3 - 3a.$$

в) $(\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x)^2 = (a^2 - 2)^2 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \operatorname{tg}^4 x + 2 + \operatorname{ctg}^4 x = a^4 - 4a^2 + 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \operatorname{tg}^4 x + \operatorname{ctg}^4 x = a^4 - 4a^2 + 2.$$

Ответ: а) $a^2 - 2$; б) $a^3 - 3a$; в) $a^4 - 4a^2 + 2$.

(!) Пример 2.13. Докажите, что для всех действительных x выполняется неравенство

$$\sqrt[3]{1 + \cos x} + \sqrt[3]{1 - \cos x} \geq \sqrt[3]{2}.$$

Решение. $\sqrt[3]{1 + \cos x} + \sqrt[3]{1 - \cos x} =$

$$\begin{aligned}
&= \sqrt[3]{2\cos^2 \frac{x}{2}} + \sqrt[3]{2\sin^2 \frac{x}{2}} = \sqrt[3]{2} \left(\cos^{\frac{2}{3}} \frac{x}{2} + \sin^{\frac{2}{3}} \frac{x}{2} \right) \geq \\
&\geq \sqrt[3]{2} \left(\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2} \right) = \sqrt[3]{2}.
\end{aligned}$$

Здесь использовано следующее свойство чисел $t \in [0,1]$: $t^m \leq t \leq \sqrt[n]{t}$, при $m \geq 2$, $n \geq 2$. Причем $t^m = t = \sqrt[n]{t}$ только при $t = 0$ и $t = 1$. В соответствии с этим свойством

$$\cos^2 \frac{x}{2} \leq \sqrt[3]{\cos^2 \frac{x}{2}} \quad \text{и} \quad \sin^2 \frac{x}{2} \leq \sqrt[3]{\sin^2 \frac{x}{2}},$$

откуда

$$\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2} \leq \sqrt[3]{\cos^2 \frac{x}{2}} + \sqrt[3]{\sin^2 \frac{x}{2}}. \quad \blacksquare$$

Пример 2.14. Вычислите

$$A = \frac{\sin 130^\circ \cdot \sin 70^\circ - \sin 140^\circ \sin 160^\circ}{\sin 175^\circ \cdot \sin 115^\circ - \sin 85^\circ \cos 115^\circ}.$$

Решение. Воспользуемся формулами приведения для преобразования выражений

$$\text{а) в числителе: } \sin 130^\circ = \sin(180^\circ - 50^\circ) = \sin 50^\circ;$$

$$\sin 70^\circ = \sin(90^\circ - 20^\circ) = \cos 20^\circ;$$

$$\sin 140^\circ = \sin(90^\circ + 50^\circ) = \cos 50^\circ;$$

$$\sin 160^\circ = \sin(180^\circ - 20^\circ) = \sin 20^\circ;$$

$$\text{б) в знаменателе: } \sin 175^\circ = \cos 85^\circ; \quad \sin 115^\circ = \cos 25^\circ;$$

$$\cos 115^\circ = -\sin 25^\circ.$$

В результате имеем
$$A = \frac{\sin 50^\circ \cos 20^\circ - \cos 50^\circ \sin 20^\circ}{\cos 85^\circ \cos 25^\circ + \sin 85^\circ \sin 25^\circ} =$$
$$= \frac{\sin(50^\circ - 20^\circ)}{\cos(85^\circ - 25^\circ)} = \frac{\sin 30^\circ}{\cos 60^\circ} = 1.$$

Ответ: 1.

Пример 2.15. Вычислите
$$A = \frac{\sin 15^\circ - \sqrt{3} \cos 15^\circ}{\cos 15^\circ + \operatorname{ctg} 30^\circ \sin 15^\circ}.$$

Решение. $\sqrt{3} = \operatorname{tg} 60^\circ$; $\operatorname{ctg} 30^\circ = \operatorname{tg} 60^\circ \Rightarrow$

$$\Rightarrow A = \frac{\sin 15^\circ - \operatorname{tg} 60^\circ \cdot \cos 15^\circ}{\cos 15^\circ + \operatorname{tg} 60^\circ \sin 15^\circ}.$$

Разделим числитель и знаменатель на $\cos 15^\circ$:

$$A = \frac{\operatorname{tg} 15^\circ - \operatorname{tg} 60^\circ}{1 + \operatorname{tg} 60^\circ \operatorname{tg} 15^\circ} = \operatorname{tg}(15^\circ - 60^\circ) = -\operatorname{tg} 45^\circ = -1.$$

Ответ: -1.

Пример 2.16. Вычислите

$$A = \operatorname{tg} 6^\circ \operatorname{tg} 12^\circ \operatorname{tg} 18^\circ \dots \operatorname{tg} 78^\circ \operatorname{tg} 84^\circ.$$

Решение. Число A равно произведению 14 чисел $(84:6=14)$ вида $\operatorname{tg}(n \cdot 6^\circ)$, $n=1, 2, \dots, 14$. Но $\operatorname{tg} 84^\circ = \operatorname{ctg} 6^\circ$; $\operatorname{tg} 78^\circ = \operatorname{ctg} 12^\circ, \dots, \operatorname{tg} 48^\circ = \operatorname{ctg} 42^\circ$, поэтому

$$A = (\operatorname{tg} 6^\circ \cdot \operatorname{ctg} 6^\circ) \cdot (\operatorname{tg} 12^\circ \cdot \operatorname{ctg} 12^\circ) \dots (\operatorname{tg} 42^\circ \cdot \operatorname{ctg} 42^\circ) = 1.$$

Ответ: 1.

Пример 2.17. Вычислите: а) $\sin 15^\circ$; б) $\cos 15^\circ$.

Решение. Способ 1:

$$\begin{aligned}\sin 15^0 &= \sin(45^0 - 30^0) = \sin 45^0 \cos 30^0 - \cos 45^0 \sin 30^0 = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}.\end{aligned}$$

Аналогично $\cos 15^0 = \cos(45^0 - 30^0) = \dots = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}.$

Способ 2. $\sin 15^0 = \sqrt{\frac{1 - \cos 30^0}{2}} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2};$

$$\cos 15^0 = \sqrt{\frac{1 + \cos 30^0}{2}} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2}.$$

Ответ: $\sin 15^0 = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2};$

$$\cos 15^0 = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2}.$$

Замечание.

$$\frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2} = \frac{2\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{4} = \frac{\sqrt{8 - 4\sqrt{3}}}{4} = \frac{\sqrt{(\sqrt{6} - \sqrt{2})^2}}{4} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}.$$

Аналогично показывается, что $\frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}.$

(!) Пример 2.18. Вычислите: а) $\sin 18^0$; б) $\cos 36^0$.

Решение. Имеем

$$\sin 54^0 = \cos 36^0 \Leftrightarrow \sin(3 \cdot 18^0) = \cos(2 \cdot 18^0).$$

Воспользовавшись формулами синуса тройного аргумента и косинуса двойного аргумента, получим равенство

$$3\sin 18^0 - 4\sin^3 18^0 = 1 - 2\sin^2 18^0.$$

Обозначив $\sin 18^0 = t$, будем иметь

$$4t^3 - 2t^2 - 3t + 1 = 0 \Leftrightarrow (4t^3 - 4t^2) + (2t^2 - 2t) - (t - 1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (t - 1)(4t^2 + 2t - 1) = 0 \Rightarrow t_1 = 1, \quad t_{2,3} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4}.$$

Поскольку $0 < \sin 18^0 < \frac{1}{2}$, то подходит $t = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}$.

Тогда

$$\sin 18^0 = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}$$

$$\cos 36^0 = 1 - 2\left(\frac{\sqrt{5} - 1}{4}\right)^2 = \frac{\sqrt{5} + 1}{4}$$

$$\text{Ответ: } \sin 18^0 = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}; \quad \cos 36^0 = \frac{\sqrt{5} + 1}{4}.$$

Пример 2.19. Вычислите $A = \sin \frac{3}{10}\pi - \cos \frac{2}{5}\pi$.

Решение. Решение данного примера выполним с использованием приема домножения исходного выражения или полученного из него в результате тождественных преобразований на значение некоторой тригонометрической функции (в данном случае на $\cos \frac{\pi}{10}$). Решение выполним

тремя способами, отличающимися используемыми тригонометрическими формулами при выполнении тождественных преобразований.

$$\begin{aligned}
\text{Способ 1: } A &= \sin \frac{3}{10} \pi - \sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{5} \pi \right) = \\
&= \sin \frac{3}{10} \pi - \sin \frac{\pi}{10} = \frac{2 \cos \frac{\pi}{10}}{2 \cos \frac{\pi}{10}} \left(\sin \frac{3}{10} \pi - \sin \frac{\pi}{10} \right) = \\
&= \frac{1}{2 \cos \frac{\pi}{10}} \left(2 \cos \frac{\pi}{10} \sin \frac{\pi}{10} - 2 \cos \frac{\pi}{10} \sin \frac{\pi}{10} \right) = \\
&= \frac{1}{2 \cos \frac{\pi}{10}} \left(\sin \frac{2}{5} \pi + \sin \frac{\pi}{5} - \sin \frac{\pi}{5} \right) = \\
&= \frac{1}{2} \frac{\sin \frac{2}{5} \pi}{\cos \frac{\pi}{10}} = \frac{1}{2} \frac{\cos \frac{\pi}{10}}{\cos \frac{\pi}{10}} = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Способ 2. Воспользовавшись формулой разности синусов, получим

$$\begin{aligned}
A &= \sin \frac{3}{10} \pi - \sin \frac{\pi}{10} = 2 \sin \frac{\pi}{10} \cos \frac{\pi}{5} = \\
&= \frac{2 \left(2 \sin \frac{\pi}{10} \cos \frac{\pi}{10} \right)}{2 \cos \frac{\pi}{10}} \cos \frac{\pi}{5} = \frac{1}{2} \frac{\sin \frac{2}{5} \pi}{\cos \frac{\pi}{10}} = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Способ 3. В соответствии с формулой (2.15)

$$\sin \frac{3}{10} \pi = \sin \left(3 \cdot \frac{\pi}{10} \right) = 3 \sin \frac{\pi}{10} - 4 \sin^3 \frac{\pi}{10}.$$

С учетом данного результата

$$\begin{aligned} A &= 3 \sin \frac{\pi}{10} - 4 \sin^3 \frac{\pi}{10} = 2 \sin \frac{\pi}{10} \left(1 - 2 \sin^2 \frac{\pi}{10} \right) = \\ &= 2 \sin \frac{\pi}{10} \cos \frac{\pi}{5} = \frac{2 \left(2 \sin \frac{\pi}{10} \cos \frac{\pi}{10} \right)}{2 \cos \frac{\pi}{10}} \cos \frac{\pi}{5} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Ответ: $A = \frac{1}{2}$.

Отметим, что использование результатов решения примера 2.18 позволяет вычислить искомое значение A в примере 2.19 следующим образом

$$A = \sin \frac{3}{10} \pi - \sin \frac{\pi}{10} = \cos \frac{\pi}{5} - \sin \frac{\pi}{10} = \frac{\sqrt{5}+1}{4} - \frac{\sqrt{5}-1}{4} = \frac{1}{2}.$$

(!) Пример 2.20. Вычислите $A = \cos^6 \frac{11}{12} \pi - \sin^6 \frac{\pi}{12}$.

Решение. Воспользовавшись тождеством (2.43):

$$\cos^6 x - \sin^6 x = \frac{1}{4} \cos 2x (3 + \cos^2 2x),$$

получим $A = \cos^6 \frac{11}{12} \pi - \sin^6 \frac{\pi}{12} = \cos^6 \frac{\pi}{12} - \sin^6 \frac{\pi}{12} =$

$$= \frac{1}{4} \cos \frac{\pi}{6} \left(3 + \cos^2 \frac{\pi}{6} \right) = \frac{1}{4} \frac{\sqrt{3}}{2} \left(3 + \frac{3}{4} \right) = \frac{15\sqrt{3}}{32}.$$

Ответ: $\frac{15\sqrt{3}}{32}$.

(!) Пример 2.21. Вычислите

$$A = \cos^2 10^\circ - \sin^2 70^\circ + \cos^2 30^\circ - \sin^2 50^\circ.$$

Решение. Основной способ решения тригонометрических задач (вычислительных, как в данном примере, а также тригонометрических уравнений и неравенств), в которые входят основные тригонометрические функции синус и косинус в четных степенях, заключается в применении формул понижения степени. Решение данного примера после применения формул понижения степени выполнено двумя способами. Первый, хотя и более длинный, еще раз демонстрирует прием домножения выражения, использованный в примерах 2.4 и 2.5.

Способ 1.

$$\begin{aligned} A &= \frac{1 + \cos 20^\circ}{2} - \frac{1 - \cos 140^\circ}{2} + \frac{1 + \cos 60^\circ}{2} - \frac{1 - \cos 100^\circ}{2} = \\ &= \frac{1}{2} \left[(\cos 20^\circ + \cos 140^\circ) + (\cos 60^\circ + \cos 100^\circ) \right] = \\ &= \cos 80^\circ \cdot \cos 60^\circ + \cos 80^\circ \cos 20^\circ = \\ &= \cos 80^\circ (\cos 60^\circ + \cos 20^\circ) = 2 \cos 80^\circ \cos 40^\circ \cos 20^\circ = \\ &= \frac{2 \sin 20^\circ \cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ}{\sin 20^\circ} = \frac{1 \sin 160^\circ}{4 \sin 20^\circ} = \\ &= \frac{1 \sin 20^\circ}{4 \sin 20^\circ} = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

В процессе вычислений последовательно были применены формулы понижения степени (2.17), (2.18), формула (2.29) преобразования суммы косинусов в произведение. На последнем шаге для вычисления $2 \cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ$ использован прием домножения на $\sin 20^\circ$

Способ 2:

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{1 + \cos 20^\circ}{2} - \frac{1 - \cos 140^\circ}{2} + \frac{1 + \cos 60^\circ}{2} - \frac{1 - \cos 100^\circ}{2} = \\
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + \cos 20^\circ + \cos 140^\circ + \cos 100^\circ \right) = \\
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + 2 \cos 80^\circ \cos 60^\circ + \cos 100^\circ \right) = \\
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + \cos 80^\circ - \cos 80^\circ \right) = \frac{1}{4}.
 \end{aligned}$$

При решении примера вторым способом использовано явно равенство $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$, формула (2.29) и формулы приведения ($\cos 100^\circ = -\cos(180^\circ - 100^\circ) = -\cos 80^\circ$).

Ответ: $\frac{1}{4}$.

Пример 2.22. Вычислите $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$, если $\sin x + \cos x = \frac{1}{5}$.

Решение. Выразив $\sin x$ и $\cos x$ через $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$ по формулам (2.32) и (2.33), получим

$$\frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} + \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{1}{5}, \quad x \neq \pi(2n+1), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Заменим $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$. Тогда $\frac{2t}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2} = \frac{1}{5} \Leftrightarrow 3t^2 - 5t - 2 = 0$.

Его корни $t_1 = 2$, $t_2 = -\frac{1}{3}$.

В первой четверти $1 \leq \sin x + \cos x \leq \sqrt{2}$ (почему?), в третьей – $(\sin x + \cos x) < 0$. Поэтому аргумент x принадлежит либо второй, либо четвертой четверти; аргумент $\frac{x}{2}$ – первой или второй. Если $\frac{\pi}{2} < x < \pi$, то $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = 2$; если $\frac{3}{2}\pi < x < 2\pi$, то $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = -\frac{1}{3}$.

Ответ: $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = -\frac{1}{3}$, если $\frac{3}{2}\pi < x < 2\pi$;

$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = 2$, если $\frac{\pi}{2} < x < \pi$.

Пример 2.23. Вычислите $\sin x$, если и $\operatorname{tg} x = 3$
 $\pi < x < \frac{3}{2}\pi$.

Решение. Если $\pi < x < \frac{3}{2}\pi$, то $\sin x < 0$.

$$\begin{aligned}\text{Тогда } \sin x &= -\sqrt{\sin^2 x} = -\sqrt{\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x + \sin^2 x}} = \\ &= -\sqrt{\frac{\operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}} = \frac{-\operatorname{tg} x}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x}}\end{aligned}$$

и

$$\sin x = \frac{-3}{\sqrt{10}}.$$

Ответ: $\frac{-3}{\sqrt{10}}$.

Пример 2.24. Вычислите $\cos 2x$, если $\sin \frac{x}{2} = \frac{3}{4}$.

Решение. Поскольку $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$, а $\cos x = 1 - 2\sin^2 \frac{x}{2}$, то $\cos 2x = 2\left(1 - 2\sin^2 \frac{x}{2}\right)^2 - 1$. Поэтому

$$\cos 2x = 2\left(1 - 2 \cdot \frac{9}{16}\right)^2 - 1 = -\frac{31}{32}.$$

Ответ: $-\frac{31}{32}$.

Пример 2.25. Вычислите

$$A = \frac{\sin 20^\circ \cos 40^\circ \cos 50^\circ \sin 70^\circ}{\cos 20^\circ \sin 40^\circ \sin 50^\circ \cos 70^\circ}.$$

Решение. Заметив, что $\frac{\sin 20^\circ}{\cos 20^\circ} = \operatorname{tg} 20^\circ$, $\frac{\cos 40^\circ}{\sin 40^\circ} = \operatorname{ctg} 40^\circ$

и т.д., получим

$$\begin{aligned} A &= \operatorname{tg} 20^\circ \operatorname{ctg} 40^\circ \operatorname{ctg} 50^\circ \operatorname{tg} 70^\circ = \\ &= (\operatorname{tg} 20^\circ \operatorname{ctg} 20^\circ) \cdot (\operatorname{tg} 50^\circ \operatorname{ctg} 50^\circ) = 1. \end{aligned}$$

Ответ: 1.

Пример 2.26. Вычислите

$$A = \frac{\sin 100^\circ + 2 \sin 200^\circ}{\sin 10^\circ}.$$

Решение. Так как $\sin 200^\circ = \sin(180^\circ + 20^\circ) = -\sin 20^\circ$, то

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{(\sin 100^0 - \sin 20^0) - \sin 20^0}{\sin 10^0} = \frac{2 \sin 40^0 \cos 60^0 - \sin 20^0}{\sin 10^0} = \\
 &= \frac{\sin 40^0 - \sin 20^0}{\sin 10^0} = \frac{2 \sin 10^0 \cos 30^0}{\sin 10^0} = \sqrt{3}.
 \end{aligned}$$

Ответ: $\sqrt{3}$.

Пример 2.27. Вычислите

$$A = \frac{\sin 1,9\pi \cdot \cos 2,7\pi \cdot \operatorname{tg} 3,3\pi}{\cos 0,4\pi \sin 1,7\pi}.$$

Решение. Применив формулы приведения, получим

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{\sin(2\pi - 0,1\pi) \cos(0,7\pi) \operatorname{tg}(0,3\pi)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{10}\right) \sin(2\pi - 0,3\pi)} = \\
 &= \frac{-\sin \frac{\pi}{10} \left(-\cos \frac{3}{10} \pi\right) \operatorname{tg} \frac{3}{10} \pi}{\sin \frac{\pi}{10} \left(-\sin \frac{3}{10} \pi\right)} = -\operatorname{ctg} \frac{3}{10} \pi \operatorname{tg} \frac{3}{10} \pi = -1.
 \end{aligned}$$

Ответ: -1.

Пример 2.28. Вычислите:

$$\sqrt{(\cos 40^0 - \sin 40^0)^2} + \sqrt{(\cos 80^0 - \sin 80^0)^2}.$$

$$\text{Решение. } A = |\cos 40^0 - \sin 40^0| + |\cos 80^0 - \sin 80^0|.$$

Так как $\cos 40^0 > \sin 40^0$ и $\cos 80^0 < \sin 80^0$, то

$$\begin{aligned}
 A &= \cos 40^0 - \sin 40^0 + \sin 80^0 - \cos 80^0 = \\
 &= (\sin 50^0 - \sin 40^0) + (\sin 80^0 - \sin 10^0) =
 \end{aligned}$$

$$= 2 \sin 5^\circ \cos 45^\circ + 2 \sin 5^\circ \cos 45^\circ = 2\sqrt{2} \sin 5^\circ.$$

Ответ: $2\sqrt{2} \sin 5^\circ$.

Пример 2.29. Вычислите

$$A = \left| \operatorname{tg} 75^\circ - \sqrt{2} \sin 75^\circ \right| + \left| \sqrt{2} \cos 15^\circ - \operatorname{ctg} 15^\circ \right|.$$

Решение. Поскольку $\operatorname{tg} 75^\circ > \operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3}$, а $\sqrt{2} \sin 75^\circ < \sqrt{2}$, то $\operatorname{tg} 75^\circ > \sqrt{2} \sin 75^\circ$ и

$$\left| \operatorname{tg} 75^\circ - \sqrt{2} \sin 75^\circ \right| = \operatorname{tg} 75^\circ - \sqrt{2} \sin 75^\circ.$$

Аналогично

$$\left| \sqrt{2} \cos 15^\circ - \operatorname{ctg} 15^\circ \right| = \left| \sqrt{2} \cos 15^\circ - \operatorname{tg} 75^\circ \right| = \operatorname{tg} 75^\circ - \sqrt{2} \cos 15^\circ.$$

В результате имеем $A = 2(\operatorname{tg} 75^\circ - \sqrt{2} \cos 15^\circ)$. Но

$$\operatorname{tg} 75^\circ = \frac{\operatorname{tg} 45^\circ + \operatorname{tg} 30^\circ}{1 - \operatorname{tg} 45^\circ \operatorname{tg} 30^\circ} = \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} - 1} = \frac{(\sqrt{3} + 1)^2}{2},$$

$$\cos 15^\circ = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{3} + 1}{2\sqrt{2}} \quad (\text{см. пример 2.16})$$

и потому окончательно

$$A = 2 \left(\frac{(\sqrt{3} + 1)^2}{2} - \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{3} + 1}{2\sqrt{2}} \right) = 3 + \sqrt{3}.$$

Ответ: $3 + \sqrt{3}$.

Пример 2.30. Сравните числа а) $\operatorname{ctg} \left(-\frac{11}{4} \pi \right)$ и $\operatorname{tg} \frac{21}{4} \pi$;

$$\text{б) } \operatorname{ctg}(-2) \text{ и } \operatorname{tg} 2;$$

$$\text{в) } \sec \frac{28}{3} \pi \text{ и } \operatorname{tg} \frac{167}{6} \pi.$$

Решение.

$$\text{а) } \operatorname{ctg}\left(-\frac{11}{4}\pi\right) = -\operatorname{ctg}\left(2\pi + \frac{3}{4}\pi\right) = -\operatorname{ctg}\frac{3}{4}\pi = -(-1) = 1.$$

$$\operatorname{tg}\frac{21}{4}\pi = \operatorname{tg}\left(5\pi + \frac{\pi}{4}\right) = \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 1,$$

$$\text{откуда следует, что } \operatorname{ctg}\left(-\frac{11}{4}\pi\right) = \operatorname{tg}\frac{21}{4}\pi.$$

$$\text{б) } \operatorname{ctg}(-2) = -\operatorname{ctg} 2; \text{ так как } \frac{\pi}{2} < 2 < \pi, \text{ то } \operatorname{ctg} 2 < 0 \text{ (см. п. 1.1.2, рис. 1.5), а } \operatorname{ctg}(-2) > 0.$$

Аналогично получаем, что $\operatorname{tg} 2 < 0$ (п.1.1.2, рис.1.4). Откуда $\operatorname{tg} 2 < \operatorname{ctg}(-2)$;

$$\text{в) } \sec \frac{28}{3} \pi = \sec\left(8\pi + \frac{4}{3}\pi\right) = \sec\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) =$$

$$= -\sec \frac{\pi}{3} = \frac{-1}{\cos \pi/3} = -2;$$

$$\operatorname{tg} \frac{167}{6} \pi = \operatorname{tg}\left(27\pi + \frac{5}{6}\pi\right) = \operatorname{tg} \frac{5}{6} \pi = -\operatorname{tg} \frac{\pi}{6} = -\frac{1}{\sqrt{3}},$$

$$\text{откуда } \operatorname{tg} \frac{167}{6} \pi > \sec \frac{28}{3} \pi.$$

$$\text{Ответ: а) } \operatorname{ctg}\left(-\frac{11}{4}\pi\right) = \operatorname{tg} \frac{21}{4}\pi; \text{ б) } \operatorname{tg} 2 < \operatorname{ctg}(-2);$$

$$\text{в) } \operatorname{tg} \frac{167}{6} \pi > \sec \frac{28}{3} \pi.$$

2.4. Задачи для самостоятельного решения

Раздел 2.2. Докажите тождества

$$1. \text{ а) } \sin x + \cos x = \sqrt{2} \cos \left(x - \frac{\pi}{4} \right); \quad (2.44)$$

$$\text{б) } \sin x - \cos x = \sqrt{2} \sin \left(x - \frac{\pi}{4} \right). \quad (2.45)$$

$$2. \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = \frac{2}{\sin 2x}, \quad x \neq \frac{\pi n}{2}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

$$3. \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x + \operatorname{tg} 3x + \operatorname{ctg} 3x = \frac{8 \cos^2 2x}{\sin 6x}, \quad x \neq \frac{\pi n}{6}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

$$4. (2 \cos^2 2x + \cos 2x - 1) \sec x = 2 \cos 3x, \quad x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

$$5. \sin x - \cos x + \cos 5x - \sin 5x = -2\sqrt{2} \sin 2x \cdot \cos \left(3x - \frac{\pi}{4} \right).$$

$$6. \frac{\cos 2x - 4 \cos 3x + \cos 4x}{\sin 2x - 4 \sin 3x + \sin 4x} = \operatorname{ctg} 3x, \quad x \neq \frac{\pi n}{3}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

$$7. \frac{\cos x + \sin x}{\cos x - \sin x} = \operatorname{tg} \left(x + \frac{\pi}{4} \right), \quad x \neq \frac{\pi}{4} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

$$8. \cos^2 \left(2x + \frac{\pi}{8} \right) - \sin^2 \left(\frac{\pi}{8} - 2x \right) = \frac{\cos 4x}{\sqrt{2}}.$$

$$9. \sin^2 \left(x - \frac{\pi}{6} \right) + \sin^2 \left(x - \frac{\pi}{3} \right) + \cos^2 x = \frac{3}{2} + \cos \left(2x + \frac{\pi}{3} \right).$$

$$(!)10. \text{ a) } \cos^8 x + \sin^8 x = \frac{1}{8}(\sin^4 2x - 8\sin^2 2x + 8); \quad (2.46)$$

$$\text{б) } \cos^8 x + \sin^8 x = \frac{1}{8}(\cos^4 2x + 6\cos^2 2x + 1); \quad (2.47)$$

$$\text{в) } \cos^8 x + \sin^8 x = \frac{1}{32}(\cos^2 4x + 14\cos 4x + 17); \quad (2.48)$$

$$(!)11. \text{ a) } \cos^8 x - \sin^8 x = \cos 2x \frac{1 + \cos^2 2x}{2}; \quad (2.49)$$

$$\text{б) } \cos^8 x - \sin^8 x = \cos 2x \frac{3 + \cos 4x}{4}; \quad (2.50)$$

$$\text{в) } \cos^8 x - \sin^8 x = \cos 2x (\cos^4 x + \sin^4 x). \quad (2.51)$$

$$(!)12. \cos x + \cos 2x + \cos 3x + \dots + \cos nx = \frac{\sin \frac{nx}{2} \cos \frac{(n+1)x}{2}}{\sin \frac{x}{2}},$$

$$x \neq 2\pi m, m \in \mathbb{Z}. \quad (2.52)$$

$$13. \frac{\sqrt{1 + \sin x} - \sqrt{1 - \sin x}}{\sqrt{1 + \sin x} + \sqrt{1 - \sin x}} = \frac{1 - |\cos x|}{\sin x}, \quad x \neq \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

$$14. \frac{\sin 7x + \sin 3x - \sin x - \sin 9x}{\cos x + \cos 3x + \cos 7x + \cos 9x} = \operatorname{tg} x \operatorname{tg} 3x \operatorname{tg} 5x,$$

$$x \neq \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}, \quad x \neq \frac{\pi}{10} + \frac{\pi n}{5}; n \in \mathbb{Z}.$$

$$15. \frac{(1 - \cos 4x)(\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x)}{4 \cos 2x} = \operatorname{tg} 2x,$$

$$x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, \quad x \neq \frac{\pi}{2} n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

$$16. \sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma = 4 \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2}, \text{ если } \alpha + \beta + \gamma = \pi.$$

$$17. \sin 3x \cos^3 x + \cos 3x \sin^3 x = \frac{3}{4} \sin 4x.$$

$$18. \sin 3x \cos^3 x - \cos 3x \sin^3 x = \frac{1}{4} (\sin 6x + 3 \sin 2x).$$

$$19. \cos 3x \cos^3 x + \sin 3x \sin^3 x = \cos^3 2x.$$

$$20. \cos 3x \cos^3 x - \sin 3x \sin^3 x = \frac{1}{4} (1 + 3 \cos 4x).$$

$$21. \sin 3x \cos^3 x - \cos 3x \sin^3 x = \frac{\sin 2x}{2} (3 - 2 \sin^2 2x).$$

$$22. 3(\sin^4 x + \cos^4 x) - 2(\cos^6 x + \sin^6 x) = 1.$$

$$23. \frac{2 \sin 2x - \sin 4x}{2 \sin 2x + \sin 4x} = \operatorname{tg}^2 x.$$

$$24. \frac{2 \cos^2 2x + \operatorname{tg} x - \cos 4x}{2 \operatorname{tg} x \operatorname{ctg} x - \sin 2x \sec^2 x} = \frac{1}{2} \operatorname{tg} \left(x + \frac{\pi}{4} \right),$$

$$x \neq \frac{\pi n}{2}, \quad x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

$$25. \frac{\sqrt{1 + \cos x} - \sqrt{1 - \cos x}}{\sqrt{1 + \cos x} + \sqrt{1 - \cos x}} = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \right) \quad x \neq -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Раздел 2.3. Вычислите

$$26. A = \sin 20^0 \cos 50^0 \sin 80^0.$$

$$27. A = \sin 63^0 \sin 18^0 \sin 27^0.$$

$$28. A = \sin 222^0 + \sin 78^0 + \cos 108^0.$$

$$29. A = \cos 223^0 \cos 557^0 + \cos 133^0 \cos 287^0.$$

$$30. A = \frac{\cos 45^0 \sin 120^0 + \cos 135^0 \sin 150^0}{\cos 285^0 \sin 30^0 + \sin 105^0 \sin 120^0}.$$

$$31. A = \frac{2 \sin 510^0 - \operatorname{tg} 15^0}{-\sqrt{3} \operatorname{ctg} 480^0 + \operatorname{ctg} 75^0}.$$

$$32. A = \frac{\sin 70^0 - 2 \sin 50^0}{\cos 80^0 - 2 \cos 20^0} \operatorname{cosec} 10^0.$$

$$33. A = \operatorname{tg}^3 \alpha + \operatorname{ctg}^3 \alpha, \text{ если } \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha = 4.$$

$$34. A = \operatorname{tg}^{10} \alpha + \operatorname{ctg}^8 \alpha, \text{ если } \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha = -2.$$

$$35. A = \frac{\sin 1,3\pi \operatorname{tg} 2,9\pi \cdot \cos 1,4\pi}{\cos 4,2\pi \operatorname{ctg} 1,6\pi \sin 1,1\pi}.$$

$$36. A = \cos^4 \frac{\pi}{8} - \sin^4 \frac{\pi}{8}.$$

$$37. \text{ а) } A = \cos^6 \frac{\pi}{12} - \sin^6 \frac{11}{12} \pi; \quad \text{ б) } A = \cos^6 \frac{\pi}{12} + \sin^6 \left(\frac{11}{12} \pi \right).$$

$$38. \text{ а) } A = \cos^8 \frac{\pi}{8} - \sin^8 \frac{7}{8} \pi; \quad \text{ б) } A = \cos^8 \frac{\pi}{8} + \sin^8 \frac{7}{8} \pi;$$

$$\text{ в) } A = \cos^8 \frac{\pi}{12} - \sin^8 \frac{\pi}{12}; \quad \text{ г) } A = \cos^8 \frac{\pi}{12} + \sin^8 \frac{\pi}{12}.$$

$$39. A = \sin \frac{9}{10} \pi + \cos \frac{11}{5} \pi - 2 \sin \frac{3\pi}{10}.$$

$$40. A = \cos \frac{\pi}{20} + \cos \frac{\pi}{10} + \cos \frac{3\pi}{20} + \dots + \cos \frac{19\pi}{20}.$$

$$41. A = (\sin^2 10^\circ + \cos^2 20^\circ - \sin^2 40^\circ - \cos^2 50^\circ) \operatorname{cosec} 10^\circ.$$

$$42. \text{Вычислите } \sin \alpha, \cos \alpha, \text{ если } \operatorname{tg} \alpha = 2 \text{ и } \alpha \in \left(\pi; \frac{3}{2} \pi \right).$$

$$43. \text{Вычислите } \operatorname{tg} 3\alpha, \text{ если } \sin \alpha + \cos \alpha = 0.$$

$$44. \text{Вычислите } \sin 2\alpha, \cos 2\alpha, \text{ если } \cos \alpha = -\frac{4}{5} \text{ и } \alpha \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi \right).$$

$$45. \text{Вычислите } \sin 2\alpha, \cos 2\alpha, \text{ если } \sin \alpha = \frac{4}{5} \text{ и } \alpha \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi \right).$$

$$46. \text{Вычислите } \sin \alpha, \text{ если } \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{4}{3}.$$

$$47. \text{Определите знак числа } A = \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) \sin 2\alpha \cos \frac{\alpha}{2}, \text{ если } \sin \alpha < 0, \cos \alpha < 0.$$

$$48. \text{Вычислите } \operatorname{tg} \frac{x}{2}, \text{ если } \sin x + \cos x = \sqrt{2}.$$

$$49. \text{Вычислите } \operatorname{tg} x, \text{ если } \frac{2 \sin x + 5 \cos x}{3 \sin x - 4 \cos x} = 2.$$

$$50. \text{Вычислите } \sin \alpha \text{ и } \cos \alpha, \text{ если}$$

а) $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = 0$; б) $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = 1$; в) $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \sqrt{3}$.

51. Вычислите $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$, если $\sin \alpha = -\frac{1}{2}$ и $\alpha \in \left(\frac{3}{2}\pi; 2\pi\right)$.

52. Вычислите $\operatorname{tg}\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)$ если $\sin \alpha = -\frac{1}{3}$ и $\alpha \in \left(\frac{3}{2}\pi; 2\pi\right)$.

53. Вычислите $\operatorname{tg}\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)$ если $\sin \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ и $\alpha \in \left(\frac{3}{2}\pi; 2\pi\right)$.

54. Вычислите $\cos \alpha$, если $\operatorname{ctg} \alpha = -\frac{12}{5}$ и $\alpha \in \left(\frac{7}{2}\pi; 4\pi\right)$.

(!) 55. Вычислите а) $\sin 2x$; б) $\sin^3 x + \cos^3 x$;

в) $\sin^4 x + \cos^4 x$; г) $\sin^6 x + \cos^6 x$,

если $\sin x + \cos x = a$.

56. Вычислите $\cos \alpha$, если $\operatorname{ctg} \alpha = 5$ и $\sin \alpha < 0$.

57. Упростите а) $A = \left| \cos 154^\circ - \operatorname{tg} 48^\circ \right| - \left| \sin 56^\circ - \operatorname{ctg} 42^\circ \right|$;

б) $A = \left| \cos 140^\circ - \sin 140^\circ \right| + \left| \sin 40^\circ - \cos 40^\circ \right|$.

58. Вычислите а) $A = \left| \cos^2 75^\circ - \cos^2 15^\circ \right| + \frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{tg} 225^\circ$;

б) $A = \left| \operatorname{tg} 105^\circ - \sqrt{2} \sin 75^\circ \right| - \left| \sqrt{2} \cos 15^\circ - \operatorname{ctg} 15^\circ \right|$.

59. Вычислите

$$A = \sin 15^\circ \left(\left| \sin 285^\circ - \cos 330^\circ \right| + \left| \sin 105^\circ - \frac{1}{2} \operatorname{tg} 60^\circ \right| \right).$$

2.5. Ответы

$$26. \frac{\sqrt{3}}{8}. \quad 27. \frac{1}{8}. \quad 28. 0. \quad 29. \frac{1}{2}. \quad 30. 2 - \sqrt{3}. \quad 31. \frac{1}{\sqrt{3}}. \quad 32. 2.$$

$$33. 52. \quad 34. 2. \quad 35. -1. \quad 36. \frac{1}{\sqrt{2}}. \quad 37. \text{ а) } \frac{15\sqrt{3}}{32}; \quad \text{ б) } \frac{13}{16}.$$

$$38. \text{ а) } \frac{3\sqrt{2}}{8}; \quad \text{ б) } \frac{17}{32}; \quad \text{ в) } \frac{7\sqrt{3}}{16}; \quad \text{ г) } \frac{97}{128}. \quad 39. -\frac{1}{2}. \quad 40. 0. \quad 41. \frac{1}{2}.$$

$$42. \sin \alpha = -\frac{2}{\sqrt{5}}; \quad \cos \alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}. \quad 43. \operatorname{tg} 3\alpha = 1.$$

$$44. \sin 2\alpha = -\frac{24}{25}; \quad \cos 2\alpha = \frac{7}{25}.$$

$$45. \sin 2\alpha = -\frac{24}{25}; \quad \cos 2\alpha = -\frac{7}{25}. \quad 46. \sin \alpha = \frac{24}{25}. \quad 47. A > 0.$$

$$48. \operatorname{tg} \frac{x}{2} = \sqrt{2} - 1. \quad 49. \frac{13}{4}.$$

$$50. \text{ а) } \sin \alpha = 0; \quad \cos \alpha = 1; \quad \text{ б) } \sin \alpha = 1; \quad \cos \alpha = 0;$$

$$\text{ в) } \sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}; \quad \cos \alpha = -\frac{1}{2}.$$

$$51. \sqrt{3} - 2. \quad 52. 2\sqrt{2}. \quad 53. 2 + \sqrt{3}. \quad 54. \frac{12}{13}.$$

$$55. \text{ а) } \sin 2x = a^2 - 1; \quad \text{ б) } \sin^3 x + \cos^3 x = \frac{a}{2}(3 - a^2);$$

$$\text{ в) } \sin^4 x + \cos^4 x = \frac{1}{2}(1 + 2a^2 - a^4);$$

$$r) \sin^6 x + \cos^6 x = \frac{1}{4}(1 + 6a^2 - 3a^4).$$

$$56. -\frac{5}{\sqrt{26}}. \quad 57. \text{ а) } \sqrt{3} \cos 40^\circ; \text{ б) } 2 \cos 40^\circ.$$

$$58. \text{ а) } \sqrt{3}; \text{ б) } \sqrt{3} + 1. \quad 59. \frac{1}{2}.$$

3. ОБРАТНЫЕ ФУНКЦИИ.

ОБРАТНЫЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

3.1. Обратные функции

Задачи, в которых участвуют обратные функции, встречаются в самых различных разделах математики и в ее приложениях. Примерами задач с обратными функциями из школьного курса математики могут служить некоторые классы уравнений и неравенств (примеры 3.5, 3.7, 3.8 данного раздела).

Важную область математики составляют обратные задачи в теории интегральных и интегро-дифференциальных уравнений. Разработка теории и, в частности, методов решения некорректных обратных задач во второй половине 20-го столетия позволила решать прикладные задачи в самых различных областях, например, в геофизике – обнаружение полезных ископаемых; в микроэлектронике, радиолокации – восстановление «размытых» изображений и т.д.

Напомним определение числовой функции и некоторые связанные с ней понятия.

Определение 3.1. Пусть X – некоторое числовое множество ($X \subset \mathbb{R}$) и пусть указано правило f , в соответствии с которым каждому числу $x \in X$ отвечает единственный элемент (число) $y = f(x)$ из числового множества Y . В этом случае говорят,

что на множестве X задана числовая функция (далее просто функция) $y = f(x)$, $x \in X$, со значениями в множестве Y .

Множество X , на котором определена функция f , называется областью определения этой функции и обозначается также $D(f)$. Если множество Y содержит только образы $f(x)$ элементов $x \in X$, т.е.

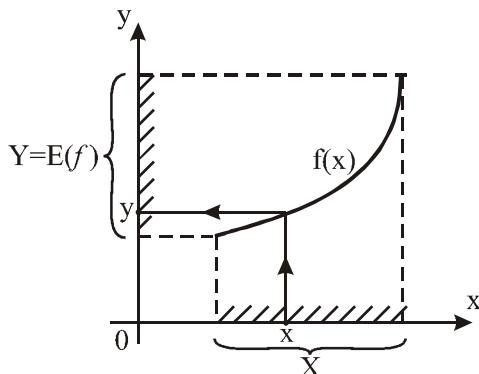


Рис. 3.1

$$Y = \{y | y = f(x), x \in X\},$$

то оно (множество Y) называется областью значений функции f и обозначается также $E(f)$ (рис. 3.1). Чтобы подчеркнуть, что множество Y состоит только из образов $f(x)$ элементов $x \in X$, пишут $Y = f(X)$.

Например, если $f(x) = 3x - 2$, $x \in [1; 3]$, то $f([1; 3]) = [1; 7]$.

Часто возникают задачи, в которых по заданному значению y_0 из области $E(f) = f(X)$ функции $y = f(x)$, $x \in X$, требуется найти соответствующее значение переменной x , т.е. требуется решить уравнение $f(x) = y_0$, $y_0 \in E(f)$.

Например, функция $y = 2x + 6$, $x \in [1; 4]$, отображает отрезок $X = [1; 4]$ на отрезок $Y = [8; 14]$. Тогда для любого $y_0 \in Y$ уравнение $2x + 6 = y_0$ имеет единственное решение $x = \frac{y_0}{2} - 3$. При этом функция $x \equiv g(y) = \frac{y}{2} - 3$, $y \in [8; 14]$, отображает отрезок Y на отрезок X , т.е. осуществляет обратное отображение.

Не всякое уравнение $f(x) = y_0$, $y_0 \in E(f)$ имеет единственное решение. Например, уравнение

$|x| = y_0, y_0 \in [c; d], 0 < c < d$, имеет два решения $x_1 = -y_0$ и $x_2 = y_0$. Уравнение $\cos x = y, y \in [-1; 1]$ имеет бесконечное множество решений $x = \pm \arccos y + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.

Особый интерес представляют функции $y = f(x), x \in X$, для которых уравнение $f(x) = y_0, y_0 \in Y = f(X)$, имеет единственное решение. Такие функции называются обратимыми.

Определение 3.2. Пусть $Y = f(X)$. Если каждому элементу $y_0 \in Y$ отвечает единственный элемент $x_0 \in X$ такой, что $f(x_0) = y_0$, то функция $y = f(x), x \in X$, называется обратимой.

Заметим, что говоря об обратимости функции f , необходимо указывать множество X , на котором рассматривается эта функция. Например, функция $y = kx + b, k \neq 0$, обратима на любом промежутке $X \subset \mathbb{R}$ и, в частности, на всей числовой прямой. Однако функция $y = x^2$, заданная на всей числовой прямой, не обратима (каждому значению $y_0 > 0$ отвечают два значения $x \in \mathbb{R} : x_1 = -\sqrt{y_0}$ и $x_2 = \sqrt{y_0}$).

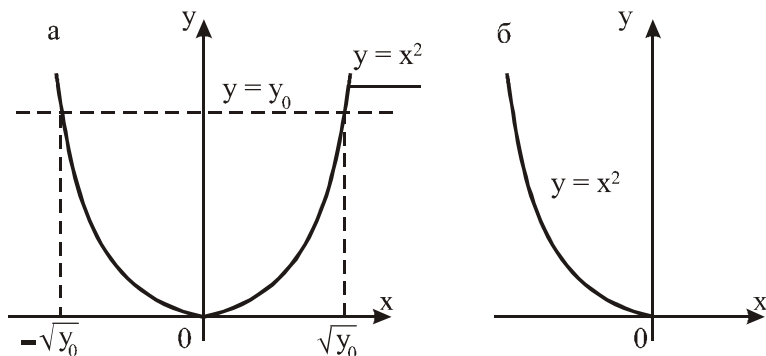


Рис. 3.2

На рис.3.2 обозначено:

- а) $y = x^2$, $x \in \mathbb{R}$, - необратимая функция,
 б) $y = x^2$, $x \in (-\infty; 0]$, - обратная к ней, $x = -\sqrt{y}$, $y \in [0; +\infty)$.

Функция $y = x^2$, заданная на множестве $X_1 = (-\infty, 0]$ или на множестве $X_2 = [0, +\infty)$, а также на любом непустом их подмножестве обратима.

Можно указать простой критерий проверки функции на обратимость: если любая прямая, параллельная оси Ox и проходящая через точку y множества $Y = f(X)$ значений функции, пересекает график этой функции ровно в одной точке, то функция $y = f(x)$, $x \in X$, обратима. Отметим, что четная функция не обратима.

Определение 3.3. Функция $x = g(y)$, определенная на множестве $Y = f(X)$ значений обратимой функции $y = f(x)$, $x \in X$, и отображающая каждый элемент (число) $y_0 \in Y$ в такой элемент $x_0 \in X$, что $f(x_0) = y_0$, называется обратной к функции $y = f(x)$, $x \in X$.

Таким образом, если $y = f(x)$, $x \in X$, отображает элемент x_0 множества X в некоторый элемент y_0 множества Y , то обратная функция $x = g(y)$, $y \in Y$, отображает этот элемент $y_0 \in Y$ в элемент $x_0 \in X$, образом которого он является. Иначе, если $y_0 = f(x_0)$, то $g(y_0) = x_0$ (рис. 3.3) или

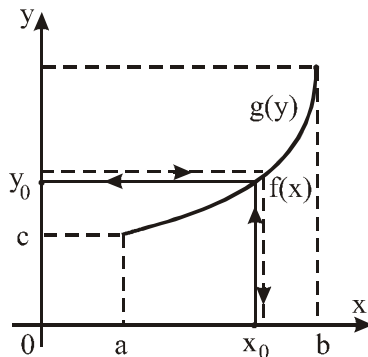


Рис. 3.3

$$f(g(y_0)) = y_0 \quad \text{и} \quad g(f(x_0)) = x_0.$$

В этом смысле функции

$$y = f(x), \quad x \in X \quad \text{и} \quad x = g(y), \quad y \in Y,$$

являются взаимно обратными (рис. 3.3). Графики взаимно обратных функций $y = f(x)$, $x \in X$, и $x = g(y)$, $y \in Y$, совпадают. Обратную функцию $g(y)$ обозначают также $f^{-1}(y)$. Такое обозначение представляется более удобным.

Справедливы следующие теоремы.

Теорема 3.1. Если функция f строго возрастает (убывает) на множестве X и $Y = f(X)$ - множество ее значений, то на множестве Y определена однозначная строго возрастающая (убывающая) обратная функция f^{-1} .

