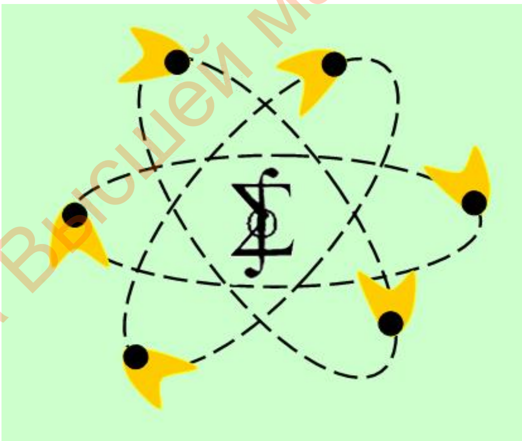
МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

РЯЗАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ РАДИОТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

И.П. КАРАСЁВ

ПРОИЗВОДНАЯ



Рязань 2018

Министерство образования и науки Российской Федерации

Рязанский государственный радиотехнический университет

И.П. КАРАСЁВ

ПРОИЗВОДНАЯ

Учебное пособие

Рязань 2018

УДК 517

Производная: учеб. пособие (теория, практические задания с методическими указаниями) / И.П. Карасёв; Рязан. гос. радиотехн. ун-т. – Рязань, 2018. – 92 с.

Содержит подробное изложение теоретического материала с большим количеством решённых примеров и задач, в пособии имеются практические задания для самостоятельной работы с методическими указаниями и ответами.

Предназначено для студентов вечернего и заочного образования. Может быть полезным и для студентов инженерных специальностей очной формы обучения.

Табл. 1. Ил. 20. Библиогр.: 2 назв.

Производная, монотонность, экстремум, выпуклость, асимптоты

Печатается по решению редакционно-издательского совета Рязанского государственного радиотехнического университета.

Рецензент: кафедра высшей математики Рязанского государственного радиотехнического университета (зав. кафедрой канд. физ.-мат. наук, доц. К.В. Бухенский)

1. Производная
1.1. Задачи, приводящие к понятию производной функции

Задача 1. Материальная точка A движется прямолинейно и неравномерно по закону $S = f(t)$, где S – расстояние, которое отсчитывается от некоторой начальной точки, t – время движения этой точки. Найти скорость $v(t)$ в данный момент времени t.

Решение. $S(t) = f(t)$, $S(t+\Delta t) = f(t+\Delta t)$.

За время t материальная точка пройдёт путь $\Delta S = f(t+\Delta t) - f(t)$ (рис.1). Найдём среднюю скорость v_{cp}:

$$v_{cp} = \frac{\Delta S}{\Delta t}.$$

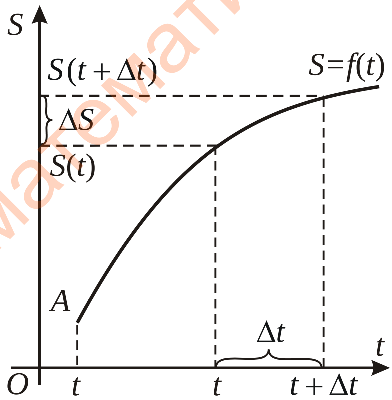


Рис. 1

Чем меньше промежуток t, тем меньше скорость отличается от истинной в момент t. Примем за истинную скорость $v(t)$ предел средней скорости при $\Delta t \to 0$:

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t}. \qquad (1)$$

Рассмотрим частный случай. Свободное падение материальной точки без начальной скорости выражается формулой $S = \frac{gt^2}{2}$.

Найти скорость движения в произвольный момент времени t.

Решение. В момент t $S = \frac{gt^2}{2}$, в момент $t + \Delta t$

$$S+\Delta S=\frac{g(t+\Delta t)^2}{2}=\frac{g}{2}\left(t^2+2t\cdot\Delta t+\Delta t^2\right).$$

Найдём ΔS:

$$\Delta S=\frac{g}{2}\left(t^2+2t\cdot\Delta t+\Delta t\right)-\frac{gt^2}{2}=gt\cdot\Delta t+\frac{g}{2}\cdot\Delta t^2.$$

Средняя скорость

$$v_{\text{ср}}=\frac{\Delta S}{\Delta t}=\frac{gt\cdot\Delta t+\frac{g}{2}\cdot\Delta t^2}{\Delta t}=gt+\frac{1}{2}g\cdot\Delta t.$$

По определению имеем:

$$v(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta S}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\left(gt+\frac{g}{2}\cdot\Delta t\right)=gt.$$

Следовательно, скорость в любой момент времени t равна: $v(t)=gt$.

Задача 2. Через поперечное сечение проводника протекает неравномерное количество электричества по закону $q=q(t)$, здесь q – заряд, t – время, время $t=0$ берётся за начало отсчёта. Найти силу тока в момент t.

Решение. В момент t $q=q(t)$, в момент $t+\Delta t$ $q+\Delta q=q(t+\Delta t)$:

$$\Delta q=q(t+\Delta t)-q(t).$$

Средняя величина тока $I_{\text{ср}}=\frac{\Delta q}{\Delta t}$. Чем меньше Δt, тем меньше $I_{\text{ср}}$ отличается от истинного тока $I(t)$ в момент t. По определению имеем:

$$I(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta q}{\Delta t}. \qquad (2)$$

Задача 3. Найти угловой коэффициент касательной к данной кривой $y=f(x)$ в точке $M_0(x_0;y_0)$.