Теорема 3.2. Если функция f определена, строго возрастает (убывает) и непрерывна на промежутке $X \subset \mathbb{R}$ (конечном или бесконечном), тогда на промежутке $Y = f(X)$ определена однозначная, строго возрастающая (убывающая) и непрерывная функция f^{-1} .

Как уже отмечалось выше, для нахождения обратной функции $x = f^{-1}(y)$, $y \in Y$ для заданной функции $y = f(x)$, $x \in X$, необходимо решить относительно переменной x уравнение $f(x) = y$, $y \in Y = f(X)$.

Пример 3.1. Найдите обратную функцию для заданной

$$y = 2x + 2, \quad x \in [1; 3].$$

Решение. Заданная функция является строго возрастающей и непрерывной на отрезке $[1; 3]$. В соответствии с теоремой 3.2 на отрезке $[4; 8]$, являющемся образом отрезка $[1; 3]$, определена обратная функция, которая также будет непрерывной и строго возрастающей.

Решив уравнение $2x + 2 = y$, получим аналитическое выражение для обратной функции $f^{-1}(y)$: $x = \frac{1}{2}y - 1$, $y \in [4; 8]$. Обратная функция отображает отрезок $[4; 8]$ на отрезок $[1; 3]$, т.е. $f^{-1}([4; 8]) = [1; 3]$.

Ответ: $x = \frac{1}{2}y - 1$, $y \in [4; 8]$.

Обратную функцию $x = f^{-1}(y)$, $y \in Y$, часто записывают в другой, более привычной форме: $y = f^{-1}(x)$, $x \in Y$. Эта форма отличается от первой ($x = f^{-1}(y)$) заменой переменных x на y и y на x . Отметим, что закон f^{-1} обратного отображения при этом, естественно, сохраняется. Замена переменных (x на y и y на x) приводит к тому, что точка $M_0(x_0, y_0)$ графика функции $x = f^{-1}(y)$, $y \in Y$ (или графика функции $y = f(x)$, $x \in X$) отображается в точку $M_1(y_0, x_0)$

графика обратной функции $y = f^{-1}(x)$, $x \in Y$, симметричную точке M_0 относительно прямой $y = x$ (пример 3.2, рис. 3.4).

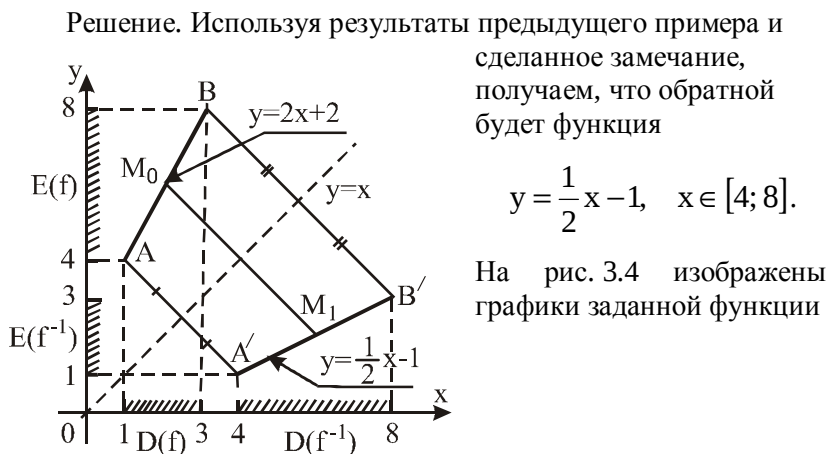
Замена одной формы записи обратной функции на другую равносильна выполнению преобразования $y = x$, при котором отображаются симметрично относительно прямой $y = x$:

- а) множество Y с оси OY на ось OX ;
- б) множество X с оси OX на ось OY ;
- в) график обратной функции $x = f^{-1}(y)$, $y \in Y$.

Именно в этой второй форме $y = f^{-1}(x)$, $x \in Y$, мы и будем далее рассматривать обратные функции.

Заметим, что если $D(f)$ - область определения (задания) функции f , $E(f)$ - область ее значений, то обратная функция $y = f^{-1}(x)$ будет определена на множестве $E(f)$, а ее значения образуют множество $D(f)$, т.е. $D(f^{-1}) = E(f)$; $E(f^{-1}) = D(f)$ (в смысле равенства числовых множеств).

Пример 3.2. Найдите обратную функцию f^{-1} для заданной $y = 2x + 2$; $x \in [1; 3]$. Здесь $D(f) = [1; 3]$, $E(f) = [4; 8]$ и потому $D(f^{-1}) = [4; 8]$.



$$y = 2x + 2; \quad x \in [1; 3],$$

и обратной

$$y = \frac{1}{2}x - 1, \quad x \in [4; 8].$$

В данном случае

$$D(f^{-1}) = E(f) = [4; 8];$$

$$E(f^{-1}) = D(f) = [1; 3].$$

Ответ: $y = \frac{1}{2}x - 1, \quad x \in [4; 8].$

Пример 3.3. Найдите обратную функцию f^{-1} для заданной:

$$y = \begin{cases} \frac{1}{2}x + 1, & -2 < x < 0; \\ x^2 + 2, & 0 \leq x < 2; \\ \frac{1}{2}x + 5, & 2 \leq x \leq 5. \end{cases} \quad (3.1)$$

Решение. Функции $y_1(x) = \frac{1}{2}x + 1$ и $y_3(x) = \frac{1}{2}x + 5$ являются монотонно возрастающими на заданных промежутках – интервале $(-2; 0)$ и отрезке $[2; 5]$ соответственно – как линейные функции с угловым коэффициентом $k > 0$ $\left(k = \frac{1}{2}\right)$. Функция $y_2(x) = x^2 + 2$ также монотонно возрастает на полуинтервале $[0; 2)$.

Поскольку $y_1(0)=1 \neq y_2(0)=2$, то функция $y(x)$ терпит в точке $x=0$ разрыв. В точке $x=2$ она непрерывна, поскольку $y_1(0)=1 \neq y_2(0)=2$.

Таким образом, функция $y(x)$ является монотонно возрастающей на всей области определения (почему?), но не является непрерывной. В соответствии с теоремой 3.1 существует обратная функция f^{-1} с областью определения $D(f^{-1}) = (y_1(-2); y_1(0)) \cup [y_2(0); y_3(5)]$, которая также будет монотонно возрастающей. Вычислив указанные значения, получим, что $D(f^{-1}) = E(f) = (0; 1) \cup [2; 7,5]$.

Найдем обратную функцию:

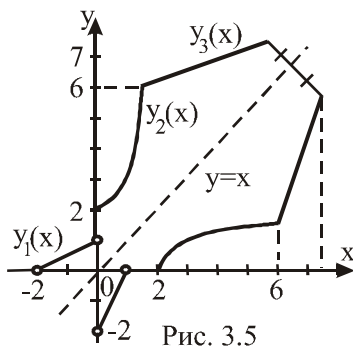
$$\frac{1}{2}x + 1 = y \Rightarrow x = 2y - 2, y \in (0; 1);$$

$$x^2 + 2 = y \Rightarrow x = \sqrt{y - 2}, y \in [2; 6];$$

$$\frac{1}{2}x + 5 = y \Rightarrow x = 2y - 10, y \in [6; 7,5]$$

Обратной к функции $y(x)$ (3.1) является функция (рис. 3.5):

$$y(x) = \begin{cases} 2x - 2, & 0 < x < 1; \\ \sqrt{x - 2}, & 2 \leq x < 6; \\ 2x - 10, & 6 \leq x \leq 7,5. \end{cases}$$



$$\text{Ответ: } y(x) = \begin{cases} 2x-2, & 0 < x < 1; \\ \sqrt{x-2}, & 2 \leq x < 6; \\ 2x-10, & 6 \leq x \leq 7,5. \end{cases}$$

Пример 3.4. Найдите обратную функцию f^{-1} к заданной

$$y = x^3, x \in \mathbb{R}.$$

Решение. Функция $y = x^3$ определена на всей числовой оси, строго возрастает и непрерывна на области определения. В соответствии с теоремой 3.2 существует обратная функция

$$x = \sqrt[3]{y}, y \in \mathbb{R}$$

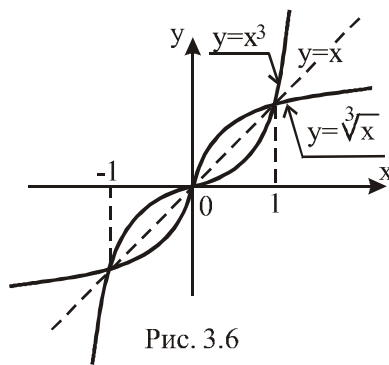


Рис. 3.6

($y = \sqrt[3]{x}$, $x \in \mathbb{R}$), которая также будет строго возрастающей и непрерывной на всей числовой прямой. На рис. 3.6 изображены графики функции $y = x^3$ и $y = \sqrt[3]{x}$.

$$\text{Ответ: } y = \sqrt[3]{x}, x \in \mathbb{R}.$$

Отметим, что в точках $x = -1$, $x = 0$ и $x = 1$ имеют место равенства $x^3 = \sqrt[3]{x} = x$, т.е. числа $-1; 0; 1$ являются решениями уравнения $x^3 = \sqrt[3]{x}$. При этом уравнение $x^3 = \sqrt[3]{x}$ равносильно каждому из уравнений $x^3 = x$ и $\sqrt[3]{x} = x$. Это замечание позволяет сформулировать следующее.

Теорема 3.3. Если в уравнении $f(x) = g(x)$ функции $f(x)$ и $g(x)$ являются взаимно обратными и возрастающими на области X определения уравнения, то уравнение равносильно на X каждому из уравнений $f(x) = x$; $g(x) = x$.

Пример 3.5. Решите уравнение

$$x^3 + 6 = 7 \sqrt[3]{7x - 6}.$$

Решение. Функции $f(x) = \frac{x^3 + 6}{7}$ и $g(x) = \sqrt[3]{7x - 6}$

определены, непрерывны и строго возрастают на всей числовой прямой; при этом $E(f) = E(g) = \mathbb{R}$. Поэтому каждая из этих

функций имеет обратную. Решив уравнение $\frac{x^3 + 6}{7} = y$,

получим $x = \sqrt[3]{7y - 6}$ или $y = \sqrt[3]{7x - 6}$ после замены y на x . Отсюда следует, что $f^{-1}(x) = g(x)$, т.е. функции f и g являются взаимно обратными.

В соответствии с теоремой 3.3 исходное уравнение равносильно следующему

$$\frac{x^3 + 6}{7} = x \Leftrightarrow x^3 - 7x + 6 = 0.$$

Решив это уравнение, получим

$$\begin{aligned} (x^3 - x) - 6(x - 1) = 0 &\Leftrightarrow (x - 1)(x^2 + x - 6) = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 = 0, \\ x^2 + x - 6 = 0, \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1, \\ x = 2, \\ x = -3. \end{cases} \end{aligned}$$

Ответ: $x = 1$, $x = 2$, $x = -3$.

Подчеркнем важность всех условий в теореме 3.3. Во-первых, если функции f и g в уравнении $f(x) = g(x)$ являются взаимно обратными и строго убывающими на области определения уравнения, то это уравнение уже не равносильно уравнениям $f(x) = x$ и $g(x) = x$. Хотя одну общую точку

графики функций $f(x)$, $g(x)$ и $y = x$ могут иметь и в этом случае.

Например, уравнение

$$1 - x^3 = \sqrt[3]{1 - x}$$

определено на всей числовой прямой, функции $f(x) = 1 - x^3$ и $g(x) = \sqrt[3]{1 - x}$ являются взаимно обратными и строго убывающими на области определения уравнения. Поэтому нельзя утверждать, что исходное уравнение равносильно, например, уравнению

$$1 - x^3 = x$$

Это уравнение имеет единственный корень

$$x_1 = \sqrt[3]{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{31}{108}}} + \sqrt[3]{\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{31}{108}}},$$

который является одновременно корнем исходного уравнения.

Однако исходное уравнение имеет еще четыре корня: $x_2 = 0$, $x_3 = 1$ и два корня x_4 и x_5 являются решениями уравнения

$$x^4 + x^3 - 2x - 1 = 0.$$

Действительно, обозначив $\sqrt[3]{1 - x} = t$ или $x = 1 - t^3$, получим равносильную исходному уравнению систему

$$\begin{cases} 1 - x = t^3 \\ 1 - t = x^3 \end{cases}$$

После вычитания из одного уравнения другого получим

$$x - t = x^3 - t^3 \Leftrightarrow \begin{cases} x - t = 0 \\ x^2 + xt + t^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

Первое уравнение совокупности приводит, с учетом введенного обозначения $(t = 1 - x^3)$ к уравнению $x^3 + x - 1 = 0$, которое имеет единственный корень x_1 .

Второе уравнение в совокупности при $t = 1 - x^3$ принимает следующий вид

$$x(x^5 - x^3 - 2x^2 + x + 1) = 0$$

Отсюда заключаем, что: $x_2 = 0$ и $x_3 = 1$ являются корнями данного и исходного уравнения. После деления многочлена $x^5 - x^3 - 2x^2 + x + 1$ на двучлен $x - 1$ получим уравнение

$$x^4 + x^3 - 2x - 1 = 0.$$

Исследование показывает, что это уравнение, а значит и исходное уравнение имеет еще два корня x_4 и x_5 .

Второе замечание к теореме 3.3 касается области X допустимых значений уравнения $f(x) = g(x)$ и множества X_1 , на котором функции f и g являются взаимно обратными. Если $X_1 = X$ и функции f и g являются строго возрастающими, то “работает” теорема 3.3. Если же X_1 является собственным подмножеством множества X , то уравнение $f(x) = g(x)$ равносильно каждому из уравнений $f(x) = x$ и $g(x) = x$ только на множестве X_1 . Рассмотрим следующий пример.

Пример 3.6. Решите уравнение

$$(x - 1)^2 = 1 + \sqrt{x}.$$

Решение. Уравнение определено на полуинтервале $X = [0; +\infty)$. На промежутке $X_1 = [1; +\infty)$ ($X_1 \subset X$) функции $f(x) = (x - 1)^2$ и $g(x) = 1 + \sqrt{x}$ являются взаимно обратными и строго возрастающими. Поэтому в соответствии с

замечанием к теореме 3.3 исходное уравнение равносильно уравнению

$$(x-1)^2 = x \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 3x + 1 = 0$$

только на множестве $X_1 = [1; +\infty)$. На этом промежутке последнее уравнение имеет единственный корень $x = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$.

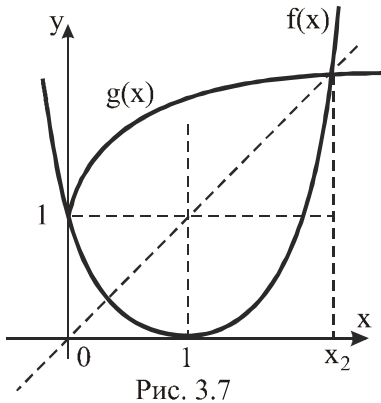


Рис. 3.7

На полуинтервале $[0; 1)$ функция $f(x) = (x-1)^2$ является убывающей, а функция $g(x) = 1 + \sqrt{x}$ - возрастающей и при этом $E(f) \cap E(g) = [1; \infty)$. Поэтому, если исходное уравнение имеет на промежутке $[0; 1)$ решение, то оно единственное. Нетрудно видеть, что $x = 0$ является его

решением (рис. 3.7).

Ответ: $x_1 = 0$; $x_2 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$.

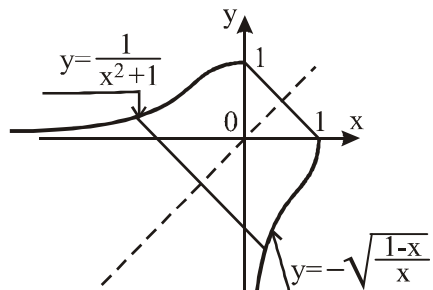
Пример 3.7. Найдите обратную функцию f^{-1} для заданной

$$y = \frac{1}{x^2 + 1}, \quad x \in (-\infty, 0].$$

Решение. Выясним, является ли заданная функция обратимой на указанном множестве. Найдем

$$y'(x) = \left((x^2 + 1)^{-1} \right)' = \frac{-2x}{x^2 + 1}.$$

Поскольку $y'(x) \geq 0$ на $(-\infty, 0]$, то функция



$y = \frac{1}{x^2 + 1}$ строго возрастает (почему?) на этом промежутке и является непрерывной функцией на нем. Множество значений $E(y) = (0, 1]$. Действительно, $\frac{1}{x^2 + 1} \rightarrow 0$ при $x \rightarrow -\infty$; $y(0) = 1$. Поэтому с учетом непрерывности и монотонного возрастания функции $y(x)$ заключаем, что $E(y) = (0; 1]$.

Тогда в соответствии с теоремой 3.2 существует обратная функция $f^{-1}(x)$, которая определена, непрерывна и строго возрастает на полуинтервале $(0; 1]$, а множество принимаемых ею значений составляет бесконечный промежуток $E(f^{-1}) = (-\infty; 0]$. Отметим, что на всей числовой прямой функция $y = \frac{1}{x^2 + 1}$ не обратима (почему?).

Решив уравнение $\frac{1}{x^2 + 1} = y$, получим $x = \pm \sqrt{\frac{1-y}{y}}$. Из двух ветвей обратной функции выбираем $x = -\sqrt{\frac{1-y}{y}}$, поскольку $x(y) < 0$ ($x(y) \in (-\infty; 0]$). На рис. 3.8 приведены графики заданной $y = \frac{1}{x^2 + 1}$, $x \in (-\infty, 0]$ и обратной $y = -\sqrt{\frac{1-x}{x}}$, $x \in (0, 1]$, функций.

Ответ: $y = -\sqrt{\frac{1-x}{x}}$, $x \in (0; 1]$.

Пример 3.8. Решите уравнение

$$2f^{-1}(6\cos^2 x + 7\sin x) = \sin x + 5,$$

если известно, что $f(3x + 2) = 6x + 5$.

Решение. Для решения данного примера необходимо:

а) построить отображение $f(x)$;

б) найти обратную функцию $f^{-1}(x)$;

в) составить и решить искомое уравнение.

Отображение $f(x)$ нужно получить из условия $f(3x + 2) = 6x + 5$. Это можно сделать с помощью явной замены переменной:

$$t = 3x + 2, \quad x = \frac{1}{3}(t - 2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(t) = 6\frac{t-2}{3} + 5 \Leftrightarrow f(x) = 2x + 1.$$

Другой способ – неявная замена переменной:

$$f(3x + 2) = 6x + 5 \Leftrightarrow f(3x + 2) = 3(3x + 2) + 1$$

или $f(t) = 2t + 1$, где $t = 3x + 2$.

Для нахождения обратной функции $f^{-1}(x)$ к $f(x) = 2x + 1$ решим уравнение $y = 2x + 1$ относительно переменной x .

Получим
$$x = \frac{y-1}{2} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x-1}{2}.$$

Составим и решим уравнение, которое следует из условия примера:

$$2\frac{1}{2}(6\cos^2 x + 7\sin x - 1) = \sin x + 5 \Leftrightarrow$$

$$\sin^2 x - \sin x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \pi n, n \in \mathbb{Z}; \quad x = \frac{\pi}{2} k, k \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $x = \pi n, n \in \mathbb{Z}; \quad x = \frac{\pi}{2} k, k \in \mathbb{Z}.$

Пример 3.9. Решите неравенство $g(x) \geq f(x)$, где $g(x)$ – функция, обратная к

$$f(x) = \frac{x+2}{x+1}.$$

Решение. Функция $f(x) = \frac{(x+1)+1}{x+1} = 1 + \frac{1}{x+1}$ определена на множестве

$$D(f) = (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$$

непрерывна и монотонно убывает на каждом из бесконечных промежутков $(-\infty, -1)$ и $(-1, +\infty)$ (но не на $D(f)$). Поэтому обратная функция существует (теорема 3.1).

Решив уравнение $\frac{x+2}{x+1} = y$, получим $x = \frac{2-y}{y-1}$, откуда

$$g(x) = \frac{2-x}{x-1}$$

или

$$g(x) = -1 + \frac{1}{x-1}.$$

Эта функция определена на множестве

$$D(g) = E(f) = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty),$$

непрерывна и монотонно убывает на каждом из бесконечных промежутков $(-\infty, 1)$ и $(1, +\infty)$.

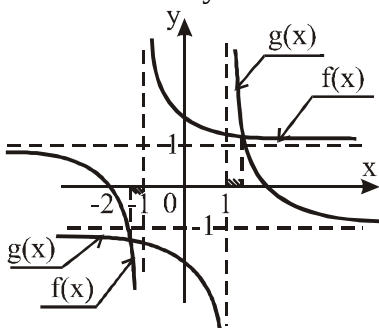
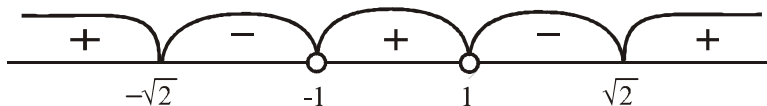


Рис. 3.9

Решим неравенство $g(x) \geq f(x)$:

$$\frac{2-x}{x-1} \geq \frac{x+2}{x+1} \Leftrightarrow \frac{-2(x^2-2)}{(x-1)(x+1)} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})}{(x+1)(x-1)} \leq 0.$$

Решив последнее неравенство методом интервалов,



получим, что $x \in [-\sqrt{2}; -1) \cup (1, \sqrt{2}]$.

На рис. 3.9 приведена геометрическая иллюстрация данного примера.

Ответ: $1 < |x| \leq \sqrt{2}$.

3.2. Обратные тригонометрические функции

Функции $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$ являются периодическими и потому каждое значение y из своей области значений ($y \in [-1; 1]$ для $\sin x$ и $\cos x$; $y \in \mathbb{R}$ - для $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$) они принимают бесконечное число раз. Каждая из названных функций имеет бесконечное число периодически повторяющихся промежутков монотонности. Для построения обратной функции необходимо выбрать один из них. Удобно выбирать ближайший к точке $x = 0$ промежуток монотонности тригонометрической функции. Для $\sin x$ - это отрезок $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$;

для $\cos x$ - отрезок $[0; \pi]$; для $\operatorname{tg} x$ - интервал $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$; для $\operatorname{ctg} x$ - интервал $(0; \pi)$.

3.2.1. Функции арксинус и аркосинус

На отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ функция $y = \sin x$ непрерывна и строго возрастает. В соответствии с теоремой 3.2 существует обратная функция $f^{-1}(x)$, $x \in [-1; 1]$, которая также будет непрерывной и строго возрастающей. Обозначают эту функцию $\arcsin x$ (арксинус *икс*). Словосочетание $\arcsin x$ «переводится» (читается) как «угол, синус которого равен x » ($\arcsin$ – угол, $\sin$ – синус).

Таким образом, арксинусом числа $x \in [-1; 1]$ называется такой угол α , принадлежащий отрезку $[-\pi/2; \pi/2]$, синус которого равен x .

В соответствии со свойствами обратных функций ($f(f^{-1}(y)) = y$; $f^{-1}(f(x)) = x$) имеем тождества

$$\boxed{\sin(\arcsin x) = x, \quad x \in [-1; 1]} \quad (3.2)$$

$$\boxed{\arcsin(\sin \alpha) = \alpha, \quad \alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]} \quad (3.3)$$

Заметим, что как выражение $\sin(\arcsin x)$, так и тождество (3.2) имеют смысл только для $x \in [-1; 1]$, тогда как выражение $\arcsin(\sin \alpha)$ имеет смысл для любого $\alpha \in \mathbb{R}$, но тождество (3.3) верно только для $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

Свойства функции $y = \arcsin x$

1. Область определения: $D(y) = [-1; 1]$.
2. Область значений:

$$E(y) = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right] : \left(-\frac{\pi}{2} \leq \arcsin x \leq \frac{\pi}{2} \text{ для всех } x \in [-1; 1] \right).$$

3. Четность: $\arcsin x$ – нечетная функция. Для любого $x \in [-1; 1]$

$$\boxed{\arcsin(-x) = -\arcsin x}.$$

4. Периодичность: непериодическая, так как каждое свое значение она принимает один раз.
5. Интервалы монотонности: строго возрастает на всей области определения.
6. Экстремальные значения: локальных экстремумов нет.

Наименьшее значение на отрезке $[-1, 1]$:

$$\min_{x \in [-1; 1]} (\arcsin x) = -\frac{\pi}{2}.$$

Наибольшее: $\max_{x \in [-1; 1]} (\arcsin x) = \frac{\pi}{2}.$

7. График функции $y = \arcsin x$, $x \in [-1; 1]$, приведен на рис. 3.10 и 3.11 вместе с графиком функции $y = \sin x$, $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right]$, из которого он получается отображением относительно прямой $y = x$.

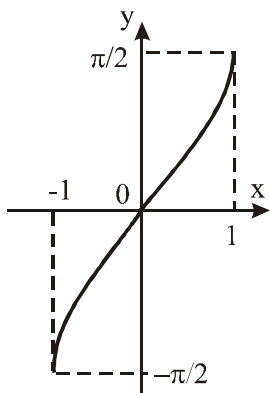


Рис. 3.10.

График функции $y = \arcsin x$

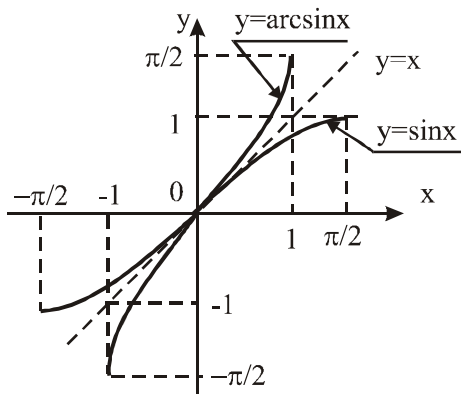


Рис. 3.11.

Графики функций
 $y = \sin x$ и $y = \arcsin x$

Функция $y = \cos x$ на отрезке $[0; \pi]$ непрерывна и строго убывает. В соответствии с теоремой 3.2 существует обратная функция $f^{-1}(x)$, $x \in [-1; 1]$, которая также будет непрерывной и строго убывающей. Обозначают ее $\arccos x$ (арккосинус), т.е. арккосинусом числа $x \in [-1; 1]$ называется такой угол α , принадлежащий отрезку $[0; \pi]$, косинус которого равен x :

$$\boxed{\cos(\arccos x) = x, \quad x \in [-1; 1]} \quad (3.4)$$

Имеет место также тождество

$$\arccos(\cos \alpha) = \alpha, \quad \alpha \in [0; \pi]. \quad (3.5)$$

Выражение $\arccos(\cos \alpha)$ определено для всех $\alpha \in \mathbb{R}$, но тождество (3.5) верно только для $\alpha \in [0; \pi]$.

Свойства функции $y = \arccos x$

1. Область определения: $D(y) = [-1; 1]$.
2. Область значений:

$$E(y) = [0; \pi]: (0 \leq \arccos x \leq \pi \text{ для всех } x \in [-1; 1]).$$

3. Четность и нечетность: $\arccos x$ - ни четная, ни нечетная функция. Для всех $x \in [-1; 1]$ справедливо тождество

$$\boxed{\arccos(-x) = \pi - \arccos x} \quad (3.6)$$

4. Периодичность: непериодическая функция.
 5. Интервалы монотонности: строго убывает на всей области определения.
 6. Экстремальные значения: локальных экстремумов нет.

Наименьшее значение на отрезке $[-1, 1]$:

$$\min_{x \in [-1; 1]} (\arccos x) = 0.$$

Наибольшее: $\max_{x \in [-1; 1]} (\arccos x) = \pi.$

7. График функции $y = \arccos x$, $x \in [-1, 1]$, приведён на рис. 3.12 и на рис. 3.13 вместе с графиком «прямой» функции $y = \cos x$, $x \in [0; \pi]$.

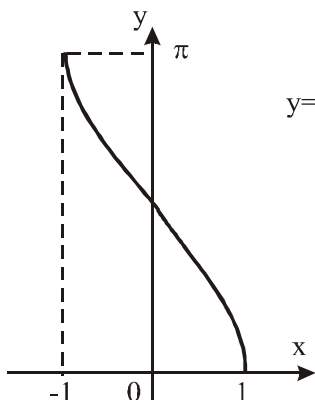


Рис. 3.12.
График функции
 $y = \arccos x$

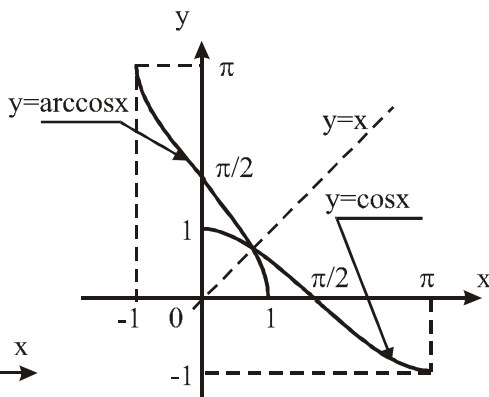


Рис. 3.13.
Графики функции
 $y = \cos x$ и $y = \arccos x$

3.2.2. Функции арктангенс и аркотангенс

На интервале $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ функция $y = \operatorname{tg} x$ непрерывна и строго возрастает, принимая все значения от $-\infty$ до $+\infty$ ($E(y) = \mathbb{R}$), откуда, с учетом теоремы 3.2, следует, что существует обратная к $y = \operatorname{tg} x$, $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, функция $f^{-1}(x)$, определенная на всей числовой прямой, непрерывная и строго возрастающая. Обозначают ее $\operatorname{arctg} x$ (арктангенс), т.е. арктангенсом числа $x \in \mathbb{R}$ называется такой угол α , принадлежащий интервалу $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, тангенс которого равен x :

$$\boxed{\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x, \quad x \in \mathbb{R}} \quad (3.7)$$

$$\boxed{\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} \alpha) = \alpha, \quad \alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)} \quad (3.8)$$

Выражение $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} \alpha)$ определено для всех $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, но тождество (3.8) верно только для $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

Свойства функции $y = \operatorname{arctg} x$

1. Область определения: $D(y) = \mathbb{R}$.
2. Область значений: $E(y) = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ ($-\frac{\pi}{2} < \operatorname{arctg} x < \frac{\pi}{2}$ для всех $x \in \mathbb{R}$).
3. Четность и нечетность: нечетная функция

$$\boxed{\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x} \quad (3.9)$$

для всех $x \in \mathbb{R}$.

4. Периодичность: неперiodическая.
5. Интервалы монотонности: строго возрастает на всей числовой прямой.
6. Экстремальные значения: локальных и глобальных экстремумов нет.
7. График функции $y = \operatorname{arctg} x$, $x \in \mathbb{R}$ приведен на рис. 3.14 и на рис. 3.15 вместе с «прямой» функцией $y = \operatorname{tg} x$, $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

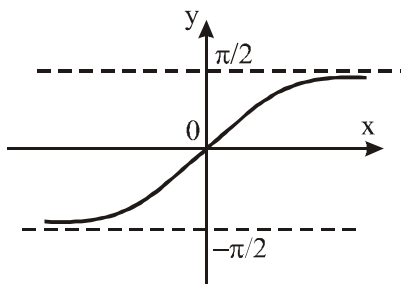


Рис. 3.14.
График функции $y = \operatorname{arctg} x$

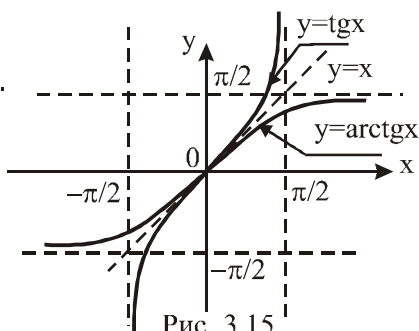


Рис. 3.15.
Графики функций $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \operatorname{arctg} x$

Функция $y = \operatorname{ctg} x$ на интервале $(0; \pi)$ непрерывна и строго убывает, принимая значения от $-\infty$ до $+\infty$ ($E(y) = \mathbb{R}$), откуда, с учетом теоремы 3.2, следует, что существует обратная к $y = \operatorname{ctg} x$, $x \in (0; \pi)$, функция $f^{-1}(x)$, $x \in \mathbb{R}$, непрерывная и монотонно убывающая. Обозначают ее $\operatorname{arcctg} x$ (арккотангенс), т.е. арккотангенсом числа $x \in \mathbb{R}$ называется такой угол α , принадлежащий интервалу $(0; \pi)$, котангенс которого равен x :

$$\boxed{\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x) = x, \quad x \in \mathbb{R}} \quad (3.10)$$

$$\boxed{\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg}\alpha) = \alpha, \quad \alpha \in (0; \pi)} \quad (3.11)$$

Выражение $\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg}\alpha)$ определено для всех $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$ но тождество (3.11) справедливо только для $\alpha \in (0; \pi)$.

Свойства функции $y = \operatorname{arcctg}x$

1. Область определения: $D(y) = \mathbb{R}$.
2. Область значений: $E(y) = (0; \pi)$ ($0 < \operatorname{arcctg}x < \pi$ для всех $x \in \mathbb{R}$).
3. Четность и нечетность: ни четная, ни нечетная.

Для всех $x \in \mathbb{R}$ справедливо тождество

$$\boxed{\operatorname{arcctg}(-x) = \pi - \operatorname{arcctg}x}$$

4. Периодичность: неперiodическая.
5. Интервалы монотонности: строго убывает на всей числовой прямой.
6. Экстремальные значения: локальных и глобальных экстремумов нет.
7. График функции $y = \operatorname{arctg}x$, $x \in \mathbb{R}$, приведен на рис. 3.16 и на рис. 3.17 вместе с функцией $y = \operatorname{ctg}x$, $x \in (0; \pi)$.

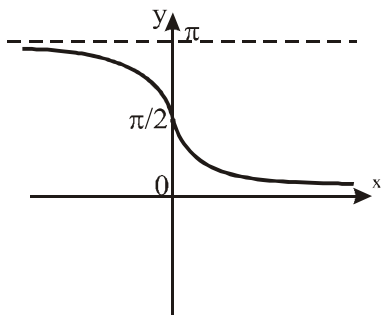


Рис. 3.16.

График функции $y = \text{arccotg} x$

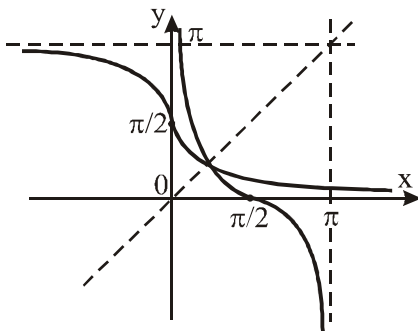


Рис. 3.17.

Графики функций
 $y = \text{ctg} x$ и $y = \text{arcctg} x$

3.2.3. Свойства обратных тригонометрических функций

A.

$$1. \quad \boxed{\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}, \quad x \in [-1; 1]} \quad (3.12)$$

$$2. \quad \boxed{\text{arctg} x + \text{arcctg} x = \frac{\pi}{2}, \quad x \in \mathbb{R}} \quad (3.13)$$

B.

$$3. \quad \arcsin(-x) = -\arcsin x, \quad x \in [-1; 1].$$

$$4. \quad \arccos(-x) = \pi - \arccos x, \quad x \in [-1; 1].$$

$$5. \quad \text{arctg}(-x) = -\text{arctg} x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

$$6. \quad \text{arcctg}(-x) = \pi - \text{arcctg} x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

C.

$$7. \quad \arcsin(\sin \alpha) = \alpha, \quad \text{если } \alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right].$$

$$8. \quad \arccos(\cos \alpha) = \alpha, \quad \alpha \in [0; \pi].$$

$$9. \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} \alpha) = \alpha, \quad \alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right).$$

$$10. \operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} \alpha) = \alpha, \quad \alpha \in (0; \pi).$$

D.

$$11. \sin(\arcsin x) = x, \quad x \in [-1; 1].$$

$$12. \cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}, \quad x \in [-1; 1].$$

$$13. \sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2}, \quad x \in [-1; 1].$$

$$14. \cos(\arccos x) = x, \quad x \in [-1; 1].$$

$$15. \operatorname{tg}(\arcsin x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x \in (-1; 1).$$

$$16. \operatorname{ctg}(\arcsin x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}, \quad x \in [-1; 0) \cup (0; 1].$$

$$17. \operatorname{tg}(\arccos x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}, \quad x \in [-1; 0) \cup (0; 1].$$

$$18. \operatorname{ctg}(\arccos x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x \in (-1; 1).$$

$$19. \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

$$20. \operatorname{ctg}(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{x}, \quad x \neq 0$$

$$21. \sin(\operatorname{arctg} x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

$$22. \cos(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

$$23. \operatorname{ctg}(\operatorname{arctg} x) = x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

$$24. \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{x}, \quad x \neq 0.$$

$$25. \sin(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

$$26. \cos(\operatorname{arctg} x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Приведенные свойства и тождества либо следуют непосредственно из определения обратных тригонометрических функций, как, например, $\arcsin(-x) = -\arcsin x$, $\sin(\arcsin x) = x$ и т.д., либо выводятся из соотношений между тригонометрическими функциями одного и того же аргумента.

Например:

$$15. \quad \operatorname{tg}(\arcsin x) = \frac{\sin(\arcsin x)}{\cos(\arcsin x)}, \quad \text{но} \quad \sin(\arcsin x) = x, \quad \text{а}$$

$$\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2} \quad (\text{формула } 12). \quad \text{Поэтому}$$

$$\operatorname{tg}(\arcsin x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{для всех } x \in (-1, 1).$$

22. $\cos(\operatorname{arctg} x)$ можно вычислить, если воспользоваться тождеством

$$\cos^2 x = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x}.$$

Имеем

$$\cos(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2(\operatorname{arctg} x)}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \quad \text{для всех } x \in \mathbb{R}.$$

Отметим, что в общем случае $\cos x = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x}}$. Однако

здесь $\arctg x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, а при $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ $\cos \alpha > 0$ и

потому из двух возможных знаков выбираем «+».

Запомнить все приведенные формулы сложно, поэтому важно уметь их выводить. Вычислительные задачи с обратными тригонометрическими функциями основываются на этих формулах.

3.2.4. Вычислительные задачи

с обратными тригонометрическими функциями

Пример 3.9. Вычислите $\sin\left(2 \arccos \frac{1}{3}\right)$.

Решение. Воспользовавшись формулой синуса двойного аргумента и формулами 11 и 12 пункта 3.2.3, получим

$$\begin{aligned}\sin\left(2 \arccos \frac{1}{3}\right) &= 2 \sin\left(\arccos \frac{1}{3}\right) \cos\left(\arccos \frac{1}{3}\right) = \\ &= 2 \sqrt{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{4\sqrt{2}}{9}.\end{aligned}$$

Ответ: $\frac{4\sqrt{2}}{9}$.

Пример 3.10. Вычислите $\cos\left(\arcsin \frac{2}{5} - \operatorname{arctg} \frac{1}{2}\right)$.

Решение. По формуле косинуса разности аргументов имеем

$$\begin{aligned}A &= \cos\left(\arcsin \frac{2}{5} - \operatorname{arctg} \frac{1}{2}\right) = \\ &= \cos\left(\arcsin \frac{2}{5}\right) \cos\left(\operatorname{arctg} \frac{1}{2}\right) + \sin\left(\arcsin \frac{2}{5}\right) \sin\left(\operatorname{arctg} \frac{1}{2}\right).\end{aligned}$$

Полученные выражения вычислим с использованием формул 12, 22, 11 и 21 соответственно:

$$A = \sqrt{1 - \frac{4}{25}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{4}}} + \frac{2}{5} \cdot \frac{1/2}{\sqrt{1 + \frac{1}{4}}} = \frac{2(\sqrt{21} + 1)}{5\sqrt{5}}.$$

Ответ: $\frac{2(\sqrt{21} + 1)}{5\sqrt{5}}.$

Пример 3.11. Вычислите $\operatorname{tg}\left(\arcsin \frac{3}{5} + \operatorname{arcctg} 4\right).$

Решение. Поскольку $\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta}$, то

$$\operatorname{tg}\left(\arcsin \frac{3}{5} + \operatorname{arcctg} 4\right) = \frac{\operatorname{tg}\left(\arcsin \frac{3}{5}\right) + \operatorname{tg}(\operatorname{arcctg} 4)}{1 - \operatorname{tg}\left(\arcsin \frac{3}{5}\right) \cdot \operatorname{tg}(\operatorname{arcctg} 4)}. \quad (3.14)$$

В соответствии с формулой 15 (п.3.2.3)

$$\operatorname{tg}\left(\arcsin \frac{3}{5}\right) = \frac{3/5}{\sqrt{1 - 9/25}} = \frac{3}{4},$$

а

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arcctg} 4) = \frac{1}{\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} 4)} = \frac{1}{4}.$$

Подставив вычисленные числовые значения в (3.14), получим

$$\operatorname{tg}\left(\arcsin \frac{3}{5} + \operatorname{arcctg} 4\right) = \frac{\frac{3}{4} + \frac{1}{4}}{1 - \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4}} = \frac{16}{13}.$$

Ответ: $\frac{16}{13}.$

Пример 3.12. Вычислите $\cos\left(2\operatorname{arctg}\frac{1}{3}\right)$.

Решение. Выразим $\cos 2\alpha$ через $\operatorname{tg}\alpha$ по формуле (2.33)

$$\cos 2\alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}.$$

В соответствии с этой формулой

$$\cos\left(2\operatorname{arctg}\frac{1}{3}\right) = \frac{1 - \left(\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{3}\right)\right)^2}{1 + \left(\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{3}\right)\right)^2} = \frac{1 - \frac{1}{9}}{1 + \frac{1}{9}} = \frac{4}{5}.$$

Ответ: $\frac{4}{5}$.

Пример 3.13. Вычислите $\cos\left(2\arcsin\frac{3}{4}\right)$.

Решение. Здесь удобно воспользоваться формулой $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha$, где $\alpha = \arcsin\frac{3}{4}$. Поскольку

$$\sin \alpha = \sin\left(\arcsin\frac{3}{4}\right) = \frac{3}{4}, \text{ то } \cos\left(2\arcsin\frac{3}{4}\right) = 1 - 2 \cdot \frac{9}{16} = -\frac{1}{8}.$$

Ответ: $-\frac{1}{8}$.

Замечание. $\arcsin \frac{3}{4} > \frac{\pi}{4}$, поэтому $2 \arcsin \frac{3}{4} > \frac{\pi}{2}$ и соответственно $\cos \left(2 \arcsin \frac{3}{4} \right) < 0$.

Следующий класс вычислительных задач с обратными тригонометрическими функциями составляют задачи вида: вычислить $\arcsin \left(\cos \frac{53}{3} \pi \right)$, $\operatorname{arctg} \left(\operatorname{ctg} \frac{19}{4} \pi \right)$, $\arccos(\cos 15)$, $\operatorname{arctg}(\operatorname{ctg} 14)$ и т.д., т.е. задачи вычисления значений обратных тригонометрических функций по значениям тригонометрических функций. Если аргумент x тригонометрических функций кратен числу π , то эти задачи решаются достаточно легко.

Особую сложность, как показывает опыт вступительных экзаменов, представляют те задачи данного вида, в которых аргумент x - произвольное действительное число (не кратное числу π). Эти задачи можно решать различными способами. Умение пользоваться каждым из них, с одной стороны, повышает вероятность успешного решения таких задач на экзамене, с другой - позволяет глубже понимать свойства тригонометрических и обратных тригонометрических функций.

Пример 3.14. Вычислите $\arcsin \left(\cos \frac{29}{3} \pi \right)$.

Решение. Решение данной задачи и подобных ей основано на замене числа $\arcsin \left(\cos \frac{29}{3} \pi \right)$ равным ему числом $\arcsin(\sin \alpha)$, где $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right]$ и $\sin \alpha = \cos \frac{29}{3} \pi$. Тогда в соответствии с тождеством $\arcsin(\sin \alpha) = \alpha$, если $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right]$, будем иметь

$$\arcsin\left(\cos\frac{29}{3}\pi\right)=\arcsin(\sin\alpha)=\alpha.$$

Воспользовавшись формулами приведения, получим

$$\cos\frac{29}{3}\pi=\cos\left(10\pi-\frac{\pi}{3}\right)=\cos\frac{\pi}{3}=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}\right)=\sin\frac{\pi}{6}.$$

Поскольку $\frac{\pi}{6}\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$, то

$$\alpha=\arcsin\left(\cos\frac{29}{3}\pi\right)=\arcsin\left(\sin\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\pi}{6}.$$

$$\text{Ответ: } \arcsin\left(\cos\frac{29}{3}\pi\right)=\frac{\pi}{6}.$$

Пример 3.15. Вычислите $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{54}{7}\pi\right)$.

Решение. В соответствии с определением функции $\operatorname{arctg}x$ и тождеством (3.8) необходимо найти угол $\alpha\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ такой, что $\operatorname{tg}\alpha=\operatorname{tg}\frac{54}{7}\pi$. Такой угол существует и единствен (почему?).

Преобразуем $\operatorname{tg}\frac{54}{7}\pi$ с помощью формул приведения:

$$\operatorname{tg}\frac{54}{7}\pi=\operatorname{tg}\left(7\pi+\frac{5}{7}\pi\right)=\operatorname{tg}\frac{5}{7}\pi=\operatorname{tg}\left(\pi-\frac{2}{7}\pi\right)=\operatorname{tg}\left(-\frac{2}{7}\pi\right).$$

Угол $-\frac{2}{7}\pi\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$. Поэтому

$$\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{54}{7}\pi\right)=\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\left(-\frac{2}{7}\pi\right)\right)=-\frac{2}{7}\pi.$$

Ответ: $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{54}{7}\pi\right)=-\frac{2}{7}\pi.$

Пример 3.16. Вычислите $\operatorname{arcctg}\left(\operatorname{tg}\frac{63}{5}\pi\right).$

Решение. Здесь число $\operatorname{tg}\frac{63}{5}\pi$ необходимо заменить равным ему значением $\operatorname{ctg}\alpha$, $\alpha \in (0; \pi)$, чтобы иметь возможность воспользоваться тождеством (3.11): $\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg}\alpha) = \alpha$ при $\alpha \in (0; \pi)$:

$$\operatorname{tg}\frac{63}{5}\pi = \operatorname{tg}\left(12\pi + \frac{3}{5}\pi\right) = \operatorname{tg}\frac{3}{5}\pi = \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{3}{5}\pi\right) = \operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{10}\right).$$

Но угол $\left(-\frac{\pi}{10}\right) \notin (0; \pi)$. Продолжим преобразования:

$$\operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{10}\right) = \operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{10} + \pi\right) = \operatorname{ctg}\frac{9}{10}\pi.$$

Угол $\frac{9}{10}\pi \in (0, \pi)$ и потому

$$\operatorname{arcctg}\left(\operatorname{tg}\frac{63}{5}\pi\right) = \operatorname{arcctg}\left(\operatorname{ctg}\frac{9}{10}\pi\right) = \frac{9}{10}\pi.$$

Ответ: $\operatorname{arcctg}\left(\operatorname{tg}\frac{63}{5}\pi\right) = \frac{9}{10}\pi.$

Пример 3.17. Вычислите $\arccos\left(\sin\frac{88}{3}\pi\right).$

Решение. Способ 1:

$$\sin \frac{88}{3} \pi = \sin \left(29\pi + \frac{\pi}{3} \right) = -\sin \frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\begin{aligned} \text{Отсюда } \arccos \left(\sin \frac{88}{3} \pi \right) &= \arccos \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \\ &= \pi - \arccos \frac{\sqrt{3}}{2} = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5}{6} \pi. \end{aligned}$$

Для вычисления $\arccos \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \right)$ воспользовались свойством (3.6).