Решение. Пусть $M_0(x_0; y_0)$ и $M(x_0+\Delta x; y_0+\Delta y)$ – две точки на графике (рис. 2). Прямую M_0M называют секущей.

Определение 1. *Касательной M_0A к графику функции $y=f(x)$ в точке M_0 называется предельное положение секущей M_0M при стремлении точки M к точке M_0 по графику (или то же самое при $\Delta x \to 0$)* (рис. 2).

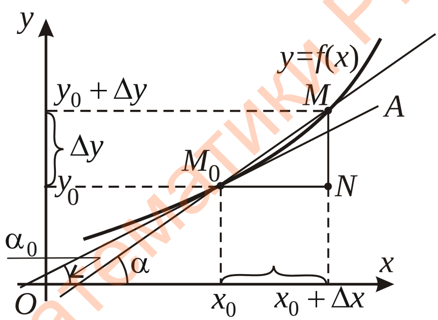


Рис. 2

Найдём угловой коэффициент касательной k как предельное значение углового коэффициента секущей $k_{\text{сек}}$ при $\Delta x \to 0$. Из ΔM_0MN (рис. 2)

$$k_{\text{сек}} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = tg\,\alpha\,,$$

где α – угол между секущей M_0M и осью Ox.

$$k = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = tg\,\alpha_0\,, \qquad (3)$$

где α_0 – угол между M_0A и осью Ox.

1.2. Определение производной

Во всех задачах 1, 2, 3 п. 1.1. равенства (1), (2) и (3) по своей структуре одинаковы. Если отойти от конкретного содержания, то в данных задачах приращение функции делилось на приращение аргумента, а затем вычислялся предел их отношения.

Мы пришли к основному понятию дифференциального исчисления – к *понятию производной.*

Пусть функция $y=f(x)$ определена в промежутке X. Фиксируем любое значение x из этого промежутка и зададим аргументу в точке x произвольное приращение Δx такое, что значение $x+\Delta x$ также принадлежит X. Найдём приращение функции:

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x).$$

Рассмотрим в данной точке x отношение приращения функции к соответствующему приращению аргумента Δx:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \qquad (4)$$

Определение 2. *Производной функции $y = f(x)$ в данной фиксированной точке $x \in X$ называется предел отношения (4) при $\Delta x \to 0$, если этот предел существует.*

Производную обозначают одним из следующих символов: $y'(x)$, $f'(x)$, y', y'_x, $\dfrac{dy}{dx}$.

Итак, по определению:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \qquad (5)$$

Заметим, что если функция $y = f(x)$ имеет производную для всех $x \in X$, то эта производная является некоторой функцией переменной x.

Операция нахождения производной от функции $y = f(x)$ называется *дифференцированием* этой функции.

Пример. Дана функция $y = x^2$. Найти её производную y': 1) в произвольной точке x; 2) при $x = 4$.

Решение. 1) При значении аргумента, равном $x+\Delta x$, имеем:

$$y + \Delta y = (x+\Delta x)^2.$$

Найдём приращение функции:

$$\Delta y = (x+\Delta x)^2 - x^2 = 2x \cdot \Delta x + \Delta x^2.$$

Составим отношение $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2x \cdot \Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} = 2x + \Delta x .$$

Найдём предел, называемый производной функции $y = x^2$ в точке x:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) = 2x .$$

Итак, производная функции $y = x^2$ в любой точке x равна $2x$: $\left(x^2\right)' = 2x$. Мы видим, что $y' = 2x$ является функцией независимой переменной x.

2) При $x = 4$ получаем $y' = 2 \cdot 4 = 8$.

В задачах 1, 2, 3 п. 1.1. найдены производные соответствующих функций. Мгновенная скорость в равенстве (1) $v(t) = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t}$ есть производная от пройденного пути S по времени t:

$$v = S'_t .$$

В этом состоит *механический* смысл производной.

Сила тока в равенстве (2) есть производная от количества электричества, проходящего через поперечное сечение проводника в момент времени t:

$$I(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta t} = q'_t \text{ – это } \textit{физический} \text{ смысл.}$$

Угловой коэффициент касательной в равенстве (3) есть производная $f'(x_0)$ в точке x_0:

$$k = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = tg\,\alpha_0 = f'(x_0).$$

В этом состоит *геометрический* смысл производной.

1.3. Понятие дифференцируемости функции в данной точке

Определение 3. *Функция* $y = f(x)$ *называется дифференцируемой в точке* $x \in X$, *если приращение* Δy *этой функции в точке* x, *соответствующее приращению аргумента* Δx, *можно представить в виде:*

$$\Delta y = A \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x, \tag{6}$$

где A – некоторое число, не зависящее от Δx, а $\alpha(\Delta x)$ – функция аргумента Δx является бесконечно малой при $\Delta x \to 0$.

Теорема 1. *Если функция* $y = f(x)$ *дифференцируема в точке* $x \in X$, *то* $A = f'(x)$.

□ Из равенства (6) следует: $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = A + \alpha(\Delta x)$. Найдём предел $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ при $\Delta x \to 0$:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(A + \alpha(\Delta x)\right) = \lim_{\Delta x \to 0} A + \lim_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta x) = A + 0 = A.$$

Следовательно, $f'(x) = A$. ■

Справедливо и обратное утверждение.

1.4. Связь между дифференцируемостью и непрерывностью функции

Теорема 2. *Если функция* $y = f(x)$ *дифференцируема в данной точке* $x \in X$, *то она и непрерывна в этой точке.*

□ Из формулы (6) вытекает, что $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$, т.е. функция $y = f(x)$ непрерывна в точке x. ■

Замечание. Обратная теорема не верна. Существуют непрерывные в данной точке функции, которые в этой точке не являются дифференцируемыми.