Способ 2. Используя тождество (3.12), получаем

$$\begin{aligned} \arccos \left(\sin \frac{88}{3} \pi \right) &= \frac{\pi}{2} - \arcsin \left(\sin \frac{88}{3} \pi \right) = \frac{\pi}{2} - \arcsin \left(-\sin \frac{\pi}{3} \right) = \\ &= \frac{\pi}{2} + \arcsin \left(\sin \frac{\pi}{3} \right) = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3} = \frac{5}{6} \pi. \end{aligned}$$

$$\text{Ответ: } \arccos \left(\sin \frac{88}{3} \pi \right) = \frac{5}{6} \pi.$$

Рассмотрим теперь методы решения задач того же вида, но аргументы тригонометрических функций в которых не кратны иррациональному числу π .

Пример 3.18. Вычислите $\arccos(\cos 13)$.

Решение. Способ 1. С учетом определения функции $\arccos x$ ($\arccos x = \alpha$: $\alpha \in [0; \pi]$ $\cos \alpha = x$) решение задачи заключается в поиске угла $\alpha \in [0; \pi]$ такого, что $\cos \alpha = \cos 13$. Решая это уравнение, получаем

$$\begin{aligned} \cos \alpha - \cos 13 = 0 &\Leftrightarrow 2 \sin \frac{\alpha + 13}{2} \sin \frac{13 - \alpha}{2} = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{\alpha + 13}{2} = \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}, \\ \frac{13 - \alpha}{2} = \pi m, \quad m \in \mathbb{Z}, \end{array} \right. &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \alpha = 2\pi n - 13, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad (3.15) \\ \alpha = 2\pi m + 13, \quad m \in \mathbb{Z}. \quad (3.16) \end{array} \right. \end{aligned}$$

Теперь необходимо подобрать целые числа m или n так, чтобы выполнялось одно из неравенств:

$$0 \leq 2\pi n - 13 \leq \pi,$$

$$0 \leq 2\pi m + 13 \leq \pi,$$

что равносильно неравенствам:

$$13 \leq 2\pi n \leq \pi + 13,$$

$$-13 \leq 2\pi m \leq \pi - 13.$$

Отметим, что решение может иметь только одно из приведенных двойных неравенств. Для первого неравенства такое n не существует.

Действительно, если $n = 2$, то $4\pi \approx 12,56 < 13$;

если $n = 3$, то $6\pi \approx 18,84 > \pi + 13$.

Второе неравенство выполняется при $m = -2$ и, как следствие, искомый угол $\alpha = 13 - 4\pi$ (формула (3.16)).

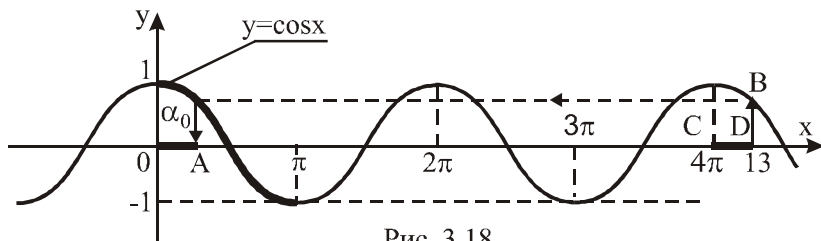
Ответ: $\arccos(\cos 13) = 13 - 4\pi$.

Способ 2. Решение является незначительной модификацией первого способа и отличается от него тем, что опускается этап решения уравнения $\cos \alpha = \cos 13$ ($\cos x = \cos a$, $a \in \mathbb{R}$). Как следует из формул (3.15) и (3.16), решение этого уравнения сразу можно записать в виде

$$\begin{cases} \alpha = 2\pi n - 13, & n \in \mathbb{Z}, \\ \alpha = 2\pi m + 13, & m \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Далее решение совпадает с приведенным в способе 1.

Способ 3. Графический подход.



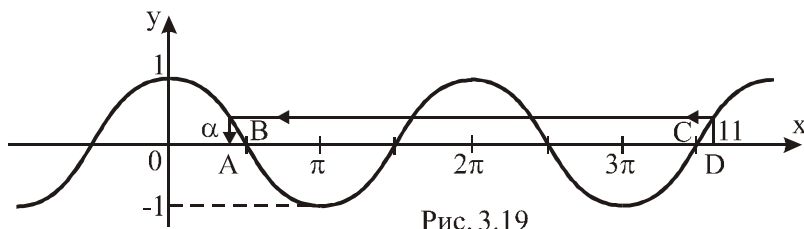
Строим график функции $y = \cos x$. Отмечаем на нем точку $B(13, \cos 13)$, т.е. $x=13$, $y = \cos 13$. Затем проводим через эту точку прямую, параллельную оси Ox . Находим точку пересечения прямой с графиком функции $y = \cos x$, абсцисса $x = \alpha$ которой лежит на отрезке $[0; \pi]$. Такая точка существует и единственна (рис. 3.18) (почему?).

Из рисунка 3.18 и свойства периодичности функции $y = \cos x$ заключаем, что искомый угол $\alpha = |\overline{OA}| = |\overline{CD}| = 13 - 4\pi$.

Пример 3.19. Вычислите $\arccos(\cos 11)$.

Решение. Воспользуемся графическим способом решения. При применении этого способа важно определить положение числа x (в данном случае $x=11$) относительно точек $\frac{\pi n}{2}$. В послесловии к примеру 1.4 (раздел 1, пункт 1.2.1) уже отмечалось, что 11 рад отличается от числа $\frac{7}{2}\pi$ лишь в третьем

знаке $\left(11 > \frac{7}{2}\pi\right)$. Поэтому на рис. 3.19 точка $x=11$ умышленно расположена заметно правее точки $x = \frac{7}{2}\pi$ лишь с одной целью - подчеркнуть, что $11 > \frac{7}{2}\pi$.



Из рис. 3.19 имеем $\alpha = |\overline{OA}| = \frac{\pi}{2} - |\overline{AB}|$. Но $|\overline{AB}| = |\overline{CD}| = 11 - \frac{7}{2}\pi$ и $\alpha = \frac{\pi}{2} - \left(11 - \frac{7}{2}\pi\right) = 4\pi - 11$.

Ответ: $4\pi - 11$.

Решите данный пример способом 1 (см. пример 3.18).

Пример 3.20. Вычислите $\arcsin(\cos 8)$.

Решение. Во-первых, необходимо преобразовать $\cos 8$ к $\sin\left(\frac{\pi}{2} - 8\right)$ или $\sin\left(\frac{\pi}{2} + 8\right)$, чтобы иметь далее возможность воспользоваться тождеством $\arcsin(\sin \alpha) = \alpha$, если $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. Имеем

$$\alpha = \arcsin(\cos 8) = \arcsin\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - 8\right)\right) =$$

$$= \arcsin\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - 8 + 2\pi n\right)\right).$$

Подберем n так, чтобы выполнялись неравенства

$$-\frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi}{2} - 8 + 2\pi n \leq \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 8 - \pi \leq 2\pi n \leq 8.$$

Подходит $n = 1$. В результате $\alpha = \frac{\pi}{2} - 8 + 2\pi = \frac{5}{2}\pi - 8$.

Ответ: $\arcsin(\cos 8) = \frac{5}{2}\pi - 8$.

Способ 3. Графический подход.

Строим график функции $y = \cos x$ и отмечаем на нем точку $(8, \cos 8)$. Здесь же строим график функции $y = \sin x$, но только на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. Через точку $(8, \cos 8)$ проводим прямую, параллельную оси Ox до пересечения с графиком функции $y = \sin x$, $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. Такая точка существует и единственна (рис. 3.20).

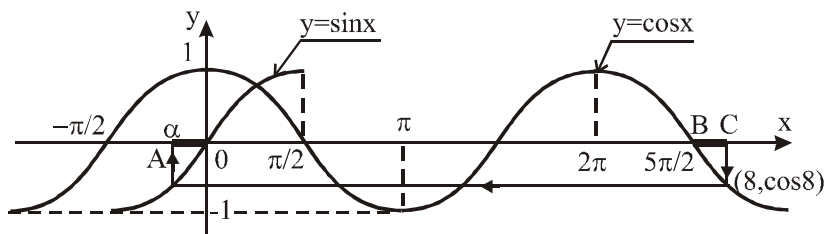


Рис. 3.20

Из рис. 3.20 имеем $\alpha = -|OA| = -|BC| = -\left(8 - \frac{5}{2}\pi\right) = \frac{5}{2}\pi - 8$.

Ответ: $\frac{5}{2}\pi - 8$.

Пример 3.21. Вычислите $\arctg(\operatorname{ctg} 17)$.

Решение. Способ 1. Необходимо найти угол α такой, что $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ и $\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{ctg} 17$, откуда

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - 17 \right) \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{2} - 17 + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

При этом должны выполняться неравенства

$$-\frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{2} - 17 + \pi n < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 17 - \pi < \pi n < 17.$$

Решив это неравенство, найдем, что $n = 5$ и искомый угол

$$\alpha = \frac{\pi}{2} - 17 + 5\pi = \frac{11}{2}\pi - 17.$$

Ответ: $\arctg(\operatorname{ctg} 17) = \frac{11}{2}\pi - 17$.

Способ 2. Графический подход

В прямоугольной системе координат Oxy строим график функции $y = \operatorname{ctg} x$, $0 < x < 6\pi$, $x \neq \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$ ($17 < 6\pi$), и график функции $y = \operatorname{tg} x$, $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. На графике функции $y = \operatorname{ctg} x$ отмечаем точку $(17, \operatorname{ctg} 17)$ и проводим через нее прямую, параллельную оси Ox до пересечения с графиком функции $y = \operatorname{tg} x$. Абсцисса точки пересечения с графиком функции $y = \operatorname{tg} x$ и будет искомым значением $\arctg(\operatorname{ctg} 17)$ (рис. 3.21)

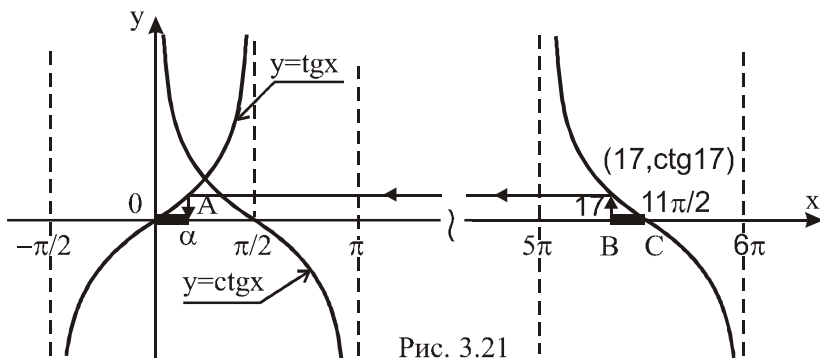


Рис. 3.21

Из рис. 3.21 и свойств функций $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$ следует, что

$$\alpha = |\overline{OA}| = |\overline{BC}| = \frac{11}{2}\pi - 17.$$

Ответ: $\frac{11}{2}\pi - 17$.

Еще один способ вычисления значений обратных тригонометрических функций по значениям тригонометрических функций для произвольного аргумента последних заключается в использовании графиков функций:

$$y = \arcsin(\sin x), \quad y = \arccos(\cos x), \quad y = \arcsin(\cos x),$$

$$y = \arccos(\sin x), \quad y = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x), \quad y = \operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} x),$$

$$y = \operatorname{arcctg}(\operatorname{tg} x), \quad y = \operatorname{arctg}(\operatorname{ctg} x).$$

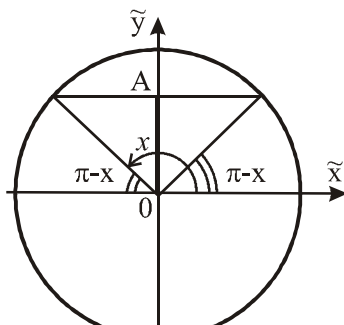
Пример 3.22. Постройте график функции $y = \arcsin(\sin x)$ и вычислите:

а) $\arcsin(\sin 8)$; б)

$\arcsin(\sin 10)$; в) $\arcsin\left(\sin \frac{23}{2}\right)$;

г) $\arcsin(\sin 13)$; д)

$\arcsin(\sin 17)$.



Решение. Поскольку

$\sin x - 2\pi$ - периодическая функция, то периодической с тем же периодом 2π будет и функция $y = \arcsin(\sin x)$. Поэтому достаточно построить график этой функции на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3}{2}\pi\right]$ длиной 2π .

На отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ $\arcsin(\sin x) = x$ и потому $y = x$.

Если $x \in \left(\frac{\pi}{2}; \frac{3}{2}\pi\right]$, то (см. рис. 3.22) $\sin x = \sin(\pi - x) = |\overline{OA}|$.

При этом $(\pi - x) \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, если $x \in \left(\frac{\pi}{2}; \frac{3}{2}\pi\right]$. Таким образом,

$$\arcsin(\sin x) = \begin{cases} x, & \text{если } -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \\ \pi - x, & \text{если } \frac{\pi}{2} < x \leq \frac{3\pi}{2}. \end{cases}$$

Далее строим периодическое продолжение полученного фрагмента графика – «уголка» ABC – с отрезка $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3}{2}\pi\right]$ на всю числовую прямую (рис. 3.23).

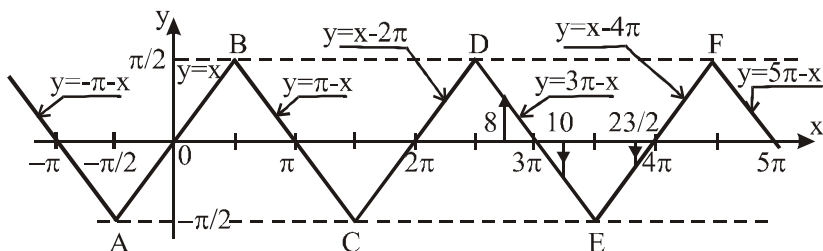


Рис. 3.23. График функции $y = \arcsin(\sin x)$

Отрезок CD получается сдвигом отрезка AB на 2π вправо. Поскольку $AB: y = x$, то уравнение прямой $CD: y = x - 2\pi$. Аналогично $EF: y = x - 4\pi$ и т.д.

Теперь легко находятся любые значения $\arcsin(\sin x_0)$. Необходимо лишь правильно определить положение точки x_0 на оси абсцисс и вычислить соответствующее значение $\arcsin(\sin x_0)$. Имеем:

а) поскольку $\frac{5}{2}\pi < 8 < 3\pi$, то в соответствии с рис.3.23

$$\arcsin(\sin 8) = (3\pi - x)|_{x=8} = 3\pi - 8;$$

б) $3\pi < 10 < \frac{7}{2}\pi \Rightarrow \arcsin(\sin 10) = (3\pi - x)|_{x=10} = 3\pi - 10;$

в) $\frac{7}{2}\pi < \frac{23}{2} < 4\pi \Rightarrow \arcsin\left(\sin \frac{23}{2}\right) =$

$$= (x - 4\pi)|_{x=\frac{23}{2}} = \frac{23}{2} - 4\pi;$$

г) $4\pi < 13 < \frac{9}{2}\pi \Rightarrow \arcsin(\sin 13) = 13 - 4\pi;$

$$\text{д) } 5\pi < 17 < \frac{11}{2}\pi \Rightarrow \arcsin(\sin 17) = (5\pi - x) \Big|_{x=17} = 5\pi - 17.$$

$$\text{Ответ: а) } 3\pi - 8; \quad \text{б) } 3\pi - 10; \quad \text{в) } \frac{23}{2} - 4\pi;$$

$$\text{г) } 13 - 4\pi; \quad \text{д) } 5\pi - 17.$$

Пример 3.23. Постройте график функции $y = \arccos(\cos x)$ и вычислите:

$$\text{а) } \arccos(\cos 4); \quad \text{б) } \arccos\left(\cos \frac{11}{2}\right);$$

$$\text{в) } \arccos(\cos 7); \text{г) } \arccos(\cos 14).$$

Решение. Поскольку функция $y = \cos x$ является 2π -периодической, то функция $\arccos(\cos x)$ также будет периодической с тем же периодом 2π . Кроме того, функция $y = \arccos(\cos x)$ является четной. Поэтому достаточно построить график функции $y = \arccos(\cos x)$ сначала на $[0; \pi]$; затем отобразить его симметрично относительно оси Oy . Далее необходимо продолжить периодически построенный фрагмент графика с отрезка $[-\pi; \pi]$ на всю числовую прямую.

На отрезке $[0; \pi]$ $\arccos(\cos x) = x$ (тождество 3.5) и потому $y = x$, если $x \in [0; \pi]$. На промежутке $[-\pi; 0)$ $y = -x$ (в силу четности функции).

Таким образом,

$$y = \arccos(\cos x) = \begin{cases} x, & \text{если } x \in [0, \pi], \\ -x, & \text{если } x \in [-\pi, 0). \end{cases}$$

Выполнив периодическое продолжение построенного фрагмента графика – «уголок» АОВ – с отрезка $[-\pi; \pi]$ на всю числовую

прямую, получим искомый график функции $y = \arccos(\cos x)$ (рис. 3.24).

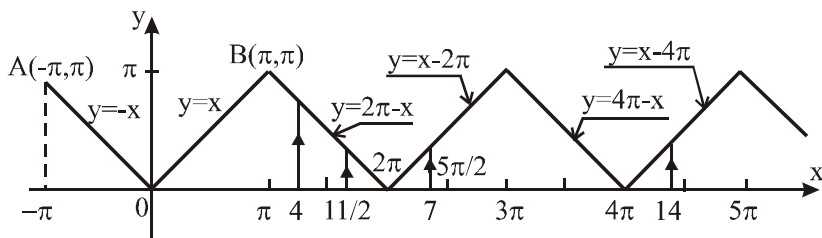


Рис. 3.24. График функции $y = \arccos(\cos x)$

Теперь решим поставленные вычислительные задачи:

а) $\pi < 4 < 2\pi \Rightarrow \arccos(\cos 4) = (2\pi - x) \Big|_{x=4} = 2\pi - 4;$

б) $\pi < \frac{11}{2} < 2\pi \Rightarrow \arccos\left(\cos \frac{11}{2}\right) = 2\pi - \frac{11}{2};$

в) $2\pi < 7 < 3\pi \Rightarrow \arccos(\cos 7) = 7 - 2\pi;$

г) $4\pi < 14 < 5\pi \Rightarrow \arccos(\cos 14) = (x - 4\pi) \Big|_{x=14} = 14 - 4\pi.$

Ответ: а) $2\pi - 4$; б) $2\pi - \frac{11}{2}$; в) $7 - 2\pi$; г) $14 - 4\pi$.

Пример 3.24. Постройте график функции $y = \arcsin(\cos x)$ и вычислите:

а) $\arcsin(\cos 3)$; б) $\arcsin(\cos 4)$;

в) $\arcsin(\cos 8)$; г) $\arcsin(\cos 14)$.

Решение. Поскольку

$$\arcsin(\cos x) = \arcsin\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right) = -\arcsin\left(\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right),$$

то для построения графика функции $y = \arcsin(\cos x)$ необходимо:

- построить график функции $y = \arcsin(\sin x)$ (рис. 3.22);
- сдвинуть построенный график вдоль оси Ox вправо на $\frac{\pi}{2}$;
- полученный на втором шаге график симметрично отобразить относительно оси Ox .

В результате получим график искомой функции $y = \arcsin(\cos x)$ (рис. 3.25).

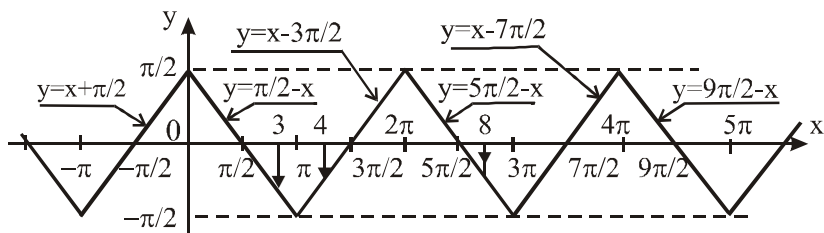


Рис. 3.25. График функции $y = \arcsin(\cos x)$

График функции $y = \arcsin(\cos x)$ можно построить иначе на основе тождества:

$$\arcsin(\cos x) = \frac{\pi}{2} - \arccos(\cos x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

В соответствии с этим тождеством для построения графика функции $y = \arcsin(\cos x)$ необходимо:

- построить график функции $y_1 = \arccos(\cos x)$ (рис. 3.24);
- построенный график отобразить симметрично относительно оси Ox ($y_2 = -y_1$);
- полученный на втором шаге график $y_2(x)$ сдвинуть на $\frac{\pi}{2}$ вверх вдоль оси Oy .

В результате будет получен график искомой функции $y = \arcsin(\cos x)$ (рис. 3.25).

Решим поставленные вычислительные задачи:

$$\text{а) } 0 < 3 < \pi \Rightarrow \arcsin(\cos 3) = \frac{\pi}{2} - 3;$$

$$\text{б) } \pi < 4 < 2\pi \Rightarrow \arcsin(\cos 4) = 4 - \frac{3}{2}\pi;$$

$$\text{в) } 2\pi < 8 < 3\pi \Rightarrow \arcsin(\cos 8) = \frac{5}{2}\pi - 8;$$

$$\text{г) } 4\pi < 14 < 5\pi \Rightarrow \arcsin(\cos 14) = \frac{9}{2}\pi - 14.$$

$$\text{Ответ: а) } \frac{\pi}{2} - 3; \quad \text{б) } 4 - \frac{3}{2}\pi; \quad \text{в) } \frac{5}{2}\pi - 8; \quad \text{г) } \frac{9}{2}\pi - 14.$$

Пример 3.25. Постройте график функции $y = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x)$ и вычислите:

$$\text{а) } \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} 3);$$

$$\text{б) } \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} 5);$$

$$\text{в) } \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} 7);$$

$$\text{г) } \operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg} \frac{21}{2}\right).$$

Решение. Функция $y = \operatorname{tg} x$ является периодической с основным периодом π . Соответственно периодической с основным периодом π будет и функция $y = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x)$. Поэтому достаточно построить фрагмент графика на интервале

$$\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right),$$

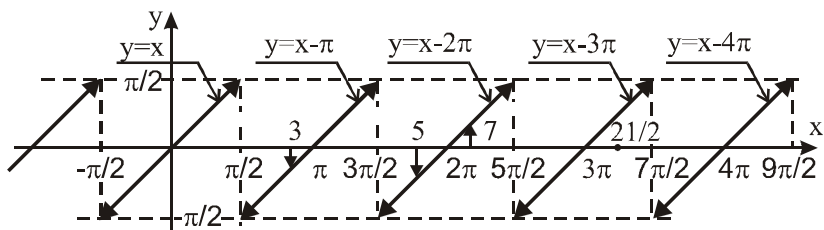


Рис. 3.26. График функции $y = \arctg(\operatorname{tg} x)$

где $y = \arctg(\operatorname{tg} x) = x$ (тождество 3.8) и затем продолжить его периодически на всю числовую ось (рис. 3.26).

Решим поставленные вычислительные задачи:

- а) $\frac{\pi}{2} < 3 < \frac{3}{2}\pi \Rightarrow \arctg(\operatorname{tg} 3) = 3 - \pi$;
- б) $\frac{3}{2}\pi < 5 < \frac{5}{2}\pi \Rightarrow \arctg(\operatorname{tg} 5) = 5 - 2\pi$;
- в) $\frac{3}{2}\pi < 7 < \frac{5}{2}\pi \Rightarrow \arctg(\operatorname{tg} 7) = 7 - 2\pi$;
- г) $\frac{5}{2}\pi < \frac{21}{2} < \frac{7}{2}\pi \Rightarrow \arctg\left(\operatorname{tg} \frac{21}{2}\right) = \frac{21}{2} - 3\pi$.

Ответ: а) $3 - \pi$; б) $5 - 2\pi$; в) $7 - 2\pi$; г) $\frac{21}{2} - 3\pi$.

3.2.5. Уравнения и неравенства

с обратными тригонометрическими функциями

Пример 3.26. Решите уравнения:

- а) $\arcsin x = \frac{\pi}{3}$; б) $\arcsin x = -\frac{\pi}{8}$;
- в) $\arcsin x = 2$; г) $\arcsin x = 1$.

Решение. С учетом определения и свойств функции $y = \arcsin x$

$$\left(D(y) = [-1; 1]; \quad E(y) = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right]; \quad \arcsin(-x) = -\arcsin x \right)$$

имеем:

$$\text{а) } \arcsin x = \frac{\pi}{3} \quad \Leftrightarrow \quad x = \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\text{б) } \arcsin x = -\frac{\pi}{8} \quad \Leftrightarrow \quad x = \sin\left(-\frac{\pi}{8}\right) = -\sin \frac{\pi}{8};$$

$$\text{в) } \arcsin x = 2 \quad \Rightarrow \quad x \in \emptyset, \quad \text{так как} \quad 2 > \frac{\pi}{2};$$

$$\text{г) } \arcsin x = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x = \sin 1.$$

$$\text{Ответ: а) } \frac{\sqrt{3}}{2}; \quad \text{б) } -\sin \frac{\pi}{8}; \quad \text{в) } \emptyset; \quad \text{г) } \sin 1.$$

Пример 3.27. Решите неравенства:

$$\text{а) } \arcsin x < \frac{\pi}{6}; \quad \text{б) } -\frac{\pi}{3} < \arcsin x < \frac{\pi}{5}; \quad \text{в) } \begin{cases} \arcsin x < -\frac{\pi}{6}; \\ \arcsin x \geq \frac{\pi}{4}. \end{cases}$$

Решение. Функция $y = \arcsin x$ является монотонно возрастающей на области определения $D(y) = [-1; 1]$:

$$\text{а) } \arcsin x < \frac{\pi}{6} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x < \sin \frac{\pi}{6} \\ -1 \leq x \leq 1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad -1 \leq x < \frac{1}{2};$$

$$\begin{aligned} \text{б) } -\frac{\pi}{3} < \arcsin x < \frac{\pi}{5} &\Leftrightarrow -\sin \frac{\pi}{3} < x < \sin \frac{\pi}{5} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow -\frac{\sqrt{3}}{2} < x < \sin \frac{\pi}{5}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{в) } \begin{cases} \arcsin x < -\frac{\pi}{6} \\ \arcsin x \geq \frac{\pi}{4} \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x < -\sin \frac{\pi}{6} \\ x \geq \sin \frac{\pi}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x \in \left[-1; -\frac{1}{2}\right) \cup \left[\frac{1}{\sqrt{2}}; 1\right]. \end{aligned}$$

Отметим, что здесь имеем дело с совокупностью неравенств, а не с системой. Система данных неравенств, как нетрудно видеть, не имеет решения.

$$\text{Ответ: а) } x \in \left[-1; \frac{1}{2}\right); \quad \text{б) } x \in \left[-\frac{\sqrt{3}}{2}; \sin \frac{\pi}{5}\right);$$

$$\text{в) } x \in \left[-1; -\frac{1}{2}\right) \cup \left[\frac{1}{\sqrt{2}}; 1\right].$$

Пример 3.28. Решите уравнения:

$$\text{а) } \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{3}; \quad \text{б) } \operatorname{arcctg} x = \frac{2}{3}\pi; \quad \text{в) } \operatorname{arcctg} x = \pi;$$

$$\text{г) } \operatorname{arcctg} x = 3; \quad \text{д) } \operatorname{arcctg}(-x) = 1.$$

Решение. С учетом определения и свойств функции

$$y = \operatorname{arcctg} x$$

$$(D(y) = \mathbb{R}; \quad E(y) = (0; \pi), \quad \operatorname{arcctg}(-x) = \pi - \operatorname{arcctg} x)$$

имеем:

$$\text{a) } \operatorname{arccctg} x = \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow x = \operatorname{ctg} \frac{\pi}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}};$$

$$\begin{aligned} \text{б) } \operatorname{arccctg} x = \frac{2}{3} \pi &\Leftrightarrow x = \operatorname{ctg} \frac{2}{3} \pi = \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} \right) = \\ &= -\operatorname{tg} \frac{\pi}{6} = -\frac{1}{\sqrt{3}}; \end{aligned}$$

$$\text{в) } \operatorname{arccctg} x = \pi \Rightarrow x \in \emptyset, \quad \text{так как} \quad \pi \notin E(y);$$

$$\text{г) } \operatorname{arccctg} x = 3 \Leftrightarrow x = \operatorname{ctg} 3;$$

$$\begin{aligned} \text{д) } \operatorname{arccctg}(-x) = 1 &\Leftrightarrow \pi - \operatorname{arccctg} x = 1 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \operatorname{arccctg} x = \pi - 1 \Leftrightarrow x = \operatorname{ctg}(\pi - 1). \end{aligned}$$

$$\text{Ответ: а) } \frac{1}{\sqrt{3}}; \quad \text{б) } -\frac{1}{\sqrt{3}}; \quad \text{в) } \emptyset; \quad \text{г) } \operatorname{ctg} 3; \quad \text{д) } \operatorname{ctg}(\pi - 1).$$

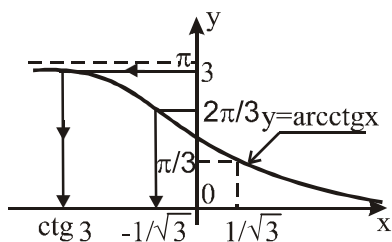


Рис. 3.27

На рис. 3.27 приведена иллюстрация решения примеров а), б), г) .

Пример 3.29. Решите неравенства:

$$\text{а) } \operatorname{arccctg} x > \frac{2}{3} \pi;$$

$$\text{б) } \frac{\pi}{4} < \operatorname{arccctg} x < \frac{3}{4} \pi; \quad \text{в) } \operatorname{arccctg} x < \frac{\pi}{6}.$$

Решение. Функция $y = \operatorname{arccctg} x$ является монотонно убывающей на области определения $D(y) = \mathbb{R}$. Поэтому

$$\text{a) } \operatorname{arccctg} x > \frac{2}{3}\pi \Leftrightarrow x < \operatorname{ctg} \frac{2}{3}\pi \Leftrightarrow x < -\frac{1}{\sqrt{3}};$$

$$\text{б) } \frac{\pi}{4} < \operatorname{arccctg} x < \frac{3}{4}\pi \Leftrightarrow \operatorname{ctg} \frac{3}{4}\pi < x < \operatorname{ctg} \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow -1 < x < 1;$$

$$\text{в) } \operatorname{arccctg} x < \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow x > \operatorname{ctg} \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow x > \sqrt{3}.$$

Ответ: а) $x < -\frac{1}{\sqrt{3}}$; б) $-1 < x < 1$; в) $x > \sqrt{3}$.

Пример 3.30. Решите неравенство $\frac{\pi}{6} < |\operatorname{arctg} x| \leq \frac{\pi}{3}$.

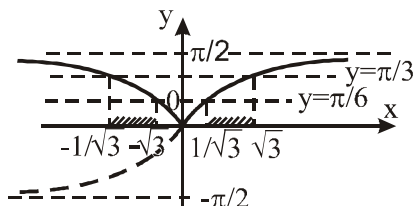


Рис. 3.28

Решение. Для решения данного неравенства целесообразно использовать графический подход. На рис. 3.28 изображены график функции $y = |\operatorname{arctg} x|$ и решение двойного

неравенства (заштрихованное множество на оси Ox).

Функция $y = |\operatorname{arctg} x|$ является четной и потому, если промежуток $(x_1, x_2]$ есть решение неравенства, то и промежуток $[-x_2, -x_1)$ также будет решением.

$$\text{Ответ: } x \in \left[-\sqrt{3}; -\frac{1}{\sqrt{3}} \right) \cup \left(\frac{1}{\sqrt{3}}; \sqrt{3} \right].$$

Пример 3.31. Решите уравнение

$$2(\arcsin x)^2 - \arcsin x - 1 = 0.$$

Решение. Положим $t = \arcsin x$. В соответствии с определением функции $y = \arcsin x$ множество допустимых значений переменной t - отрезок $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

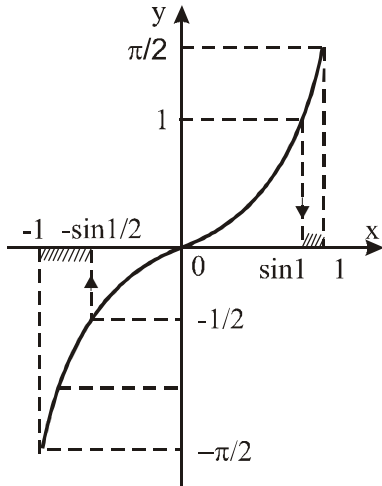


Рис. 3.29

Решив квадратное уравнение $2t^2 - t - 1 = 0$, получим его корни $t_1 = -\frac{1}{2}$; $t_2 = 1$. Оба корня принадлежат ОДЗ уравнения. Поэтому

$$\arcsin x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \sin\left(-\frac{1}{2}\right) = -\sin \frac{1}{2};$$

$$\arcsin x = 1 \Leftrightarrow x = \sin 1.$$

На рис. 3.29 приведена геометрическая иллюстрация решения данного примера.

Ответ: $x = -\sin \frac{1}{2}$, $x = \sin 1$.

Пример 3.32. Решите неравенство

$$2(\arcsin x)^2 - \arcsin x - 1 > 0.$$

Решение. Используя результаты предыдущего примера, получаем неравенство и его решение

$$2t^2 - t - 1 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t < -\frac{1}{2} \\ t > 1 \\ -\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}, \end{cases}$$

откуда $t \in \left[-\frac{\pi}{2}; -\frac{1}{2}\right) \cup \left(1; \frac{\pi}{2}\right]$ или $x \in \left[-1; -\sin \frac{1}{2}\right) \cup (\sin 1; 1]$.

На рис. 3.29 это множество заштриховано (на оси Ox).

Ответ: $x \in \left[-1; -\sin \frac{1}{2}\right) \cup (\sin 1; 1]$.

Пример 3.33. Решите уравнение

$$(\operatorname{arccctg} x)^2 - \frac{4}{3} \pi \cdot \operatorname{arccctg} x + \frac{\pi^2}{3} = 0.$$

Решение. Положив $t = \operatorname{arccctg} x$, $0 < t < \pi$, получим квадратное уравнение

$$t^2 - \frac{4}{3} \pi t + \frac{\pi^2}{3} = 0.$$

Его корни $t_1 = \frac{\pi}{3}$ и $t_2 = \pi$. Подходит $t_1 = \frac{\pi}{3}$; корень $t_2 = \pi$ не удовлетворяет неравенству $0 < t < \pi$. Решаем уравнение $\operatorname{arccctg} x = \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = \operatorname{ctg} \frac{\pi}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Ответ: $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Пример 3.34. Решите неравенство

$$(\operatorname{arccctg} x)^2 - \frac{4}{3} \pi \operatorname{arccctg} x + \frac{\pi^2}{3} \leq 0.$$

Решение. С учетом результатов предыдущего примера решением неравенства будет множество

$$\frac{\pi}{3} \leq t < \pi \quad (t = \operatorname{arccctg} x),$$

откуда $x \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$ (рис. 3.30).

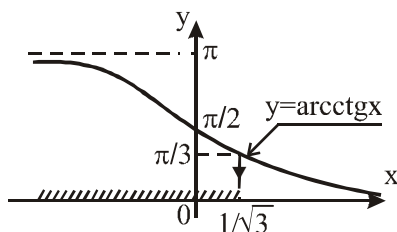


Рис. 3.30

Ответ: $x \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Пример 3.35. Решите уравнения

а) $\arccos x^2 = \frac{\pi}{3}$; б) $\arccos \sqrt{x} = 2$;

в) $\arccos x^2 = \frac{2}{3} \pi$; г) $\arccos \sqrt{x} = \frac{\pi}{3}$.

Решение:

а) $\arccos x^2 = \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow x^2 = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}};$

б) $\arccos \sqrt{x} = 2 \Rightarrow x \in \emptyset$, так как $\cos 2 < 0$ а $\sqrt{x} \geq 0$ ($\sqrt{x} \in [0;1]$);

в) $\arccos x^2 = \frac{2}{3} \pi \Rightarrow x \in \emptyset$, так как $\cos \frac{2}{3} \pi = -\frac{1}{2} < 0$,
а $x^2 \geq 0$ ($x^2 \in [0;1]$);

г) $\arccos \sqrt{x} = \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \sqrt{x} = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{1}{4}.$

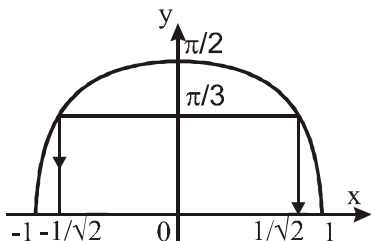


Рис. 3.31.

График функции $y = \arccos x^2$

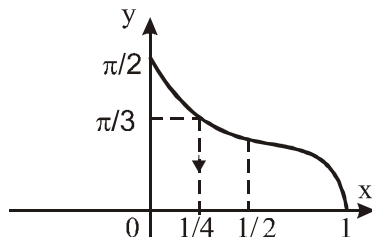


Рис. 3.32.

График функции $y = \arccos \sqrt{x}$

На рис. 3.31 приведен график функции $y = \arccos x^2$, а на рис. 3.32 – график функции $y = \arccos \sqrt{x}$.

Ответ: а) $x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$; б) $\emptyset$; в) $\emptyset$; г) $x = \frac{1}{4}$.

Пример 3.36. Решите неравенства

а) $\arcsin x^2 > \frac{\pi}{6}$; б) $\arcsin x^2 < 2$; в) $\frac{1}{2} \leq \arcsin x^2 < 1$.

Решение. а) Функция $y = \arcsin x^2$ определена на отрезке $[-1; 1]$ и является четной функцией

$$\arcsin x^2 > \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 > \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \\ -1 \leq x \leq 1. \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left[-1; -\frac{1}{\sqrt{2}} \right) \cup \left(\frac{1}{\sqrt{2}}; 1 \right];$$

б) поскольку $E(\arcsin x^2) = \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ и $2 > \frac{\pi}{2}$, то неравенство

$\arcsin x^2 < 2$ справедливо для всех $x \in [-1; 1]$;

$$\text{в) } \frac{1}{2} \leq \arcsin x^2 < 1 \Leftrightarrow \sin \frac{1}{2} \leq x^2 < \sin 1 \Leftrightarrow$$

$$x \in \left(-\sqrt{\sin 1}; -\sqrt{\sin \frac{1}{2}}\right] \cup \left[\sqrt{\sin \frac{1}{2}}; \sqrt{\sin 1}\right).$$

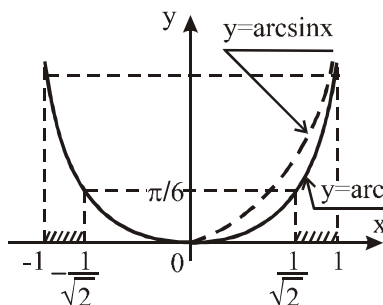


Рис. 3.33а. График функции $y = \arcsin x^2$

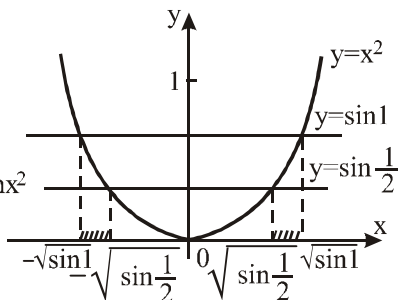


Рис. 3.33б

График функции $y = \arcsin x^2$ изображен на рис. 3.33а. На рис. 3.33б приведена иллюстрация решения неравенства

$$\sin \frac{1}{2} < x^2 < \sin 1.$$

Ответ: а) $x \in \left[-1; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cup \left(\frac{1}{\sqrt{2}}; 1\right]$; б) $x \in [-1; 1]$;

$$\text{в) } x \in \left(-\sqrt{\sin 1}; -\sqrt{\sin \frac{1}{2}}\right] \cup \left[\sqrt{\sin \frac{1}{2}}; \sqrt{\sin 1}\right).$$

Пример 3.37*. Решите уравнение

$$\arccos(\cos x) = \frac{5}{18}x + \frac{\pi}{6}.$$

Решение. Поскольку (см. пример 3.23)

$$\arccos(\cos x) = \begin{cases} 2k\pi - x, & \text{если } x \in [(2k-1)\pi, 2k\pi], k \in \mathbb{Z} \\ x - 2k\pi, & \text{если } x \in [2k\pi, (2k+1)\pi], k \in \mathbb{Z}, \end{cases}$$

то решение исходного уравнения равносильно решению совокупности уравнений

$$\begin{cases} 2k\pi - x = \frac{5}{18}x + \frac{\pi}{6}, & x \in [(2k-1)\pi, 2k\pi], k \in \mathbb{Z}; \\ x - 2k\pi = \frac{5}{18}x + \frac{\pi}{6}, & x \in [2k\pi, (2k+1)\pi], k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Эта совокупность имеет бесконечное число уравнений. Однако в данном случае необходимо решить лишь некоторое конечное число уравнений. Следует это из того, что

$$E(\arccos(\cos x)) = [0; \pi], \text{ а } E\left(\frac{5}{18}x + \frac{\pi}{6}\right) = \mathbb{R}.$$

Решение примеров, аналогичных рассматриваемому, целесообразно осуществлять с графическим сопровождением.

На рис. 3.34 изображены графики функций

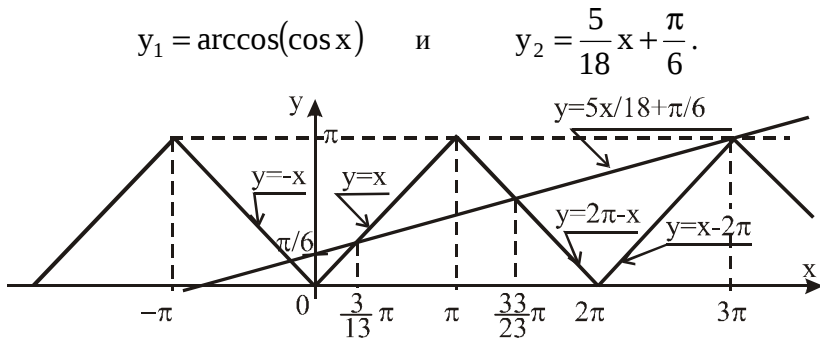


Рис. 3.34

Рисунок позволяет заключить, что достаточно решить уравнения

$$-x = \frac{5}{18}x + \frac{\pi}{6}, \quad x \in [-\pi, 0); \quad x = \frac{5}{18}x + \frac{\pi}{6}, \quad x \in [0, \pi);$$

$$2\pi - x = \frac{5}{18}x + \frac{\pi}{6}, \quad x \in [\pi, 2\pi); \quad x - 2\pi = \frac{5}{18}x + \frac{\pi}{6}, \quad x \in [2\pi, 3\pi);$$

$$4\pi - x = \frac{5}{18}x + \frac{\pi}{6}; \quad x \in [3\pi, 4\pi).$$

Решив эти уравнения, получим

$$\text{Ответ: } x = -\frac{3}{23}\pi; \quad x = \frac{3}{13}\pi; \quad x = \frac{33}{23}\pi; \quad x = 3\pi.$$

Пример 3.38*. Решите неравенство

$$\arccos(\cos x) \geq \frac{5}{18}x + \frac{\pi}{6}.$$

Решение. С учетом результатов предыдущего примера получаем решение

$$x \in \left(-\infty; -\frac{3}{23}\pi\right] \cup \left[\frac{3}{13}\pi; \frac{33}{23}\pi\right] \cup \{3\pi\}.$$

$$\text{Ответ: } x \in \left(-\infty; -\frac{3}{23}\pi\right] \cup \left[\frac{3}{13}\pi; \frac{33}{23}\pi\right] \cup \{3\pi\}.$$

Пример 3.39*. Решите уравнение

$$\arcsin(\cos x) = x^2 + \frac{\pi}{2}.$$

Решение. Поскольку $\arcsin(\cos x) \leq \frac{\pi}{2}$ для всех $x \in \mathbb{R}$ (см.

рис. 3.24), а $x^2 + \frac{\pi}{2} \geq \frac{\pi}{2}$, то уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} \arcsin(\cos x) = \frac{\pi}{2}, \\ x^2 + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Из второго уравнения имеем $x = 0$. Это значение x является решением и первого уравнения:

$$\arcsin(\cos 0) = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}.$$

Ответ: $x = 0$.

Пример 3.40*. Найдите все значения параметра a , при которых уравнение

$$\arcsin(\cos x) = (x - \pi)^2 + a \quad (3.17)$$

имеет два различных решения на отрезке $[0; 2\pi]$, и найдите эти решения.