Пример. $y=|x|$.

Функция непрерывна в точке $x=0$. Покажем, что она не дифференцируема в этой точке.

$$f(x)=|x|=\begin{cases} x, \text{ если } x\ge 0, \\ -x, \text{ если } x<0. \end{cases}$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta x}=1 \text{ при } x\ge 0,$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}-\frac{\Delta x}{\Delta x}=-1 \text{ при } x<0.$$

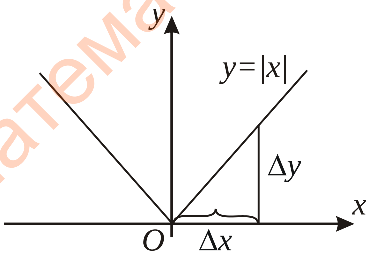


Рис. 3

Следовательно, производной функции $y=|x|$ в точке $x=0$ не существует. Функция $y=|x|$ в точке $x=0$ не является дифференцируемой (рис.3).

Если $x>0$, то говорят о правосторонней производной функции $y=f(x)$ в точке x; если $x<0$, то предел функции в точке x называется левосторонней производной. Обозначения: $f'(x+0)$ – правосторонняя производная, $f'(x-0)$ – левосторонняя производная.

В примере: $f'(0+0)=f'(+0)=1$,
$f'(0-0)=f'(-0)=-1$.

Если функция в точке x дифференцируема, то $f'(x+0)=f'(x-0)=f'(x)$. В примере 1 $f'(+0)\ne f'(-0)$, следовательно, функция $y=|x|$ не дифференцируема в точке $x=0$.

1.5. Правила дифференцирования суммы, произведения и частного

Теорема 3. *Пусть функции* $u(x)$ *и* $v(x)$ *дифференцируемы в области* X. *Тогда сумма, разность, произведение и частное этих функций (частное при условии, что* $v(x) \neq 0$*) также дифференцируемы в этой области, причём имеют место формулы:*

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ (u(x) \pm v(x))' = u'(x) \pm v'(x), \\ 2)\ (u(x) \cdot v(x))' = u'(x) \cdot v(x) + u(x) v'(x), \\ 3)\ \dfrac{u(x)}{v(x)} = \dfrac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) v'(x)}{v^2(x)}. \end{array}\right\} \qquad (*)$$

□ 1. Пусть $y = u(x) \pm v(x)$. Обозначим Δu, Δv, Δy приращения функций $u(x)$, $v(x)$, $y(x)$ в точке $x \in X$, соответствующие приращению аргумента Δx. Тогда:

$$\Delta y = y(x+\Delta x) - y(x) = u(x+\Delta x) \pm v(x+\Delta x) - (u(x) \pm v(x)) =$$
$$= (u(x+\Delta x) - u(x)) \pm (v(x+\Delta x) - v(x)) = \Delta u \pm \Delta v,$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} \pm \frac{\Delta v}{\Delta x}.$$

Устремим Δx к нулю: $\Delta x \to 0$ и найдём предел. Производные в правой части существуют по условию теоремы, поэтому

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta u}{\Delta x} \pm \frac{\Delta v}{\Delta x} \right) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \pm \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x},$$
$$y' = u'(x) \pm v'(x).$$

2. Пусть $y(x) = u(x) \cdot v(x)$.

$$\Delta y = y(x+\Delta x) - y(x) = u(x+\Delta x) \cdot v(x+\Delta x) - u(x) \cdot v(x) =$$
$$= (u(x) + \Delta u) \cdot (v(x) + \Delta v) - u(x) \cdot v(x) =$$
$$= u(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot \Delta v + v(x) \cdot \Delta u + \Delta u \cdot \Delta v - u(x) \cdot v(x) =$$

$$=\Delta u\cdot v(x)+\Delta v\cdot u(x)+\Delta u\cdot\Delta v,$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta u}{\Delta x}\cdot v(x)+\frac{\Delta v}{\Delta x}u(x)+\frac{\Delta u}{\Delta x}\Delta v,$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}v(x)+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}\cdot u(x)+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}\cdot\Delta v,$$

$$y'=u'\cdot v(x)+v'\cdot u(x),$$

так как $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta u}{\Delta v}\Delta v=u'\cdot\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta v=0$.

Следствие. Пусть $u=C$, тогда $(C\cdot v(x))'=Cv'(x)$, где C – константа.

3. Пусть $y(x)=\dfrac{u(x)}{v(x)}$.

$$\Delta y=\frac{u(x+\Delta x)}{v(x+\Delta x)}-\frac{u(x)}{v(x)}=\frac{u(x)+\Delta u}{v(x)+\Delta v}-\frac{u(x)}{v(x)}=$$

$$=\frac{u(x)\cdot v(x)+v(x)\cdot\Delta u-u(x)\cdot v(x)-\Delta v\cdot u(x)}{v(x)\cdot v(x+\Delta x)}=$$

$$=\frac{\Delta u\cdot v(x)-\Delta v\cdot u(x)}{v(x)\cdot v(x+\Delta x)}.$$

Заметим, что $v(x+\Delta x)\neq 0$ при достаточно малых Δx.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\dfrac{\Delta u}{\Delta x}\cdot v(x)-\dfrac{\Delta v}{\Delta x}\cdot u(x)}{v(x)\cdot v(x+\Delta x)},$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta u}{\Delta x}\cdot v(x)-\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta v}{\Delta x}u(x)}{\lim\limits_{\Delta x\to 0}v(x)\cdot v(x+\Delta x)},$$

$$y'=\frac{u'\cdot v(x)-v'\cdot u(x)}{v^2(x)}.\ \blacksquare$$

1.6. Производная обратной функции

Теорема 4. *Пусть функция* $y = f(x)$ *строго монотонна, непрерывна, дифференцируема в окрестности точки* x_0 *и* $f'(x_0) \neq 0$. *Тогда обратная функция* $x = g(y)$ *имеет производную в точке* $y_0 = f(x_0)$, *причём:*

$$g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} \tag{7}$$

или короче:
$$x'_y = \frac{1}{y'_x}.$$

□ Для обратной функции $x = g(y)$ найдём приращение Δx в точке y_0:

$$\Delta x = g(y_0 + \Delta y) - g(y_0), \quad \frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}},$$

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Таким образом, в точке y_0:

$$g'(y_0) = x'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}. \quad \blacksquare$$

Геометрический смысл формулы (7) следующий: $f'(x_0) = tg\,\alpha$ (см. п. 1.2)

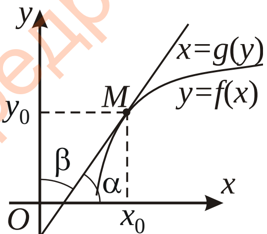


Рис. 4

Из рис. 4 имеем: $tg\,\beta = \frac{1}{tg\,\alpha}$, т.е.

$$g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = tg\,\beta:$$

производная обратной функции $x = g(y)$ равна тангенсу угла наклона β касательной к оси Oy.

1.7. Производная сложной функции

Наша задача – установить правило, которое позволит найти производную сложной функции $y = f(u(x))$, если известны производные составляющих её функций $y = f(u)$, $u = u(x)$.

Теорема 5. *Если:*

1) функция $u = u(x)$ *дифференцируема в точке* x_0: $u'_x = u'(x_0)$;

2) функция $y = f(u)$ *дифференцируема в соответствующей точке* $u_0 = u(x_0)$: $y'_u = f'(u_0)$, *то сложная функция* $y = f(u(x))$ *дифференцируема в точке* x_0 *и её производная вычисляется по формуле:*

$$[f(u(x))]'_x = f'(u_0) \cdot u'(x_0)$$

или короче

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x. \tag{8}$$

□ Придадим аргументу x в точке x_0 произвольное отличное от нуля приращение Δx, ему будет соответствовать приращение Δu функции $u = u(x)$. Приращение Δu, в свою очередь, имеет приращение Δy функции $y = f(u)$. Функция $f(u)$ дифференцируема в точке u_0, поэтому:

$$\Delta y = y'_u \cdot \Delta u + \alpha \cdot \Delta u \text{ [см. п. 1.3 и формулу (6)].}$$

Разделим обе части данного равенства на Δx и найдём предел при $\Delta x \to 0$:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(y'_u \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} + \alpha \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} \right) =$$

$$= y'_u \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \alpha \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = y'_u \cdot u'_x + 0 \cdot u'_x = y'_u \cdot u'_x.$$

Таким образом, $y'_x = y'_u \cdot u'_x$. ■

1.8. Вычисление производных элементарных функций

Алгоритм вычисления производной функции $y = f(x)$, дифференцируемой в области X, реализуется в 4 шага:

1) находим новое значение функции $f(x+\Delta x) = y + \Delta y$ в точке $x + \Delta x \in X$;
2) находим приращение функции $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$;
3) составляем отношение: $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$;
4) вычисляем предел полученного отношения при $\Delta x \to 0$:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y'.$$

Примеры (производные элементарных функций)

1. $y = C$, где C – константа. Согласно алгоритму имеем:

1) $y + \Delta y = C$;
2) $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = C - C = 0$;
3) $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{0}{\Delta x} = 0$;
4) $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} 0 = 0$.

Следовательно, $C' = 0$.

2. Производная показательной функции $y = a^x$:

1) $y + \Delta y = a^{x+\Delta x}$;
2) $\Delta y = a^{x+\Delta x} - a^x = a^x\left(a^{\Delta x} - 1\right)$;
3) $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = a^x \dfrac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$;
4) $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} a^x \cdot \dfrac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = a^x \cdot \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = a^x \cdot \ln a$.

Таким образом, $\left(a^x\right)' = a^x \ln a$.

Частный случай. Пусть $a=e$, тогда $\left(e^x\right)=e^x$, так как $\ln e=1$.

3. Производная логарифмической функции $y=\log_a x$.

Функция $x=a^y$ является обратной для логарифмической функции $y=\log_a x$. Используем формулу (7) п. 1.6. Найдём производную показательной функции $x=a^x$: $x'_y=a^y\cdot\ln a=x\cdot\ln a$.

По формуле (7) $y'_x=\dfrac{1}{x'_y}=\dfrac{1}{x\ln a}$.

Таким образом, $\left(\log_a x\right)'=\dfrac{1}{x\cdot\ln a}$.

Частный случай. Пусть $a=e$, тогда $\left(\ln x\right)'=\dfrac{1}{x}$.

4. Производная степенной функции $y=x^a$, где $a\in R$.