Решение. График функции $y_1 = \arcsin(\cos x)$ построен в примере 3.24 (рис. 3.25). Графиком функции $y_2 = (x - \pi)^2 + a$ является семейство парабол с вершиной в точке (π, a) . С учетом данного замечания уравнение (3.17) на отрезке $[0; 2\pi]$ равносильно совокупности уравнений

$$\begin{cases} \frac{\pi}{2} - x = (x - \pi)^2 + a & \text{при } 0 \leq x \leq \pi, \\ x - \frac{3}{2}\pi = (x - \pi)^2 + a & \text{при } \pi < x \leq 2\pi. \end{cases} \quad (3.18)$$

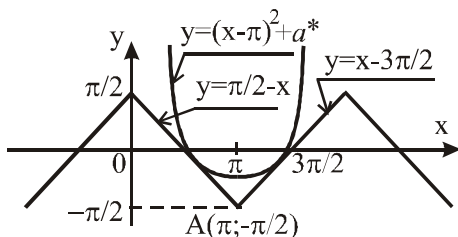


Рис. 3.35

При $a = -\frac{\pi}{2}$

[вершина параболы находится в точке $A\left(\pi; -\frac{\pi}{2}\right)$ (рис. 3.35)]

совокупность уравнений

(3.18) имеет три решения:

$$x_1 = \pi - 1, \quad x_2 = \pi, \quad x_3 = \pi + 1 \text{ (проверьте!).}$$

При $a_1^* \leq a < -\frac{\pi}{2}$, где a_1^* отвечает значению параметра a ,

при котором парабола проходит через точки $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ и $\left(2\pi; \frac{\pi}{2}\right)$, парабола будет пересекать каждую прямую $y = \frac{\pi}{2} - x$, $x \in [0; \pi]$ и $y = x - \frac{3}{2}\pi$, $x \in (\pi; 2\pi]$, в одной точке, т.е. совокупность (3.18) будет иметь два различных решения. Значение a_1^* параметра a найдем из первого уравнения совокупности (3.18), положив в нем $x = 0$:

$$\frac{\pi}{2} = \pi^2 + a \Rightarrow a_1^* = \frac{\pi}{2} - \pi^2.$$

Таким образом, при $a \in \left[\frac{\pi}{2} - \pi^2; -\frac{\pi}{2}\right)$ уравнение (3.17)

имеет два различных решения. Найдем эти решения. Из первого уравнения совокупности (3.18) получаем

$$x_1 = \frac{2\pi - 1 - \sqrt{1 - 2\pi - 4a}}{2}$$

и из второго уравнения

$$x_2 = \frac{2\pi + 1 + \sqrt{1 - 2\pi - 4a}}{2}.$$

При $-\frac{\pi}{2} < a < a_2^{\bullet}$ графики функций

$$y_1(x) = \arcsin(\cos x), \quad x \in [0; 2\pi], \quad \text{и} \quad y_2(x) = (x - \pi)^2 + a$$

будут пересекаться в четырех точках. Значение $a_2^{\bullet}$ параметра a соответствует случаю, когда парабола $y_2(x)$ касается прямых

$$y = \frac{\pi}{2} - x \quad \text{и} \quad y = x - \frac{3}{2}\pi. \quad \text{Искомое значение } a_2^{\bullet} \text{ параметра } a$$

найдем из условия единственности решения уравнения

$$\frac{\pi}{2} - x = (x - \pi)^2 + a \quad \text{или} \quad x - \frac{3}{2}\pi = (x - \pi)^2 + a.$$

Квадратное уравнение

$$\frac{\pi}{2} - x = (x - \pi)^2 + a \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - (2\pi - 1)x + \pi^2 - \frac{\pi}{2} + a = 0$$

имеет единственное решение тогда и только тогда, когда его дискриминант $D_x = 0$:

$$(2\pi - 1)^2 - 4\left(\pi^2 - \frac{\pi}{2} + a\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad a_2^{\bullet} = \frac{1 - 2\pi}{4}.$$

$$\text{При этом } x_1 = \pi - \frac{1}{2}; \quad x_2 = \pi + \frac{1}{2}.$$

Ответ:

$$a \in \left(\frac{\pi}{2} - \pi^2; -\frac{\pi}{2} \right) \Rightarrow \begin{aligned} x_1 &= \frac{2\pi - 1 - \sqrt{1 - 2\pi - 4a}}{2}, \\ x_2 &= \frac{2\pi + 1 + \sqrt{1 - 2\pi - 4a}}{2}; \end{aligned}$$

$$a = \frac{1 - 2\pi}{4} \Rightarrow x_1 = \pi - \frac{1}{2}, \quad x_2 = \pi + \frac{1}{2}.$$

3.3. Задачи для самостоятельного решения

Раздел 3.1

1. Найдите обратную функцию $f^{-1}(x)$ для заданной

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} + \frac{1}{2}, & -3 \leq x \leq 3, \\ \frac{3}{2}x - \frac{5}{2}, & 3 < x \leq 7, \end{cases}$$

и постройте графики функций $f(x)$ и $f^{-1}(x)$.

2. Найдите обратную функцию $f^{-1}(x)$ для заданной

$$f(x) = |2x - 1| - |x|, \quad x \leq \frac{1}{2},$$

и постройте графики функций $f(x)$ и $f^{-1}(x)$.

3. Найдите обратную функцию $f^{-1}(x)$ для заданной

$$f(x) = x^2 - 2x + 2, \quad x \geq 1,$$

и постройте графики функций $f(x)$ и $f^{-1}(x)$.

4. Используя результаты задачи 3, решите уравнение

$$x^2 - 2x + 1 = \sqrt{x - 1}.$$

5. Найдите обратную функцию $f^{-1}(x)$ для заданной

$$f(x) = \frac{2x+5}{x+2}, \quad x > -2,$$

и постройте графики функций $f(x)$ и $f^{-1}(x)$.

6. Найдите обратную функцию $f^{-1}(x)$ для заданной

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & 0 \leq x < 4, \\ x^2 - 6x + 11, & x \geq 4, \end{cases}$$

и постройте графики функций $f(x)$ и $f^{-1}(x)$.

7. Найдите обратную функцию $f^{-1}(x)$ для заданной

а) $f(x) = x^4 - 2x^2, \quad x \leq -1$; б) $f(x) = x^4 - 2x^2, \quad -1 \leq x \leq 0$;

в) $f(x) = x^4 - 2x^2, \quad 0 \leq x \leq 1$; г) $f(x) = x^4 - 2x^2, \quad x \geq 1$.

8*. Используя результаты примера 7, решите уравнения:

а) $x^4 - 2x^2 = -\sqrt{1 - \sqrt{1+x}}$; б) $x^4 - 2x^2 = \sqrt{1 + \sqrt{1+x}}$.

9. Решите уравнения:

а) $x^3 + 8 = 9\sqrt[3]{9x-8}$; б) $x^3 + 12 = 13\sqrt[3]{13x-12}$.

10. Решите уравнение

$$f^{-1}(x) = 3x - 5,$$

если известно, что $f(2x+1) = 6x+9$.

11. Решите неравенство

$$x \cdot f^{-1}(x+2) < 2x+4,$$

если $f(x) = x+3$.

12. Решите уравнение

$$4 \cdot f^{-1}(\cos^2 x) = 1 - \cos x,$$

если известно, что $f(2x + 3) = 4x + 6$.

13. Решите неравенство

$$f(3 \sin^2 x) \geq \frac{13}{3},$$

если известно, что $f^{-1}(x + 4) = 3x + 2$.

14. Найдите корни уравнения

$$3g^2(x) - 40g(x) + 77 = 0,$$

где $g(x)$ - функция, обратная к функции $y = \log_{\frac{1}{3}}(x - 2)$.

Пункт 3.2.4

Вычислите

$$15. \sin\left(2 \arccos \frac{\sqrt{3}}{2} - \arctg 1\right). \quad 16. \sin\left(\arcsin \frac{2}{3} + \arccos \frac{1}{5}\right)$$

$$17. \sin\left(2 \arccos \frac{2}{5}\right) \quad 18. \cos\left(2 \arcsin \frac{1}{4}\right) \quad 19. \sin^2(\arctg 5).$$

$$20. \sin\left(2 \arctg \frac{1}{2}\right) \quad 21. \tg\left(\arcsin \frac{1}{3}\right) \quad 22. \tg\left(2 \arcsin \frac{1}{3}\right)$$

$$23. \tg\left(2 \arccos \frac{2}{5}\right) \quad 24. \tg\left(\arcsin \frac{3}{5} - \arccos \frac{1}{4}\right)$$

$$25. \tg\left(\frac{1}{2} \arccos \frac{2}{3}\right) \quad 26. \ctg(\arctg 5). \quad 27. \ctg\left(2 \arccos \frac{1}{5}\right)$$

$$28. \sin\left(\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\sqrt{15}\right) \quad 29. \cos\left(\frac{1}{2}\arcsin\frac{2}{3}\right)$$

$$30. \sin\left(\frac{1}{2}\arccos\left(-\frac{4}{5}\right)\right) \quad 31. \cos\left(\frac{1}{2}\arcsin\left(-\frac{5}{13}\right)\right)$$

$$32. \cos(2\operatorname{arctg}3). \quad 33. \operatorname{ctg}\left(\arccos\frac{4}{5}-\operatorname{arctg}5\right).$$

$$34. \cos(\operatorname{arctg}2-\operatorname{arctg}3). \quad 35. \sin(\operatorname{arctg}3-\operatorname{arctg}2).$$

$$36. \text{Докажите, что } \operatorname{arctg}2 = \operatorname{arctg}3 + \frac{\pi}{4}.$$

Вычислите

$$37. \arcsin\left(\cos\frac{77}{6}\pi\right). \quad 38. \arccos\left(\sin\frac{279}{5}\pi\right)$$

$$39. \arcsin\left(\sin\frac{103}{8}\pi\right) \quad 40. \arccos\left(\cos\frac{101}{18}\pi\right)$$

$$41. \arccos\left(\sin\left(-\frac{\pi}{8}\right)\right) \quad 42. \arccos\left(\sin\left(-\frac{28}{5}\pi\right)\right)$$

$$43. \arccos\left(-\cos\frac{29}{6}\pi\right) \quad 44. \operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{45}{7}\pi\right)$$

$$45. \operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{47}{7}\pi\right) \quad 46. \operatorname{arctg}\left(\operatorname{ctg}\frac{65}{9}\pi\right)$$

$$47. \operatorname{arcctg}\left(\operatorname{tg}\frac{103}{13}\pi\right) \quad 48. \operatorname{arcctg}\left(-\operatorname{tg}\frac{89}{11}\pi\right)$$

$$49. \arcsin(\sin 16). \quad 50. \arccos(\cos 23). \quad 51. \arcsin(\cos 8).$$

$$52. \arccos(\sin 12). \quad 53. \operatorname{arctg}(\operatorname{tg}13). \quad 54. \operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg}11).$$

55. $\arctg(\operatorname{ctg} 5)$. 56. $\operatorname{arcctg}(\operatorname{tg} 18)$.
57. Постройте график функции $y = \arccos(\sin x)$ и вычислите:
- а) $\arccos(\sin 17)$; б) $\arccos(\sin 3)$;
 в) $\arccos(\sin(-10))$; г) $\arccos(-\sin 19)$.
58. Постройте график функции $y = \operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} x)$ и вычислите:
- а) $\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} 14)$; б) $\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} 25)$;
 в) $\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg}(-3))$; г) $\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg}(-12))$.
59. Постройте график функции $y = \arctg(\operatorname{ctg} x)$ и вычислите:
- а) $\arctg(\operatorname{ctg} 7)$; б) $\arctg(\operatorname{ctg} 15)$;
 в) $\arctg(\operatorname{ctg}(-5))$; г) $\arctg(\operatorname{ctg}(-13))$.
60. Постройте график функции $y = \operatorname{arcctg}(\operatorname{tg} x)$ и вычислите:
- а) $\operatorname{arcctg}(\operatorname{tg} 9)$; б) $\operatorname{arcctg}(\operatorname{tg} 16)$;
 в) $\operatorname{arcctg}(\operatorname{tg}(-7))$; г) $\operatorname{arcctg}(-\operatorname{tg} 17)$.

Пункт 3.2.5

Решите уравнения

61. а) $\arcsin x = -1,5$; б) $\arcsin x = \frac{\pi}{6}$;
 в) $\arcsin x = 1,6$; г) $\arcsin x = -\frac{4}{9}\pi$.
62. а) $\arccos x = \frac{\pi}{6}$; б) $\arccos x = \frac{39}{40}\pi$;
 в) $\arccos x = 3$; г) $\arccos x = 3,42$.

63. а) $\arcsin x = \frac{\pi}{3}$; б) $\arccos x = \frac{\pi}{3}$;

в) $\operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{3}$; г) $\operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{3}$.

64. а) $\operatorname{arctg} x = -\frac{\pi}{6}$; б) $\operatorname{arctg} x = 1$;

в) $\operatorname{arctg} x = -\frac{\pi}{2}$; г) $\operatorname{arctg} x = -1,5$.

65. а) $\operatorname{arcctg} x = \frac{1}{2}$; б) $\operatorname{arcctg} x = \frac{5}{6}\pi$;

в) $\operatorname{arcctg} x = 3$; г) $\operatorname{arcctg} x = -\frac{\pi}{6}$.

66. а) $\arcsin x + \arccos x = 1$; б) $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{3}$;

в) $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$.

67. а) $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \pi$; б) $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = 2$;

в) $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2}$.

68. $18(\arcsin x)^2 - 3\pi \arcsin x - \pi^2 = 0$.

69. $2(\arcsin x)^2 - \arcsin x - 3 = 0$.

70. $6(\arccos x)^2 - 7\pi \arccos x + 2\pi^2 = 0$.

71. $6(\arccos x)^2 + \pi \arccos x - 2\pi^2 = 0$.

72. $9(\operatorname{arctg} 2x)^2 - 3\pi \operatorname{arctg} 2x - 2\pi^2 = 0$.

$$73. 2(\operatorname{arccctg} x)^2 - 7\operatorname{arccctg} x + 5 = 0.$$

$$74. \arcsin x = \arccos x. \quad 75. \arcsin 3x = \arccos 4x.$$

$$76. 2\arcsin x + 3\arccos x = \pi. \quad 77. 4\operatorname{arctg} x + 8\operatorname{arccctg} x = 3\pi.$$

$$78. 3\operatorname{arctg}(2x) + 4\operatorname{arccctg}(2x) = \frac{5}{3}\pi.$$

$$79. 3\arcsin(4x) + 6\arccos(4x) = 4\pi.$$

$$80. (\arcsin x)^2 + (\arccos x)^2 = \frac{\pi^2}{8}.$$

$$81. (\arcsin x)^2 + (\arccos x)^2 = \frac{5}{36}\pi^2.$$

$$82. (\arcsin x)^2 + (\arccos x)^2 = \frac{17}{36}\pi^2.$$

$$83. (\operatorname{arctg} x)^2 + 4(\operatorname{arccctg} x)^2 = \frac{5}{16}\pi^2.$$

$$84. \arcsin 3x \cdot \arccos 3x = -\frac{\pi^2}{9}.$$

$$85. \arcsin(x-1) \cdot \arccos(x-1) = \frac{\pi^2}{18}.$$

$$86. \operatorname{arctg} x \cdot \operatorname{arccctg} x = -\frac{5}{18}\pi^2. \quad 87. \frac{\operatorname{arctg}(x+1)}{\operatorname{arccctg}(x+1)} = \frac{1}{2}.$$

$$88. \frac{\arcsin(\sqrt{3}x)}{\arccos^2(\sqrt{3}x)} = \frac{12}{\pi}.$$

$$89. \text{ а) } \arcsin x^2 = \frac{\pi}{3}; \quad \text{ б) } \arcsin x^2 = \frac{3}{2};$$

$$\text{в) } \operatorname{arctg} x^2 = \frac{\pi}{4}; \quad \text{г) } \operatorname{arctg} x^2 = 1.$$

$$90^*. \arccos(\sin x) = \frac{x}{7} + \frac{\pi}{2}. \quad 91^*. \operatorname{arcc} \operatorname{tg}(\operatorname{ctg} x) = \pi - \frac{x}{3}.$$

$$92^*. \operatorname{arctg}(\operatorname{ctg} x) = \frac{x}{3} - \frac{\pi}{6}. \quad 93 \quad \cos(\arccos x - \arcsin x) = x^2 - 1.$$

$$94. \arcsin\left(\sin \frac{2}{x}\right) = \sqrt{x+2} - 1. \quad 95. \arccos x = \operatorname{arctg} x.$$

$$96. \arccos(1-x) = \frac{\pi}{2x}. \quad 97. \frac{1}{\pi} \arcsin(\cos \pi x) = x^2 - 4x + \frac{9}{2}.$$

$$98. \frac{2}{\pi} \arcsin \frac{2}{x^2 + 2} = |x| + 1.$$

$$99. \frac{2}{\pi} \arcsin \frac{2}{x^2 + 2} = |x + 1|, \quad x \geq -1.$$

Решите неравенства

$$100. \text{ а) } \arcsin x < -\frac{\pi}{3}; \quad \text{ б) } \arcsin x > -\frac{\pi}{6};$$

$$\text{ в) } -2 < \arcsin x < 1; \quad \text{ г) } \frac{1}{2} < |\arcsin x| \leq \frac{\pi}{3}.$$

$$101. \text{ а) } \arccos x < \frac{5}{6}\pi; \quad \text{ б) } \arccos x > \frac{\pi}{3};$$

$$\text{ в) } 0 < \arccos x < 3; \quad \text{ г) } \arccos|x| \geq \frac{\pi}{6}.$$

$$102. \text{ а) } \operatorname{arctg} x \leq \frac{\pi}{4}; \quad \text{ б) } \operatorname{arctg} x > -\frac{2\pi}{3};$$

$$\text{в) } |\operatorname{arctg} x| > \frac{\pi}{6}; \quad \text{г) } -\frac{3}{2} < \operatorname{arctg} x \leq 1.$$

$$103. \text{ а) } \operatorname{arcc} \operatorname{tg} x \geq \frac{2}{3} \pi; \text{ б) } \operatorname{arcc} \operatorname{tg} x < 3,1;$$

$$\text{в) } \operatorname{arcc} \operatorname{tg} |x| < \frac{\pi}{6}; \quad \text{г) } \frac{\pi}{6} < \operatorname{arcc} \operatorname{tg} x \leq \frac{5}{6} \pi.$$

$$104. \operatorname{arcsin}(x-5) \leq \operatorname{arcsin}(2x-9).$$

$$105. \operatorname{arccos}(2x-3) \geq \operatorname{arccos}(3x-2).$$

$$106. \operatorname{arccos}(x+2) < \operatorname{arccos}(2x+3).$$

$$107. \operatorname{arcsin}^2 x + \frac{\pi}{6} \operatorname{arcsin} x - \frac{\pi^2}{18} \leq 0.$$

$$108. \operatorname{arccos}^2 x - \frac{7}{12} \pi \operatorname{arccos} x + \frac{\pi^2}{12} > 0.$$

$$109. \operatorname{arctg}^2 x - \frac{\pi}{3} \operatorname{arctg} x - \frac{2}{9} \pi^2 \geq 0.$$

$$110. \operatorname{arcc} \operatorname{tg}^2 x - \frac{11}{12} \pi \operatorname{arcc} \operatorname{tg} x + \frac{\pi^2}{8} < 0.$$

$$111. \operatorname{arccos} x \cdot \operatorname{arcsin} x \leq -\frac{5}{18} \pi^2.$$

$$112. \operatorname{arctg} x \cdot \operatorname{arcc} \operatorname{tg} x > -\frac{5}{18} \pi^2.$$

$$113. \frac{\operatorname{arctg}(x+1)}{\operatorname{arcc} \operatorname{tg}(x+1)} \geq 1.$$

$$114. \frac{\operatorname{arcsin}(\sqrt{3}x)}{(\operatorname{arccos}(\sqrt{3}x))^2} \geq \frac{12}{\pi}.$$

$$115. \frac{\operatorname{arcsin}(\sqrt{3}x)}{(\operatorname{arccos}(\sqrt{3}x))^2} < \frac{12}{\pi}.$$

$$116. \frac{\pi}{6} < \arcsin x^2 < \frac{\pi}{3}.$$

$$117. \frac{\pi}{4} \leq \operatorname{arctg} x^2 \leq 1.$$

$$118. \arcsin^2 x + \arccos^2 x \leq \frac{\pi^2}{8}.$$

$$119. \arcsin^2 x + \arccos^2 x < \frac{5}{36} \pi^2.$$

$$120. \arcsin^2 x + \arccos^2 x \geq \frac{5}{36} \pi^2.$$

$$121. (\operatorname{arctg} x)^2 + 4(\operatorname{arctg} x)^2 \leq \frac{5}{16} \pi^2. \quad 122. \operatorname{arctg} x \geq \arcsin x.$$

$$123. \arccos(2-x) < \arccos(x-1). \quad 124. \arccos(1-x) \geq \frac{\pi}{2x}.$$

$$125. (7-4\sqrt{3})x \leq \frac{1}{\pi} \arccos(\cos \pi x) \leq \frac{1}{x}.$$

$$126. \frac{1}{\pi} \arcsin(\cos \pi x) \geq x^2 - 4x + \frac{9}{2}.$$

$$127^*. \arccos(\sin x) \leq \frac{x}{7} + \frac{\pi}{2}. \quad 128^*. \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) \leq -\frac{x}{3} + \frac{\pi}{3}.$$

$$129^*. \arcsin(\cos x) \geq \arccos(\cos x).$$

130*. Найдите значения параметра a , при которых уравнение

$$\arcsin x + 2 \arccos x = a$$

имеет решения и найдите эти решения.

131*. Найдите значения параметра a , при которых уравнение

$$(\arcsin x)^2 + 4(\arccos x)^2 = a^2$$

имеет решения, и найдите эти решения.

3.4. Ответы

$$1. f^{-1}(x) = \begin{cases} 2x-1, & -1 \leq x \leq 2, \\ \frac{2}{3}x + \frac{5}{3}, & 2 < x \leq 8. \end{cases}$$

$$2. f^{-1}(x) = \begin{cases} -\frac{x}{3} + \frac{1}{3}, & -\frac{1}{2} \leq x < 1, \\ 1-x, & x \geq 1. \end{cases}$$

$$3. f^{-1}(x) = 1 + \sqrt{x-1}, \quad x \geq 1. \quad 4. x=1; \quad x=2.$$

$$5. f^{-1}(x) = \frac{5-2x}{x-2}, \quad x > 2. \quad 6. f^{-1}(x) = \begin{cases} x^2, & 0 \leq x < 2, \\ 3 + \sqrt{x-2}, & x \geq 2. \end{cases}$$

$$7. a) f^{-1}(x) = -\sqrt{1 + \sqrt{1+x}}, \quad x \geq -1;$$

$$б) f^{-1}(x) = -\sqrt{1 - \sqrt{1+x}}, \quad -1 \leq x \leq 0;$$

$$в) f^{-1}(x) = \sqrt{1 - \sqrt{1+x}}, \quad -1 \leq x \leq 0;$$

$$г) f^{-1}(x) = \sqrt{1 + \sqrt{1+x}}, \quad x \geq -1.$$

$$8. a) x=0, x=-1, x=\frac{1-\sqrt{5}}{2}; \quad б) x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

$$9. a) x=1, x=\frac{-1 \pm \sqrt{33}}{2}; \quad б) x=-4, x=1, x=3. \quad 10. x=\frac{9}{8}.$$

$$11. -1 < x < 4. \quad 12. x = \pi + 2\pi n, x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi m, \quad n, m \in \mathbb{Z}.$$

$$13. x = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad 14. x = -2; \quad x = 1.$$

$$15. \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} \text{ или } \sin \frac{\pi}{12}. \quad 16. \frac{2}{15} + 2\sqrt{\frac{2}{15}}. \quad 17. \frac{4}{25}\sqrt{21}. \quad 18. \frac{7}{8}.$$

$$19. \frac{1}{26}. \quad 20. \frac{4}{5}. \quad 21. \frac{1}{2\sqrt{2}}. \quad 22. \frac{4\sqrt{2}}{7}. \quad 23. -\frac{4}{17}\sqrt{21}.$$

$$24. \frac{3-4\sqrt{15}}{4+3\sqrt{15}}. \quad 25. \frac{1}{\sqrt{5}}. \quad 26. \frac{1}{5}. \quad 27. -\frac{23}{4\sqrt{6}}. \quad 28. \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}.$$

$$29. \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{6}}. \quad 30. \frac{3}{\sqrt{10}}. \quad 31. \frac{5}{\sqrt{26}}. \quad 32. \frac{4}{5}. \quad 33. -\frac{19}{17}. \quad 34. \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

$$35. -\frac{1}{5\sqrt{2}}. \quad 37. -\frac{\pi}{3}. \quad 38. \frac{7}{10}\pi. \quad 39. \frac{\pi}{8}. \quad 40. \frac{7}{18}\pi. \quad 41. \frac{5}{8}\pi. \quad 42. \frac{\pi}{10}.$$

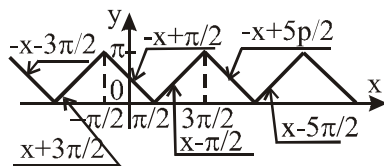
$$43. \frac{\pi}{6}. \quad 44. \frac{3}{7}\pi. \quad 45. -\frac{2}{7}\pi. \quad 46. \frac{5}{18}\pi. \quad 47. \frac{15}{26}\pi. \quad 48. \frac{13}{22}\pi.$$

$$49. 5\pi - 16. \quad 50. 8\pi - 23. \quad 51. \frac{5}{2}\pi - 8. \quad 52. \frac{9}{2}\pi - 12. \quad 53. 13 - 4\pi.$$

$$54. 11 - 3\pi. \quad 55. \frac{3}{2}\pi - 5. \quad 56. \frac{13}{2}\pi - 18.$$

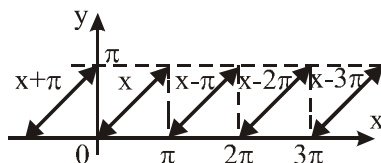
$$57. \text{ а) } 17 - \frac{9}{2}\pi; \quad \text{ б) } 3 - \frac{\pi}{2};$$

$$\text{ в) } \frac{7}{2}\pi - 10; \quad \text{ г) } 19 - \frac{11}{2}\pi.$$

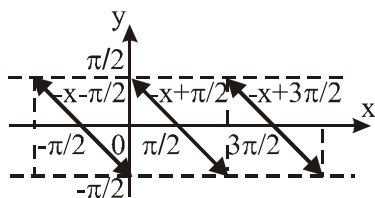


$$58. \text{ а) } 14 - 4\pi; \quad \text{ б) } 25 - 7\pi;$$

$$\text{ в) } \pi - 3; \quad \text{ г) } 4\pi - 12.$$



59.

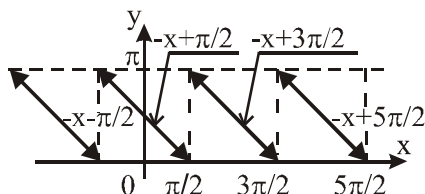


a) $\frac{5}{2}\pi - 7$; б) $\frac{9}{2}\pi - 15$;

в) $5 - \frac{3}{2}\pi$; г) $13 - \frac{9}{2}\pi$.

60. а) $\frac{7}{2}\pi - 9$; б) $\frac{11}{2}\pi - 16$;

в) $7 - \frac{3}{2}\pi$; г) $17 - \frac{9}{2}\pi$.



61. а) $x = -\sin 1,5$; б) $x = \frac{1}{2}$; в) $\emptyset$; г) $x = -\sin \frac{4}{9}\pi$.

62. а) $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $x = \cos \frac{39}{40}\pi$; в) $x = \cos 3$; г) $\emptyset$.

63. а) $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $x = \frac{1}{2}$; в) $x = \sqrt{3}$; г) $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

64. а) $x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$; б) $x = \operatorname{tg} 1$; в) $\emptyset$; г) $x = -\operatorname{tg} 1,5$.

65. а) $x = \operatorname{ctg} \frac{1}{2}$; б) $x = -\sqrt{3}$; в) $x = \operatorname{ctg} 3$; г) $\emptyset$.

66. а) $\emptyset$; б) $\emptyset$; в) $x \in [-1; 1]$. 67. а) $\emptyset$; б) $\emptyset$; в) $x \in \mathbb{R}$.

$$68. x = -\frac{1}{2}; x = \frac{\sqrt{3}}{2}. \quad 69. x = -\sin 1; x = \sin \frac{3}{2}.$$

$$70. x = -\frac{1}{2}; x = 0. \quad 71. x = 0. \quad 72. x = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$73. x = \operatorname{ctg} 1; x = \operatorname{ctg} \frac{5}{2}. \quad 74. x = \frac{1}{\sqrt{2}}. \quad 75. x = \frac{1}{5}. \quad 76. x = 1.$$

$$77. x = 1. \quad 78. x = \frac{\sqrt{3}}{2}. \quad 79. x = -\frac{\sqrt{3}}{8}. \quad 80. x = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

$$81. x = \frac{1}{2}; x = \frac{\sqrt{3}}{2}. \quad 82. x = -\frac{1}{2}. \quad 83. x = 1. \quad 84. x = -\frac{1}{6}.$$

$$85. x = \frac{3}{2}; x = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}. \quad 86. x = -\sqrt{3}. \quad 87. x = \frac{1}{\sqrt{3}} - 1. \quad 88. x = \frac{1}{2}.$$

$$89. \text{a) } x = \pm 4\sqrt{\frac{3}{4}}; \text{б) } x = \pm \sqrt{\sin \frac{3}{2}}; \text{в) } x = \pm 1; \text{г) } x = \pm \sqrt{\operatorname{tg} 1}.$$

$$90^*. x = 0; x = \pm \frac{7}{6}\pi; x = \pm \frac{7}{4}\pi; x = \pm \frac{7}{2}\pi.$$

$$91^*. x = \frac{3}{4}\pi; x = \frac{3}{2}\pi; x = \frac{9}{4}\pi. \quad 92^*. x = -\frac{\pi}{4}; x = \frac{\pi}{2}; x = \frac{5}{4}\pi.$$

$$93. x = -\frac{1}{\sqrt{5}}; x = -1; x = 1. \quad 94. x = -2; x = 2.$$

$$95. x = \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}. \quad 96. x = 1. \quad 97. x = \frac{3}{2}; x = \frac{5}{2}.$$

$$98. x = 0. \quad 99. x = 0.$$

$$100. \text{a) } -1 \leq x < -\frac{\sqrt{3}}{2}; \quad \text{б) } -\frac{1}{2} < x \leq 1; \text{в) } -1 \leq x < \sin 1;$$

$$\text{r)} -\frac{\sqrt{3}}{2} \leq x < -\sin \frac{1}{2}; \quad \sin \frac{1}{2} < x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$101. \text{ a)} -\frac{\sqrt{3}}{2} < x \leq 1; \quad \text{б)} -1 \leq x < \frac{1}{2};$$

$$\text{в)} \cos 3 < x < 1; \quad \text{г)} -\frac{\sqrt{3}}{2} \leq x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$102. \text{ a)} x \leq 1; \text{ б)} x \in \mathbb{R}; \text{ в)} |x| > \frac{1}{\sqrt{3}}; \text{ г)} -\operatorname{tg} \frac{3}{2} < x \leq \operatorname{tg} 1.$$

$$103. \text{ a)} x \leq -\frac{1}{\sqrt{3}}; \quad \text{б)} x > \operatorname{ctg} 3.1;$$

$$\text{в)} |x| > \sqrt{3}; \text{ г)} -\sqrt{3} \leq x < \sqrt{3}.$$

$$104. 4 \leq x \leq 5. 105. x = 1. \quad 106. -2 \leq x < -1.$$

$$107. -\frac{\sqrt{3}}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}. 108. -1 \leq x < \frac{1}{2}; \quad \frac{1}{\sqrt{2}} < x \leq 1.$$

$$109. x \leq -\sqrt{3}. \quad 110. -1 < x < \sqrt{3}. \quad 111. -1 \leq x \leq -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$112. x > -\sqrt{3}. 113. x \geq 0. 114. \frac{1}{2} \leq x < \frac{1}{\sqrt{3}}. 115. -\frac{1}{\sqrt{3}} \leq x < \frac{1}{2}.$$

$$116. -\sqrt[4]{\frac{3}{4}} < x < \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \frac{1}{\sqrt{2}} < x < \sqrt[4]{\frac{3}{4}}.$$

$$117. -\sqrt{\operatorname{tg} 1} \leq x \leq -1; \quad 1 \leq x \leq \sqrt{\operatorname{tg} 1}. 118. x = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

$$119. \frac{1}{2} < x < \frac{\sqrt{3}}{2}. \quad 120. -1 \leq x \leq \frac{1}{2}; \quad \frac{\sqrt{3}}{2} \leq x \leq 1. 121. x \geq 1.$$

$$122. -1 \leq x \leq 0. \quad 123. 1 \leq x < \frac{3}{2}. \quad 124. 1 \leq x \leq 2.$$

$$125. x = 1; 1 + \frac{2}{\sqrt{3}} \leq x \leq 1 + \sqrt{2}; x = 2 + \sqrt{3}. 126. \frac{3}{2} \leq x \leq \frac{5}{2}.$$

$$127^*. x = -\frac{7}{2}\pi; -\frac{7}{4}\pi \leq x \leq -\frac{7}{6}\pi; 0 \leq x \leq \frac{7}{6}\pi; x \geq \frac{7}{4}\pi.$$

$$128^*. x \leq \frac{\pi}{4}, x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n = -1, -2, -3, \dots;$$

$$\frac{\pi}{2} < x \leq \pi; \frac{3}{2}\pi < x \leq \frac{7}{4}\pi.$$

$$129^*. -\frac{\pi}{4} + 2\pi n \leq x \leq \frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

$$130^*. x = \sin a \quad \text{при} \quad \frac{\pi}{2} \leq a \leq \frac{3}{2}\pi.$$

$$131^*. x = \sin \frac{2\pi \pm \sqrt{5a^2 - \pi^2}}{5} \quad \text{при} \quad \frac{\pi}{\sqrt{5}} \leq |a| \leq \frac{\pi}{2};$$

$$x = \sin \frac{2\pi - \sqrt{5a^2 - \pi^2}}{5} \quad \text{при} \quad \frac{\pi}{2} < |a| \leq \frac{\sqrt{17}}{2}\pi.$$

Указания

8 – 9. См. пример 3.5.

90*. См. пример 3.37* из раздела 3.2 и задачу 57 из раздела 3.3.

91*. См. задачу 58.

92*. См. задачу 59.

104.

$$\arcsin(x-5) \leq \arcsin(2x-9) \Leftrightarrow \begin{cases} x-5 \leq 2x-9, \\ -1 \leq x-5 \leq 1 \Leftrightarrow 4 \leq x \leq 5, \\ -1 \leq 2x-9 \leq 1. \end{cases}$$

105. Учесть, что $\arccos x$ - монотонно убывающая функция.

127*. См. пример 90.

128*. Построить графики функций $y_1 = \arctg(\operatorname{tg} x)$ и

$$y_2 = -\frac{x}{3} + \frac{\pi}{3} \text{ и решить неравенства.}$$

129*. Построить графики функций $y_1 = \arcsin(\cos x)$ и

$$y_2 = \arccos(\cos x) \text{ и решить неравенства.}$$

130*. Принять $\arcsin x = t$, $\arccos x = \frac{\pi}{2} - t$ и учесть, что

$$-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}.$$

131*. Приняв $\arcsin x = t$, $\arccos x = \frac{\pi}{2} - t$, получить

квадратное уравнение $5t^2 - 4\pi t + \pi^2 - a^2 = 0$. Найти

координаты вершины параболы $\left(t_B = \frac{2\pi}{5} \right)$ Далее

рассмотреть два случая:

1) уравнение имеет 2 корня, если $\begin{cases} D \geq 0, \\ f\left(\frac{\pi}{2}\right) \geq 0, \end{cases}$ где

$$f(t) = 5t^2 - 4\pi t + \pi^2 - a^2;$$

2) уравнение имеет один корень $t_1 < t_B$, если $\begin{cases} f\left(\frac{\pi}{2}\right) < 0, \\ f\left(-\frac{\pi}{2}\right) \geq 0. \end{cases}$

4. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

4.1. Простейшие уравнения

- Простейшими называются уравнения

$$\sin x = a, \quad \cos x = a, \quad \operatorname{tg} x = a,$$

где a - заданное действительное число.

- Уравнения $\sin x = a$ и $\cos x = a$ имеют решение только при $|a| \leq 1$.

Уравнение $\operatorname{tg} x = a$ имеет решение при любом $a \in \mathbb{R}$.

При этом справедливы формулы

$$\sin x = a \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \emptyset, & \text{если } |a| > 1, \\ x = (-1)^n \arcsin a + \pi n, n \in \mathbb{Z}, & \text{если } |a| \leq 1; \end{cases} \quad (4.1)$$

$$\cos x = a \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \emptyset, & \text{если } |a| > 1, \\ x = \pm \arccos a + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}, & \text{если } |a| \leq 1; \end{cases} \quad (4.2)$$

$$\operatorname{tg} x = a \Leftrightarrow x = \operatorname{arctg} a + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (4.3)$$

- Хотя все решения уравнения $\sin x = a$ при $|a| \leq 1$ задаются одной формулой $x = (-1)^n \arcsin a + \pi n, n \in \mathbb{Z}$, но это уравнение при $|a| < 1$ имеет две серии корней $\arcsin a + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$ и $\pi - \arcsin a + 2\pi m, m \in \mathbb{Z}$.

Важные частные случаи:

$$\sin x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \pi n, n \in \mathbb{Z};$$

$$\sin x = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z};$$

$$\sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

• Уравнение $\cos x = a$ при $|a| < 1$ также имеет две серии корней $\arccos a + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$ и $-\arccos a + 2\pi m, m \in \mathbb{Z}$.

Важные частные случаи:

$$\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z};$$

$$\cos x = 1 \Leftrightarrow x = 2\pi n, n \in \mathbb{Z};$$

$$\cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Приводимые ниже примеры 4.1 и 4.2 простейших уравнений объясняют происхождение двух серий решений уравнений вида $\sin x = a$ и $\cos x = a$ при $|a| < 1$

Пример 4.1. Решите уравнение $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Решение. Прямая $\tilde{y} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ пересекает единичную окружность в двух точках M_1 и M_2 , расположенных симметрично относительно оси $O\tilde{y}$ (рис. 4.1). Этим точкам отвечают углы $\angle M_1OA = \alpha_1$ и

$$\angle M_2OA = \alpha_2 = \pi - \alpha_1.$$

Это означает, что числа

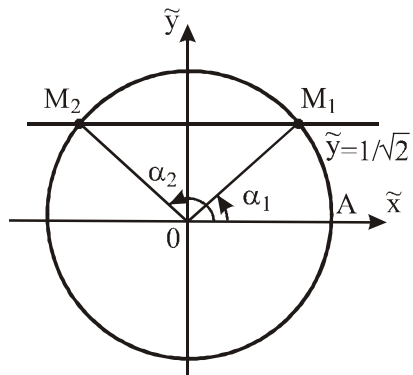


Рис. 4.1

$$x_1 = \alpha_1 = \arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4} \text{ и}$$

$$x_2 = \pi - \alpha_1 = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3}{4}\pi$$

являются решением уравнения $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Поскольку $\sin x - 2\pi$ -периодическая функция, то решением уравнения будут также все числа $\frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$, и $\frac{3}{4}\pi + 2\pi m, m \in \mathbb{Z}$.

$$\text{Ответ: } x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}; \quad x = \frac{3}{4}\pi + 2\pi m, m \in \mathbb{Z}.$$

Замечание. Если в условиях примера 4.1 заменить число $\frac{\sqrt{2}}{2}$ на a , $|a| < 1$, повторить рассуждения, выполненные при решении этого примера, то получим, что множества точек $\arcsin a + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$ и $\pi - \arcsin a + 2\pi m, m \in \mathbb{Z}$

являются решениями уравнения $\sin x = a$.

При этом обе серии корней можно объединить в одной формуле

$$x = (-1)^n \arcsin a + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Однако важно помнить, что на самом деле и эта запись содержит две серии корней, порождаемых числами $x_1 = \arcsin a$ и $x_2 = \pi - \arcsin a$.

Пример 4.2. Решите уравнение $\cos x = \frac{1}{2}$.

Решение. Прямая $\tilde{x} = \frac{1}{2}$ пересекает единичную окружность

в двух точках M_1 и M_2 , расположенных симметрично относительно оси $O\tilde{x}$ (рис. 4.2).

Этим точкам отвечают углы $\angle M_1OA = \alpha$ и $\angle M_2OA = -\alpha$,

т.е. числа $x_1 = \alpha = \arccos \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$

и $x_2 = -\alpha = -\frac{\pi}{3}$ являются

решениями уравнения $\cos x = \frac{1}{2}$.

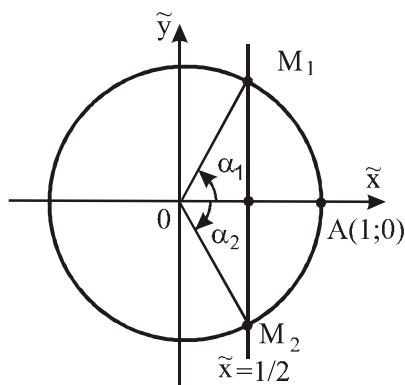


Рис. 4.2

Поскольку $\cos x$ - периодическая функция с периодом 2π , то решением этого уравнения будут также все числа

$$\frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}, \text{ и } -\frac{\pi}{3} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.

Пример 4.3. Решите уравнение $\operatorname{tg} x = 2$.

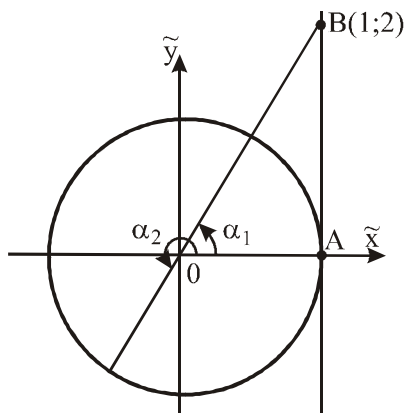


Рис. 4.3

Решение. Из определения тангенса угла α следует, что (рис. 4.3)

$$\operatorname{tg} x = 2 \Leftrightarrow \frac{AB}{OA} = 2 = \operatorname{tg} \alpha_1.$$

Таким образом, для решения уравнения $\operatorname{tg} x = 2$ необходимо на линии тангенсов отложить отрезок $AB = 2$; соединить точку B с началом координат.

Тогда $\angle BOA$ будет искомым углом α_1 , т.е. $\operatorname{tg}\alpha_1 = 2$, откуда $\alpha_1 = \operatorname{arctg} 2$. Поскольку

$$\operatorname{tg}(\pi + \alpha_1) = \operatorname{tg}\alpha_1, \quad \text{то} \quad \alpha_2 = \pi + \alpha_1 = \pi + \operatorname{arctg} 2$$

также будет решением уравнения $\operatorname{tg} x = 2$. Окончательно с учетом периодичности функции $\operatorname{tg} x$ имеем $x = \operatorname{arctg} 2 + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $x = \operatorname{arctg} 2 + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Приводимые ниже в примерах 4.4 и 4.5 уравнения также относятся к классу простейших. Однако нестандартный способ задания числа a в правой части этих уравнений придает им (уравнениям) дополнительную сложность.

Пример 4.4. Решите уравнение $\sin x = \cos 1$.

Решение. Здесь $a = \cos 1$ и поскольку $0 < \cos 1 < 1$, то уравнение имеет решение и это решение можно записать в стандартном виде $x = (-1)^n \arcsin(\cos 1) + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. Однако

$$\arcsin(\cos 1) = \arcsin\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)\right) = \frac{\pi}{2} - 1$$

и потому $x = (-1)^n \left(\frac{\pi}{2} - 1\right) + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. Это решение удобно представить в виде двух серий – при n четном и n нечетном:

$$x = \frac{\pi}{2} - 1 + \pi 2k, \quad k \in \mathbb{Z} \quad (n = 2k);$$

$$x = -\left(\frac{\pi}{2} - 1\right) + \pi(2m + 1), \quad m \in \mathbb{Z} \quad (n = 2m + 1).$$

Ответ: $x = \frac{\pi}{2} - 1 + 2\pi n$; $n \in \mathbb{Z}$; $x = \frac{\pi}{2} - 1 + 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$.

Пример 4.5. Решите уравнение $\cos 2x = 2 \cos 6$.

Решение. Здесь
 $a = 2 \cos 6$. Уравнение будет
 иметь решение, если
 $|2 \cos 6| \leq 1$. Справедливы

неравенства $\frac{11}{6} \pi < 6 < 2\pi$ (см.

рис. 4.4). На интервале

$\left(\frac{3}{2}\pi; 2\pi\right)$, которому

принадлежат точки $\frac{11}{6}\pi$ и 6,

функция $\cos x$ является монотонно возрастающей и потому

$$\cos 6 > \cos \frac{11}{6}\pi = \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Отсюда $2 \cos 6 > 2 \cos \frac{11}{6}\pi = \sqrt{3} > 1$ и потому уравнение $\cos 2x = 2 \cos 6$ не имеет решения.

Ответ: $\emptyset$ (уравнение не имеет решения).

Замечание. Уравнения $\sin x = \sin \alpha$, $\cos x = \cos \alpha$ и, в частности, уравнения $\sin kx = \sin mx$, $\cos kx = \cos mx$ имеют решение для всех $\alpha \in \mathbb{R}$. При этом

$$\sin x = \sin \alpha \Leftrightarrow x = (-1)^n \alpha + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \\ x = \pi - \alpha + 2\pi m, m \in \mathbb{Z} \end{cases} \quad (4.4)$$

$$\cos x = \cos \alpha \Leftrightarrow x = \pm \alpha + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (4.5)$$

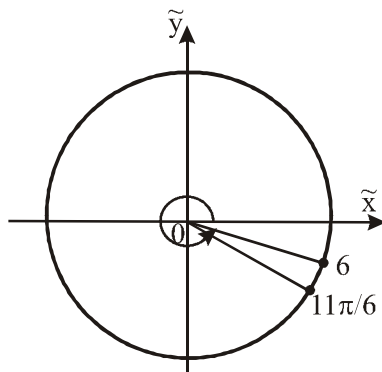


Рис. 4.4

Уравнение $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} \alpha$ имеет решение для всех $\alpha \in \mathbb{R}$, за исключением $\alpha = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$ и

$$\boxed{\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} \alpha \Leftrightarrow x = \alpha + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}}. \quad (4.6)$$

Решим таким способом уравнение $\sin 3x = \sin x$:

$$\begin{aligned} \sin 3x = \sin x &\Leftrightarrow \begin{cases} 3x = x + 2\pi n, & n \in \mathbb{Z}, \\ 3x = \pi - x + 2\pi m, & m \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = \pi n, & n \in \mathbb{Z}, \\ x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi m}{2}, & m \in \mathbb{Z}. \end{cases} \end{aligned}$$

В процессе решения тригонометрических уравнений часто получаются уравнения вида $\sin^2 x = a$, $\cos^2 x = a$ и $\operatorname{tg}^2 x = a$, где $a \in \left\{\frac{1}{4}; \frac{1}{2}; \frac{3}{4}\right\}$ для первых двух уравнений и $a \in \left\{\frac{1}{3}; 1; 3\right\}$ - для уравнения $\operatorname{tg}^2 x = a$. Для этих уравнений наряду со стандартной формой записи решения возможна также компактная и легко интерпретируемая форма.

Следующий пример иллюстрирует это замечание.