Докажем, что $\left(x^a\right)'=ax^{a-1}$. Рассмотрим сначала случай $x>0$. Прологарифмируем по основанию e обе части $y=x^a$:

$$\underbrace{\ln y}_{\text{сложная функция}}=a\cdot\ln x.$$

Найдём производную: $\left(\ln y\right)'=\left(a\cdot\ln x\right)'$, $\dfrac{y'}{y}=\dfrac{a}{x}$, отсюда:

$$y'=y\frac{a}{x}=x^a\frac{a}{x}=ax^{a-1}.$$

Заметим, что

$$\left(\ln y\right)'=\frac{y'}{y}. \qquad (9)$$

Формула (9) называется логарифмической производной функции $y=f\left(x\right)$.

Примеры:

1) $\left(x^2\right)' = 2x$;

2) $\left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, $\quad \left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$;

3) $\left(\sqrt[3]{x}\right)' = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$;

4) $\left(\sqrt[n]{x}\right)' = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$.

5. Производные тригонометрических функций:

а) $y = \sin x$; б) $y = \cos x$; в) $y = \operatorname{tg} x$; г) $y = \operatorname{ctg} x$.

а) $y = \sin x$:

1) $y + \Delta y = \sin(x + \Delta x)$;

2) $\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x = 2\sin\frac{\Delta x}{2}\cdot\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)$;

3) $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2\sin\frac{\Delta x}{2}\cdot\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} = \frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\cdot\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)$;

4) $y' = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\cdot\lim\limits_{\Delta x\to 0}\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = \cos x$.

Таким образом, $(\sin x)' = \cos x$.

б) аналогично: $(\cos x)' = -\sin x$ – доказать самостоятельно.

в) $y = \operatorname{tg} x$. Докажем, что

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x};$$

$(\mathrm{tg}\,x)' = \left(\dfrac{\sin x}{\cos x}\right)' = |$применяем правило дифференцирования дроби, см. п.1.5$| =$

$$= \frac{(\sin x)' \cdot \cos x - (\cos x)' \sin x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x};$$

г) доказать самостоятельно, что $(\mathrm{ctg}\,x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$.

6. Производные обратных тригонометрических функций.

1. $y = \arcsin x$, $-1 \le x \le 1$, $-\dfrac{\pi}{2} \le y \le \dfrac{\pi}{2}$.

Найдём производную обратной функции $x = \sin y$, $x'_y = \cos y$. По формуле (7)

$$y'_x = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Таким образом,

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

2. $y = \arccos x$. Доказать самостоятельно:

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

3. $y = \mathrm{arctg}\,x$, $x \in R$. Данная функция является обратной для функции $x = \mathrm{tg}\,y$ $x'_y = \dfrac{1}{\cos^2 y}$. По формуле (7) имеем:

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \cos^2 y = \frac{1}{1 + \mathrm{tg}^2 y} = \frac{1}{1 + x^2}.$$

Таким образом, $(\mathrm{arctg}\,x)' = \dfrac{1}{1 + x^2}$.

4. $y = \operatorname{arcctg} x$. Доказать, что

$$\left(\operatorname{arcctg} x\right)' = -\frac{1}{1+x^2}.$$

7. Производные гиперболических функций.

По определению: 1) $\operatorname{sh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$; 2) $\operatorname{ch} x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$; 3) $\operatorname{th} x = \dfrac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$; 4) $\operatorname{cth} x = \dfrac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}$.

1) $\left(\operatorname{sh} x\right)' = \operatorname{ch} x$; 2) $\left(\operatorname{ch} x\right)' = \operatorname{sh} x$;

3) $\left(\operatorname{th} x\right)' = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$; 4) $\left(\operatorname{cth} x\right)' = -\dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$.

Доказательства очевидны. Например:

$$\left(\operatorname{th} x\right)' = \left(\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}\right)' = \frac{\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{ch}^2 x} = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}.$$

Вывод. Производные элементарных функций являются элементарными функциями. Следовательно, операция дифференцирования не выводит нас из класса элементарных функций.

1.9. Производная степенно-показательных выражений

Степенно-показательным выражением называется функция вида: $y = u(x)^{v(x)}$, где $u(x) > 0$, $u(x) \neq 1$.

Задача. Найти y', если $u(x)$ и $v(x)$ – дифференцируемые функции.

Решение. Прологарифмируем по основанию e обе части равенства $y = u(x)^{v(x)}$:

$$\ln y = v(x) \cdot \ln u(x).$$

Используем формулу (9): $\dfrac{y'}{y} = v'(x) \cdot \ln u(x) + v(x)\dfrac{u'(x)}{u(x)}$,

$$y' = y\left(v'(x)\cdot\ln u(x) + v(x)\frac{u'(x)}{u(x)}\right) = u^v\left(v'\cdot\ln u + v\frac{u'}{u}\right).$$

Пример. $y = (\sin x)^{x^2}$. Найти y'.

Решение. $\ln y = x^2 \ln\sin x$, $\dfrac{y'}{y} = 2x\ln\sin x + x^2\dfrac{\cos x}{\sin x}$,

$$y' = (\sin x)^{x^2}\cdot\left(2x\ln\sin x + x^2\cdot\operatorname{ctg} x\right).$$

1.10. Сводка формул

№	y	y'	№	y	y'
1	C	0	6	$\cos x$	$-\sin x$
2.1	x^a	$a\cdot x^{a-1}$	7	$\operatorname{tg} x$	$\dfrac{1}{\cos^2 x}$
2.2	x	1	8	$\operatorname{ctg} x$	$-\dfrac{1}{\sin^2 x}$
2.3	$\dfrac{1}{x}$	$-\dfrac{1}{x^2}$	9	$\arcsin x$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
2.4	$\sqrt{x}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	10	$\arccos x$	$-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
2.5	$\sqrt[n]{x}$	$\dfrac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$	11	$\operatorname{arctg} x$	$\dfrac{1}{1+x^2}$
3.1	a^x	$a^x\ln a$	12	$\operatorname{arcctg} x$	$-\dfrac{1}{1+x^2}$
3.2	e^x	e^x	13	$\operatorname{sh} x$	$\operatorname{ch} x$
4.1	$\log_a x$	$\dfrac{1}{x\cdot\ln x}$	14	$\operatorname{ch} x$	$\operatorname{sh} x$
4.2	$\ln x$	$\dfrac{1}{x}$	15	$\operatorname{th} x$	$\dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$
5	$\sin x$	$\cos x$	16	$\operatorname{cth} x$	$-\dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$

Таблицу производных 1.10 выучить наизусть.