Пример 4.6. Решите уравнения:

$$\text{а) } \sin^2 x = \frac{1}{2}; \quad \text{б) } \sin^2 x = \frac{3}{4}.$$

Решение. а) Способ 1. Основан на применении формул понижения степени

$$\begin{aligned} \sin^2 x = \frac{1}{2} &\Leftrightarrow \frac{1 - \cos 2x}{2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos 2x = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Способ 2. } \sin^2 x = \frac{1}{2} &\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = \frac{1}{\sqrt{2}}, \\ \sin x = -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow \begin{cases} x = (-1)^n \frac{\pi}{4} + \pi n, & n \in \mathbb{Z}, \\ x = (-1)^{m+1} \frac{\pi}{4} + \pi m, & m \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, & n \in \mathbb{Z}.
 \end{aligned}$$

б) Способ 1:

$$\begin{aligned}
 \sin^2 x = \frac{3}{4} &\Leftrightarrow \frac{1 - \cos 2x}{2} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \cos 2x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow 2x = \pm \frac{2}{3}\pi + 2\pi n, & n \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Способ 2: } \sin^2 x = \frac{3}{4} &\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}, \\ \sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \end{cases} \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow \begin{cases} x = (-1)^n \frac{\pi}{3} + \pi n, & n \in \mathbb{Z}, \\ x = (-1)^{m+1} \frac{\pi}{3} + \pi m, & m \in \mathbb{Z}, \end{cases}
 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + 2\pi n, & n \in \mathbb{Z}, \\ x = \frac{2}{3}\pi + 2\pi m, & m \in \mathbb{Z}, \\ x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k, & k \in \mathbb{Z}, \\ x = -\frac{2}{3}\pi + 2\pi l, & l \in \mathbb{Z}, \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm \frac{\pi}{3} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

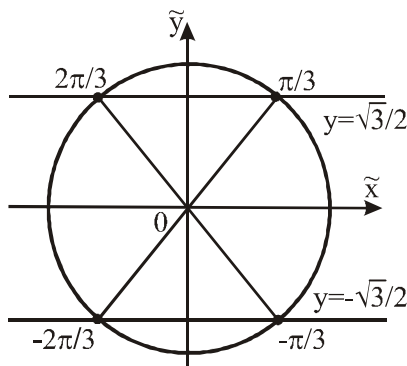


Рис. 4.5

На рис. 4.5 приведена иллюстрация к примеру 4.6, б).

Ответ:

а) $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, \quad n \in \mathbb{Z};$

б) $x = \pm \frac{\pi}{3} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$

4.2. Метод введения вспомогательного угла

(Решение уравнений вида $\mathbf{a \sin x + b \cos x = c}$)

Если $b = 0, a \neq 0$, то получаем простейшее тригонометрическое уравнение $\sin x = \frac{c}{a}$. Аналогично, если $a = 0, b \neq 0$, то имеем уравнение $\cos x = \frac{c}{b}$.

При $c = 0, a \neq 0, b \neq 0$ исходное уравнение равносильно простейшему уравнению $\operatorname{tg} x = -\frac{b}{a}$.

Пусть $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$. Разделим обе части уравнения на $\sqrt{a^2 + b^2} > 0$ (равносильное преобразование уравнения)

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos x = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \quad (4.7)$$

Поскольку

$$\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)^2 = 1,$$

то можно положить $\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \cos \alpha$, $\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \sin \alpha$ – ввести вспомогательный угол α .

Уравнение (4.7) примет вид

$$\sin x \cos \alpha + \cos x \sin \alpha = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

или

$$\sin(x + \alpha) = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \quad (4.8)$$

Замечание. Положив

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \cos \beta, \quad \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \sin \beta,$$

получим уравнение

$$\cos(x - \beta) = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad (4.9)$$

также равносильное уравнению (4.7).

Уравнения (4.8) и (4.9) имеют решения тогда и только тогда, когда

$$\left| \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right| \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad a^2 + b^2 \geq c^2.$$

В этом случае уравнения (4.8) и (4.9) имеют соответственно решения

$$x = -\alpha + (-1)^n \arcsin \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z},$$

$$x = \beta \pm \arccos \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Каждое из этих решений является и решением уравнения (4.7) и соответственно уравнения

$$a \sin x + b \cos x = c.$$

Пример 4.7. Решите уравнение

$$\sin x + \sqrt{3} \cos x = \sqrt{2}.$$

Решение. Разделив обе части уравнения на $\sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1} = 2$,

получим уравнение $\frac{1}{2} \sin x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Приняв $\cos \alpha = \frac{1}{2}$, $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$, т.е. $\alpha = \frac{\pi}{3}$, будем иметь

$$\cos \frac{\pi}{3} \sin x + \sin \frac{\pi}{3} \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \sin \left(x + \frac{\pi}{3} \right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad x = -\frac{\pi}{3} + (-1)^n \frac{\pi}{4} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $x = -\frac{\pi}{3} + (-1)^n \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$

Разумеется, что аналогично решаются уравнения:

$$a \sin f(x) + b \cos f(x) = c.$$

Пример 4.8. Решите уравнение

$$2 \sin(3x - \pi) + 5 \cos(3x - \pi) = 5.$$

Решение. Так как $2^2 + 5^2 > 5^2$, то уравнение имеет решение, которое может быть найдено описанным методом. Заметим, что

$$\sin(3x - \pi) = -\sin(\pi - 3x) = -\sin 3x;$$

$$\cos(3x - \pi) = \cos(\pi - 3x) = -\cos 3x,$$

поэтому

$$2 \sin(3x - \pi) + 5 \cos(3x - \pi) = 5 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2 \sin 3x + 5 \cos 3x = -5 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{\sqrt{29}} \sin 3x + \frac{5}{\sqrt{29}} \cos 3x = -\frac{5}{\sqrt{29}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos \alpha \sin 3x + \sin \alpha \cos 3x = -\frac{5}{\sqrt{29}},$$

где $\alpha = \arccos \frac{2}{\sqrt{29}}$ или $\alpha = \arcsin \frac{5}{\sqrt{29}}.$

Далее имеем

$$\sin(3x + \alpha) = -\frac{5}{\sqrt{29}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3x + \alpha = (-1)^{n+1} \arcsin \frac{5}{\sqrt{29}} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{3} \left[-\arcsin \frac{5}{\sqrt{29}} + (-1)^{n+1} \arcsin \frac{5}{\sqrt{29}} + \pi n \right], n \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Ответ: } x = \frac{1}{3} \left[((-1)^{n+1} - 1) \arcsin \frac{5}{\sqrt{29}} + \pi n \right], n \in \mathbb{Z}.$$

Пример 4.9. Найдите множество значений, принимаемых функцией

$$f(x) = 4 \sin(5x - 3) - 7 \cos(5x - 3).$$

Решение.

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{4^2 + 7^2} \left(\frac{4}{\sqrt{65}} \sin(5x - 3) - \frac{7}{\sqrt{65}} \cos(5x - 3) \right) = \\ &= \sqrt{65} \sin(5x - 3 + \alpha). \end{aligned}$$

Поскольку $|\sin(5x - 3 + \alpha)| \leq 1$ для всех $x \in \mathbb{R}$ и любого $\alpha \in \mathbb{R}$, то $-\sqrt{65} \leq \sqrt{65} \sin(5x - 3 + \alpha) \leq \sqrt{65}$.

$$\text{Ответ: } [-\sqrt{65}; \sqrt{65}].$$

Пример 4.10. Найдите множество значений функции

$$y(x) = 12 \sin\left(\frac{\pi x}{3} - \frac{1}{2}\right) + 10 \sin^2 \frac{2\pi x - 3}{12}.$$

Решение. Воспользовавшись формулой понижения степени (2.18), получим

$$y(x) = 12 \sin\left(\frac{\pi x}{3} - \frac{1}{2}\right) + 5 \left(1 - \cos \frac{2\pi x - 3}{6}\right)$$

или

$$\begin{aligned}y(x) &= 12 \sin\left(\frac{\pi x}{3} - \frac{1}{2}\right) - 5 \cos\left(\frac{\pi x}{3} - \frac{1}{2}\right) + 5 = \\&= 13 \left(\frac{12}{13} \sin\left(\frac{\pi x}{3} - \frac{1}{2}\right) - \frac{5}{13} \cos\left(\frac{\pi x}{3} - \frac{1}{2}\right) \right) + 5 = \\&= 13 \sin\left(\frac{\pi x}{3} - \frac{1}{2} - \alpha\right) + 5,\end{aligned}$$

где $\alpha = \arccos \frac{12}{13}$. Отсюда имеем $5 - 13 \leq y(x) \leq 5 + 13$.

Ответ: $[-8; 18]$.

4.3. Уравнения относительно одной тригонометрической функции

Это уравнения вида $f(t) = 0$, где $t = \sin \varphi(x)$ или $t = \cos \varphi(x)$, или $t = \operatorname{tg} \varphi(x)$, а $\varphi(x)$ - заданная функция.

Пример 4.11. Решите уравнение

$$10 \sin^2 2x + 7 \cos 2x - 4 = 0.$$

Решение. Имеем уравнение $f(\sin 2x, \cos 2x) = 0$. Заменяя $\sin^2 2x$ на $1 - \cos^2 2x$, получим уравнение вида $\tilde{f}(\cos 2x) = 0$.

$$\begin{aligned}10 \sin^2 2x + 7 \cos 2x - 4 &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 10(1 - \cos^2 2x) + 7 \cos 2x - 4 &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 10 \cos^2 2x - 7 \cos 2x - 6 &= 0.\end{aligned}$$

Приняв $t = \cos 2x$, $-1 \leq t \leq 1$, получим квадратное уравнение

$$10t^2 - 7t - 6 = 0.$$

Его корни: $t_1 = -\frac{1}{2}$; $t_2 = \frac{6}{5}$. Подходит $t_1 = -\frac{1}{2}$.

Тогда $\cos 2x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow 2x = \pm \frac{2}{3}\pi + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{3} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $x = \pm \frac{\pi}{3} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$

Пример 4.12. Решите уравнение $\cos 2x - \sin x = 0$.

Решение. Поскольку $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$, то исходное уравнение равносильно следующему:

$$2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0.$$

Решив квадратное уравнение $2t^2 + t - 1 = 0$ относительно переменной $t = \sin x$, получим простейшие уравнения

$\sin x = -1$ и $\sin x = \frac{1}{2}$. Их решения:

$$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}; \quad x = (-1)^m \frac{\pi}{6} + \pi m, \quad m \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}; \quad x = (-1)^m \frac{\pi}{6} + \pi m, \quad m \in \mathbb{Z}.$

Замечание. 1. Уравнение $\cos 2x - \sin x = 0$ можно решить еще одним способом, если воспользоваться формулами разности косинусов или разности синусов. Например, учитывая, что

$$\cos 2x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) \text{ имеем}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) - \sin x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin\left(\frac{3}{2}x - \frac{\pi}{4}\right) = 0, \\ \cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = 0, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3}{2}x - \frac{\pi}{4} = \pi n, & n \in \mathbb{Z}, \\ \frac{x}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + \pi m, & m \in \mathbb{Z}, \end{cases}$$

откуда $x = \frac{\pi}{6} + \frac{2}{3}\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$ и $x = \frac{3}{2}\pi + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$

Заметим, что корни второй серии содержатся среди корней первой серии. Действительно, при $n = 2 + 3k, \quad k \in \mathbb{Z},$ имеем

$$x = \frac{\pi}{6} + \frac{2}{3}\pi(2 + 3k) = \frac{3}{2}\pi + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

2. Формула (4.4) позволяет упростить решение в еще большей степени

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) = \sin x \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\pi}{2} - 2x = x + 2\pi n, & n \in \mathbb{Z}, \\ \frac{\pi}{2} - 2x = \pi - x + 2\pi n, & n \in \mathbb{Z}, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + \frac{2}{3}\pi n, & n \in \mathbb{Z}, \\ x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, & n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Ответ: $x = \frac{\pi}{6} + \frac{2}{3}\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$

4.4. Однородные и приводящиеся к однородным уравнения

4.4.1. Однородные уравнения

Определение 4.1. Однородным тригонометрическим уравнением степени k (порядка k) называется уравнение

$$a_0 \sin^k x + a_1 \sin^{k-1} x \cos x + \dots + a_{k-1} \sin x \cos^{k-1} x + a_k \cos^k x = 0. \quad (4.10)$$

Простейшим однородным уравнением является уравнение первой степени

$$a_0 \sin x + a_1 \cos x = 0.$$

Делением на $\cos x$ оно сводится к равносильному уравнению ($a_0 \neq 0, a_1 \neq 0$):

$$\operatorname{tg} x = -\frac{a_1}{a_0}.$$

При $k = 2$ и $k = 3$ в (4.4) получаем однородные уравнения соответственно второй и третьей степени:

$$a_0 \sin^2 x + a_1 \sin x \cos x + a_2 \cos^2 x = 0; \quad (4.11)$$

$$a_0 \sin^3 x + a_1 \sin^2 x \cos x + a_2 \sin x \cos^2 x + a_3 \cos^3 x = 0. \quad (4.12)$$

На вступительных экзаменах, как правило, предлагаются однородные уравнения второй или третьей степени и очень редко – более высокой.

При решении однородных уравнений различают два случая:

- 1) коэффициенты a_0 и a_k отличны от нуля;
- 2) $a_0 = 0$ и (или) $a_k = 0$.

В первом случае, разделив обе части уравнения на $\cos^k x$, получим равносильное алгебраическое уравнение k -й степени относительно переменной $t = \operatorname{tg} x$:

$$a_0 t^k + a_1 t^{k-1} + \mathbf{L} + a_{k-1} t + a_k = 0.$$

В частности, при $k = 2$ и $k = 3$ будем иметь уравнения:

$$a_0 t^2 + a_1 t + a_2 = 0;$$

$$a_0 t^3 + a_1 t^2 + a_2 t + a_3 = 0.$$

Во втором случае ($a_0 = 0$ и (или) $a_k = 0$) уравнение (4.10) равносильно совокупности двух уравнений. Например, при $a_0 = 0$:

$$\begin{cases} \cos x = 0, \\ a_1 \sin^{k-1} x + a_2 \sin^{k-2} x \cos x + \dots + a_k \cos^{k-1} x = 0, \end{cases}$$

при $a_0 = 0$ и $a_k = 0$:

$$\begin{cases} \sin 2x = 0, \\ a_1 \sin^{k-2} x + a_2 \sin^{k-3} x \cos x + \dots + a_{k-1} \cos^{k-2} x = 0. \end{cases}$$

В этих совокупностях первое уравнение является простейшим тригонометрическим уравнением, а второе – однородным уравнением первого типа.

Отметим, что аналогично решаются однородные уравнения относительно переменных $u = \sin \varphi(x)$, $v = \cos \varphi(x)$, где $\varphi(x)$ – некоторая заданная функция, т.е. уравнение

$$a_0 \sin^k \varphi(x) + a_1 \sin^{k-1} \varphi(x) \cos \varphi(x) + \mathbf{L} + a_k \cos^k \varphi(x) = 0.$$

Пример 4.13. Решите уравнение

$$2 \sin^2 x - 3 \sin x \cos x + \cos^2 x = 0.$$

Решение. Это уравнение является однородным уравнением второй степени (4.11) первого типа ($a_0 = 2$, $a_2 = 1$). Разделив обе части уравнения на $\cos^2 x$, получим равносильное

уравнение $[\cos x = 0$ не является решением уравнения (почему?)]

$$2\operatorname{tg}^2 x - 3\operatorname{tg} x + 1 = 0.$$

Приняв $t = \operatorname{tg} x$, получим квадратное уравнение

$$2t^2 - 3t + 1 = 0.$$

Его корни: $t_1 = \frac{1}{2}$ и $t_2 = 1$. Решив простейшие уравнения

$\operatorname{tg} x = \frac{1}{2}$; $\operatorname{tg} x = 1$, будем иметь окончательно:

$$x_1 = \arctg \frac{1}{2} + \pi m, m \in \mathbb{Z}; \quad x_2 = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Ответ: } x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}; \quad x = \arctg \frac{1}{2} + \pi m, m \in \mathbb{Z}.$$

Пример 4.14. Решите уравнение

$$\sin^3 x + (1 - \sqrt{3}) \sin^2 x \cos x - \sqrt{3} \sin x \cos^2 x = 0.$$

Решение. Имеем однородное уравнение третьей степени (4.12) второго типа (коэффициент $a_3 = 0$). Оно равносильно совокупности

$$\begin{cases} \sin x = 0, \\ \sin^2 x + (1 - \sqrt{3}) \sin x \cos x - \sqrt{3} \cos^2 x = 0. \end{cases}$$

Корни первого уравнения $x = \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. Второе уравнение является однородным второй степени первого типа ($a_0 \neq 0$ и $a_2 \neq 0$). Разделив обе части уравнения на $\cos^2 x$ и приняв $t = \operatorname{tg} x$, получим квадратное уравнение

$$t^2 + (1 - \sqrt{3})t - \sqrt{3} = 0.$$

Его корни: $t_1 = -1$, $t_2 = \sqrt{3}$. Этим корням отвечают простейшие уравнения $\operatorname{tg} x = -1$ и $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$. Их решения:

$$x = -\frac{\pi}{4} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad \text{и} \quad x = \frac{\pi}{3} + \pi m, \quad m \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Ответ: } x = \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}; \quad x = -\frac{\pi}{4} + \pi m, \quad m \in \mathbb{Z};$$

$$x = \frac{\pi}{3} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Пример 4.15. Решите уравнение

$$2\sqrt{3} - (\sqrt{3} + 1)\sin 2x - 2(\sqrt{3} - 1)\cos^2 x = 0.$$

Решение. Данное уравнение не является однородным. Однако $2\sqrt{3} \equiv 2\sqrt{3}(\cos^2 x + \sin^2 x)$, поэтому уравнение можно переписать в равносильной форме:

$$\begin{aligned} & 2\sqrt{3}\cos^2 x + 2\sqrt{3}\sin^2 x - (\sqrt{3} + 1)\sin 2x - \\ & - 2\sqrt{3}\cos^2 x + 2\cos^2 x = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow & 2\sqrt{3}\sin^2 x - 2(\sqrt{3} + 1)\sin x \cos x + 2\cos^2 x = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow & \sin^2 x - \left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\sin x \cos x + \frac{1}{\sqrt{3}}\cos^2 x = 0. \end{aligned}$$

Последнее уравнение является однородным уравнением 2-й степени с коэффициентами $a_0 = 1$, $a_1 = -\left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, $a_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Разделив обе части уравнения на $\cos^2 x \neq 0$, получим $\operatorname{tg}^2 x - \left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\operatorname{tg} x + \frac{1}{\sqrt{3}} = 0$. Квадратное уравнение

относительно переменной $t = \operatorname{tg} x$ имеет корни $\operatorname{tg} x = 1$ и $\operatorname{tg} x = \frac{1}{\sqrt{3}}$, откуда

$$x = \frac{\pi}{4} + n\pi, n \in \mathbb{Z}, \quad x = \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Ответ: } x = \frac{\pi}{4} + n\pi, n \in \mathbb{Z}; \quad x = \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Пример 4.16. Решите уравнение

$$4\sin^3 x + 8\cos x \sin^2 x - \cos 3x - 3\cos x = 0.$$

Решение. Поскольку $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$, то уравнение примет вид

$$\sin^3 x + 2\cos x \sin^2 x - \cos^3 x = 0.$$

Это однородное уравнение третьей степени первого типа. Разделив обе части уравнения на $\cos^3 x$ ($\cos x \neq 0$), получим равносильное уравнение

$$\operatorname{tg}^3 x + 2\operatorname{tg}^2 x - 1 = 0$$

или

$$t^3 + 2t^2 - 1 = 0, \text{ где } t = \operatorname{tg} x.$$

Один корень уравнения $t = -1$ легко обнаруживается. Осуществив деление многочлена $t^3 + 2t^2 - 1$ на двучлен $(t+1)$, будем иметь

$$t^3 + 2t^2 - 1 = (t+1)(t^2 + t - 1).$$

$$\text{Отсюда } t^3 + 2t^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t+1=0, \\ t^2 + t - 1=0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 = -1, \\ t_{2,3} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}. \end{cases}$$

Возвращаясь к старым переменным, получаем простейшие уравнения

$$\left[\begin{array}{l} \operatorname{tg} x = -1, \\ \operatorname{tg} x = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}, \\ \operatorname{tg} x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}, \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{4} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}, \\ x = -\operatorname{arctg} \frac{1 + \sqrt{5}}{2} + \pi m, \quad m \in \mathbb{Z}, \\ x = \operatorname{arctg} \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{array} \right.$$

Ответ: $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z};$

$$x = -\operatorname{arctg} \frac{1 + \sqrt{5}}{2} + \pi m, \quad m \in \mathbb{Z};$$

$$x = \operatorname{arctg} \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Замечание. В некоторых случаях уравнение приводится к однородному, но одновременно возможны альтернативные и более простые способы решения. Естественно, целесообразно использовать более простые способы решения.

Пример 4.17. Решите уравнение

$$\cos 3x + 2 \cos x \sin^2 x = 0.$$

Решение. Воспользовавшись формулами

$$\cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x; \quad \sin^2 x = 1 - \cos^2 x,$$

получим уравнение

$$4 \cos^3 x - 3 \cos x + 2 \cos x (1 - \cos^2 x) = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2 \cos^3 x - \cos x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \cos x (2 \cos^2 x - 1) = 0.$$

Но $2\cos^2 x - 1 = \cos 2x$, поэтому окончательно имеем уравнение

$$\cos x \cdot \cos 2x = 0,$$

равносильное исходному.

Имеем далее

$$\begin{cases} \cos x = 0, \\ \cos 2x = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + \pi n, & n \in \mathbb{Z}, \\ 2x = \frac{\pi}{2} + \pi m, & m \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Ответ: $x = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}; \quad x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} m, \quad m \in \mathbb{Z}.$

Вместе с тем, уравнение $\cos 3x + 2\cos x \sin^2 x = 0$ равносильно однородному

$$\cos^3 x - \cos x \sin^2 x = 0.$$

В соответствии с общей схемой решения однородных уравнений приходим к равносильной совокупности уравнений

$$\begin{cases} \cos x = 0, \\ \operatorname{tg} x = \pm 1, \end{cases}$$

решение которой, естественно, совпадает с полученным выше, т.е. имеем

Ответ: $x = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z};$

$$x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} m, \quad m \in \mathbb{Z}.$$

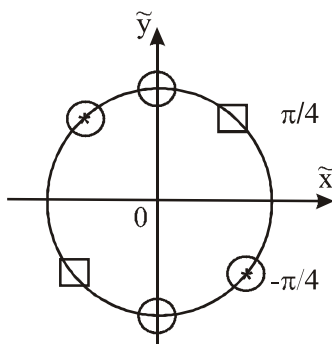


Рис. 4.6:

○ - корни уравнения $\cos x = 0$;

□ - корни уравнения $\operatorname{tg} x = 1$;

⊛ - корни уравнения $\operatorname{tg} x = -1$.

Решение тригонометрических уравнений целесообразно сопровождать нанесением на тригонометрический круг всех серий корней уравнения. В данном случае имеем рис. 4.6.

4.4.2. Уравнения, приводящиеся к однородным

К однородным сводятся уравнения $f(\sin x, \cos x) \equiv c$, $c \in \mathbb{R}$, где $f(\sin x, \cos x)$ - однородная функция вида (4.10) степени $2k$. Заменяя

$$c = c(\cos^2 x + \sin^2 x)^k = \\ = c(\cos^{2k} x + k \cos^{2(k-1)} x \sin^2 x + \dots + k \cos^2 x \sin^{2(k-1)} x + \sin^{2k} x)$$

и выполнив приведение подобных членов в уравнении

$$f(\sin x, \cos x) = c(\cos^{2k} x + k \cos^{2(k-1)} x \sin^2 x + \dots + \sin^{2k} x),$$

получим однородное уравнение степени $2k$.

В некоторых случаях неоднородная функция $f(x)$ приводится к виду однородной домножением отдельной группы слагаемых на выражение

$$(\cos^2 x + \sin^2 x)^m \equiv 1.$$

Пример 4.18. Решите уравнение

$$\cos^4 x + \sin^4 x + 5 \sin^3 x \cos x - \cos^2 x \sin^2 x - 2 \sin x \cos^3 x = 1.$$

Решение. Левая часть уравнения – однородная функция четвертой степени. Заменяя единицу в левой части выражением $(\sin^2 x + \cos^2 x)^2 \equiv 1$, получим

$$\begin{aligned} \cos^4 x + \sin^4 x + 5 \sin^3 x \cos x - \cos^2 x \sin^2 x - 2 \sin x \cos^3 x = \\ = \sin^4 x + 2 \sin^2 x \cos^2 x + \cos^4 x \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \cos x \sin x (5 \sin^2 x - 3 \sin x \cos x - 2 \cos^2 x) = 0 \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin 2x = 0, \\ 5\sin^2 x - 3\sin x \cos x - 2\cos^2 x = 0. \end{cases}$$

Корни первого уравнения $x = \frac{\pi n}{2}; n \in \mathbb{Z}$.

Второе уравнение является однородным уравнением второй степени. Разделив на $\cos^2 x$; $\cos x \neq 0$, получим равносильное уравнение

$$5t^2 - 3t - 2 = 0.$$

Положим $t = \operatorname{tg} x$, $t \in \mathbb{R}$ и решим уравнение

$$5\operatorname{tg}^2 x - 3\operatorname{tg} x - 2 = 0.$$

Его корни: $t_1 = -\frac{2}{5}$; $t_2 = 1$. Отсюда

$$\operatorname{tg} x = -\frac{2}{5} \Rightarrow x = -\operatorname{arctg} \frac{2}{5} + \pi m, \quad m \in \mathbb{Z};$$

$$\operatorname{tg} x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $x = \frac{\pi n}{2}; n \in \mathbb{Z}; x = -\operatorname{arctg} \frac{2}{5} + \pi m, \quad m \in \mathbb{Z};$

$$x = \frac{\pi}{4} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Пример 4.19. Решите уравнение

$$3\sin^2 x - \sin 2x + 2\cos^4 x + 4\sin^4 x = 2.$$

Решение. В данном случае левая часть уравнения не является однородной функцией, а в правой части стоит число, отличное от нуля. Преобразуем уравнение следующим образом.

Выражение $(3\sin^2 x - 2\sin x \cos x)$ умножим на

$$(\sin^2 x + \cos^2 x) \equiv 1, \text{ в правой части } 2 = 2(\sin^2 x + \cos^2 x)^2.$$

Получим

$$\begin{aligned} & 3\sin^4 x + 3\sin^2 x \cos^2 x - 2\sin^3 x \cos x - \\ & - 2\sin x \cos^3 x + 2\cos^4 x + 4\sin^4 x = \\ & = 2\sin^4 x + 4\sin^2 x \cos^2 x + 2\cos^4 x \end{aligned}$$

или

$$5\sin^4 x - 2\sin^3 x \cos x - \sin^2 x \cos^2 x - 2\sin x \cos^3 x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 0, \\ 5\sin^3 x - 2\sin^2 x \cos x - 2\sin x \cos^2 x - 2\cos^3 x = 0. \end{cases}$$

Корни первого уравнения $x = \pi n; n \in \mathbb{Z}$.

Второе уравнение является однородным уравнением третьей степени и сводится к уравнению

$$5t^3 - 2t^2 - t - 2 = 0,$$

где $t = \operatorname{tg} x$.

Перегруппировав слагаемые в последнем уравнении, будем иметь

$$(5t^3 - 5t^2) + (3t^2 - 3t) + (2t - 2) = 0 \Leftrightarrow (t - 1)(5t^2 + 3t + 2) = 0.$$

Это уравнение имеет единственный корень $t = 1$, т.е.

$$\operatorname{tg} x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \pi n; n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $x = \pi n; n \in \mathbb{Z}; x = \frac{\pi}{4} + \pi m; m \in \mathbb{Z}$.

4.5. Решение уравнений вида $R(\sin^{2n} x, \cos^{2k} x) = 0$

Рациональные уравнения, переменными в которых выступают $u = \sin^{2n} x$ и $v = \cos^{2k} x$ - тригонометрические

функции в четных степенях, – могут решаться различными способами. Рассмотрим три основных способа.

Способ 1. Использование формул понижения степени

$$R(\sin^{2n} x, \cos^{2k} x) = \left| \begin{array}{l} \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2} \\ \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2} \end{array} \right| =$$

$$= R\left(\left(\frac{1 - \cos 2x}{2}\right)^n, \left(\frac{1 + \cos 2x}{2}\right)^k\right) = \tilde{R}(\cos 2x).$$

Здесь $R(\cdot)$ - рациональная функция двух переменных $u = \sin^{2n} x$ и $v = \cos^{2k} x$, $\tilde{R}(\cdot)$ - рациональная функция одной переменной $t = \cos 2x$..

Способ 2 . Замена переменной $t = \sin^2 x$ или $t = \cos^2 x$

$$R(\sin^{2n} x, \cos^{2k} x) = |\sin^2 x = t| = R\left(t^n, (1-t)^k\right) = \tilde{R}(t).$$

Способ 3. Метод тождественных преобразований

Суть метода заключается в упрощении исходного уравнения в результате равносильных преобразований с помощью тригонометрических формул.

Пример 4.20. Решите уравнение

$$\cos^4 x + \sin^4 x - \cos 2x - \frac{1}{2} = 0. \quad (4.13)$$

Решение. Способ 1. Воспользовавшись формулами

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}, \quad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2},$$

получим

$$\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 + \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 - \cos 2x - \frac{1}{2} = 0$$

или

$$\cos^2 2x - 2\cos 2x = 0, \quad (4.14)$$

откуда имеем

$$\begin{cases} \cos 2x = 0, \\ \cos 2x - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Ответ: } x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Способ 2. Обозначив $\cos^2 x = t$, $0 \leq t \leq 1$, получим с учетом того, что $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 = 2t - 1$,

$$t^2 + (1-t)^2 - (2t-1) - \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow 2t^2 - 4t + \frac{3}{2} = 0.$$

Корни
уравнения:

$$t_1 = \frac{1}{2} \quad \text{и} \quad t_2 = \frac{3}{2}.$$

Условию $0 \leq t \leq 1$ удовлетворяет только первый корень. Таким образом

$$\cos^2 x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

(см. рис. 4.7).

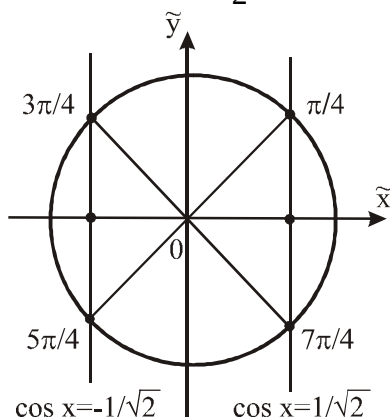


Рис. 4.7

Способ 3. В соответствии с формулой (2.37) (пример 2.1)

имеем
$$\begin{aligned}\cos^4 x + \sin^4 x &= 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2x = \\ &= 1 - \frac{1}{2} (1 - \cos^2 2x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos^2 2x .\end{aligned}$$

В результате получаем уравнение, равносильное уравнению (4.13)

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos^2 2x - \cos 2x - \frac{1}{2} = 0 \quad \text{или} \quad \cos^2 2x - 2 \cos 2x = 0 .$$

А это – уравнение (4.14), полученное при решении исходного уравнения способом 1.

Ответ: $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} n, \quad n \in \mathbb{Z} .$

Пример 4.21. Найдите множества значений функций

а) $y = \cos^4 x + \sin^4 x ,$

б) $y = \cos^6 x + \sin^6 x ,$

в) $y = \cos^8 x + \sin^8 x .$

Решение: а) воспользуемся формулой (2.37), в соответствии с которой

$$y \equiv \cos^4 x + \sin^4 x = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2x .$$

Поскольку $0 \leq \sin^2 2x \leq 1$, то

$$1 - \frac{1}{2} \cdot 1 \leq \cos^4 x + \sin^4 x \leq 1 - \frac{1}{2} \cdot 0, \quad \text{т.е.} \quad y \in \left[\frac{1}{2}; 1 \right];$$

б) в соответствии с формулой (2.38)

$$y \equiv \cos^6 x + \sin^6 x = 1 - \frac{3}{4} \sin^2 2x,$$

откуда следует, что $y \in \left[\frac{1}{4}; 1 \right];$

в) в соответствии с формулой (2.46)

$$y(x) \equiv \cos^8 x + \sin^8 x = \frac{1}{8} \sin^4 2x - \sin^2 2x + 1.$$

Обозначив $\sin^2 2x = t$, $0 \leq t \leq 1$, получим функцию $f(t) = \frac{1}{8}t^2 - t + 1$, область значений $E(f)$ которой при $t \in [0; 1]$ совпадает с областью $E(y)$ значений функции $y(x)$.

Функция $f(t)$ непрерывна на отрезке $[0, 1]$ и потому в соответствии с теоремой Вейерштрасса достигает свои наибольшее $f_{\text{наиб}}$ и наименьшее $f_{\text{наим}}$ значения на отрезке $[0; 1]$. При этом $E(f) = [f_{\text{наим}}; f_{\text{наиб}}]$.

Таким образом, задача нахождения множества значений непрерывной на отрезке функции эквивалентна нахождению наибольшего и наименьшего значений этой функции на заданном отрезке.

Для решения этой задачи:

а) находим значение функции f на концах отрезка

$$f(0) = 1; \quad f(1) = \frac{1}{8};$$

б) находим критические точки:

$$f'(t) = \frac{1}{4}t - 1 = 0 \Rightarrow t_0 = 4.$$

Критическая точка $t_0 = 4$ не принадлежит интервалу $(0; 1)$ и потому $E_y = \left[\frac{1}{8}; 1\right]$.

$$\text{Ответ: а) } \left[\frac{1}{2}; 1\right]; \quad \text{б) } \left[\frac{1}{4}; 1\right]; \quad \text{в) } \left[\frac{1}{8}; 1\right].$$

Полученные в данном примере результаты позволяют предположить, что $E(\cos^{2n} x + \sin^{2n} x) = \left[\frac{1}{2^{n-1}}; 1\right]$.

Докажем это предположение.

Пусть $y = \cos^{2n} x + \sin^{2n} x$. Обозначим $\cos^2 x = t$, $t \in [0;1]$, и рассмотрим функцию $f(t) = t^n + (1-t)^n$ на отрезке $[0;1]$. Как было отмечено выше, нахождение множества значений непрерывной на отрезке функции эквивалентно решению задачи: найти

$$\max_{t \in [0,1]} f(t) \text{ и } \min_{t \in [0,1]} f(t).$$

Имеем а) $f(0)=1$, $f(1)=1$;

$$\text{б) } f'(t) = nt^{n-1} - n(1-t)^{n-1} = 0 \Rightarrow t_0 = \frac{1}{2}.$$

Стационарная точка $t_0 = \frac{1}{2} \in (0;1)$ и потому вычисляем

$$f(t_0) = f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(1 - \frac{1}{2}\right)^n = 2\left(\frac{1}{2}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1};$$

$$\text{в) } \max_{t \in [0;1]} f(t) = \max \left\{ \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}, 1 \right\} = 1;$$

$$\min_{t \in [0;1]} f(t) = \min \left\{ \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}; 1 \right\} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}.$$

Таким образом $\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \leq \cos^{2n} x + \sin^{2n} x \leq 1$. ■

Пример 4.22. Решите уравнения

$$\text{а) } \cos^{2n} x + \sin^{2k} x = 1;$$

$$\text{б) } \cos^{2n} x + \sin^{2k-1} x = 1.$$

Решение. а) Способ 1

$$\cos^{2n} x + \sin^{2k} x = 1 \Leftrightarrow \cos^{2n} x + \sin^{2k} x = \cos^2 x + \sin^2 x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 x (\cos^{2(n-1)} x - 1) + \sin^2 x (\sin^{2(k-1)} x - 1) = 0. \quad (4.15)$$

Поскольку $\cos^{2(n-1)} x - 1 \leq 0$ и $\sin^{2(k-1)} x - 1 \leq 0$, то уравнение (4.15.) равносильно каждой из систем:

$$\begin{cases} \cos^2 x (\cos^{2(n-1)} x - 1) = 0, \\ \sin^2 x (\sin^{2(k-1)} x - 1) = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0, \\ \sin^{2(k-1)} x = 1, \\ \sin x = 0, \\ \cos^{2(n-1)} x = 1, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0, \\ \sin x = \pm 1, \\ \sin x = 0, \\ \cos x = \pm 1. \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}.$$

Способ 2. Легко видеть, что значения x , при которых $\cos x = \pm 1$ или $\sin x = \pm 1$, т.е. $x = \frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$, являются решением уравнения а).

Покажем, что других решений уравнение не имеет. Если $x \neq \frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$, то $|\cos x| < 1$ и $|\sin x| < 1$. Поэтому

$$\begin{cases} \cos^{2n} x < \cos^2 x; \\ \sin^{2k} x < \sin^2 x \end{cases} \quad (4.16)$$

при $n \geq 2$ и $k \geq 2$. Сложив неравенства (4.16), получим $\cos^{2n} x + \sin^{2k} x < \cos^2 x + \sin^2 x = 1$, т.е. для всех $x \neq \frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$, $\cos^{2n} x + \sin^{2k} x < 1$ и потому уравнение

а) других решений, кроме $x = \frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$, не имеет;

б) решите самостоятельно обоими способами.

Ответ: а) $x = \frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$;

б) $x = \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$.

4.6. Решение уравнений вида $R(\sin x \pm \cos x, \sin 2x) = 0$

Положим $t = \sin x + \cos x$. Тогда

$$t^2 = (\sin x + \cos x)^2 = 1 + \sin 2x \Rightarrow \sin 2x = t^2 - 1.$$

В результате уравнение $R(\sin x + \cos x, \sin 2x) = 0$ сводится к рациональному уравнению относительно переменной t

$$R(t, t^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow \tilde{R}(t) = 0,$$

где $\tilde{R}(\cdot)$ - рациональная функция переменной t .

Пример 4.23. Решите уравнение

$$\cos^3 x + \sin^3 x - \sin 2x - 1 = 0.$$

Решение. Преобразуем левую часть уравнения:

$$\begin{aligned} \cos^3 x + \sin^3 x &= (\cos x + \sin x)(\cos^2 x - \cos x \sin x + \sin^2 x) = \\ &= (\cos x + \sin x)(1 - \cos x \sin x) = (\cos x + \sin x) \left(1 - \frac{1}{2} \sin 2x\right). \end{aligned}$$

В результате исходное уравнение равносильно следующему:

$$(\cos x + \sin x) \left(1 - \frac{1}{2} \sin 2x\right) - \sin 2x - 1 = 0.$$

Пусть $\cos x + \sin x = t$, соответственно $\sin 2x = t^2 - 1$, и тогда последнее уравнение примет вид

$$t \left(1 - \frac{1}{2}(t^2 - 1) \right) - (t^2 - 1) - 1 = 0$$

или $t(t+3)(t-1) = 0 \Rightarrow t_1 = 0, t_2 = -3, t_3 = 1$.

Получили, что исходное уравнение равносильно совокупности однотипных уравнений:

$$\begin{cases} \cos x + \sin x = 0, \\ \cos x + \sin x = 1, \\ \cos x + \sin x = -3. \end{cases}$$

Поскольку

$$\begin{aligned} \cos x + \sin x &= \sin \left(\frac{\pi}{2} - x \right) + \sin x = \\ &= 2 \sin \frac{\frac{\pi}{2} - x + x}{2} \cdot \cos \frac{\frac{\pi}{2} - x - x}{2} = \\ &= 2 \sin \frac{\pi}{4} \cos \left(\frac{\pi}{4} - x \right) = \sqrt{2} \cos \left(x - \frac{\pi}{4} \right), \end{aligned}$$

то последняя совокупность уравнений равносильна уравнениям:

$$\begin{cases} \cos \left(x - \frac{\pi}{4} \right) = 0, \\ \cos \left(x - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}}, \\ \cos \left(x - \frac{\pi}{4} \right) = -\frac{3}{\sqrt{2}}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}, \\ x - \frac{\pi}{4} = \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z}, \\ \emptyset, \text{ так как } \frac{3}{\sqrt{2}} > 1. \end{cases}$$

Окончательно имеем

Ответ: $x = \frac{3}{4}\pi + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$;

$$x = 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Пример 4.24. Решите уравнение

$$\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\cos x} + \frac{1}{\sin x \cos x} = 3.$$

Решение. Область допустимых значений переменной x определяется условиями

$$\begin{cases} \sin x \neq 0, \\ \cos x \neq 0, \\ x \in \mathbb{R}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{\pi}{2}n, \quad n \in \mathbb{Z}, \\ x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

На ОДЗ исходное уравнение равносильно следующему:

$$\cos x - \sin x - 3 \cos x \sin x + 1 = 0.$$

Пусть $\cos x - \sin x = t$, тогда $(\cos x - \sin x)^2 = t^2 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 1 - 2 \sin x \cos x = t^2 \Rightarrow \sin x \cos x = \frac{1 - t^2}{2}.$$

В результате имеем уравнение

$$t - \frac{3}{2}(1 - t^2) + 1 = 0 \Leftrightarrow 3t^2 + 2t - 1 = 0.$$

Его корни: $t_1 = -1$, $t_2 = \frac{1}{3}$.

Уравнение $\cos x - \sin x = -1$ имеет две серии корней

$$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z} \quad \text{и} \quad x = -\pi + 2\pi m, \quad m \in \mathbb{Z}.$$

Однако обе серии корней не принадлежат ОДЗ уравнения.

Уравнение $\cos x - \sin x = \frac{1}{3}$ решим методом введения вспомогательного угла:

$$\begin{aligned} \cos x - \sin x = \frac{1}{3} &\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \cos x - \frac{1}{\sqrt{2}} \sin x = \frac{1}{3\sqrt{2}} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) &= \frac{1}{3\sqrt{2}} \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} \pm \arccos \frac{1}{3\sqrt{2}} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

$$\text{Ответ: } x = -\frac{\pi}{4} \pm \arccos \frac{1}{3\sqrt{2}} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

4.7. Решение уравнений с использованием основных тригонометрических формул

Тригонометрические тождества, позволяющие преобразовывать сумму (разность) тригонометрических функций в произведение [формулы (2.27)-(2.31)]; произведения $\sin kx \cos mx$, $\sin kx \sin mx$, $\cos kx \cos mx$ - в сумму основных тригонометрических функций [формулы (2.24)-(2.26)], являются эффективным средством решения многих тригонометрических уравнений.

Решение отдельных уравнений осуществляется с помощью домножения обеих частей уравнения на некоторое выражение с последующим применением названных и других формул из раздела 2.

Пример 4.25. Решите уравнение

$$\cos 5x + \sin x = \cos x - \sin 3x.$$

Решение. Преобразуем уравнение к виду

$$(\cos 5x - \cos x) + (\sin x + \sin 3x) = 0$$

и применим к выражениям в скобках формулы разности косинусов и суммы синусов

$$-2 \sin 3x \sin 2x + 2 \sin 2x \cos x = 0$$

или

$$\sin 2x(\cos x - \sin 3x) = 0,$$

откуда

$$\begin{cases} \sin 2x = 0, \\ \cos x - \sin 3x = 0. \end{cases}$$

Корни первого уравнения $x = \frac{\pi}{2}n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Второе уравнение решим с помощью формулы (4.4).

Поскольку $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$, то

$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin 3x &\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\pi}{2} - x = 3x + 2\pi m, & m \in \mathbb{Z}, \\ \frac{\pi}{2} - x = \pi - 3x + 2\pi k, & k \in \mathbb{Z}, \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2}m, & m \in \mathbb{Z}; \\ x = \frac{\pi}{4} + k\pi, & k \in \mathbb{Z}. \end{cases} \end{aligned}$$

Ответ: $x = \frac{\pi}{2}n$, $n \in \mathbb{Z}$; $x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2}m$, $m \in \mathbb{Z}$;

$$x = \frac{\pi}{4} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Пример 4.26. Решите уравнение

$$\cos \frac{x}{2} \cos x \cos 2x \cos 4x = \frac{1}{16}.$$

Решение. Умножим обе части на $16\sin\frac{x}{2}$. Получим уравнение

$$16\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\cos x\cos 2x\cos 4x = \sin\frac{x}{2},$$

равносильное исходному на множестве $X = \{x | x \in \mathbf{R}, x \neq 2\pi k, k \in \mathbf{Z}\}$. Действительно, корни

$x = 2\pi k, k \in \mathbf{Z}$ уравнения $\sin\frac{x}{2} = 0$ не являются корнями исходного уравнения и потому должны быть исключены из множества решений полученного уравнения.

Учитывая, что

$$2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = \sin x,$$

$$2\sin x\cos x = \sin 2x,$$

$$2\sin 2x\cos 2x = \sin 4x,$$

$$2\sin 4x\cos 4x = \sin 8x,$$

получаем уравнение $\sin 8x - \sin\frac{x}{2} = 0$ или $\sin 8x = \sin\frac{x}{2}$.

Отсюда в соответствии с формулой (4,4) получаем

$$\left[\begin{array}{l} 8x = \frac{x}{2} + 2\pi n, \quad n \in \mathbf{Z}, \\ 8x = \pi - \frac{x}{2} + 2\pi m, \quad m \in \mathbf{Z}, \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{4}{15}\pi n, \quad n \in \mathbf{Z}, \\ x = \frac{2}{17}\pi + \frac{4}{17}\pi m, \quad m \in \mathbf{Z}. \end{array} \right.$$

Исключим посторонние корни $x = 2\pi k, k \in \mathbf{Z}$ из полученных серий. Для этого решим уравнения $\frac{4}{15}\pi n = 2\pi k$ и

$\frac{2}{17}\pi + \frac{4}{17}\pi m = 2\pi k$ на множестве целых чисел n, m, k . Первое

уравнение имеет решение $n = \frac{15}{2}k$. Отсюда следует, что для

первой серии корней $x = \frac{4}{15}\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$, но $n \neq 15k$, $k \in \mathbf{Z}$. Второе уравнение не имеет целочисленных решений ($2m \neq 17k - 1$ для любых $m, k \in \mathbf{Z}$).

$$\text{Ответ: } x = \frac{4}{15}\pi n, n \in \mathbf{Z}; n \neq 15k, x = \frac{2}{17}\pi + \frac{4}{17}\pi m, m \in \mathbf{Z}.$$

Пример 4. 27. Решите уравнение

$$\sin\left(x - \frac{\pi}{8}\right)\cos\left(2x + \frac{5}{8}\pi\right) + \cos\left(5x + \frac{3}{4}\pi\right)\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = 0.$$

Решение. Преобразуем каждое слагаемое данного уравнения из произведения тригонометрических функций в сумму:

$$\begin{aligned}\sin\left(x - \frac{\pi}{8}\right)\cos\left(2x + \frac{5}{8}\pi\right) &= \frac{1}{2}\left[\sin\left(3x + \frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(-x - \frac{3}{4}\pi\right)\right] = \\ &= \frac{1}{2}\left[\cos 3x - \sin\left(x + \frac{3}{4}\pi\right)\right];\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos\left(5x + \frac{3}{4}\pi\right)\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) &= \frac{1}{2}\left[\cos\left(7x + \frac{\pi}{2}\right) + \cos(3x + \pi)\right] = \\ &= -\frac{1}{2}(\sin 7x + \cos 3x).\end{aligned}$$

В результате уравнение примет вид

$$\sin 7x + \sin\left(x + \frac{3}{4}\pi\right) = 0.$$

Преобразовав сумму в произведение, получим равносильную совокупность уравнений

$$\begin{cases} \sin\left(4x + \frac{3}{8}\pi\right) = 0, \\ \cos\left(3x - \frac{3}{8}\pi\right) = 0, \end{cases}$$

решением которой являются серии корней

$$x = -\frac{3}{32}\pi + \frac{\pi}{4}n, n \in \mathbb{Z} \text{ и } x = \frac{7}{24}\pi + \frac{\pi}{3}m, m \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $x = -\frac{3}{32}\pi + \frac{\pi}{4}n, n \in \mathbb{Z}; x = \frac{7}{24}\pi + \frac{\pi}{3}m, m \in \mathbb{Z}.$

Пример 4.28. Решите уравнение

$$\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x + \cos^2 4x = 2.$$

Решение. Применив формулы понижения степени

$$\cos^2 kx = \frac{1 + \cos 2kx}{2},$$

получим равносильное уравнение

$$\cos 2x + \cos 4x + \cos 6x + \cos 8x = 0.$$

Преобразовав суммы $(\cos 2x + \cos 8x)$ и $(\cos 4x + \cos 6x)$ в произведения, получим следующее равносильное уравнение

$$\cos 5x \cos 3x + \cos 5x \cos x = 0.$$

Это уравнение еще одним применением формулы суммы косинусов сводится к совокупности уравнений:

$$\begin{cases} \cos x = 0, \\ \cos 2x = 0, \\ \cos 5x = 0. \end{cases}$$

Ее решением являются серии корней:

$$x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}; \quad x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} k, k \in \mathbb{Z}; \quad x = \frac{\pi}{10} + \frac{\pi}{5} m, m \in \mathbb{Z}.$$

Покажем, что корни первой серии содержатся в серии $x = \frac{\pi}{10} + \frac{\pi}{5} m, m \in \mathbb{Z}$. Для этого решим уравнение

$$\frac{\pi}{2} + \pi n = \frac{\pi}{10} + \frac{\pi}{5} m, m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z},$$

считая m параметром, а n – зависимой переменной. Получим

$$n = \frac{-2+m}{5}, m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}.$$

Очевидно, что при $m = 2 + 5 \cdot \tilde{m}, \tilde{m} \in \mathbb{Z}$, получатся целочисленные значения $n = \tilde{m}$

$$(\text{при } \tilde{m} = 0: m = 2, n = 0 \text{ и } x_1 = x_2 = \frac{\pi}{2};$$

$$\text{при } \tilde{m} = 1: m = 7, n = 1 \text{ и } x_1 = x_2 = \frac{3}{2}\pi \text{ и т.д.).}$$

$$\text{Ответ: } x = \frac{\pi}{10} + \frac{\pi}{5} m, m \in \mathbb{Z}; \quad x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} k, k \in \mathbb{Z}.$$

$$4.8. \text{ Замена переменной } t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$$

(универсальная подстановка)

Замена $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ применяется при решении уравнений вида

$$R(\sin x, \cos x) = 0, \quad (4.17)$$

т.е. уравнений, левая часть которых является рациональной функцией двух переменных $u = \cos x$ и $v = \sin x$. Учитывая, что

$$\sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} = \frac{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{\sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2}} = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}, \quad (4.18)$$

$$\cos x = \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} = \frac{\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2}} = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2},$$

получаем рациональное уравнение $\tilde{R}(t) = 0$ относительно одной переменной $t \left(R\left(\frac{2t}{1+t^2}; \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) \equiv \tilde{R}(t) = 0 \right)$. Два важных замечания по поводу подстановки $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$.

1. Функция $t(x) = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ не определена в точках $x = \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$. Однако эти точки могут входить в ОДЗ исходного уравнения (4.17) и, более того, могут быть корнями этого уравнения. Поэтому при применении подстановки $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ необходимо проверять, не удовлетворяют ли значения $x = \pi(2n+1), n \in \mathbb{Z}$, исходному уравнению.

2. Подстановка $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ сводит всякое рациональное уравнение (4.17) к некоторому алгебраическому степени n . Однако решение получающегося алгебраического уравнения

при $n > 2$ может оказаться более сложной задачей, чем решение исходного уравнения неким альтернативным способом. И если альтернативный способ существует, то чаще всего целесообразно пользоваться им.

Пример 4.29. Решите уравнение

$$\sin x + \cos x = 1.$$

с помощью универсальной подстановки.

Решение. Отметим, что левая часть уравнения является многочленом первой степени относительно переменных $u = \sin x$ и $v = \cos x$, т.е. является рациональной функцией $R(\sin x, \cos x) = 0$.

Используя формулы (4.18) получаем уравнение

$$\frac{2t}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2} = 1, \quad (4.19)$$

где $\tilde{R}(t) = \frac{2t}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2}$ – рациональная функция относительно переменной t .

Умножив обе части уравнения (4.19) на $(1+t^2)$, получим алгебраическое уравнение

$$2t + 1 - t^2 = 1 + t^2 \Leftrightarrow t^2 - t = 0$$

второй степени. Его корни: $t_1 = 0$ и $t_2 = 1$. Возвращаясь к старой переменной x , получаем

$$\begin{cases} \operatorname{tg} \frac{x}{2} = 0, \\ \operatorname{tg} \frac{x}{2} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{2} = \pi m, m \in \mathbb{Z}, \\ \frac{x}{2} = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2\pi m, m \in \mathbb{Z}, \\ x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Ответ: $x = 2\pi m, m \in \mathbb{Z}$; $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.

Комментарий к примеру 4.29.

Уравнения вида $\sin x + \cos x = \pm 1$, $\sin x - \cos x = \pm 1$ часто появляются в процессе решения более сложных уравнений. Решать каждое из них можно с помощью рассмотренной в примере 4.29 универсальной подстановки, методом введения вспомогательного угла, а также с помощью формул преобразования суммы (разности) $\sin x \pm \cos x$ в произведение. Так, на примере уравнения $\sin x + \cos x = 1$ имеем:

метод введения вспомогательного угла:

$$\sin x + \cos x = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \sin x + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos x = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1/\sqrt{2} \Leftrightarrow x + \frac{\pi}{4} = (-1)^n \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

или $x = 2\pi m$ при $n = 2m, m \in \mathbb{Z}$ (при четном n);

$$x = -\frac{\pi}{2} + \pi(2k+1) = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z} \quad - \text{при нечетном } n:$$

$$n = 2k+1, \quad k \in \mathbb{Z};$$

преобразование суммы в произведение:

$$\sin x + \cos x = 1 \Leftrightarrow \sin x + \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z},$$

$$\text{или } x = \frac{\pi}{2} + 2\pi m, \quad m \in \mathbb{Z}; \quad x = 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Можно заметить, что решениями уравнений $\sin x + \cos x = \pm 1$, $\sin x - \cos x = \pm 1$ являются только точки вида $x = \frac{\pi}{2}n$, $n \in \mathbb{Z}$. Действительно, справедливы следующие утверждения.

Утверждения.

$$\begin{aligned} 1. \sin x + \cos x = 1 &\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 1, \\ \cos x = 1. \end{cases} \\ 2. \sin x - \cos x = 1 &\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 1, \\ \cos x = -1. \end{cases} \\ 3. \sin x + \cos x = -1 &\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = -1, \\ \cos x = -1. \end{cases} \\ 4. \cos x - \sin x = 1 &\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = -1, \\ \cos x = 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Доказываются все утверждения однотипно. Докажем для примера второе утверждение

$$2. \sin x - \cos x = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 1, \\ \cos x = -1. \end{cases}$$

Доказательство. Значения $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$ ($\sin x = 1$) и $x = \pi + 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$ ($\cos x = -1$) являются решениями данного уравнения. Покажем, что других решений оно не имеет.

В первой и третьей четвертях $\left(x \in \left(0; \frac{\pi}{2} \right), x \in \left(\pi; \frac{3}{2}\pi \right) \right)$ имеет место неравенство $|\sin x - \cos x| < 1$, т.к. $\sin x$ и

$(-\cos x)$ в этих четвертях имеют разные знаки и $|\sin x| < 1, |\cos x| < 1$.

Во второй и четвертой четвертях

$$\left(x \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi \right), x \in \left(\frac{3}{2}\pi; 2\pi \right) \right)$$

будет выполняться неравенство

$$|\sin x - \cos x| > 1.$$

Действительно, $a = \sin x$ и $b = -\cos x$ — длины катетов прямоугольного треугольника ОАВ (рис. 4.8) с гипотенузой $c = OA = 1$ и потому в силу неравенства треугольника $(a + b > c)$ имеем

$$|\sin x - \cos x| > 1.$$

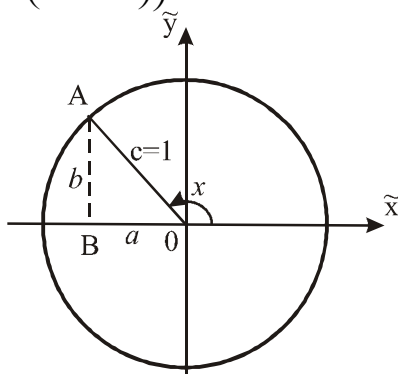


Рис. 4.8

В точках $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$ и $x = 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$, как нетрудно видеть, $|\sin x - \cos x| \neq 1$. Таким образом, утверждение 2 доказано.

Отметим, что решение уравнений вида (4.17) с помощью замены $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ порождает иногда еще одну проблему — менее удобную форму записи ответа. Так, решение уравнения $\sin x + \sqrt{3} \cos x = \sqrt{2}$ (см. пример 4.7) этим методом приводит к квадратному уравнению $t^2 - 2(\sqrt{3} - \sqrt{2})t - (\sqrt{3} - \sqrt{2})^2 = 0$. Его корни: $t_{1,2} = (\sqrt{3} - \sqrt{2})(1 \pm \sqrt{2})$. Отсюда

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = (\sqrt{3} - \sqrt{2})(1 \pm \sqrt{2}) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 2\operatorname{arctg}((\sqrt{3} - \sqrt{2})(1 \pm \sqrt{2})) + 2\pi m, m \in \mathbb{Z},$$

т.е. вместо результата $x = -\frac{\pi}{3} + (-1)^n \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$, мы

получили менее удобную форму его представления:
 $x = 2\operatorname{arctg}((\sqrt{3} - \sqrt{2})(1 \pm \sqrt{2})) + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$. Можно сделать

общий вывод: нецелесообразно применять метод замены

переменной $\left(t = \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right)$ для решения уравнений вида

$a \sin f(x) + b \cos f(x) = c$, которые эффективно решаются методом введения вспомогательного угла. Такой же вывод можно (и нужно!) сделать по отношению ко всем рассмотренным выше классам уравнений, хотя все они могут

быть решены методом замены переменной $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$.

Рассмотрим уравнение из примера 4.24.

Пример 4.30. Решите уравнение

$$\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\cos x} + \frac{1}{\sin x \cos x} = 3.$$

Решение. ОДЗ уравнения: $x \in \mathbb{R}, x \neq \frac{\pi}{2}, n \in \mathbb{Z}$.

Используя формулы (4.18), получаем на ОДЗ

$$\frac{1+t^2}{2t} - \frac{1+t^2}{1-t^2} + \frac{(1+t^2)^2}{2t(1-t^2)} = 3, t \neq 0, t \neq \pm 1,$$

или

$$2t^3 + t^2 - 4t + 1 = 0, t \neq 0, t \neq \pm 1.$$

Один корень этого уравнения $t_1 = 1$ легко находится. Однако он является посторонним. Разделив многочлен $2t^3 + t^2 - 4t + 1 = 0$ уголком на $(t - 1)$ или воспользовавшись схемой Горнера:

	2	1	-4	1
1	2	3	-1	0

получим квадратное уравнение

$$2t^2 + 3t - 1 = 0.$$

Его корни: $t_{2,3} = \frac{-3 \pm \sqrt{17}}{4}$.

Имеем

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{17}}{4} \Rightarrow x = 2 \left(\operatorname{arctg} \frac{-3 \pm \sqrt{17}}{4} + \pi n \right) n \in \mathbb{Z}.$$

И вновь этот ответ менее удобен для анализа, чем ответ, полученный в примере 4.24:

$$x = -\frac{\pi}{4} \pm \arccos \frac{1}{3\sqrt{2}} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Ответ: } x = 2 \left(\operatorname{arctg} \frac{-3 \pm \sqrt{17}}{4} + \pi n \right) n \in \mathbb{Z}.$$

Тем не менее есть примеры, в которых применение подстановки $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ не только целесообразно, но и, возможно, является единственным или более эффективным способом решения тригонометрического уравнения.

Пример 4.31. Решите уравнение

$$\frac{\sin x + 1}{\operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1} + \cos x = 1.$$

Решение. ОДЗ уравнения:
$$\begin{cases} x \in \mathbb{R}, \\ x \neq \pi + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}, \\ x \neq -\pi/2 + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Пусть $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$. Заметим, что значения $x_0 = \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$, не принадлежат ОДЗ. С учетом формул (4.18) получаем на ОДЗ уравнения:

$$\frac{\frac{2t}{1+t^2} + 1}{t+1} + \frac{1-t^2}{1+t^2} = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 2t^2 - t - 1 = 0, \\ t \neq -1. \end{cases}$$

Корни последнего уравнения $t_1 = 1$ и $t_2 = -\frac{1}{2}$ принадлежат области допустимых значений переменной t и потому имеем уравнение

$$\begin{cases} \operatorname{tg} \frac{x}{2} = 1, \\ \operatorname{tg} \frac{x}{2} = -\frac{1}{2}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}, \\ x = 2 \left(\operatorname{arctg} \left(-\frac{1}{2} \right) + \pi m \right), \quad m \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Ответ: $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}; \quad x = -2\operatorname{arctg} \frac{1}{2} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z}.$

Пример 4.32. Решите уравнение $\operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) + 1 = \frac{5}{2} \operatorname{tg} x.$

Решение. ОДЗ уравнения:

$$\begin{cases} x \in \mathbb{R}, \\ \frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}, \\ x \neq \frac{\pi}{2} + \pi m, \quad m \in \mathbb{Z}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{R}, \\ x \neq \frac{\pi}{2} + \pi m, \quad m \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Пусть $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$. Подставим значения $x = \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$, в исходное уравнение. Они удовлетворяют ему, т.е. $x = \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$, - корни уравнения.

Продолжим решение уравнения на ОДЗ с помощью подстановки $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$. Поскольку

$$\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1 + \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 - \operatorname{tg} \frac{x}{2}} = \frac{1+t}{1-t}; \quad \operatorname{tg} x = \frac{2t}{1-t^2},$$

то исходное уравнение после подстановки в него этих выражений примет вид

$$\frac{1+t}{1-t} + 1 = \frac{5t}{1-t^2} \Leftrightarrow \frac{2}{1-t} = \frac{5t}{1-t^2} \Leftrightarrow \begin{cases} 2t + 2 = 5t, \\ t \neq \pm 1, \end{cases} \Rightarrow t = \frac{2}{3},$$

т.е.

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow x = 2 \left(\operatorname{arctg} \frac{2}{3} + \pi m \right), \quad m \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Ответ: } x = \pi(1 + 2n), n \in \mathbb{Z}; \quad x = 2 \left(\operatorname{arctg} \frac{2}{3} + \pi m \right), \quad m \in \mathbb{Z}.$$

Данный пример подтверждает важность замечания 1 данного пункта о необходимости проверки значений $x = \pi(1 + 2n), n \in \mathbb{Z}$, подстановкой в исходное уравнение. В противном случае возможна потеря корней.

4.9. Метод оценок и другие специальные приемы решения тригонометрических уравнений

Идею метода оценок легко понять из следующего примера: решить уравнение

$$1 + \cos 4x = \frac{2}{\sin x}.$$

Для левой части уравнения справедливы оценки $0 \leq 1 + \cos 4x \leq 2$ для всех $x \in \mathbb{R}$; для правой части: $\frac{2}{\sin x} \geq 2$ для всех $x \in \mathbb{R}$ таких, что $\sin x > 0$.

Если $\sin x < 0$, то и $\frac{2}{\sin x} < 0$, а выражение в правой части $(1 + \cos 4x)$ неотрицательно для всех $x \in \mathbb{R}$. Поэтому на множестве $\{x | -\pi + 2k\pi < x < 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ уравнение не имеет решения.

Отсюда следует, что если решение x^* уравнения существует, то одновременно должны выполняться равенства:

$$\begin{cases} 1 + \cos 4x^* = 2, \\ \frac{2}{\sin x^*} = 2. \end{cases}$$

Нетрудно видеть, что в данном случае такие x^* существуют и $x^* = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.

Пример 4.33. Решите уравнение

$$1 + \sin 2x = \frac{2}{\cos x}.$$

Решение. Имеем оценки $0 \leq 1 + \sin 2x \leq 2$ для всех $x \in \mathbb{R}$. $\frac{2}{\cos x} \geq 2$ для всех $x \in \mathbb{R}$ таких, что $\cos x > 0$. Поэтому уравнение имеет решение, если выполняются равенства:

$$\begin{cases} 1 + \sin 2x^* = 2, \\ \frac{2}{\cos x^*} = 2. \end{cases}$$

Из первого уравнения находим $x^* = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$.

Поскольку x^* должны удовлетворять еще условию $\cos x^* > 0$, то окончательно имеем: $x^* = \frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$. Подставив эти значения во второе уравнение, получим неверное равенство $2\sqrt{2} = 2$. Это означает, что левая и правая части уравнения принимают значение 2 в разных точках: левая – в точках $x^* = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$, а правая – в точках $x = 2\pi m, m \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $\emptyset$ (уравнение не имеет решения).

Пример 4.34. Решите уравнение

$$(2 + \cos 2x)(3 - \sin y) = 12 \cdot \sec^2 3z.$$

Решение. В соответствии с определением функции $\sec : \sec^2 3z = \frac{1}{\cos^2 3z}$. Функция $\cos^2 3z$ принимает значения из промежутка $[0; 1]$ для всех $z \in \mathbb{R}$. Функция $\sec^2 3z$ соответственно принимает значения из бесконечного промежутка $[1; +\infty)$ для всех $z \in \mathbb{R}$, $z \neq \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}n, n \in \mathbb{Z}$ (в этих точках $\cos 3z = 0$), т.е. $\sec^2 3z \geq 1$ на области определения этой функции и соответственно $12 \sec^2 3z \geq 12$ для всех допустимых z (оценка снизу). Для левой части уравнения справедлива оценка сверху:

$$(2 + \cos 2x)(3 - \sin y) \leq (2 + 1)(3 - (-1)) = 12,$$

откуда следует, что если решение (x^*, y^*, z^*) уравнения существует, то должны выполняться равенства

$$\begin{cases} \cos 2x^* = 1, \\ \sin y^* = -1, \\ \cos^2 3z^* = 1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^* = \pi n, n \in \mathbb{Z}; \\ y^* = -\frac{\pi}{2} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z}; \\ z^* = \frac{\pi k}{3}, k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Ответ: $x = \pi n, n \in \mathbb{Z}; y = -\pi/2 + 2\pi m, m \in \mathbb{Z};$

$$z = \frac{\pi k}{3}, k \in \mathbb{Z}.$$

Приведенные примеры показывают, что метод оценок является эффективным способом нахождения решений или установления их отсутствия для некоторых тригонометрических уравнений. В отдельных случаях увидеть такое уравнение легко, как, например, в примере 4.34. В других случаях целесообразность применения метода оценок становится очевидной после, возможно, не одной неудачной попытки решить такое уравнение другими способами.

Пример 4.35. Решите уравнение

$$\cos x + \cos 2x + \cos 3x + \dots + \cos nx = 0.$$

Решение. С учетом формулы (2.51)

$$\cos x + \cos 2x + \dots + \cos nx = \frac{\sin \frac{nx}{2} \cos \frac{(n+1)x}{2}}{\sin \frac{x}{2}}$$

исходное уравнение равносильно для всех $x \in \mathbb{R}, x \neq 2\pi l, l \in \mathbb{Z}$, уравнению

$$\sin \frac{nx}{2} \cos \frac{(n+1)x}{2} = 0.$$

Его решения:

$$\left[\begin{array}{l} \frac{nx}{2} = \pi m, m \in Z, \\ \frac{(n+1)x}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad k \in Z, \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{2\pi m}{n}, \quad m \in Z, \\ x = \frac{\pi(2k+1)}{n+1}, \quad k \in Z. \end{array} \right.$$

Исключив из полученного множества решений точки $x = 2\pi l, l \in Z$ (в них $\cos x + \cos 2x + \dots + \cos nx = n \neq 0$), получим окончательно

$$\text{Ответ: } x = \frac{2\pi m}{n}, \quad m \in Z, \quad m \neq n\tilde{m}, \quad \tilde{m} \in Z; \quad x = \frac{\pi(2l+1)}{n+1}.$$

Пример 4.36. Вычислите

$$A = \sin \frac{\pi}{10} + \sin \frac{\pi}{5} + \dots + \sin \frac{9}{5} \pi.$$

Решение. Воспользовавшись формулой, полученной в примере 2.5:

$$\left(\sin x + \sin 2x + \dots + \sin nx = \frac{\sin \frac{nx}{2} \sin \frac{(n+1)x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} \right),$$

будем иметь при $n = 18, \quad x = \frac{\pi}{10}$

$$A = \frac{\sin \frac{18\pi}{20} \sin \frac{19\pi}{20}}{\sin \frac{\pi}{20}}.$$

Но $\sin \frac{19\pi}{20} = \sin \left(\frac{20-1}{20} \pi \right) = \sin \frac{\pi}{20}$ и потому

$$A = \sin \frac{9}{10} \pi = \sin \frac{\pi}{10} = \frac{\sqrt{5}-1}{4} \quad (\text{см. пример 2.18}).$$

Ответ: $\frac{\sqrt{5}-1}{4}$.

4.10. Уравнения с радикалами и модулем

Тригонометрические уравнения с радикалами отличаются от других классов тригонометрических уравнений прежде всего необходимостью и важностью нахождения области допустимых значений уравнения.

Пример 4.37. Решите уравнение

$$\sqrt{\sin x} = \cos x.$$

Решение. Поскольку функции $\cos x$ и $\sin x$ не обращаются одновременно в ноль, то ОДЗ уравнения:

$$\begin{cases} \sin x > 0, \\ \cos x > 0, \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left(2\pi n, \frac{\pi}{2} + 2\pi n \right), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

На ОДЗ уравнение равносильно следующему

$$\sin x = \cos^2 x \Leftrightarrow \sin^2 x + \sin x - 1 = 0.$$

Приняв $t = \sin x$, $0 < t < 1$, получим квадратное уравнение $t^2 + t - 1 = 0$. Его корни: $t_1 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} < -1$,

$$t_2 = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \quad \left(0 < \frac{\sqrt{5}-1}{2} < 1 \right).$$

Уравнение $\sin x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ имеет решение

$$x = (-1)^n \arcsin \frac{\sqrt{5}-1}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z},$$

или в виде двух серий:

$$\begin{cases} x = \arcsin \frac{\sqrt{5}-1}{2} + 2\pi n, & n \in \mathbb{Z}, \\ x = \pi - \arcsin \frac{\sqrt{5}-1}{2} + 2\pi m, & m \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

ОДЗ уравнения удовлетворяют только корни первой серии.

Ответ: $x = \arcsin \frac{\sqrt{5}-1}{2} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$

Пример 4.38. Решите уравнение

$$\sqrt{\cos x - 1} = \sin \frac{x}{4}.$$

Решение. ОДЗ уравнения

$$\begin{cases} \cos x - 1 \geq 0, \\ \sin \frac{x}{4} \geq 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x \geq 1, \\ \sin \frac{x}{4} \geq 0. \end{cases}$$

Вместе с тем $\cos x \leq 1$ для всех $x \in \mathbb{R}$. Из системы неравенств

$$\begin{cases} \cos x \geq 1, \\ \cos x \leq 1 \end{cases}$$

следует, что $\cos x = 1$.

Тогда исходное уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases} \cos x = 1, \\ \sin \frac{x}{4} = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2\pi n, & n \in \mathbb{Z}, \\ x = 4\pi m, & m \in \mathbb{Z}, \end{cases} \Leftrightarrow x = 4\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $x = 4\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$

Пример 4.39. Решите уравнение

$$\sqrt{1 + \sin 2x} = \cos x + \sin x. \quad (4.21)$$

Решение. ОДЗ уравнения: $\cos x + \sin x \geq 0$. Поскольку $1 + \sin 2x = \sin^2 x + 2 \sin x \cos x + \cos^2 x = (\sin x + \cos x)^2$, то уравнение (4.21) равносильно следующему $|\sin x + \cos x| = \cos x + \sin x$.

На ОДЗ это уравнение будет тождеством:

$$\begin{cases} \sin x + \cos x = \sin x + \cos x, \\ \sin x + \cos x \geq 0. \end{cases}$$

Таким образом, решение уравнения (4.21) свелось к решению неравенства $\sin x + \cos x \geq 0$:

$$\sin x + \cos x \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} + 2\pi n \leq x - \frac{\pi}{4} \leq \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Ответ: } x \in \left[-\frac{\pi}{4} + 2\pi n; \frac{3}{4}\pi + 2\pi n\right] \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Пример 4.40. Решите уравнение

$$\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x} = 2|\sin x|. \quad (4.22)$$

Решение. $1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$ для всех $x \in \mathbb{R}$, $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. Поэтому уравнение (4.22) равносильно на ОДЗ уравнению

$$\frac{1}{|\cos x|} = 2|\sin x| \Leftrightarrow |\sin 2x| = 1 \Leftrightarrow \sin 2x = \pm 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, \quad n \in \mathbb{Z}.$

Пример 4.41. Решите уравнение

$$\sqrt{1 - \cos x} = \operatorname{ctg} \frac{x}{2}. \quad (4.23)$$

Решение. Способ 1. Воспользовавшись формулой понижения степени (2.18), получим

$$\sqrt{1 - \cos x} = \sqrt{2 \sin^2 \frac{x}{2}} = \sqrt{2} \left| \sin \frac{x}{2} \right|.$$

Тогда исходное уравнение принимает вид

$$\sqrt{2} \left| \sin \frac{x}{2} \right| = \frac{\cos \frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2} \left| \sin \frac{x}{2} \right| \cdot \sin \frac{x}{2} = \cos \frac{x}{2}, \\ x \neq 2\pi n. \end{cases}$$

Рассмотрим два случая: а) $\sin \frac{x}{2} > 0$, б) $\sin \frac{x}{2} < 0$:

$$\text{а) } \begin{cases} \sin \frac{x}{2} > 0: \sqrt{2} \sin^2 \frac{x}{2} = \cos \frac{x}{2} \Leftrightarrow \sqrt{2} \left(1 - \cos^2 \frac{x}{2} \right) = \cos \frac{x}{2}. \\ x \neq 2\pi n. \end{cases}$$

Приняв $\cos \frac{x}{2} = t$, получим уравнение $t^2 + \frac{1}{\sqrt{2}} t - 1 = 0$.

$$\text{Его корни } t_1 = -\sqrt{2}, \quad t_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Подходит второй корень. Решив уравнение $\cos \frac{x}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$,

получим

$$x = \pm \frac{\pi}{2} + 4\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Поскольку $\sin \frac{x}{2} > 0$, то отбираем корни $x = \frac{\pi}{2} + 4\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$;

$$6) \begin{cases} \sin \frac{x}{2} < 0 : -\sqrt{2} \sin^2 \frac{x}{2} = \cos \frac{x}{2} \Leftrightarrow \sqrt{2} \left(\cos^2 \frac{x}{2} - 1 \right) = \cos \frac{x}{2}, \\ x \neq 2\pi n. \end{cases}$$

Приняв $t = \cos \frac{x}{2}$, получим уравнение $t^2 - \frac{1}{\sqrt{2}}t - 1 = 0$.

Его корни: $t_1 = \sqrt{2}; \quad t_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$.

$$\cos \frac{x}{2} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \frac{x}{2} = \pm \frac{3}{4}\pi + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}, \Leftrightarrow x = \pm \frac{3}{2}\pi + 4\pi n.$$

Из исходного уравнения следует, что $\operatorname{ctg} \frac{x}{2} \geq 0$. Поэтому

оставляем $x = -\frac{3}{2}\pi + 4\pi n$. Две серии корней $x = \frac{\pi}{2} + 4\pi n$;

$x = -\frac{3}{2}\pi + 2\pi n$ можно объединить в одну:

$$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$.

Способ 2. Применим универсальную подстановку

$$t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}: \quad 1 - \cos x = 1 - \frac{1-t^2}{1+t^2} = \frac{2t^2}{1+t^2}.$$

Имеем

$$\sqrt{\frac{2t^2}{1+t^2}} = \frac{1}{t} \Rightarrow \frac{2t^2}{1+t^2} = \frac{1}{t^2} \Rightarrow 2t^4 - t^2 - 1 = 0.$$

Решив это уравнение при условии $t > 0$, получим $t = 1$ или $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = 1$, откуда $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Способ 3. В соответствии с формулой (2.21)

$$\operatorname{ctg} \frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos x}{1 - \cos x}} \quad (\text{перед корнем знак «+», так как из}$$

уравнения (4.23) следует, что $\operatorname{ctg} \frac{x}{2} \geq 0$).

Уравнение (4.23) принимает следующий вид

$$\begin{aligned} \sqrt{1 - \cos x} &= \sqrt{\frac{1 + \cos x}{1 - \cos x}} \Leftrightarrow 1 - \cos x = \frac{1 + \cos x}{1 - \cos x} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} (1 - \cos x)^2 = 1 + \cos x, \\ \cos x \neq 1, \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0, \\ \cos x = -3, \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Из полученного множества корней необходимо отобрать те, которые удовлетворяют условию $\operatorname{ctg} \frac{x}{2} \geq 0$, т.е.

$$\pi n \leq \frac{x}{2} \leq \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad \Leftrightarrow \quad 2\pi n \leq x \leq \pi + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Последнему неравенству удовлетворяют значения

$x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, с четными номерами n , т.е.

$$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$

4.11. Уравнения с дополнительными условиями.

Отбор корней

Пример 4.42. Решите уравнение

$$\sqrt{16-x^2} \cos \frac{4\pi x}{3} = 0.$$

Решение. Уравнение определено на отрезке $[-4;4]$ и равносильно смешанной системе

$$\begin{cases} 16-x^2=0, \\ \cos \frac{4\pi x}{3}=0, \\ -4 \leq x \leq 4, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\pm 4, \\ \frac{4\pi x}{3}=\frac{\pi}{2}+\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}, \\ -4 \leq x \leq 4, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\pm 4, \\ x=\frac{3(2n+1)}{8}, \quad n \in \mathbb{Z}. \\ -4 \leq x \leq 4. \end{cases}$$

Решив неравенство $-4 \leq \frac{3(2n+1)}{8} \leq 4$, получим, что $-5 \leq n \leq 4$.

Ответ: $x = \pm 4$; $x = \frac{3(2n+1)}{8}$, $n = -5, -4, \dots, 4$.

Пример 4.43. Найдите все числа, которые являются одновременно решениями уравнений:

$$\sin 2x = (\sqrt{2}+1)(\sin x + \cos x - 1),$$

$$\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x = 1.$$

Решение. Приняв $\sin x + \cos x = t$, $\sin 2x = t^2 - 1$, получим, что первое уравнение равносильно уравнению

$$t^2 - (\sqrt{2}+1)t + \sqrt{2} = 0.$$

Его корни: $t_1 = \sqrt{2}$, $t_2 = 1$. Уравнения $\sin x + \cos x = \sqrt{2}$ и $\sin x + \cos x = 1$ имеют решения

$$x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}, \text{ и}$$

$$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi m, \quad m \in \mathbb{Z}, \quad x = 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (4.24)$$

Применив во втором уравнении формулу понижения степени (2.17), получим равносильное уравнение

$$\cos 4x(2 \cos 2x + 1) = -1.$$

Обозначим $\cos 2x = t$. Тогда $\cos 4x = 2 \cos^2 2x - 1 = 2t^2 - 1$ и в результате получаем уравнение $t(2t^2 + t - 1) = 0$.

$$\text{Его корни: } t = 0, t = -1, \quad t = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Решив уравнения } \cos 2x = 0; \quad \cos 2x = -1; \quad \cos 2x = \frac{1}{2},$$

получим

$$x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, \quad n \in \mathbb{Z}; \quad x = \frac{\pi}{2} + 2\pi m, \quad m \in \mathbb{Z};$$

$$x = \pm \frac{\pi}{6} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (4.25)$$

Сопоставляя решения (4.24) и (4.25), заключаем, что одновременно решениями каждого уравнения будут числа

$$x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}, \text{ и } x = \frac{\pi}{2} + 2\pi m, \quad m \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Ответ: } x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}; \quad x = \frac{\pi}{2} + 2\pi m, \quad m \in \mathbb{Z}.$$

Комментарий к примеру 4.43

Решение примера можно упростить. Действительно, после нахождения корней первого уравнения достаточно отобрать те, которые являются одновременно решениями и второго

уравнения. Подстановка первых двух серий $x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n$,

$n \in \mathbb{Z}$, и $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$, во второе уравнение

показывает, что они являются его решениями, а корни серии $x = 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, не удовлетворяют второму уравнению.

Пример 4.44. Найдите все корни уравнения

$$\sqrt{\operatorname{tg}^2 x - \sqrt{3} \operatorname{tg} x} = \sec x - 1, \quad (4.26)$$

принадлежащие отрезку $[-2\pi, 2\pi]$.

Решение. Найдем ОДЗ уравнения.

$$\begin{cases} \operatorname{tg} x (\operatorname{tg} x - \sqrt{3}) \geq 0, \\ \sec x - 1 \geq 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{tg} x (\operatorname{tg} x - \sqrt{3}) \geq 0, \\ \frac{1 - \cos x}{\cos x} \geq 0. \end{cases}$$

Решив систему неравенств, получим, что

$$x \in \left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi n, 2\pi n \right] \cup \left[\frac{\pi}{3} + 2\pi n, \frac{\pi}{2} + 2\pi n \right), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Возведя обе части уравнения (4.26) в квадрат, получим

$$\operatorname{tg}^2 x - \sqrt{3} \operatorname{tg} x = \sec^2 x - 2 \sec x + 1. \quad (4.27)$$

Но $\sec^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} = \operatorname{tg}^2 x + 1$, а $\sec x = \sqrt{\operatorname{tg}^2 x + 1}$ на ОДЗ уравнения (4.26). Поэтому уравнение (4.27) равносильно на ОДЗ

$$-\sqrt{3} \operatorname{tg} x = 2 - \sqrt{\operatorname{tg}^2 x + 1}$$

или

$$\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x} = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{tg} x \quad \left(\operatorname{tg} x \geq -\frac{2}{\sqrt{3}} \right)$$

Откуда получаем $\operatorname{tg} x = 0$ или $\operatorname{tg} x = 4\sqrt{3}$. Решениями этих простейших уравнений будут серии $x_1 = 2\pi n$ и $x_2 = \operatorname{arctg} 4\sqrt{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$. Отрезку $[-2\pi; 2\pi]$ принадлежат три корня первой серии: $-2\pi; 0; 2\pi$ и два корня второй серии: $\operatorname{arctg} 4\sqrt{3}$ и $\operatorname{arctg} 4\sqrt{3} - 2\pi$ (рис. 4.9).

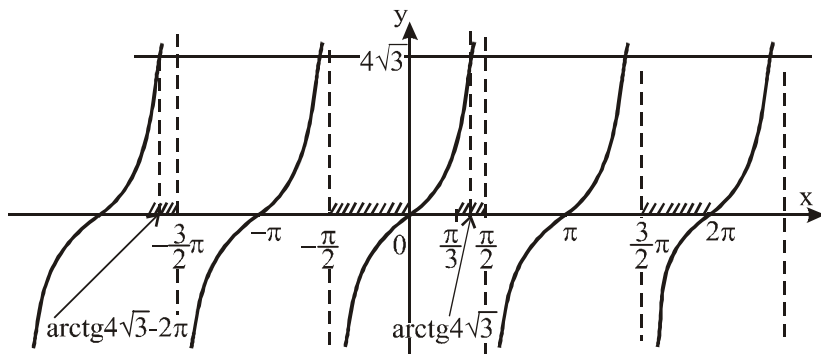


Рис. 4.9

Ответ: $\{-2\pi; 0; 2\pi; \operatorname{arctg} 4\sqrt{3}; \operatorname{arctg} 4\sqrt{3} - 2\pi\}$.

4.12. Задачи для самостоятельного решения

Задачи для самостоятельного решения упорядочены по номерам разделов.

Раздел 4.1. Решите уравнения:

1. $\cos^2 x = \frac{3}{4}$. 2. $\cos^2 x = \frac{1}{2}$. 3. $\cos^2 x = \frac{1}{4}$. 4. $\operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{3}$.

5. $\operatorname{tg}^2 x = 1$. 6. $\operatorname{tg}^2 x = 3$. 7. $\cos x = \sin \frac{3}{2}$. 8. $\operatorname{tg} 3x = \operatorname{ctg} 3$.

9. $\sqrt{2} \sin 5x = \operatorname{tg} \frac{2}{5} \pi$. 10. $2 \cos 5x + \operatorname{cosec} \frac{7}{6} \pi = 0$.

Раздел 4.2. Решите уравнения:

11. $2 \sin 2x - 2\sqrt{3} \cos 2x = \frac{1}{3}.$

12. $3 \sin\left(5x - \frac{\pi}{3}\right) + 4 \cos\left(5x - \frac{\pi}{3}\right) = 6.$

13. $\sqrt{3} \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) + \sqrt{6} \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{3}{2}.$

14. $\sqrt{8} \sin 2x - \sqrt{24} \cos 2x = -4.$

Найдите множество значений функций (примеры 15-16):

15. $f(x) = 12 \sin\left(\frac{\pi}{3} - 4x\right) - 5 \cos\left(4x - \frac{\pi}{3}\right).$

16. $f(x) = 6 \sin 6x + 14 \cos^2 3x - 5.$

Раздел 4.3. Решите уравнения:

17. $\cos^3 x + 2 \cos x (\sin x + 1) = 0.$ 18. $\operatorname{tg} x - 3 \operatorname{ctg} x = 2.$

19. $\operatorname{tg}\left(x + \frac{5}{4}\pi\right) - \operatorname{ctg} \frac{3}{4}\pi = 2 \operatorname{ctg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right).$

20. $2 \sin^3\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{3} - x\right) + 2 \sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = 0.$

Раздел 4.4. Решите уравнения:

21. $\sin^2 x - 2 \sin 2x + 3 \cos^2 x = 0.$

22. $3 \sin^3 x + \frac{1}{2} \sin x \sin 2x - 2 \sin x = 0.$

23. $\cos 2x \sin x + \sin 3x + \cos 3x - 4 \sin x + 3 \cos x = 0.$

24. $\sin^3 x \cos x + 2 \sin^2 x \cos^2 x - 3 \sin x \cos^3 x - 6 \cos^4 x = 0.$

25. $\sin x + \cos x - 4 \cos^3 x = 0.$

26. $\sin^2 x + 4 \cos^2 x + 2 \sin^4 x = 3.$

$$27^*. \sin^4 x + 3\cos^4 x + \cos^3 x \sin x + \sin^3 \cos x = \frac{1}{2} \text{ при условии } |\operatorname{tg} x| \leq 1.$$

Раздел 4.5. Решите уравнения:

$$28. \sin^4 x + 3\cos^4 x = \frac{3}{4}. \quad 29. 7\cos^4 x + \sin^4 x + \cos 4x = \frac{1}{2}.$$

$$30. \cos^2 2x + \sin^2 4x = \frac{3}{2}. \quad 31^*. \cos^6 x - \sin^6 x = \frac{13}{32}.$$

$$32. \sin^4 \frac{x}{2} + \cos^4 \frac{x}{2} = \frac{5}{8}.$$

$$33. \sin^2 x + \cos^2 2x = \sin^2 3x + \cos^2 4x.$$

$$34. \sin^4 4x + \cos^{10} 4x = 1. \quad 35. \sin^6 \frac{x}{2} + \cos^7 \frac{x}{2} = 1.$$

$$36. \sin^3 x + \cos^8 x = 1. \quad 37^*. \cos^2 x - 3\sin^2 x = 1 + \cos 6x.$$

$$38^*. \cos^6 x - \sin^6 x = \frac{3 + \sin^2 x}{8}.$$

Найдите множества значений функций:

$$39. \text{ а) } f(x) = \cos^4 x - \sin^4 x;$$

$$\text{ б) } f(x) = \cos^6 x - \sin^6 x;$$

$$\text{ в) } f(x) = \cos^8 x - \sin^8 x;$$

$$\text{ г) } f(x) = \cos^{2n} x - \sin^{2n} x.$$

$$40. \text{ а) } f(x) = \sec^2 x + \operatorname{cosec}^2 x;$$

$$\text{ б) } f(x) = \sec^4 x + \operatorname{cosec}^4 x.$$

$$41. \text{ а) } f(x) = \frac{1}{\cos^4 x + \sin^4 x};$$

$$\text{ б) } f(x) = \frac{1}{\cos^6 x + \sin^6 x};$$

$$\text{ в) } f(x) = \frac{1}{\cos^{2n} x + \sin^{2n} x}.$$

Раздел 4.6. Решите уравнения:

$$42. \cos 2x = \cos x - \sin x. \quad 43. \sin x + \cos x - \frac{1}{2} = \sin 2x.$$

$$44. \sin 2x(\sin x + \cos x) = 2(\sin x + \cos x - 1).$$

$$45. \cos^3 x - \sin^3 x = \cos^2 2x .$$

$$46^* . \sqrt{2}(\sin x - \cos x) + \cos 4x = 1 \text{ при условии } \sin x - \cos x \geq 1 .$$

$$47. \frac{1}{\cos x} - \frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\sin x \cos x} = 2 .$$

Раздел 4.7. Решите уравнения:

$$48. \sqrt{2}(\cos 5x + \sin 3x) = \sin x - \cos x .$$

$$49. \cos x + \cos 2x + \cos 3x = \sin x + \sin 2x + \sin 3x .$$

$$50. \sin 2x \cdot \sin 8x = \cos 5x \cdot \cos 11x .$$

$$51. \sin\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + \cos^2 x - \cos\left(4x - \frac{\pi}{3}\right) = 0 .$$

$$52. \sin^2 2x + \sin^2 6x = \cos^2 x + \cos^2 5x .$$

$$53. 4\sin 2x \cos 4x \sin 6x + \cos 12x = 0 .$$

$$54. \cos 3x + \sin 4x + \cos 5x + \sin 6x = 0 .$$

$$55. 4\sin x \cos 2x \sin 4x = \cos x .$$

Раздел 4.8. Решите уравнения:

$$56. \frac{1}{\cos x - 1} = 3\left(\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} - 1\right) . \quad 57. \operatorname{tg} 2x - 1 = 2 \operatorname{ctg}\left(2x + \frac{5}{4}\pi\right) .$$

$$58. \cos 2\pi x \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2} - 3 = \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2} - 3 \cos 2\pi x .$$

$$59. \frac{1}{\sin x + \cos x} = \operatorname{ctg} \frac{x}{2} . \quad 60. \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{3}{4}\pi\right) - \operatorname{ctg} \frac{13}{4}\pi = \operatorname{ctg} \frac{x}{2} .$$

Раздел 4.9. Решите уравнения:

$$61. 2y \sin x + y^2 = -1 . \quad 62. (1 + 2 \cos x)(2 - \sin y) = 9 + \cos^2 z .$$

$$63. 2 + \sin^2 2x = \cos^2 2x + 3 \sec^2 4x . \quad 64. \operatorname{tg}^4 x + \operatorname{ctg}^4 x = 2 .$$

$$65. \sec^4 x + \operatorname{cosec}^4 x = 4(1 + \sin 2x) . \quad 66. \operatorname{tg}^5 x + \operatorname{tg}^3 x + \operatorname{tg} x = 3 .$$

$$67^*. 1 + 2 \sin \frac{11}{2} x \sin \frac{5}{2} x - \cos 3x \cos 8x + \sin^2 2x = 0.$$

$$68^*. \cos^2 \frac{3x}{8} - \cos 5x - \sin 5x + \sqrt{2} = 0.$$

$$69. \sqrt{2} - \cos x - \sin x + \operatorname{tg}^2 \left(x - \frac{\pi}{4} \right) = 0.$$

Раздел 4.10. Решите уравнения:

$$70. \sqrt{4 - 6 \cos x} = 2 - \cos x. \quad 71. \sqrt{\sin x - \cos x} = \sin x + \cos x.$$

$$72. \sqrt{-\operatorname{tg} x} = \sqrt{-\cos x}. \quad 73^*. \sqrt{4 - \sqrt{2} \cos x} = \operatorname{tg} x.$$

$$74. \sqrt{\operatorname{tg}^2 x} = 2|\sin x|. \quad 75. |\sin x - 1| = 3 \sin x - 2.$$

$$76. \sqrt{5 \operatorname{tg} x - \operatorname{tg}^2 x - 3} = 2 \operatorname{tg} x - 3.$$

$$77. |\sin 2x| + |\cos 2x| = \sqrt{2}. \quad 78. |\sin x| \cos x = \frac{1}{4}.$$

$$79^*. \operatorname{ctg} x + \left| \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} \right| = \frac{3}{2}.$$

Раздел 4.11

80. Сколько различных корней имеет уравнение
 $\sin x + \sin 2x + \sin 4x + \sin 5x = 0$
 на промежутке $(0, 2\pi]$.

$$81. \text{Решите уравнение} \quad \sqrt{10 + 3x - x^2} \operatorname{tg} \frac{4\pi x}{3} = 0.$$

$$82. \text{Решите уравнение} \quad \lg \frac{5-x}{x+4} \left(\cos \frac{x}{2} + \sin \frac{x}{2} \right) = 0.$$

$$83. \text{Определите число корней уравнения} \quad \cos \frac{\pi x}{2} = \frac{x-1}{3}.$$

84. Решите уравнение $\frac{\sqrt{2} \cos \frac{x}{2}}{\sqrt{1 + \cos x}} = \sin \frac{x}{2}.$

85. Решите уравнение $\frac{\sin 2x}{\sqrt{1 - \cos 2x}} = \sqrt{2} \cos x.$

86. Найдите корни уравнения

$$2 \left(\cos^2 x + \frac{1}{\cos^2 x} \right) + \cos x + \frac{1}{\cos x} = 11,$$

принадлежащие отрезку $[-\pi, \pi].$

87. Найдите все числа, являющиеся одновременно решениями уравнений

$$\sin x + \cos x = \cos 2x,$$

$$\cos^2 x + \cos^2 3x = 1.$$

4.13. Ответы

1. $x = \pm \frac{\pi}{6} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}; \quad x = \pm \frac{5}{6}\pi + 2\pi m, \quad m \in \mathbb{Z},$ или в виде

одной серии $x = \pm \frac{\pi}{6} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$

2. $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, \quad n \in \mathbb{Z}.$ 3. $x = \pm \frac{\pi}{3} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$

4. $x = \pm \frac{\pi}{6} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$ 5. $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, \quad n \in \mathbb{Z}.$

6. $x = \pm \frac{\pi}{3} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$ 7. $x = \pm \frac{\pi - 3}{2} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$

8. $x = \frac{\pi - 6}{6} + \frac{\pi n}{3}, \quad n \in \mathbb{Z}.$ 9. $\emptyset.$ 10. $x = \frac{2}{5}\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$