1.11. Уравнение касательной и уравнение нормали к кривой

Задача 1. Написать уравнение касательной (MN) к кривой (ℓ) в точке $M_0(x_0;y_0)\in\ell$, предполагая, что касательная не параллельна оси ординат (рис. 5).

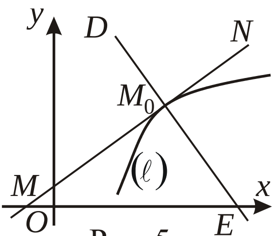


Рис. 5

Определение 4. *Кривая ℓ называется гладкой, если к каждой её точке можно провести касательную. Очевидно, что непрерывно дифференцируемая в области X функция $y=f(x)$ в $\forall x\in X$ имеет касательную.*

Уравнение прямой (MN), проходящей через точку $M_0(x_0;y_0)$ имеет вид:

$$y-y_0=k(x-x_0), \text{ где } k=f'(x_0) \text{ (см. п. 1.2).}$$

Следовательно, уравнение касательной (MN):

$$y-y_0=f'(x_0)(x-x_0). \tag{10}$$

Задача 2. Написать уравнение нормали (DE), проведённой к гладкой кривой ℓ в точке M_0.

Решение. Нормалью к кривой (ℓ) называется прямая (DE), проходящая через точку M_0 и перпендикулярная к касательной (MN) в этой точке (рис. 5).

Известно, что произведение угловых коэффициентов двух перпендикулярных прямых равно (-1).

Угловой коэффициент касательной $k=f'(x_0)$, тогда угловой коэффициент нормали (DE) $k_1=\dfrac{-1}{f'(x_0)}$. Следовательно, уравнение нормали (DE) в точке $M_0 \in (\ell)$ имеет вид:

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)} \cdot (x - x_0). \qquad (11)$$

Пример. Написать уравнения касательной и нормали к кривой $y = x^3 + 1$ в точке $M(1;2)$.

Решение. $y' = 3x^2$; $y'|_{x=1} = 3$. Следовательно, угловой коэффициент касательной $k = 3$ и угловой коэффициент нормали $k_1 = -\frac{1}{3}$. По формуле (10) найдём уравнение касательной:

$$y - 2 = 3(x - 1).$$

По формуле (11) найдём уравнение нормали:

$$y - 2 = -\frac{1}{3}(x - 1). \ \blacktriangleright$$

1.12. Определение дифференциала функции

Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема в области X. Тогда приращение Δy этой функции в любой точке $x \in X$ можно записать в виде (6): $\Delta y = A \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x$. Правая часть формулы (6) состоит из двух слагаемых: *первое* из них $A \cdot \Delta x$ при $A \neq 0$ есть *линейная* относительно Δx функция и при $\Delta x \to 0$ $A \cdot \Delta x$ является бесконечно малой того же порядка, что и Δx; *второе* слагаемое $\alpha \cdot \Delta x$ при $\Delta x \to 0$ есть бесконечно малая функция более высокого порядка по сравнению с Δx. При $A \neq 0$ слагаемое $A \cdot \Delta x$ называется *главной* частью приращения дифференцируемой функции.

Определение 5. *Дифференциалом функции* $y = f(x)$ *в данной точке* $x \in X$ *называется произведение* $A \cdot \Delta x$.

Обозначение дифференциала: dy или $df(x)$. Итак, по определению $dy = A \cdot \Delta x$. Если в формуле (6) $A = 0$, то dy полагают равным нулю.

В п. 1.3 доказано, что $A = f'(x)$, поэтому дифференциал $dy = f'(x) \cdot \Delta x$. Для независимой переменной x введём обозначение: $\Delta x = dx$, тогда:

$$dy = f'(x) \cdot dx. \tag{12}$$

1.13. Геометрический смысл дифференциала

Пусть точке M на кривой $y = f(x)$ соответствует значение аргумента x, точке Q на той же кривой – значение аргумента $x + \Delta x$. (MN) – касательная в точке M к кривой (рис. 6) $RQ = \Delta y$; из ΔMNR:

$$RN = \Delta x \cdot \mathrm{tg}\alpha = f'(x) \cdot \Delta x = dy \text{ [см. формулу (12)].}$$

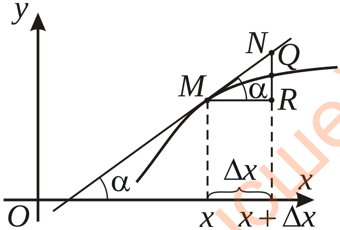


Рис. 6

Таким образом, дифференциал с геометрической точки зрения равен приращению ординаты касательной (MN), на рис. 6 – RN. При малых Δx дифференциал dy является хорошим приближением для приращения Δy, поэтому во многих практических задачах вместо Δy находят более простое dy:

$$\Delta y \approx dy. \tag{13}$$

Абсолютная погрешность вычисляется по формуле:

$$\gamma = |\Delta y - dy|.$$

Относительная погрешность вычисляется по формуле:

$$\delta = \left|\frac{\Delta y - dy}{\Delta y}\right|.$$

Пример. Найти Δy и dy функции $y = x^3$ в точке $x = 2$, если $\Delta x = 0{,}1$.