11. $x = \frac{\pi}{6} + \frac{(-1)^n}{2} \arcsin \frac{1}{12} + \frac{\pi}{2} n, \quad n \in \mathbb{Z}.$ 12. $\emptyset.$

$$13. x = \frac{\pi}{6} - \frac{1}{2} \arcsin \frac{1}{\sqrt{3}} + (-1)^n \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2} n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

$$14. x = \frac{\pi}{6} + (-1)^{n+1} \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}, \quad n \in \mathbb{Z}, \text{ или в виде двух серий}$$

$$x = \frac{\pi}{24} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad x = \frac{19}{24} \pi + \pi m, \quad m \in \mathbb{Z}.$$

$$15. [-13; 13]. \quad 16. [2 - \sqrt{85}; 2 + \sqrt{85}].$$

$$17. x = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

$$18. x = -\frac{\pi}{4} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}; \quad x = \arctg 3 + \pi m, \quad m \in \mathbb{Z}.$$

$$19. x = \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}; \quad x = -\frac{\pi}{4} - \arctg 2 + \pi m, \quad m \in \mathbb{Z}.$$

$$20. x = \frac{5}{6} \pi + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}; \quad x = \frac{7}{6} \pi + 2\pi m, \quad m \in \mathbb{Z};$$

$$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

$$21. x = \frac{\pi}{4} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}; \quad x = \arctg 3 + \pi m, \quad m \in \mathbb{Z}.$$

$$22. x = \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}; \quad x = \frac{\pi}{4} + \pi m, \quad m \in \mathbb{Z};$$

$$x = -\arctg 2 + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

$$23. x = \arctg \sqrt[3]{\frac{2}{3}} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

$$24. x = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}; \quad x = \pm \frac{\pi}{3} + \pi m, \quad m \in \mathbb{Z};$$

$$x = -\arctg 2 + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

$$25. x = \frac{\pi}{4} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

$$26. x = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}; \quad x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi m}{2}, \quad m \in \mathbb{Z}.$$

$$27. x = -\frac{\pi}{4} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad 28. x = \pm \frac{\pi}{3} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

$$29. x = \pm \frac{\pi}{3} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}; \quad x = \pm \frac{1}{2} \arccos\left(-\frac{1}{4}\right) + \pi m, \quad m \in \mathbb{Z}.$$

$$30. x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4}, \quad n \in \mathbb{Z}; \quad x = \pm \frac{\pi}{12} + \frac{\pi m}{2}, \quad m \in \mathbb{Z}.$$

$$31. x = \pm \frac{\pi}{6} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad 32. x = \pm \frac{\pi}{3} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

$$33. x = \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}; \quad x = \frac{\pi}{10} + \frac{\pi m}{5}, \quad m \in \mathbb{Z}.$$

$$34. x = \frac{\pi n}{4}, \quad n \in \mathbb{Z}; \quad x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi m}{4}, \quad m \in \mathbb{Z}.$$

$$35. x = \pi + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}; \quad x = 4\pi m, \quad m \in \mathbb{Z}.$$

$$36. x = \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}; \quad x = \frac{\pi}{2} + 2\pi m, \quad m \in \mathbb{Z}.$$

$$37. x = \pm \frac{\pi}{6} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}; \quad x = \pm \frac{1}{2} \arccos \frac{\sqrt{17}-1}{4} + \pi m, \quad m \in \mathbb{Z}.$$

$$38. x = \pm \frac{\pi}{6} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad 39. a) - r) [-1; 1].$$

$$40. a) [4; +\infty); \quad b) [8; +\infty). \quad 41. a) [1; 2]; \quad b) [1; 4]; \quad b) [1; 2^{n-1}].$$

$$42. x = \frac{\pi}{4} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad x = \frac{\pi}{2} + 2\pi m, \quad m \in \mathbb{Z};$$

$$x = 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

$$43. x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi m, \quad m \in \mathbb{Z}.$$

$$44. x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}; \quad x = 2\pi m, \quad m \in \mathbb{Z}.$$

$$45. x = \frac{\pi}{4} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}; \quad x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi m, \quad m \in \mathbb{Z};$$

$$x = 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

$$46^*. x = \frac{3}{4}\pi + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad 47. x = \frac{\pi}{4} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

$$48. x = \frac{\pi}{4} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}; \quad x = \frac{\pi}{16} \pm \frac{\pi}{6} + \frac{\pi m}{2}, \quad m \in \mathbb{Z}.$$

$$49. x = \pm \frac{2}{3}\pi + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}; \quad x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi m}{2}, \quad m \in \mathbb{Z}.$$

$$50. x = \frac{\pi n}{13}, \quad n \in \mathbb{Z}; \quad x = \frac{\pi m}{3}, \quad m \in \mathbb{Z}.$$

$$51. x = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

$$52. x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4}, \quad n \in \mathbb{Z}; \quad x = \frac{\pi}{2} + \pi m, \quad m \in \mathbb{Z};$$

$$x = \frac{\pi}{14} + \frac{\pi k}{7}, \quad k \in \mathbb{Z} \quad (\text{решение} \quad x = \frac{\pi}{2} + \pi m, \quad m \in \mathbb{Z})$$

$$\text{содержится в серии } x = \frac{\pi}{14} + \frac{\pi k}{7}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

$$53. x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4}, \quad n \in \mathbb{Z}; \quad x = \pm \frac{\pi}{12} + \frac{\pi m}{2}, \quad m \in \mathbb{Z}.$$

$$54. x = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}; \quad x = \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi m}{9}, \quad m \in \mathbb{Z}.$$

$$55. x = \pm \frac{\pi}{6} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}; \quad x = \frac{\pi}{10} + \frac{\pi m}{5}, \quad m \in \mathbb{Z}.$$

$$56. x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}; \quad x = \pm \arccos \frac{1}{3} + 2\pi m, \quad m \in \mathbb{Z}.$$

$$57. x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}, \quad n \in \mathbb{Z}; \quad x = -\frac{1}{2} \arctg 3 + \frac{\pi m}{2}, \quad m \in \mathbb{Z}.$$

$$58. x = -\frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} 3 + 2n, \quad n \in \mathbb{Z}; \quad x = 2k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

$$59. x = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

$$60. x = \pi + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}; \quad x = -2 \operatorname{arctg} \frac{1}{3} + 2\pi m, \quad m \in \mathbb{Z}.$$

$$61. x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}; \quad y = -1 \text{ и}$$

$$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi m, \quad m \in \mathbb{Z}; \quad y = 1.$$

$$62. x = 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}; \quad y = -\frac{\pi}{2} + 2\pi m, \quad m \in \mathbb{Z};$$

$$z = \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

$$63. x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

$$64. x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

$$65. x = \frac{\pi}{4} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

$$66. x = \frac{\pi}{4} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

$$67. x = \frac{\pi n}{2}, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad 68. \emptyset.$$

$$69. x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

$$70. x = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

$$71. x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

$$72. x = \pi - \arcsin \frac{\sqrt{5}-1}{2} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

$$73. x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z};$$

$$x = -\pi + \arccos \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}} + 2\pi m, \quad m \in \mathbb{Z}.$$

$$74. x = \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}; \quad x = \pm \frac{\pi}{3} + \pi m, \quad m \in \mathbb{Z}.$$

$$75. x = (-1)^n \arcsin \frac{3}{4} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

$$76. x = \operatorname{arctg} \frac{12}{5} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

$$77. x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

$$78. x = \pm \frac{\pi}{12} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}; \quad x = \pm \frac{5\pi}{12} + 2\pi m, \quad m \in \mathbb{Z}.$$

$$79^*. x = \frac{\pi}{4} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}; \quad x = -\operatorname{arctg} 2 + \pi m, \quad m \in \mathbb{Z};$$

$$x = -\operatorname{arctg} \frac{1+\sqrt{41}}{10} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

$$80. n = 6. \quad 81. x \in \{-2; 5\} \cup \left\{ \frac{3k}{4}, \quad k = -2, -1, 0, \dots, 6 \right\}.$$

$$82. x \in \left\{ \frac{1}{2}, -\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi \right\}. \quad 83. n = 5. \quad 84. \emptyset.$$

$$85. x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi m, \quad m \in \mathbb{Z}; \quad 2\pi n < x < \pi(2n+1), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

$$86. \left\{ \pm \frac{\pi}{3}; \pm \arccos \frac{-3+\sqrt{5}}{2} \right\}. \quad 87. x = -\frac{\pi}{4} + \pi m, \quad m \in \mathbb{Z}.$$

Указания

$$7. \arccos \left(\sin \frac{3}{2} \right) = \arccos \left(\cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{3}{2} \right) \right) = \frac{\pi - 3}{2}.$$

$$8. \operatorname{arctg}(\operatorname{ctg} 3) = \operatorname{arctg} \left(\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - 3 \right) \right) = \frac{\pi}{2} - 3$$

$$\left(\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} \alpha) = \alpha, \quad \text{если} \quad -\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2} \right).$$

9. Поскольку $\frac{2}{5}\pi > \frac{\pi}{3}$ и $\operatorname{tg} x$ является монотонно возрастающей

функцией на интервале $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ содержащем точки $\frac{2}{5}\pi$

и $\frac{\pi}{3}$, то справедливо неравенство $\operatorname{tg} \frac{2}{5}\pi > \operatorname{tg} \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$.

С другой стороны, $\sqrt{2} \sin 5x \leq \sqrt{2}$ и потому уравнение не имеет решения.

10. $\operatorname{cosec} \frac{7}{6}\pi = \frac{1}{\sin \frac{7}{6}\pi} = -\frac{1}{\sin \frac{\pi}{6}} = -2$.

12. $3^2 + 4^2 = 25 < 36 = 6^2$ и потому уравнение не имеет решения.

17. Уравнение равносильно совокупности уравнений

$$\begin{cases} \cos x = 0, \\ \sin^2 x - 2 \sin x - 3 = 0. \end{cases}$$

19. Уравнение преобразуется к виду

$$\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + 1 = \frac{2}{\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)}.$$

Ввести замену $t = \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ и решить получившееся квадратное уравнение.

20. Уравнение приводится к алгебраическому уравнению третьей степени

$$2t^3 - t^2 - 2t + 1 = 0 \Leftrightarrow (t^2 - 1)(2t - 1) = 0$$

относительно переменной $t = \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$.

22. Уравнение равносильно совокупности уравнений

$$\begin{cases} \sin x = 0, \\ 3\sin^2 x + \sin x \cos x - 2 = 0. \end{cases}$$

Второе уравнение приводится к однородному

$$\sin^2 x + \sin x \cos x - 2 \cos^2 x = 0.$$

23. Воспользовавшись формулами

$$\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x,$$

$$\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x,$$

$$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x,$$

получить уравнение $2\cos^3 x - 3\sin^3 x = 0$, равносильное исходному.

24. Однородное уравнение четвертой степени. Равносильно совокупности двух уравнений: простейшему $\cos x = 0$ и однородному

$$\sin^3 x + 2\sin^2 x \cos x - 3\sin x \cos^2 x - 6\cos^3 x = 0.$$

Последнее уравнение сводится к алгебраическому

$$t^3 + 2t^2 - 3t - 6 = 0 \Leftrightarrow (t+2)(t^2-3) = 0$$

относительно переменной $t = \operatorname{tg} x$.

25. Умножив $(\sin x + \cos x)$ на $(\sin^2 x + \cos^2 x) \equiv 1$, получить однородное уравнение третьей степени.

$$27. \frac{1}{2} = \frac{1}{2} (\cos^2 x + \sin^2 x)^2 = \frac{1}{2} (\cos^4 x + 2\cos^2 x \sin^2 x + \sin^4 x).$$

В результате получается однородное уравнение четвертой степени

$$\begin{aligned} \sin^4 x + 2\sin^3 x \cos x - 2\sin^2 x \cos^2 x + \\ + 2\sin x \cos^3 x + 5\cos^4 x = 0. \end{aligned}$$

Разделив обе части этого уравнения на $\cos^4 x$, получим уравнение четвертой степени относительно переменной $t = \operatorname{tg} x$

$$t^4 - 2t^3 - 2t^2 + 2t + 5 = 0.$$

Это уравнение имеет корень

$$t \equiv \operatorname{tg} x = -1 \Rightarrow x = -\frac{\pi}{4} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Покажем, что других корней, удовлетворяющих условию $|\operatorname{tg} x| \leq 1$, уравнение не имеет. Разделив многочлен $(t^4 - 2t^3 - 2t^2 + 2t + 5)$ уголком на двучлен $(t+1)$ или воспользовавшись схемой Горнера, получим многочлен третьей степени и соответственно уравнение

$$t^3 + t^2 - 3t + 5 = 0.$$

Числа $t+1$ и $t=1$ не удовлетворяют этому уравнению. Если $t \in (-1; 1)$ ($|\operatorname{tg} x| < 1$), то справедливо неравенство $|t^3 + t^2 - 3t| < 5$.

28. Можно решить двумя способами: использовать формулы понижения степени (2.17) и (2.18); подстановкой $t = \cos^2 x$ или $t = \sin^2 x$.

Аналогично могут быть решены примеры 29-33.

34, 35, 36. См. пример 4.22.

$$37^*. \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}; \quad \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2};$$

$$\cos 6x = \cos(3(2x)) = 4\cos^3 2x - 3\cos 2x.$$

Положить $t = \cos 2x$ ($|t| \leq 1$). Получить и решить уравнение

$$t^3 - \frac{5}{4}t + \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow (2t-1)(2t^2 + t - 2) = 0.$$

$$\begin{aligned} 38^*. \cos^6 x - \sin^6 x &= (\cos^2 x - \sin^2 x) \left(1 - \frac{1}{4} \sin^2 2x \right) = \\ &= \cos 2x \frac{3 + \cos^2 2x}{4}; \\ \frac{3 + \sin^2 x}{8} &= \frac{7 - \cos 2x}{16}. \end{aligned}$$

Ввести переменную $t = \cos 2x$; получить и решить алгебраическое уравнение

$$4t^3 + 13t - 7 = 0 \Leftrightarrow 4t^3 - t + 14t - 7 = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (2t-1)(2t^2 + t - 7) = 0.$$

39. г) Задача эквивалентна нахождению множества значений функции $f(t) = t^n - (1-t)^n$, где $t = \cos^2 x$, т.е.

$$E(f) = \left[\min_{0 \leq t \leq 1} f(t); \max_{0 \leq t \leq 1} f(t) \right] \text{ (см. пример 4.21).}$$

$$40. б) f(x) = \frac{1}{\cos^4 x} + \frac{1}{\sin^4 x} = \frac{\sin^4 x + \cos^4 x}{\frac{1}{16} \sin^4 2x} = 16 \frac{1 - \frac{1}{2} \sin^2 2x}{\sin^4 2x}.$$

Приняв $t = \sin^2 2x$, $0 < t \leq 1$, получим

$$f(t) = 16 \left(t^{-2} - \frac{1}{2} t^{-1} \right).$$

Далее найти наименьшее и наибольшее значения $f(t)$ на промежутке $(0,1]$.

41. Воспользоваться результатами примера 4.21.

46*. Принять $\sin x - \cos x = t$. Откуда $\sin 2x = 1 - t^2$;

$$\cos 4x = 1 - 2 \sin^2 2x = 1 - 2(1 - t^2)^2 = -1 + 4t^2 - 2t^4.$$

Имеем уравнение

$$2t^4 - 4t^2 - \sqrt{2}t + 2 = 0 \Leftrightarrow t^4 - 2t^2 - \frac{1}{\sqrt{2}}t + 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t^2(t - \sqrt{2})(t + \sqrt{2}) - \frac{1}{\sqrt{2}}(t - \sqrt{2}) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t - \sqrt{2} = 0, \\ t^3 + \sqrt{2}t^2 - \frac{1}{\sqrt{2}} = 0. \end{cases}$$

Уравнение $t - \sqrt{2} = 0$ или $\sin x - \cos x = \sqrt{2}$ имеет корни $x = \frac{3}{4}\pi + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$

Уравнение $t^3 + \sqrt{2}t^2 - \frac{1}{\sqrt{2}} = 0$ не имеет корней, удовлетворяющих условию $t \geq 1$. Действительно, функция $f(t) = t^3 + \sqrt{2}t^2 - \frac{1}{\sqrt{2}}$ монотонно возрастает при $t > 1$, а

$$f(1) = 1 + \sqrt{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1 + \sqrt{2}}{2} > 0.$$

$$\begin{aligned} 51. \sin\left(3x - \frac{\pi}{6}\right)\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) &= \\ &= \frac{1}{2}\left[\sin\left(4x + \frac{\pi}{6}\right) + \sin\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)\right] = \frac{1}{2}\sin\left(4x + \frac{\pi}{6}\right) - \frac{1}{2}\cos 2x; \\ \cos\left(4x - \frac{\pi}{3}\right) &= \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} + 4x\right) = \sin\left(4x + \frac{\pi}{6}\right). \end{aligned}$$

53. Применить формулы преобразования произведения тригонометрических функций в сумму, а затем суммы тригонометрических функций в произведение.

56. Способ 1. Положив $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$, приходим к биквадратному уравнению

$$6t^4 - 5t^2 + 1 = 0.$$

Способ 2.

$$\begin{aligned} \frac{1}{\cos x - 1} = 3\left(\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} - 1\right) &\Leftrightarrow \frac{1}{\cos x - 1} = 3 \frac{\sin^2 \frac{x}{2} - \cos^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2}} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{\cos x - 1} = \frac{-6 \cos x}{1 + \cos x}. \end{aligned}$$

58. Способ 1. Сгруппировав, получить равносильное уравнение

$$(\cos 2\pi x - 1) \left(\operatorname{tg} \frac{\pi x}{2} + 3 \right) = 0.$$

Способ 2. Принять $\operatorname{tg} \frac{\pi x}{2} = t$, $x \neq 2n+1$, $n \in \mathbb{Z}$.

61. Преобразовать уравнение к равносильному

$$(\sin x + y)^2 + \cos^2 x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0, \\ \sin x + y = 0. \end{cases}$$

62. $9 + \cos^2 z \geq 9$ для всех $z \in \mathbb{R}$, а $(1 + 2 \cos x)(2 - \sin y) \leq 9$ для всех $x \in \mathbb{R}$ и $y \in \mathbb{R}$, откуда следует, что если решение уравнения существует, то должны выполняться равенства:

$$\begin{cases} \cos x = 1, \\ \sin y = -1, \\ \cos z = 0. \end{cases}$$

64. Приняв $t = \operatorname{tg}^4 x$ ($t \in (0, +\infty)$), получить уравнение

$$t + \frac{1}{t} = 2, \quad \text{имеющее единственное решение}$$

$$t = 1 \Leftrightarrow \operatorname{tg} x = \pm 1.$$

65. В соответствии с результатами примера 40, б

$$\sec^4 x + \cos \sec^4 x \geq 8 \text{ для всех } x \in \mathbb{R}, \text{ а } 4(1 + \sin 2x) \leq 8.$$

66. Функция $f(x) = \operatorname{tg} x + \operatorname{tg}^3 x + \operatorname{tg}^5 x$ является монотонно возрастающей на каждом интервале

$$\left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n \right), \quad n \in \mathbb{Z}, \quad \text{принимая все числовые}$$

значения ($E(f) = \mathbb{R}$). Поэтому уравнение $f(x) = 3$ имеет единственное решение на каждом интервале монотонности.

Нетрудно видеть, что $f(x) = 3$ при $\operatorname{tg} x = 1$, т.е.

$$x = \frac{\pi}{4} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

67. Преобразовав произведения тригонометрических функций в суммы, получить равносильную форму уравнения

$$(1 + \cos 3x)(1 - \cos 8x) + \sin^2 2x = 0.$$

Далее применить метод оценок.

68. Применить метод оценок.

71. Найти ОДЗ уравнения. Возвести обе части уравнения в квадрат; в полученном уравнении применить подстановку $t = \sin x - \cos x$.

- 73*. Применив подстановку $\cos x = t$, получить уравнение

$$\sqrt{2}t^3 - 3t^2 + 1 = 0.$$

Для решения этого уравнения можно использовать подстановку $\sqrt{2}t = z$. Тогда

$$z^3 - 3z^2 + z = 0 \Leftrightarrow (z-1)(z^2 - 2z - z) = 0.$$

77. Способ 1. $\max_{x \in \mathbb{R}} (|\sin 2x| + |\cos 2x|) = \sqrt{2}$ и достигается при

$$2x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Способ 2. Возвести обе части уравнения в квадрат. Получить и решить простейшее уравнение $|\sin 4x| = 1$.

78. Функция $f(x) = |\sin x| \cos x$ является четной 2π -периодической. Поэтому достаточно найти решение на отрезке $[0; \pi]$, на котором $|\sin x| = \sin x$ и $f(x) = \frac{1}{2} \sin 2x$.

79. Раскрыв модуль, свести уравнение к совокупности двух однородных уравнений.

81. $x = -2$; $x = 5$ - корни уравнения $10 + 3x - x^2 = 0$. Далее

отобрать корни уравнения $\operatorname{tg} \frac{4\pi x}{3} = 0$, удовлетворяющие

условию $-2 \leq x \leq 5$.

83. Для решения задачи использовать графический подход.

Построив графики функций $y_1(x) = \cos \frac{\pi x}{2}$ и

$y_2(x) = \frac{x}{3} - \frac{1}{3}$, вычислить значения этих функций в точках,

определяющих взаимное положение графиков функций.

$$84. \frac{\sqrt{2} \cos \frac{x}{2}}{\sqrt{1 + \cos x}} = \frac{\sqrt{2} \cos \frac{x}{2}}{\sqrt{2 \left| \cos \frac{x}{2} \right|}} =$$

$$= \begin{cases} 1, & \text{если } -\pi + 4\pi n < x < \pi + 4\pi n, \\ -1, & \text{если } \pi + 4\pi n < x < 3\pi + 4\pi n, \end{cases} \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Но $\sin \frac{x}{2} = 1$ при $x = \pi + 4\pi n$ и $\sin \frac{x}{2} = -1$ при

$x = 3\pi + 4\pi n$. В этих точках левая часть уравнения не определена.

5. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ НЕРАВЕНСТВА

5.1. Простейшие тригонометрические неравенства

Решение простейших тригонометрических неравенств целесообразно осуществлять либо с использованием графика соответствующей тригонометрической функции, либо с помощью единичной окружности.

Пример 5.1. Решите неравенство

$$\sin x > -\frac{1}{2}.$$

Решение. Функция $\sin x$ определена на всей числовой прямой, непрерывна и является 2π -периодической, поэтому решением неравенства будет объединение интервалов вида $(x_1 + 2\pi n; x_2 + 2\pi n)$, $n \in \mathbb{Z}$, где x_1 и x_2 - корни уравнения

$$\sin x = -\frac{1}{2} \quad \text{на некотором}$$

отрезке длиной 2π .

Действительно, прямая $\tilde{y} = -\frac{1}{2}$ пересекает единичную окружность в двух точках M_1 и M_2 . Точке

$$M_1 \quad \text{отвечает угол} \quad \left(-\frac{\pi}{6}\right)$$

радиан, а точке $M_2 - \frac{7}{6}\pi$ радиан (рис. 5.1), т. е. $x_1 = -\frac{\pi}{6}$,

$x_2 = \frac{7}{6}\pi$ и синус угла в x радиан будет больше $\left(-\frac{1}{2}\right)$, если ордината $\tilde{y}_p$ точки $P(x)$ на единичной окружности, отвечающей углу в x радиан, будет больше $\left(-\frac{1}{2}\right)$. Из рис. 5.1

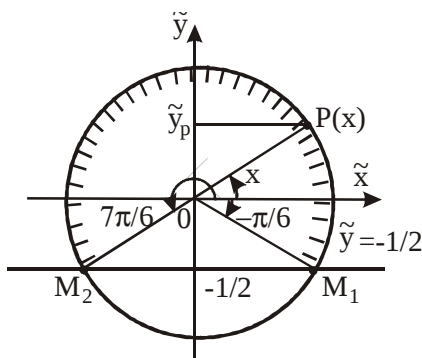


Рис. 5.1

следует, что неравенство $\tilde{y}_p > -\frac{1}{2}$ выполняется при

$-\frac{\pi}{6} < x < \frac{7}{6}\pi$, а с учетом периодичности функции $\sin x$ при

$$-\frac{\pi}{6} + 2\pi n < x < \frac{7}{6}\pi + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $-\frac{\pi}{6} + 2\pi n < x < \frac{7}{6}\pi + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$

Пример 5.2. Решите неравенство

$$|\cos x| > \frac{1}{2}. \quad (5.1)$$

Решение. Способ 1. Построим графики функций $y = |\cos x|$

и $y = \frac{1}{2}$.

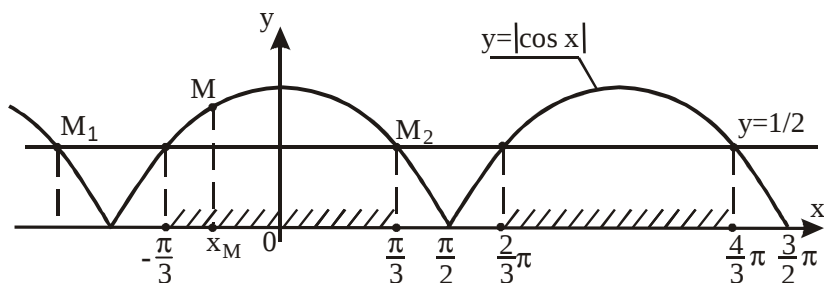


Рис. 5.2

Функция $y = |\cos x|$ определена для всех $x \in \mathbb{R}$, непрерывна и является π -периодической, поэтому достаточно найти решение неравенства на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ длиной π .

Прямая $y = \frac{1}{2}$ пересекает график функции $y = |\cos x|$ на

отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ в двух точках M_1 и M_2 , абсциссы которых соответственно $x_1 = -\frac{\pi}{3}$ и $x_2 = \frac{\pi}{3}$.

Решением неравенства (5.1) будут абсциссы x_M тех точек графика функции $y = |\cos x|$, которые лежат выше прямой $y = \frac{1}{2}$. Абсциссы x_M таких точек образуют интервал $\left(-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right)$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. С учетом периодичности функции $y = |\cos x|$ решением неравенства (5.1) будет объединение интервалов $\left(-\frac{\pi}{3} + \pi n; \frac{\pi}{3} + \pi n\right)$, $n \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $-\frac{\pi}{3} + \pi n < x < \frac{\pi}{3} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Способ 2. Решение неравенства (5.1) можно осуществить также с помощью единичной окружности. Поскольку

$$|\cos x| > \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x > \frac{1}{2}, \\ \cos x < -\frac{1}{2}, \end{cases}$$

то решение неравенства (5.1) равносильно нахождению множества точек $\{\tilde{x}_p\}$ на оси $O\tilde{x}$ таких, что $-1 \leq \tilde{x}_p < -\frac{1}{2}$

или $\frac{1}{2} < \tilde{x}_p \leq 1$.

Из рис. 5.3 следует, что искомые точки $P(x)$, абсциссы $\tilde{x}_p$ которых удовлетворяют указанным неравенствам, лежат на дугах M_1M_2 и $M'_1M'_2$. Дуге M_1M_2 отвечают углы

$$\left(-\frac{\pi}{3} + 2\pi n; \frac{\pi}{3} + 2\pi n \right), \quad n \in \mathbb{Z},$$

а дуге $M'_1 M'_2$ - углы

$$\left(\frac{2}{3}\pi + 2\pi n; \frac{4}{3}\pi + 2\pi n \right), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Поскольку

$$\frac{2}{3}\pi = -\frac{\pi}{3} + \pi; \quad \frac{4}{3}\pi = \frac{\pi}{3} + \pi,$$

то полученные решения можно записать в виде одного двойного неравенства:

$$-\frac{\pi}{3} + \pi n < x < \frac{\pi}{3} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $-\frac{\pi}{3} + \pi n < x < \frac{\pi}{3} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$

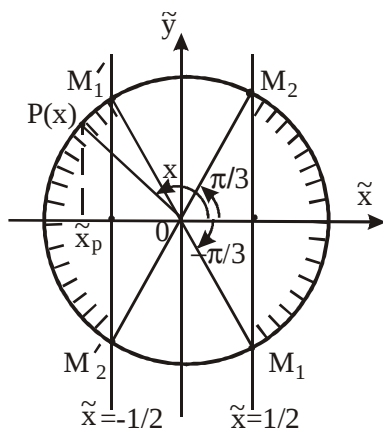


Рис. 5.3

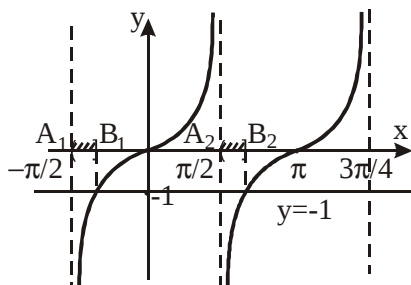


Рис. 5.4

Пример 5.3. Решите неравенство

$$\operatorname{tg} x \leq -1. \quad (5.2)$$

Решение. Для решения данного неравенства воспользуемся графиком функции $y = \operatorname{tg} x$ (рис. 5.4). Из рисунка следует, что решением неравенства (5.2)

будут все точки полуинтервалов $A_1 B_1$, $A_2 B_2$ и т.д., т.е.

$$-\frac{\pi}{2} + \pi n < x \leq -\frac{\pi}{4} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $-\frac{\pi}{2} + \pi n < x \leq -\frac{\pi}{4} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$

Некоторые неравенства не являются простейшими, но легко сводятся к ним. Такой случай рассматривается в примерах 5.4 и 5.5.

Пример 5.4. Решите неравенство

$$\cos x + \sin x \geq \sqrt{2}. \quad (5.3)$$

Решение. Поскольку

$$\cos x + \sin x = \sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right),$$

то неравенство (5.3) равносильно простейшему неравенству

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \geq 1. \text{ Его решением будет множество точек}$$

$$x - \frac{\pi}{4} = 2\pi n, n \in \mathbb{Z}, \text{ или } x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Ответ: } x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Пример 5.5. Решите неравенство

$$|\cos x + \sin x| > 1.$$

$$\text{Решение. Поскольку } \cos x + \sin x = \sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right), \text{ то}$$

исходное неравенство равносильно неравенствам

$$\begin{aligned} \left| \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \right| &> \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) > \frac{1}{\sqrt{2}}, \\ \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) < -\frac{1}{\sqrt{2}}. \end{cases} \end{aligned}$$

Эти неравенства аналогичны рассмотренным в примере 5.2. Решив их, получим,

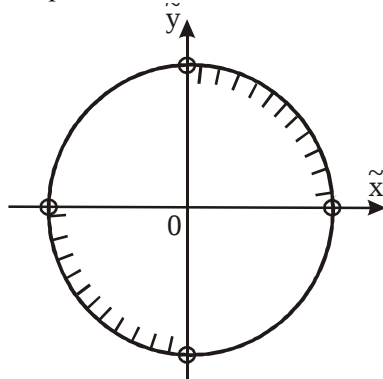


Рис. 5.5

что $\pi n < x < \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$ (рис. 5.5).

Ответ: $\pi n < x < \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Пример 5.6. Решите неравенства

а) $\cos x < \cos 3$; б) $\sin x \geq \sin 5$; в) $\operatorname{tg} x \geq \operatorname{ctg} 3$.

Решение. а) Иллюстрация к неравенству $\cos x < \cos 3$ приведена на рис. 5.6. Из него следует, что решением неравенства на отрезке $[0; 2\pi]$ будет интервал $(3; 2\pi - 3)$, а на всей числовой прямой – объединение интервалов

$(3 + 2\pi n; 2\pi - 3 + 2\pi n)$, $n \in \mathbb{Z}$.

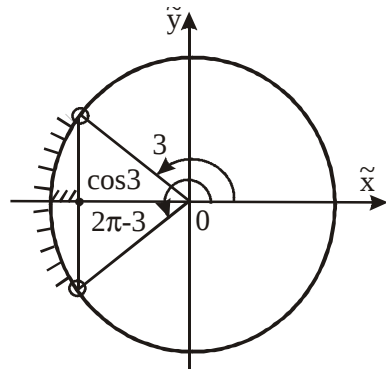


Рис. 5.6

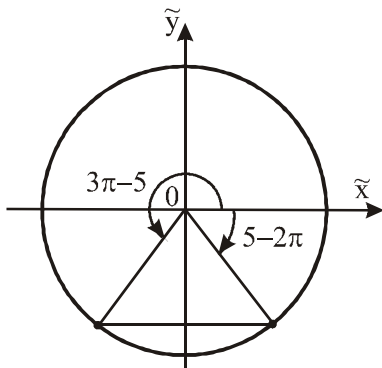


Рис. 5.7

б) Из неравенства $\frac{3}{2}\pi < 5 < 2\pi$ и из рис. 5.7 следует, что решением неравенства $\sin x \geq \sin 5$ будет множество $\{x\}$ точек x , удовлетворяющих неравенствам

$5 - 2\pi + 2\pi n \leq x \leq 3\pi - 5 + 2\pi n$,
 $n \in \mathbb{Z}$.

в) Так как $\operatorname{ctg} 3 = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - 3\right)$,

$-\frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{2} - 3 < \frac{\pi}{2}$ и функция $y = \operatorname{tg} x$ строго возрастает на

интервале $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, то

$$\operatorname{tg} x \geq \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - 3\right) \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} - 3 + \pi n \leq x < \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Это и есть решение неравенства в).

Ответ: а) $3 + 2\pi n < x < 2\pi - 3 + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$;

б) $5 - 2\pi + 2\pi n \leq x \leq 3\pi - 5 + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$;

в) $\frac{\pi}{2} - 3 + \pi n \leq x < \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

5.2. Различные тригонометрические неравенства

Решение тригонометрических неравенств, не являющихся простейшими, можно разделить, как правило, на два этапа. На первом неравенство преобразуется к совокупности простейших неравенств. Это преобразование осуществляется с помощью методов, используемых для решения уравнений (раздел 4). На втором этапе решаются простейшие неравенства.

Пример 5.7. Решите неравенство

$$6 \sin^2 x + \sin x - 2 \geq 0.$$

Решение. Способ 1. Приняв $\sin x = t$, $|t| \leq 1$, получим квадратное неравенство

$$6t^2 + t - 2 \geq 0.$$

Оно равносильно каждому из неравенств

$$\left(t - \frac{1}{2}\right)\left(t + \frac{2}{3}\right) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t \leq -\frac{2}{3}; \\ t \geq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Возвратившись к переменной x , получим совокупность простейших неравенств

$$\begin{cases} \sin x \leq -\frac{2}{3}; \\ \sin x \geq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Иллюстрация к этим неравенствам приведена на рис. 5.8, а. Решение последней совокупности неравенств будет иметь вид

$$\begin{cases} -\pi + \arcsin \frac{2}{3} + 2\pi n \leq x \leq -\arcsin \frac{2}{3} + 2\pi n, & n \in \mathbb{Z}, \\ \frac{\pi}{6} + 2\pi n \leq x \leq \frac{5}{6}\pi + 2\pi n, & n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Ответ:

$$x \in \left[-\pi + \arcsin \frac{2}{3} + 2\pi n; -\arcsin \frac{2}{3} + 2\pi n \right] \cup \left[\frac{\pi}{6} + 2\pi n; \frac{5}{6}\pi + 2\pi n \right], n \in \mathbb{Z}.$$

Способ 2. При решении тригонометрических неравенств часто бывает удобно применять метод интервалов, распространенный на тригонометрический круг. Рассмотрим этот метод на данном примере.

Сначала находим корни уравнения

$$6 \sin^2 x + \sin x - 2 = 0.$$

На отрезке $[0, 2\pi]$ в данном случае это будут точки

$$x_1 = \frac{\pi}{6}; \quad x_2 = \frac{5}{6}\pi; \quad x_3 = \pi + \arcsin \frac{2}{3}; \quad x_4 = 2\pi - \arcsin \frac{2}{3}.$$

Они разбивают отрезок $\left[\frac{\pi}{6}; \frac{7}{6}\pi \right]$ длиной 2π на четыре интервала (рис. 5.8, б):

$$\left(\frac{\pi}{6}; \frac{5}{6}\pi \right); \quad \left(\frac{5}{6}\pi; \pi + \arcsin \frac{2}{3} \right);$$

$$\left(\pi + \arcsin \frac{2}{3}; 2\pi - \arcsin \frac{2}{3} \right); \left(2\pi - \arcsin \frac{2}{3}; \frac{7}{6} \pi \right).$$

Далее определяем знак выражения $\left(\sin x + \frac{2}{3} \right) \left(\sin x - \frac{1}{2} \right)$ на любом из приведенных интервалов, например на четвертом - $\left(2\pi - \arcsin \frac{2}{3}; \frac{7}{6} \pi \right)$. На нем $\sin x - \frac{1}{2} < 0$, $\sin x + \frac{2}{3} > 0$, т.е. знак выражения $\left(\sin x + \frac{2}{3} \right) \left(\sin x - \frac{1}{2} \right)$ отрицательный. На следующих интервалах знаки этого выражения будут чередоваться (рис. 5.8 б).

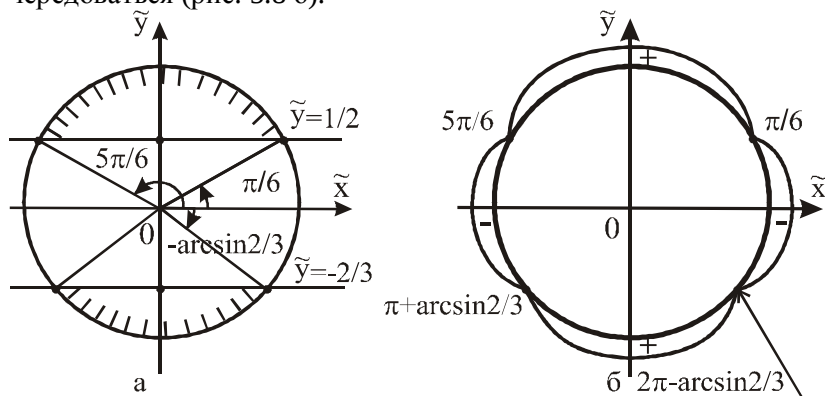


Рис. 5.8

Теперь можно записать ответ:

$$x \in \left[\frac{\pi}{6} + 2\pi n; \frac{5}{6} \pi + 2\pi n \right] \cup \left[\pi + \arcsin \frac{2}{3} + 2\pi n; 2\pi - \arcsin \frac{2}{3} + 2\pi n \right], n \in \mathbb{Z}.$$

Комментарий к методу интервалов

Метод интервалов для решения тригонометрических неравенств удобно применять, когда последние приведены к виду

$$(f(x) - a_1)(f(x) - a_2) \mathbf{K} (f(x) - a_n) \leq 0,$$

где $f(x)$ - одна из тригонометрических функций

$\sin x, \cos x, \operatorname{tg} x$; $a_1, a_2, \mathbf{K}, a_n$ - некоторые числа.

Далее находятся корни $x_k, k = 1, 2, \mathbf{K}, K$ простейших уравнений:

$$f(x) = a_1, \quad f(x) = a_2, \mathbf{K}, f(x) = a_n.$$

Эти корни наносятся на единичную окружность в виде точек. Они разобьют окружность на некоторое число M дуг (отрезков $[0; 2\pi]$ на M интервалов). Это число M в общем случае не будет совпадать с числом K корней x_k простейших уравнений, поскольку некоторые корни могут совпадать.

Если в некоторой точке на единичной окружности нечетное число совпадающих корней, то при переходе через такую точку знак выражения

$$(f(x) - a_1)(f(x) - a_2) \mathbf{K} (f(x) - a_n)$$

меняется на противоположный. Если же в точке четное число корней, то знак выражения не меняется.

Пример 5.8. Решите неравенство

$$4 \cos x \cos 2x > 1. \quad (5.4)$$

Решение. Преобразуем

$$4 \cos x \cos 2x = \frac{4 \sin x \cos x \cos 2x}{\sin x} = \frac{\sin 4x}{\sin x}, \quad x \neq \pi n, n \in \mathbf{Z}.$$

Исходное неравенство примет вид

$$\frac{\sin 4x}{\sin x} > 1 \Leftrightarrow \frac{\sin 4x - \sin x}{\sin x} > 0.$$

Полученное неравенство является следствием неравенства (5.4). Оно определено для всех $x \in \mathbf{R}$ за исключением $x = \pi n, n \in \mathbf{Z}$, тогда как неравенство (5.4) определено на всей числовой прямой. Проверка показывает, что значения $x = 2\pi n, n \in \mathbf{Z}$, являются решением неравенства (5.4). Для решения неравенства

$\frac{\sin 4x - \sin x}{\sin x} > 0$ применим метод интервалов на единичной

окружности. Для этого найдем нули функций $y_1(x) = \sin 4x - \sin x$ и $y_2(x) = \sin x$:

$$\sin 4x - \sin x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 4x = x + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}, \\ 4x = \pi - x + 2\pi m, m \in \mathbb{Z}, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2\pi n}{3}, n \in \mathbb{Z}, \\ x = \frac{\pi}{5} + \frac{2\pi m}{5}, m \in \mathbb{Z}, \end{cases}$$

$$\sin x = 0 \Leftrightarrow x = \pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

Нанесем нули функций $y_1(x)$ и $y_2(x)$ на единичную окружность (рис. 5.9). При

$0 < x < \frac{\pi}{5}$ выражение

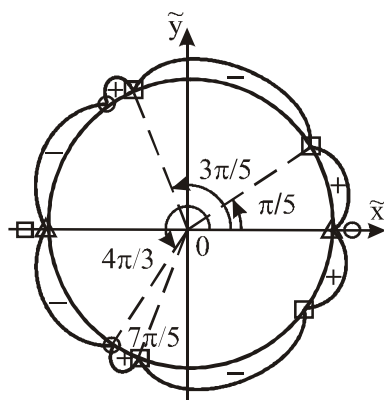


Рис. 5.9

$\frac{\sin 4x - \sin x}{\sin x}$ положительно. Далее при переходе через каждый нуль функций $y_1(x)$ и $y_2(x)$ знак выражения меняется на противоположный. В точках $x = \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, «нуль двойной» и потому знак выражения не меняется (рис. 5.9.).

С учетом сделанного выше замечания о включении точек $x = 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$ в множество решений исходного неравенства (5.4) записываем ответ.

$$\text{Ответ: } -\frac{\pi}{5} + 2\pi n < x < \frac{\pi}{5} + 2\pi n;$$

$$\frac{3}{5}\pi + 2\pi n < x < \frac{2\pi}{3} + 2\pi n;$$

$$\frac{3}{5}\pi + 2\pi n < x < \frac{2\pi}{3} + 2\pi n; \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Замечание. Выражение « в точках $x = \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, нуль двойной» означает, что в этих точках обе функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ обращаются в нуль, т.е. $y_1(\pi k) = 0$ и $y_2(\pi k) = 0$.

Следующие примеры 5.9-5.14 демонстрируют применение различных приемов преобразования тригонометрического неравенства к простейшему или к совокупности простейших тригонометрических неравенств.

Пример 5.9. Решите неравенство

$$\sin x + \cos x + \sin x \cos x \leq 1. \quad (5.5)$$

Решение. Приняв

$$\sin x + \cos x = t \Rightarrow \sin x \cos x = \frac{t^2 - 1}{2},$$

получим неравенство относительно новой переменной t , где

$$-\sqrt{2} \leq t \leq \sqrt{2} \quad (t \in [-\sqrt{2}; \sqrt{2}]),$$

так как $t = \sin x + \cos x = \sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$, а

$$-\sqrt{2} \leq \sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \leq \sqrt{2} \quad \text{для всех } x \in \mathbb{R}.$$

$$t + \frac{t^2 - 1}{2} \leq 1 \Leftrightarrow t^2 + 2t - 3 \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (t + 3)(t - 1) \leq 0 \Leftrightarrow -3 \leq t \leq 1.$$

Окончательно с учетом области допустимых значений переменной t ($-\sqrt{2} \leq t \leq \sqrt{2}$) получаем неравенство $-\sqrt{2} \leq t \leq 1$.

Таким образом, неравенство (5.5) равносильно каждому из неравенств

$$-\sqrt{2} \leq \sin x + \cos x \leq 1 \Leftrightarrow \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{4} + 2\pi n \leq x \leq \frac{7}{4}\pi + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z},$$

откуда $\frac{\pi}{4} + 2\pi n \leq x \leq \frac{7}{4}\pi + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$

Ответ: $\frac{\pi(4n+1)}{2} \leq x \leq 2\pi(n+1), \quad n \in \mathbb{Z}.$

Пример 5.10. Решите неравенство

$$\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x \leq 1. \quad (5.6)$$

Решение. Преобразуем выражение в левой части неравенства

$$\begin{aligned} \cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x &= \\ &= \frac{1 + \cos 2x}{2} + \frac{1 + \cos 4x}{2} + \frac{1 + \cos 6x}{2} = \\ &= \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \cos 4x + \frac{1}{2} (\cos 2x + \cos 6x) = \\ &= \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \cos 4x + \cos 4x \cos 2x = \\ &= \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \cos 4x (2 \cos 2x + 1) = \\ &= \frac{3}{2} + \frac{1}{2} (2 \cos^2 2x - 1)(2 \cos 2x + 1). \end{aligned}$$

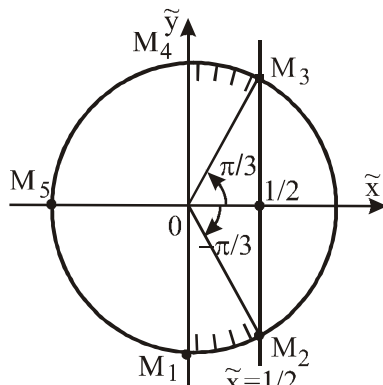
Здесь последовательно применены формулы понижения степени и формулы преобразования суммы тригонометрических функций в произведение.

Откуда получаем неравенство, равносильное (5.6)

$$(2 \cos^2 2x - 1)(2 \cos 2x + 1) \leq -1$$

Обозначим $\cos 2x = t,$

$$-1 \leq t \leq 1:$$



$$\begin{aligned}
& (2t^2 - 1)(2t + 1) \leq -1 \Leftrightarrow \\
& \Leftrightarrow 4t^3 + 2t^2 - 2t - 1 \leq -1 \Leftrightarrow \\
& \Leftrightarrow t(2t^2 + t - 1) \leq 0 \Leftrightarrow \\
& \Leftrightarrow t(t + 1)(2t - 1) \leq 0.
\end{aligned}$$

Решив последнее неравенство методом интервалов, получим

$$\left[\begin{array}{l} t \leq -1, \\ 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \end{array} \right. \quad \text{или} \quad \left[\begin{array}{l} \cos 2x \leq -1, \\ 0 \leq \cos 2x \leq \frac{1}{2}. \end{array} \right.$$

Последние неравенства решим с помощью единичной окружности. Из рис. 5.10 следует, что решением неравенства (5.6) будут углы $(2x)$ радиан, которым отвечают точка M_5 и дуги M_1M_2 , M_3M_4 , т.е.

$$M_5 : 2x = \pi + 2\pi n; \quad n \in \mathbb{Z} :$$

$$M_1M_2 : -\frac{\pi}{2} + 2\pi n \leq 2x \leq -\frac{\pi}{3} + 2\pi n; \quad n \in \mathbb{Z};$$

$$M_3M_4 : \frac{\pi}{3} + 2\pi m \leq 2x \leq \frac{\pi}{2} + 2\pi m; \quad m \in \mathbb{Z}.$$

и окончательно имеем

$$\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}, \\ -\frac{\pi}{4} + \pi n \leq x \leq -\frac{\pi}{6} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}, \\ \frac{\pi}{6} + \pi m \leq x \leq \frac{\pi}{4} + \pi m, \quad m \in \mathbb{Z}. \end{array} \right.$$

$$\text{Ответ: } x = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad \frac{\pi}{6} + \pi n \leq |x| \leq \frac{\pi}{4} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Пример 5.11. Решите неравенство

$$\cos x + \cos 2x + \cos 3x \leq 0. \quad (5.7)$$

Решение. Способ 1. Применив формулу преобразования суммы косинусов в произведение, получим

$$(\cos x + \cos 3x) + \cos 2x = 2 \cos 2x \cos x + \cos 2x = \\ = \cos 2x(2 \cos x + 1),$$

откуда следует, что неравенство (5.7) равносильно неравенству

$$\cos 2x(2 \cos x + 1) \leq 0, \quad (5.8)$$

которое, в свою очередь, равносильно неравенству

$$(2 \cos^2 x - 1)(2 \cos x + 1) \leq 0. \quad (5.9)$$

Каждое из неравенств (5.8) и (5.9) сводится к совокупности двух систем неравенств и может быть использовано для продолжения решения. Мы выберем для продолжения решения неравенство (5.9). Оно равносильно совокупности неравенств

$$\left\{ \begin{array}{l} 2 \cos^2 x - 1 \leq 0, \\ 2 \cos x + 1 \geq 0, \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} |\cos x| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}, \\ \cos x \geq -\frac{1}{2}, \end{array} \right. \quad (5.10)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 2 \cos^2 x - 1 \geq 0, \\ 2 \cos x + 1 \leq 0, \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} |\cos x| \geq \frac{1}{\sqrt{2}}, \\ \cos x \leq -\frac{1}{2}. \end{array} \right.$$

Из рис. 5.11, являющегося иллюстрацией к первой системе неравенств в (5.10) следует, что решением этой системы будет объединение отрезков

$$\left[-\frac{2}{3}\pi + 2\pi n; -\frac{\pi}{4} + 2\pi n \right] \text{ и}$$

$$\left[\frac{\pi}{4} + 2\pi n; \frac{2}{3}\pi + 2\pi n \right] \text{ или}$$

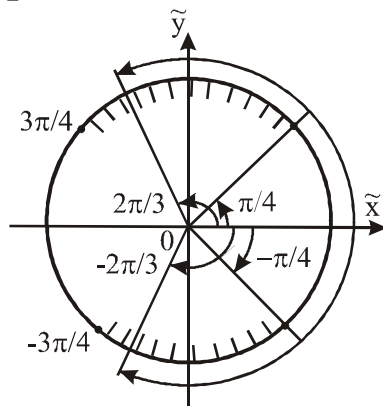


Рис. 5.11

$$\frac{\pi}{4} + 2\pi n \leq |x| \leq \frac{2}{3}\pi + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Решением второй системы неравенств является множество

$$\left[\frac{3}{4}\pi + 2\pi n, \frac{5}{4}\pi + 2\pi n \right], \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $\frac{\pi}{4} + 2\pi n \leq |x| \leq \frac{2}{3}\pi + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z};$

$$\frac{3}{4}\pi + 2\pi n \leq x \leq \frac{5}{4}\pi + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Способ 2. Неравенство (5.8) решим методом интервалов на единичной окружности.

1. Находим нули функции

$$f(x) = \cos 2x(2 \cos x + 1)$$

(корни уравнения

$$\cos 2x(2 \cos x + 1) = 0).$$

Ими будут

$$x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, \quad n \in \mathbb{Z},$$

$$x = \pm \frac{2}{3}\pi + 2\pi m, \quad m \in \mathbb{Z}.$$

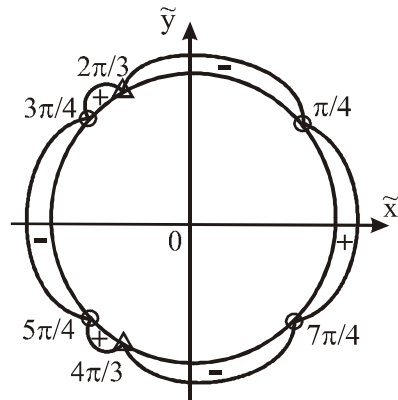


Рис. 5.12

2. Наносим найденные нули функции $f(x)$ на единичную окружность для n и m таких, что $0 \leq x \leq 2\pi$. В результате получим, что нули функции $f(x)$ разбивают отрезок

$$\left[\frac{\pi}{4}; \frac{9}{4}\pi \right] \text{ на 6 интервалов (рис. 5.12).}$$

3. Находим знак $f(x)$ на одном из 6 интервалов, например, при $x = 0$ получим, что $f(0) > 0$, откуда следует, что $f(x) > 0$ для всех $x \in \left(\frac{7}{4}\pi, \frac{9}{4}\pi\right)$.

Поскольку все нули $f(x)$ имеют кратность единица, то на следующих интервалах знаки $f(x)$ будут чередоваться. Отметив на единичной окружности знаки $f(x)$ на каждом из 6 интервалов, получим окончательный вид рисунка 5.12.

4. Из рис. 5.12 следует, что $f(x) \leq 0$ при

$$x \in \left[\frac{\pi}{4} + 2\pi n; \frac{2\pi}{3} + 2\pi n\right] \cup \left[\frac{3\pi}{4} + 2\pi n; \frac{5\pi}{4} + 2\pi n\right] \cup \left[\frac{4\pi}{3} + 2\pi n; \frac{7\pi}{4} + 2\pi n\right], n \in \mathbb{Z},$$

$$\text{или } \frac{\pi}{4} + 2\pi n \leq |x| \leq \frac{2}{3}\pi + 2\pi n;$$

$$\frac{3}{4}\pi + 2\pi n \leq x \leq \frac{5}{4}\pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Пример 5.12. Решите неравенство

$$\frac{\sin x}{1 + \cos x} \leq \operatorname{ctg} \frac{x}{2}.$$

Решение. 1) ОДЗ неравенства:

$$x \in \mathbb{R}, \quad x \neq \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

2) Поскольку $\frac{\sin x}{1 + \cos x} = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$,

то исходное неравенство равносильно каждому из неравенств

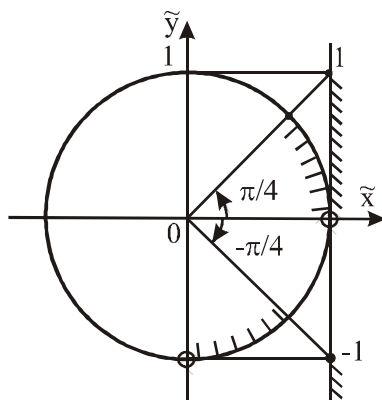


Рис. 5.13

$$t \leq \frac{1}{t} \Leftrightarrow \frac{t^2 - 1}{t} \leq 0, \text{ где } t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}.$$

Решив последнее неравенство методом интервалов, получим (см. рис. 5.13):

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{l} \operatorname{tg} \frac{x}{2} \leq -1, \\ 0 < \operatorname{tg} \frac{x}{2} \leq 1, \end{array} \right. & \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -\frac{\pi}{2} + \pi n < \frac{x}{2} \leq -\frac{\pi}{4} + \pi n, \\ \pi n < \frac{x}{2} \leq \frac{\pi}{4} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}, \end{array} \right. \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -\pi + 2\pi n < x \leq -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}, \\ 2\pi n < x \leq \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}, \end{array} \right. \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \pi n < x < \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Ответ: $\pi n < x < \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$

Пример 5.13. Решите неравенство

$$\left| \sqrt[3]{\cos x} + \sqrt[3]{\sin x} \right| > 1. \quad (5.11)$$

Решение. Поскольку $\sqrt[3]{\cos x} \leq 1$ и $\sqrt[3]{\sin x} \leq 1$ для всех $x \in \mathbb{R}$, то неравенство (5.11) может выполняться только для тех $x \in \mathbb{R}$, при которых функции $\sin x$ и $\cos x$ имеют одинаковые знаки, т.е. при $x \in \left(\pi n, \frac{\pi}{2} + \pi n \right), n \in \mathbb{Z}$, - в первой и третьей четвертях.

При $x \in \left(0; \frac{\pi}{2} \right)$ справедливы неравенства

$$\sqrt[3]{\cos x} > \cos x > \cos^2 x,$$

$$\sqrt[3]{\sin x} > \sin x > \sin^2 x.$$

Складывая эти неравенства, получаем

$$\sqrt[3]{\cos x} + \sqrt[3]{\sin x} > \cos x + \sin x > \cos^2 x + \sin^2 x \equiv 1.$$

При $x \in \left(\pi, \frac{3}{2}\pi\right)$

$$\left|\sqrt[3]{\cos x} + \sqrt[3]{\sin x}\right| = -\left(\sqrt[3]{\cos x} + \sqrt[3]{\sin x}\right) >$$

$$> -(\cos x + \sin x) > \cos^2 x + \sin^2 x \equiv 1.$$

Объединив интервалы $\left(0; \frac{\pi}{2}\right), \left(\pi; \frac{3}{2}\pi\right)$, получим с учетом периодичности функций $\sin x$ и $\cos x$, что неравенство (5.11) выполняется для $x \in \left(\pi n, \frac{\pi}{2} + \pi n\right), n \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $\pi n < x < \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$.

Пример 5.14. Решите неравенство

$$\sqrt{1 + \sin 2x} \leq \sqrt{\sin x + \cos x}. \quad (5.12)$$

Решение. На ОДЗ

$$\sqrt{1 + \sin 2x} = \sqrt{(\sin x + \cos x)^2} = |\sin x + \cos x| = \sin x + \cos x.$$

Поэтому неравенство (5.12) равносильно каждому из неравенств

$$t \leq \sqrt{t} \Leftrightarrow \sqrt{t}(\sqrt{t} - 1) \leq 0 \Rightarrow 0 \leq t \leq 1,$$

где $t = \sin x + \cos x = \sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$.

Таким образом,

$$0 \leq \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{\pi}{2} + 2\pi n \leq x - \frac{\pi}{4} \leq -\frac{\pi}{4} + 2\pi n, \\ \frac{\pi}{4} + 2\pi n \leq x - \frac{\pi}{4} \leq \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \end{cases} \quad n \in \mathbb{Z}, \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{\pi}{4} + 2\pi n \leq x \leq 2\pi n, \\ \frac{\pi}{2} + 2\pi n \leq x \leq \frac{3}{4}\pi + 2\pi n, \end{cases} \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $-\frac{\pi}{4} + 2\pi n \leq x \leq 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z};$

$$\frac{\pi}{2} + 2\pi n \leq x \leq \frac{3}{4}\pi + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Неравенства в примерах 5.15 - 5.20 отмечены символом «*». Они относятся к категории неравенств повышенной сложности и предназначены для групп с повышенной математической подготовкой.

Пример 5.15*. Решите неравенство

$$\cos(\cos x) > \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Решение. Обозначим $\cos x = t$ и рассмотрим

неравенство $\cos t > \frac{\sqrt{3}}{2}$. Его

решением будет

$$-\frac{\pi}{6} + 2\pi n < t < \frac{\pi}{6} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

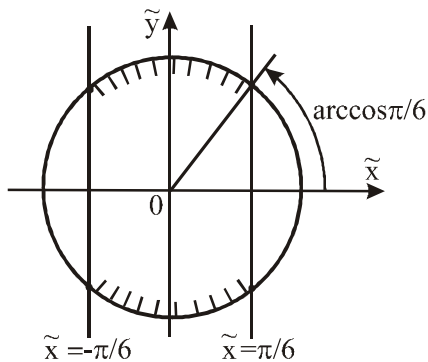


Рис. 5.14

Поскольку возможные значения $t \in [-1; 1]$ ($-1 \leq \cos x \leq 1$),
то окончательно имеем неравенства $-\frac{\pi}{6} \leq t < \frac{\pi}{6}$ или
 $-\frac{\pi}{6} \leq \cos x < \frac{\pi}{6}$ (рис. 5.14).

Отсюда

$$\begin{cases} -\pi + \arccos \frac{\pi}{6} + 2\pi n < x < -\arccos \frac{\pi}{6} + 2\pi n, \\ \arccos \frac{\pi}{6} + 2\pi n < x < \pi - \arccos \frac{\pi}{6} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Эту совокупность неравенств можно записать в виде одного
двойного неравенства

$$\arccos \frac{\pi}{6} + 2\pi n < |x| < \pi - \arccos \frac{\pi}{6} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $\arccos \frac{\pi}{6} + 2\pi n < |x| < \pi - \arccos \frac{\pi}{6} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$

Пример 5.16*. Решите неравенство

$$\sin(\cos x) \leq \frac{1}{2}.$$

Решение. Поскольку $\sin(\cos x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \cos x\right)$, то
исходное неравенство принимает вид

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \cos x\right) \leq \frac{1}{2},$$

откуда

$$\begin{cases} \frac{\pi}{3} + 2\pi n \leq \frac{\pi}{2} - \cos x \leq \frac{5}{3}\pi + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}, \\ -1 \leq \cos x \leq 1, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{7}{6}\pi \leq \cos x \leq \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} & (n=0), \\ -1 \leq \cos x \leq 1, \end{cases} \Leftrightarrow -1 \leq \cos x \leq \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \arccos \frac{\pi}{6} + 2\pi n \leq x \leq 2\pi - \arccos \frac{\pi}{6} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $\arccos \frac{\pi}{6} + 2\pi n \leq x \leq 2\pi - \arccos \frac{\pi}{6} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$

Пример 5.17*. Решите неравенство

$$\cos(\sin x) \leq \frac{1}{2}.$$

Решение. Для всех $x \in \mathbb{R}$ справедливо двойное неравенство $-1 \leq \sin x \leq 1$. Поскольку $\cos x$ - четная монотонно убывающая на интервале $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ функция и $0 < 1 < \frac{\pi}{2}$, то $\cos(\sin x) \leq \cos 1$

для всех $x \in \mathbb{R}$. Далее из неравенства $1 < \frac{\pi}{3}$ $\left(1 \text{ рад} < \frac{\pi}{3} \text{ рад}\right)$ следует неравенство $\cos 1 > \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$, откуда $\cos(\sin x) > \frac{1}{2}$

для всех $x \in \mathbb{R}$.

Ответ: $x \in \emptyset$.

Пример 5.18*. Докажите, что для всех x из интервала

$\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ справедливы

неравенства

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x. \quad (5.13)$$

Решение. На координатной плоскости $O\tilde{x}\tilde{y}$ построим единичную окружность и проведем луч OA (рис. 5.15).

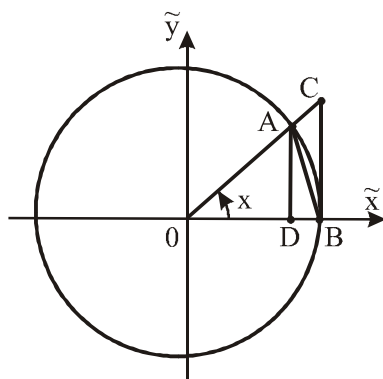


Рис. 5.15

Обозначим через x угол, который образует луч OA с положительным направлением оси $O\tilde{x}$ $\left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right)$.

Рассмотрим треугольник OAB , сектор OAB и треугольник OCB ($CB \perp OB$). Обозначим их площади соответственно S_1, S_2 и S_3 . Очевидно $S_1 < S_2 < S_3$ и при этом

$$S_1 = \frac{1}{2} OB \cdot AD = \frac{1}{2} OB \cdot OA \sin x = \frac{\sin x}{2}.$$

Отметим еще раз, что $OA = OB = 1$. Находим далее

$$S_2 = \frac{1}{2} R^2 \cdot x = \frac{x}{2}; \quad S_3 = \frac{1}{2} OB \cdot BC = \frac{1}{2} OB \cdot OB \operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{tg} x}{2},$$

откуда $\frac{\sin x}{2} < \frac{x}{2} < \frac{\operatorname{tg} x}{2} \Leftrightarrow \sin x < x < \operatorname{tg} x$.■

Пример 5.19*. Используя неравенство (5.13), докажите справедливость неравенств

$$\text{а) } \boxed{\cos x > 1 - \frac{x^2}{2}} \quad (5.14)$$

$$\text{б) } \boxed{\sin x > x - \frac{x^3}{4}} \quad (5.15)$$

для всех $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Решение: а) $\cos x = 1 - 2 \sin^2 \frac{x}{2}$, но $\sin \frac{x}{2} < \frac{x}{2}$ в силу (5.13)

и потому $\cos x > 1 - 2 \left(\frac{x}{2}\right)^2 = 1 - \frac{x^2}{2}$;

$$\text{б) } \sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} = 2 \operatorname{tg} \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2} = 2 \operatorname{tg} \frac{x}{2} \left(1 - \sin^2 \frac{x}{2}\right).$$

В соответствии с неравенством (5.13) имеем

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} > \frac{x}{2}; \quad 1 - \sin^2 \frac{x}{2} > 1 - \left(\frac{x}{2}\right)^2 = 1 - \frac{x^2}{4}.$$

Отсюда $\sin x > 2 \frac{x}{2} \left(1 - \frac{x^2}{4}\right) = x - \frac{x^3}{4}$. ■

Пример 5.20*. Докажите, что для всех $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ справедливо неравенство

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} > x - \frac{x^3}{4} + \frac{x^5}{64}.$$

Решение. Представим $\operatorname{tg} x$ в виде

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{\cos x} = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2}}{\cos x}.$$

Поскольку $\frac{1}{\cos x} > 1$ для всех $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, то

$$\operatorname{tg} x > 2 \operatorname{tg} \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2} > 2 \frac{x}{2} \left(1 - \frac{x^2}{8}\right)^2 = x - \frac{x^3}{4} + \frac{x^5}{64}.$$

Здесь использованы неравенства $\operatorname{tg} \frac{x}{2} > \frac{x}{2}$ и (5.14)

$$\cos \frac{x}{2} > 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{x}{2}\right)^2. \quad \blacksquare$$

5.3. Задачи для самостоятельного решения

Раздел 5.1. Решите неравенства:

1. $\sin x < \frac{1}{2}$.
2. $\cos x \geq -\frac{1}{2}$.
3. $\sin x \geq \sin 4$.
4. $\cos x < \cos 2$.

5. $\operatorname{tg} x \geq \sqrt{3}$. 6. $\operatorname{ctg} x < 3$. 7. $\operatorname{tg} x \leq \operatorname{tg} 2$. 8. $\operatorname{ctg} x > \operatorname{tg} \frac{3}{2}$.
9. $\sin x < \cos 1$. 10. $\cos^2 x \geq \frac{3}{4}$. 11. $\sin^2 x \leq \frac{1}{2}$. 12. $\operatorname{tg}^2 x \geq 3$.

Раздел 5.2. Решите неравенства

13. $2\sin^2 x - \cos x - 1 \leq 0$.
14. $4\sin^2 x + 2(\sqrt{3} + 1)\cos x - 4 - \sqrt{3} < 0$.
15. $\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg} x - 2 \geq 0$. 16. $\sin 3x + \sqrt{3} \cos 3x < \frac{3}{2}$.
17. $\sin x - \cos x + \sin 2x \geq 1$. 18. $\sin x - \cos x + 6\sqrt{2} \sin 2x \geq 0$.
19. $\sin 2x + \sin 4x + \sin 6x \leq 0$. 20*. $\cos x \cos 3x \sin 4x \geq 1$.
- 21*. $\cos x \cdot \cos 3x \cdot \cos 4x \geq 1$. 22*. $\sin^2 x + \sin^2 2x + \sin^2 3x \geq 2$.
23. $\sqrt{\operatorname{tg} x} < \sqrt{-\cos x}$. 24. $\sqrt{1 - 2\cos^2 x} \geq 2\sin x - 1$.
25. $\sqrt{3 - 4\sin^2 x} < 2\sin x + 1$. 26. $\sin 4x \leq 4\sin x$.
27. $\sqrt{\operatorname{tg} x - 1} (\cos 12x - 1) \geq 0$. 28. $\frac{\operatorname{tg} x - 1}{\sin x} \geq 1$.
- 29*. $|1 - 2\cos 2x| + 3\sin x \leq 0$. 30. $\frac{\cos 6x - \cos 2x}{\cos 3x} \leq 0$.
31. $\cos 2x - \cos 4x < 0$. 32. $4(\sin^4 x + \cos^4 x) + \cos 6x > 3$.
33. $\sqrt{3 + \sin 3x} \geq 2\sin x$. 34. $\sqrt{3 + 2\cos 3x} \leq 2\cos x$.
35. $\sqrt[4]{\frac{17 + 7\cos 4x}{24}} > \cos x$.

36. Найдите сумму корней уравнения

$$\sqrt{18 + 3x - x^2} (\sin \pi x + \cos \pi x) = 0.$$

37. Найдите сумму целочисленных решений неравенства

$$\sqrt{18 + 3x - x^2} (\sin \pi x + \cos \pi x) \leq 0.$$

38. Решите неравенство

$$\cos^4 x + \sin^4 x \geq \frac{\sqrt{2} \cos \frac{x}{2}}{\sqrt{1 + \cos x}}$$

на отрезке $[-\pi; 3\pi]$.

39. Решите неравенство $\sec x \geq \cos \sec x$.

Решите неравенства:

$$40^*. \cos(\cos x) < \frac{1}{\sqrt{2}}. \quad 41^*. \sin(\sin x) \geq \frac{1}{2}.$$

$$42^*. \sin(\sin x) < 0. \quad 43^*. \cos(\sin x) < 0.$$

Докажите неравенства:

$$44^*. \cos x < 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{16}. \quad 45^*. \cos x > 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{32}.$$

$$46^*. \sin x > x - \frac{x^3}{4} + \frac{x^5}{64}.$$

5.4. Ответы

$$1. \frac{5}{6}\pi + 2\pi n < x < \frac{13}{6}\pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

$$2. -\frac{2}{3}\pi + 2\pi n \leq x \leq \frac{2}{3}\pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

$$3. \pi - 4 + 2\pi n \leq x \leq 4 + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

$$4. 2 + 2\pi n < x < 2\pi - 2 + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

$$5. \frac{\pi}{3} + \pi n \leq x < \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

$$6. \arctg 3 + \pi n < x < \pi + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

$$7. \frac{\pi}{2} + \pi n < x \leq 2 + \pi n, n \in \mathbb{Z}. \quad 8. \pi n < x < \frac{\pi}{2} - \frac{3}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

$$9. \frac{\pi}{2} + 1 + 2\pi n < x < \frac{5}{2}\pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

$$10. -\frac{\pi}{6} + \pi n < x \leq \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

$$11. -\frac{\pi}{4} + \pi n \leq x \leq \frac{\pi}{4} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

$$12. -\frac{\pi}{2} + \pi n < x \leq -\frac{\pi}{3} + \pi n, \quad \frac{\pi}{3} + \pi m \leq x \leq \frac{\pi}{2} + \pi m, \quad n, m \in \mathbb{Z}.$$

$$13. x = \pi + 2\pi n; \quad -\frac{\pi}{3} + 2\pi m \leq x \leq \frac{\pi}{3} + 2\pi m, \quad n, m \in \mathbb{Z}.$$

$$14. -\frac{\pi}{3} + 2\pi n < x < -\frac{\pi}{6} + 2\pi n,$$

$$\frac{\pi}{6} + 2\pi m < x < \frac{\pi}{3} + 2\pi m, \quad n, m \in \mathbb{Z}, \text{ или}$$

$$\frac{\pi}{6} + 2\pi k < |x| < \frac{\pi}{3} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

$$15. -\frac{\pi}{2} + \pi n < x \leq -\arctg 2 + \pi n;$$

$$\frac{\pi}{4} + \pi m \leq x < \frac{\pi}{2} + \pi m, \quad n, m \in \mathbb{Z}.$$

$$16. \frac{2}{9}\pi - \frac{1}{3}\arcsin \frac{3}{4} + \frac{2}{3}\pi n < x < \frac{5}{9}\pi + \frac{1}{3}\arcsin \frac{3}{4} + \frac{2}{3}\pi n,$$

$$n \in \mathbb{Z}.$$

$$17. \frac{\pi}{4} + 2\pi n \leq x \leq \frac{\pi}{2} + 2\pi n;$$

$$\pi + 2\pi m \leq x < \frac{5}{4}\pi + 2\pi m, \quad n, m \in \mathbb{Z}.$$

$$18. \frac{\pi}{4} - \arcsin \frac{2}{3} + 2\pi n \leq x \leq \frac{\pi}{4} + \arcsin \frac{3}{4} + 2\pi n;$$

$$\frac{\pi}{4} - \arcsin \frac{3}{4} + (2n+1)\pi \leq x \leq \frac{\pi}{4} + \arcsin \frac{2}{3} + (2n+1)\pi,$$

$$n \in \mathbb{Z}.$$

$$19. -\frac{\pi}{4} + \pi n \leq x \leq \pi n; \quad \frac{\pi}{4} + \pi m \leq x \leq \frac{\pi}{3} + \pi m;$$

$$\frac{\pi}{2} + \pi k \leq x \leq \frac{2}{3}\pi + \pi k, n, m, k \in \mathbb{Z}.$$

$$20^*. \emptyset. \quad 21^*. x = \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

$$22. x = \frac{\pi}{2} + \pi n; \quad \frac{\pi}{6} + \pi m \leq |x| \leq \frac{\pi}{4} + \pi m, \quad n, m \in \mathbb{Z}.$$

$$23. \pi + 2\pi n \leq x < \pi + \arcsin \frac{\sqrt{5}-1}{2} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

$$24. x = \frac{\pi}{2} + \pi n; \quad \frac{5}{4}\pi + 2\pi m < x < \frac{7}{4}\pi + 2\pi m, \quad n, m \in \mathbb{Z}.$$

$$25. \frac{\pi}{10} + 2\pi n < x < \frac{\pi}{3} + 2\pi n;$$

$$\frac{2}{3}\pi + 2\pi m < x < \frac{9}{10}\pi + 2\pi m, \quad n, m \in \mathbb{Z}.$$

$$26. 2\pi n \leq x \leq \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

$$27. x = \frac{\pi}{3} + \pi n; \quad x = \frac{\pi}{4} + \pi m, \quad m \in \mathbb{Z}.$$

$$28. -\frac{\pi}{2} + 2\pi n < x < 2\pi n;$$

$$\frac{\pi}{4} + \arcsin \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}} + 2\pi m \leq x < \frac{\pi}{2} + 2\pi m,$$

$$\pi + 2\pi k < x \leq \frac{5}{4}\pi - \arcsin \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}} + 2\pi k, \quad n, m, k \in \mathbb{Z}.$$

$$29. -\pi + \arcsin \frac{1}{4} + 2\pi n \leq x \leq -\arcsin \frac{1}{4} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

$$30. -\frac{\pi}{6} + 2\pi n < x < \frac{\pi}{6} + 2\pi n; \quad \frac{\pi}{4} + 2\pi m \leq x < \frac{\pi}{2} + 2\pi m;$$

$$\frac{3}{4}\pi + 2\pi k \leq x < \frac{5}{6}\pi + 2\pi k; \quad \frac{7}{6}\pi + 2\pi l < x \leq \frac{5}{4}\pi + 2\pi l;$$

$$\frac{3}{2}\pi + 2\pi t < x \leq \frac{7}{4}\pi + 2\pi t, \quad n, m, k, l, t \in \mathbb{Z}.$$

$$31. \frac{\pi}{3} + \pi n < x < \frac{2}{3}\pi + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

$$32. -\frac{\pi}{10} + \pi n < x < \frac{\pi}{10} + \pi n; \quad \frac{3}{10}\pi + \pi m < x < \frac{\pi}{2} + \pi m;$$

$$\frac{\pi}{2} + \pi k < x < \frac{7}{10}\pi + \pi k, \quad n, m \in \mathbb{Z}.$$

$$33. \frac{2}{3}\pi + 2\pi n \leq x \leq \frac{7}{3}\pi + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

$$34. -\frac{\pi}{3} + 2\pi n \leq x \leq -\frac{\pi}{6} + 2\pi n;$$

$$\frac{\pi}{6} + 2\pi m \leq x \leq \frac{\pi}{3} + 2\pi m, \quad n, m \in \mathbb{Z},$$

или

$$\frac{\pi}{6} + 2\pi k \leq |x| \leq \frac{\pi}{3} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

$$35. \frac{\pi}{6} + 2\pi n < x < \frac{11}{6}\pi + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad 36. \frac{75}{4}. \quad 37. 11.$$

$$38. \left\{ -\frac{\pi}{2}; 0; \frac{\pi}{2} \right\} \cup (\pi; 3\pi).$$

$$39. \frac{\pi}{4} + 2\pi n \leq x < \frac{\pi}{2} + 2\pi n; \quad \pi + 2\pi m < x \leq \frac{5}{4}\pi + 2\pi m;$$

$$\frac{3}{2}\pi + 2\pi k < x < 2\pi + 2\pi k, \quad n, m, k \in \mathbb{Z}.$$

$$40. -\arccos \frac{\pi}{4} + \pi n < x < \arccos \frac{\pi}{4} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

$$41. \arcsin \frac{\pi}{6} + 2\pi n \leq x \leq \pi - \arcsin \frac{\pi}{6} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

$$42. \pi + 2\pi n < x < 2\pi + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}. \qquad 43. \emptyset.$$

6. ТЕМАТИЧЕСКИЕ КОНТРОЛЬНЫЕ РАБОТЫ

6.1. Контрольная работа № 1

Свойства тригонометрических функций

Вариант 1

1. Вершины вписанного в окружность четырехугольника ABCD делят окружность в отношении $AB:BC:CD:DA = 3:4:5:6$. Найдите внутренние углы четырехугольника.

2. Определите знак числа $A = \sin 5 \cdot \cos 2 \cdot \operatorname{tg} \frac{22}{3} \pi$.

3. Вычислите $A = \sin 570^0 \cdot \operatorname{tg} 750^0 + \sec 690^0 \cdot \operatorname{cosec} 810^0$.

4. Вычислите $A = \frac{\cos^2 37^0 30' + \sin^2 7^0 30'}{\cos 37^0 30' + \sin 7^0 30'}$.

5. Установите, какие из приведенных функций являются

а) четными, б) нечетными:

1) $y = \sin x \cdot \sin \left(x - \frac{\pi}{2} \right)$ 2) $y = |\sin 5x|$;

3) $y = \operatorname{tg} x \cdot \cos \operatorname{ex} x$; 4) $y = x \operatorname{tg} x$.

6. Определите основной (наименьший) период функций:

1) $y = 5 \cos \frac{11}{7} x + 4 \sin \frac{15}{8} x$; 2) $y = \cos \frac{2\pi}{3} x + 3 \sin \frac{15\pi}{6} x$.

7. Расположите в порядке возрастания числа:

$$\sin 36^0, \sin 172^0, \sin 195^0, \sin 348^0, \sin 440^0.$$

8. Решите неравенство $(x - \sin 3) \left(x - \operatorname{tg} \frac{5}{6} \pi \right) \left(x - \operatorname{ctg} \frac{1}{2} \right) \leq 0$.

9. Найдите множество значений функции

$$y = -4 \cos^2 x - 6 \sin x + 9.$$

10. Постройте график функции $y = \frac{1}{\cos x - \frac{1}{2}}$ и найдите

множество ее значений.

Вариант 2

1. Вокруг треугольника ABC описана окружность. Точками A, B и C окружность делится на части 5, 7, 12 (AB:BC:CA = 5:7:12). На дуге BC взята точка M. Найдите величину угла MBC. Ответ запишите в радианах.

2. Переведите из градусной меры в радианную:

а) 215^0 ; б) $36^0 20'$; в) $167^0 30'$; г) 534^0 .

3. Упростите $A = \cos^4\left(\frac{17}{2}\pi - \frac{1}{2\pi}\right) - \sin^4\left(\frac{1}{2\pi} - \frac{33}{2}\pi\right)$

4. Вычислите

$$A = \sqrt{\operatorname{tg}^2 586^0 - \sec 660^0 \operatorname{tg} 226^0 \operatorname{ctg} 43^0 + \operatorname{tg}^2 313^0} + \operatorname{tg} 46^0.$$

5. Установите какие из приведенных функций являются

а) четными, б) нечетными:

1) $y = \cos(\sin x)$, $x \in \mathbb{R}$; 2) $y = \sin(\operatorname{tg} x)$, $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$

3) $y = \operatorname{tg}(\sin x)$, $x \in \mathbb{R}$; 4) $y = \operatorname{ctg}(\sin x)$, $x \in \mathbb{R}$.

6. Определите основной период функций:

1) $y = 3\cos\left(\frac{3}{2}x + 4\right) - 7\sin\left(\frac{9}{5}x - 3\right)$;

2) $y = 2\sin\frac{4}{9\pi}x + 5\cos\frac{8}{3}x$;

3) $y = 4\cos\frac{4}{\sqrt{3}}x + \sin\left(\frac{5x}{\sqrt{12}}\right)$.

7. Сравните числа:

а) $\sin 170^0$ и $\sin 370^0$;

б) $\cos 333^0$ и $\cos 444^0$;

в) $\operatorname{tg} 233^0$ и $\operatorname{ctg} 233^0$;

г) $\cos 359^0 59'$ и $\operatorname{ctg} 44^0$.

8. Решите неравенство $\left(x - \frac{\pi}{3}\right)\left(x - \operatorname{tg}\sqrt{2}\left(\sec\frac{\pi}{6} - x\right)\right) \geq 0$.

9. Найдите множество значений функции $y = (\operatorname{tg} 2x + \operatorname{ctg} 2x)^2$.

10. Постройте график функции

$$y = \frac{1}{\sin x - \sqrt{3}}$$

и найдите множество ее значений.

6.2. Контрольная работа № 2

Тригонометрические тождества, вычисления

Вариант 1

1. Докажите тождества:

а) $\sin x + \cos x + \sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 2 \sin x$;

б) $\sin x + \cos x + \sin 3x + \cos 3x = 2\sqrt{2} \cos x \cdot \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$;

в) $\sin^2\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + \cos^2\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2x$;

г) $\frac{\sin 7x + \sin 5x - \sin x - \sin 11x}{\cos x + \cos 5x + \cos 7x + \cos 11x} = \operatorname{tg} 2x \cdot \operatorname{tg} 3x \cdot \operatorname{tg} 6x$;

д) $\sin^6 x + \cos^6 x = \frac{5 + 3 \cos 4x}{8}$;

е) $\frac{\sqrt{1 + \sin 2x}}{\sqrt{1 - \sin 2x}} = \left| \operatorname{ctg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \right|$.

2. Вычислите:

$$\text{a) } A = \frac{\sin 130^0 \cos 210^0 - \sin 140^0 \cos 240^0 - 1}{\cos^2 55^0};$$

$$\text{б) } A = \frac{1 + \sqrt{3} \operatorname{tg} 15^0}{\sqrt{3} - \operatorname{tg} 15^0}; \quad \text{в) } A = \cos^6 \frac{\pi}{8} - \sin^6 \frac{\pi}{8};$$

$$\text{г) } A = \operatorname{cosec} \frac{\pi}{6} \left(\sin \frac{23}{10} \pi + \sin \frac{11}{10} \pi \right)$$

$$\text{д) } \cos 2\alpha, \text{ если } \operatorname{tg} \alpha = \sqrt{3} \text{ и } \alpha \in \left(\frac{5}{4} \pi; \frac{3}{2} \pi \right);$$

$$\text{е) } \operatorname{tg} \frac{x}{2}, \text{ если } \sin x + \cos x = \frac{\sqrt{3} + 1}{2};$$

$$\text{ж) } A = \left| \operatorname{tg} \frac{\pi}{8} - \operatorname{ctg} \frac{\pi}{8} \right| + \left| \operatorname{tg} \frac{7}{8} \pi - \operatorname{ctg} \frac{7}{8} \pi \right|.$$

Вариант 2

1. Докажите тождества:

$$\text{a) } \sqrt{2}(\sin x - \cos x) \cos \left(x - \frac{\pi}{4} \right) = -\cos 2x;$$

$$\text{б) } \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x + \operatorname{tg} \left(x - \frac{\pi}{4} \right) + \operatorname{ctg} \left(x - \frac{\pi}{4} \right) = 4\sqrt{2} \frac{\sin \left(\frac{\pi}{4} - 2x \right)}{\sin 4x};$$

$$\text{в) } \sin^4 \left(x - \frac{\pi}{8} \right) + \cos^4 \left(x + \frac{\pi}{8} \right) = \frac{3}{4} - \sin 2x;$$

$$\text{г) } \frac{\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x}{\cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cos 4x} = \operatorname{tg} \frac{5}{2} x;$$

$$д) \cos^8\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - \sin^8\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \sin 2x \frac{3 - \cos 4x}{4};$$

$$е) \sqrt{\frac{1 - \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)}{1 + \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)}} = |\operatorname{tg} x|.$$

2. Вычислите:

$$а) A = \cos 264^0 - \sin 36^0 + \cos 114^0;$$

$$б) A = 32 \cos \frac{\pi}{17} \cos \frac{2\pi}{17} \cos \frac{3\pi}{17} \dots \cos \frac{8\pi}{17};$$

$$в) \operatorname{tg}^4 x + \operatorname{ctg}^4 x, \text{ если } \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = 3;$$

$$г) A = \operatorname{cosec} \frac{\pi}{6} \left(\sin \frac{23}{10} \pi + \sin \frac{11}{10} \pi \right) \quad \text{если } \operatorname{tg} x = \sqrt{3} \quad \text{и} \\ x \in \left(\pi; \frac{3}{2} \pi \right);$$

$$д) \sin 2x, \text{ если } \cos \frac{x}{2} = -\frac{1}{3} \quad \text{и} \quad x \in \left(\frac{3}{2} \pi; 2\pi \right);$$

$$е) A = \frac{2 \sin 3,1\pi \cos 1,9\pi + \cos 2,1\pi}{2 \cos 2,4\pi \sin 2,6\pi \sin 1,1\pi};$$

$$ж) A = \left| \cos \frac{\pi}{12} - \operatorname{ctg} \frac{7}{30} \pi \right| - \left| \operatorname{tg} \frac{4}{15} \pi - \sin \frac{11}{12} \pi \right|.$$

6.3. Контрольная работа № 3

Обратные функции; обратные тригонометрические функции

Вариант 1

1. Найдите обратную функцию $f^{-1}(x)$ для заданной

$$f(x) = |3x - 2| - |x - 4|, \quad x \geq \frac{2}{3},$$

и постройте графики функций $f(x)$ и $f^{-1}(x)$.

2. Найдите обратную функцию $f^{-1}(x)$ для заданной

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 14, & 0 \leq x \leq 4, \\ x^2 - 8x + 20, & x > 4, \end{cases}$$

и постройте графики функций $f(x)$ и $f^{-1}(x)$.

3. Решите уравнение

$$x^2 - 8x + 20 = 4 + \sqrt{x - 4}.$$

4. Решите уравнение $f^{-1}(2x + 1) = 5x + 6$, если

$$f(3x + 2) = 6x - 4.$$

5. Решите неравенство $f(2 \sin x + 4) \geq \cos^2 x + 5$, если

$$f^{-1}(x + 2) = 2x - 4.$$

6. Вычислите:

$$\text{а) } \sin\left(2 \arccos \frac{1}{4}\right) \quad \text{б) } \operatorname{tg}\left(\frac{1}{2} \arccos \frac{1}{4}\right)$$

$$\text{в) } \cos\left(\frac{1}{2} \arccos\left(-\frac{1}{4}\right)\right) \quad \text{г) } \operatorname{ctg}(\operatorname{arctg} 2 + \operatorname{arctg} 3).$$

7. Вычислите: а) $\arccos\left(\sin \frac{27}{4} \pi\right)$ б) $\operatorname{arctg}(\operatorname{ctg} 17)$;

$$\text{в) } \arcsin(\cos 11).$$

8. Решите уравнения:

а) $\arccos x = \frac{5}{2}$; б) $\operatorname{arctg} x = \frac{5}{2}$;

в) $\operatorname{arctg} x^2 = \frac{\pi}{6}$; г) $2 \arcsin 2x + 4 \arccos 2x = 3\pi$.

9. Решите неравенства:

а) $-1 < \arcsin x < \frac{\pi}{6}$; б) $|\operatorname{arctg} x| \leq \frac{\pi}{3}$;

в) $\arcsin(2x - 3) \leq \arcsin(3x - 4)$;

г) $\operatorname{arctg}^2 x - \frac{\pi}{3} \operatorname{arctg} x - \frac{2}{9} \pi^2 \leq 0$.

10*. Решите неравенства:

а) $\arcsin^2 x + 4 \arccos^2 x \geq 2\pi^2$; б) $\arcsin(\sin x) \geq -\frac{x}{7}$.

Вариант 2

1. Найдите обратную функцию $f^{-1}(x)$ для заданной

$$f(x) = |2x + 5| + |3x - 6|, \quad x \leq 2,$$

и постройте графики функций $f(x)$ и $f^{-1}(x)$.

2. Найдите обратную функцию $f^{-1}(x)$ для заданной

$$f(x) = \begin{cases} x^3, & -1 \leq x \leq 1, \\ 2x^2 - 4x + 3, & x \geq 1, \end{cases}$$

и постройте графики функций $f(x)$ и $f^{-1}(x)$.

3. Решите уравнение

$$2x^2 - 4x + 3 = 1 + \sqrt{\frac{x-1}{2}}.$$

4. Решите уравнение $f(3x + 2) = 2x - 6$, если

$$f^{-1}(x + 2) = 4x + 6.$$

5. Решите неравенство $f^{-1}(\operatorname{tg} x + 1) \leq \operatorname{tg}^2 x + \frac{\operatorname{tg} x}{2} + \frac{1}{2}$.

6. Вычислите:

а) $\sin\left(\arcsin \frac{1}{4} + \arccos \frac{1}{3}\right)$; б) $\operatorname{tg}\left(2 \arcsin \frac{1}{4}\right)$;

в) $\cos\left(\frac{1}{2} \arcsin\left(-\frac{2}{3}\right)\right)$; г) $\sin\left(\operatorname{arctg} 2 + \operatorname{arctg} \frac{1}{2}\right)$

7. Вычислите:

а) $\arcsin\left(\cos \frac{49}{3} \pi\right)$; б) $\arccos(\sin 21)$;

в) $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{ctg} \frac{49}{5} \pi\right)$; г) $\arccos(\sin(-17))$.

8. Решите уравнения:

а) $\arcsin x = \frac{\pi}{5}$; б) $\operatorname{arctg} x = 1,5$;

в) $\arcsin^2 x = \frac{\pi}{9}$; г) $\arcsin(x-3) \cdot \arccos(x-3) = -\frac{\pi^2}{9}$.

9. Решите неравенства:

а) $-1 < \arccos x < 3$; б) $|\arcsin(x-1)| \geq \frac{\pi}{3}$;

в) $\operatorname{arctg}(2x-4) \leq \operatorname{arctg}(2x-4)$;

г) $\arccos x \arcsin x \leq -\frac{5}{18} \pi^2$.

10*. Решите неравенства:

а) $\operatorname{arctg}^2 x + 4 \operatorname{arctg}^2 x \geq \frac{5}{16} \pi^2$; б) $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) \geq -\frac{x}{3} + \frac{\pi}{3}$.

6.4. Контрольная работа № 4

Тригонометрические уравнения и неравенства

Вариант 1

I. Решите уравнения:

1. $\operatorname{tg}^2 3x = 3$. 2. $\sin 4x - \cos 4x = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

3. $\sin 2x + \sin^2 x = \sqrt{5} \sin x$. 4. $\sin^2 x + \sin^2 3x + \cos^2 2x = \frac{3}{2}$.

5*. $2\sin^3 x + 2\sin x + 3\cos x = 0$. 6.
 $2\cos 2x \sin 3x + \sin 9x = 0$.

7. $1 + \sin 2x = \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x$.

8. Найдите число и сумму корней уравнения
 $2\cos 2x \sin 3x + \sin 9x = 0$

на отрезке $[-180^\circ, 270^\circ]$.

II. Решите неравенства:

1. $\sin^2 x \geq \frac{1}{2}$. 2. $\cos x < \frac{\pi}{4}$.

3. $\operatorname{tg} x \geq \operatorname{ctg} 3$. 4. $\operatorname{tg}^2 x - \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{tg} x - 1 \geq 0$.

5. $\cos x + \cos 3x + \cos 5x \leq 0$ на отрезке $[0, 2\pi]$.

Вариант 2

I. Решите уравнения:

1. $\operatorname{ctg}^2 2x = \frac{1}{3}$. 2. $\operatorname{tg} 3x + \operatorname{ctg} 3x = -2$.

3. $2\sin 3x - \cos 2x = -1$. 4. $\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x = 1$.

5*. $7\sin^3 x + 5\cos^3 x - 4\sin x - 2\cos x = 0$.

$$6. 2 \cos 5x \cos 3x + \cos 4x = 0. \quad 7. \cos^2 \frac{x}{2} + 1 = \frac{2}{\sin \frac{x}{4}}.$$

8. Найдите число и сумму различных корней уравнения
 $2 \cos 5x \cos 3x + \cos 4x = 0$
 на отрезке $[-90^0, 270^0]$.

II. Решите неравенства:

1. $\cos^2 x < \frac{3}{4}.$
2. $\sin x < \frac{3}{4}.$
3. $\operatorname{ctg} x \geq \arccos(-1).$
4. $4 \cos^2 x + 2(\sqrt{3} - 1) \cos x - \sqrt{3} \geq 0.$
5. $\sin x - \sin 3x + \sin 5x \geq 0$ на отрезке $[0, 2\pi].$

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шабунин М.И. Математика для поступающих в вузы. М.: Лаборатория базовых знаний, 2000.
2. Дорофеев Г., Потапов М., Розов Н. Математика для поступающих в вузы. М.: Дрофа, 2002.
3. Кравцев С.В., Макаров Ю.Н., Максимов В.Ф., Нараленков М.И., Чирский В.Г. Методы решения задач по алгебре. М.: Экзамен, 2001.
4. Шарыгин И.Ф. Сборник задач по математике с решениями. М.: Астрель. АСТ, 2001.
5. 3000 конкурсных задач по математике. М.: Рольф; Айрис-пресс, 1998.
6. Говоров В.М., Дыбов П.Т., Мирошин Н.В., Смирнова С.Ф. Сборник конкурсных задач по математике. М.: Наука, 1983.

Тригонометрические функции.
Уравнения и неравенства

Н о в и к о в Анатолий Иванович

Редактор И.П. Перехрест

Корректор Н.А. Орлова

Подписано в печать .05. Формат бумаги 60×84 1/16.

Бумага газетная. Печать трафаретная. Усл. печ. л. .

Уч.-изд. л. . Тираж экз. Заказ

Рязанская государственная радиотехническая академия.

390005, Рязань, ул. Гагарина, 59/1.

Редакционно-издательский центр РГРТА.

Рязанская государственная

5-7722-02448-0

© радиотехническая академия,

2005