Решение. $dy = \left(x^3\right)' \cdot dx = 3x^2 \cdot dx$, $dy\big|_{x=2} = 3 \cdot 2^2 \cdot 0{,}1 = 1{,}2$.

$$\Delta y = (x + \Delta x)^3 - x^3 = x^3 + 3x^2 \cdot \Delta x + 3x \cdot \Delta x^2 + \Delta x^3 - x^3 =$$
$$= \underbrace{3x^2 \cdot \Delta x}_{dy} + \underbrace{\left(3x \cdot \Delta x + \Delta x^2\right)}_{\alpha} \cdot \Delta x.$$

$$\Delta y = 3 \cdot 2^2 \cdot 0{,}1 + \left(3 \cdot 2 \cdot 0{,}1 + 0{,}1^2\right) \cdot 0{,}1 = 1{,}2 + (0{,}6 + 0{,}01) \cdot 0{,}1 =$$
$$= 1{,}2 + 0{,}061 = 1{,}261.$$

По приближённой формуле (13) $\Delta y \approx dy = 1{,}2$.

Ошибка (абсолютная погрешность) $\gamma = 0{,}061$.

Относительная погрешность $\delta = \left|\dfrac{\Delta y - dy}{\Delta y}\right| = \dfrac{0{,}061}{1{,}261} \approx 0{,}05$.

Из соотношения (13) можно приближённо найти $f(x + \Delta x)$: $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) \approx dy$,

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + dy. \qquad (14)$$

Приближённые формулы:

1) $\sin(x + \Delta x) \approx \sin x + \cos x \cdot \Delta x$; $\sin \Delta x \approx \Delta x$ при $x = 0$;

2) $e^{\Delta x} \approx 1 + \Delta x$, $x = 0$;

3) $\ln(1 + \Delta x) \approx \Delta x$, $x = 0$;

4) $(1 + \Delta x)^{\alpha} \approx 1 + \alpha \cdot \Delta x$, $x = 0$.

1.14. Основные формулы дифференциалов

1. $dC = 0$;
2. $dx^{\alpha} = \alpha x^{\alpha - 1} \cdot dx$;
3. $da^x = a^x \ln a \cdot dx$;
4. $de^x = e^x dx$;
5. $d \log_a x = \dfrac{dx}{\frac{1}{x} \ln a}$;
6. $d \ln x = \dfrac{dx}{x}$;
7. $d \sin x = \cos x \cdot dx$;
8. $d \cos x = -\sin x \cdot dx$;

9. $d\,\mathrm{tg}\,x=\dfrac{dx}{\cos^2 x}$; 10. $d\,\mathrm{ctg}\,x=-\dfrac{dx}{\sin^2 x}$;

11. $d\arcsin x=\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$; 12. $d\arccos x=-\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$;

13. $d\,\mathrm{arctg}\,x=\dfrac{dx}{1+x^2}$ и т.д.

Из формулы (*) п. 1.5 и формулы (12) вытекают следующие правила для вычисления дифференциалов суммы, разности, произведения и частного:

$$d(u\pm v)=du\pm dv,$$
$$d(u\cdot v)=v\cdot du+u\cdot dv, \qquad (**)$$
$$d\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{v\cdot du-u\cdot dv}{v^2}.$$

1.15. Инвариантность формы дифференциала

Для функции $y=f(x)$, дифференцируемой в области X, была установлена формула (12): $dy=f'(x)dx$, где x – независимая переменная. Будет ли справедлива формула (12), если аргумент x сам является дифференцируемой функцией новой независимой переменной t: $y=f(x)$, $x=x(t)$?

Докажем, что формула (12) справедлива и в этом случае. Функция y является сложной функцией аргумента t, а x – промежуточной функцией:

$$y'_t=y'_x\cdot x'_t,\quad dy=y'_t\cdot dt=y'_x\cdot x'_t\cdot dt.$$

Так как $x'_t\cdot dt=dx$, то $dy=y'_x\cdot dx$ – (12), т.е. получили прежнюю формулу (12) дифференциала. Указанное свойство дифференциала функции называют *инвариантностью его формы*.

Из формулы (12) получаем, что $y'_x = \dfrac{dy}{dx}$, т.е. производная функции $y = f(x)$ как для независимой, так и для зависимой переменной x равна отношению дифференциала этой функции dy к дифференциалу dx.

Заметим, что правило дифференцирования сложной функции [см. формулу (8)] принимает вид:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}.$$

1.16. Методические указания к практическим занятиям

Пример 1. Найти производную функции $y = x^3$:

1) в произвольной точке x; 2) при $x = 2$.

Решить самостоятельно (см. пример из п. 1.2).

Пример 2. Найти производную функции $y = \sqrt{x}$ в любой точке $x > 0$.

Решение. Вычисление производной функции $y = f(x)$ производится в 4 шага (п. 1.8):

1) $y + \Delta y = f(x + \Delta x) = \sqrt{x + \Delta x}$;

2) $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = \sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}$;

3) $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x}$;

4) $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x} =$|числитель и знаменатель домножим на $\left(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}\right)$| $=$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left(\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}\right) \cdot \left(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}\right)}{\Delta x \cdot \left(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}\right)} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x + \Delta x - x}{\Delta x \cdot \left(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}\right)} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x \cdot \left(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}\right)} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Итак, $\left(\sqrt{x}\right)'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

Пользуясь формулами (*) п.1.5 и сводной формулой п. 1.10, найти производные следующих функций:

1) $y=x^2+3x-5$; 2) $y=\sqrt{x}+\dfrac{3}{\sqrt[3]{x}}+\dfrac{4}{x^2}-\dfrac{1}{x^3}$;

3) $y=x^3\cdot\sin x$; 4) $y=\dfrac{5^x}{\operatorname{ch}x}$, 5) $\varphi(t)=\dfrac{\operatorname{tg}t}{1+\log_2 t}$.

Решение

1) $y'=\left(x^2+3x-5\right)'=\left(x^2\right)'+(3x)'-(5)'=2x+3-0=2x+3$;

2) $y'=\left(\sqrt{x}+\dfrac{3}{\sqrt[3]{x}}+\dfrac{4}{x^2}-\dfrac{1}{x^3}\right)'=\left(x^{\frac{1}{2}}+3\cdot x^{-\frac{1}{3}}+4\cdot x^{-2}-x^{-3}\right)'=$

$=\left(x^{\frac{1}{2}}\right)'+3\left(x^{-\frac{1}{3}}\right)'+4\left(x^{-2}\right)'-\left(x^{-3}\right)'=$

$=\dfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}+3\cdot\left(-\dfrac{1}{3}\right)x^{-\frac{4}{3}}+4\cdot(-2)\cdot x^{-3}-(-3)\cdot x^{-4}=$

$=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}-\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^4}}-\dfrac{8}{x^3}+\dfrac{3}{x^4}$;

3) $y'=\left(x^3\cdot\sin x\right)'=$ |производная произведения функций| $=$

$=\left(x^3\right)'\cdot\sin x+x^3\cdot(\sin x)'=3x^2\cdot\sin x+x^3\cdot\cos x$;

4) $y'=\left(\dfrac{5^x}{\operatorname{ch}x}\right)'=$ |производная частного двух функций| $=$

$=\dfrac{\left(5^x\right)'\cdot(\operatorname{ch}x)-5^x\cdot(\operatorname{ch}x)'}{(\operatorname{ch}x)^2}=\dfrac{5^x\ln 5\cdot\operatorname{ch}x-(\operatorname{sh}x)\cdot 5^x}{\operatorname{ch}^2x}$;

5) $\varphi'(t)=\left(\dfrac{\operatorname{tg}t}{1+\log_2 t}\right)'=\dfrac{(\operatorname{tg}t)'\cdot(1+\log_2 t)-(1+\log_2 t)'\cdot\operatorname{tg}t}{(1+\log_2 t)^2}=$

$$=\frac{\frac{1}{\cos^2 t}\left(1+\log_2 t\right)-\frac{1}{t\ln 2}\cdot \mathrm{tg}\,t}{\left(1+\log_2 t\right)^2}=$$

$$=\frac{1}{\cos^2 t\left(1+\log_2 t\right)}-\frac{\mathrm{tg}\,t}{t\ln 2\left(1+\log_2 t\right)^2}.$$

Задание 1. *Самостоятельно* найти производные следующих функций:

1) $y=x^4-4x^2+\dfrac{2}{\sin x}+\dfrac{1}{x}$; 2) $y=x-2\sqrt{x}+3$;

3) $y=\left(\log_5 x\right)\cdot x^2$; 4) $f\left(x\right)=\dfrac{3^x}{e^x}$; 5) $S=t^2+\dfrac{1}{t^2}-4$;

6) $U=\dfrac{x^2-3}{x^2+3}$; 7) $Z=\left(t^2-2t\right)\cdot \mathrm{tg}\,t$, вычислить $Z'(0)$;

8) $y=\dfrac{\sqrt[6]{x^5}}{8}$, вычислить $y'(1)$.

Ответы: 1) $y'=4x^3-8x-\dfrac{2\cos x}{\sin^2 x}-\dfrac{1}{x^2}$; 2) $y'=1-\dfrac{1}{\sqrt{x}}$;

3) $y'=\dfrac{1}{x\ln 5}+2x\cdot\log_5 x$; 4) $f'(x)=\left(\dfrac{3}{e}\right)^x\cdot\left(\ln 3-1\right)$;

5) $\dot S=2t-\dfrac{2}{t^3}$; 6) $U'=\dfrac{12x}{\left(x^2+3\right)^2}$; 7) $Z'(0)=0$; 8) $y'(1)=\dfrac{5}{48}$.

Задание 2. Найти производные сложных функций, используя формулу (8):

1) $y=\left(3x^2-4x+2\right)^4$; 2) $y=\sin 8x$; 3) $y=\cos^3 x$;

4) $y=\sqrt{x^3+4}$; 5) $y=\sin^2 x+\sin x^2$, вычислить $y'(0)$;

6) $y=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-x+1}}$, вычислить $y'(1)$.

Решение:

1) $y'=\left(\left(3x^2-4x+2\right)^4\right)'_x=$ |положим $u=3x^2-4x+2$, тогда $y=u^4$. Применяем формулу (8) дифференцирования сложной функции|=

$$=y'_u\cdot u'_x=\left(u^4\right)'_u\cdot\left(3x^2-4x+2\right)'_x=4u^3\cdot(6x-4)=$$
$$=4\left(3x^2-4x+2\right)^3\cdot(6x-4);$$

2) $y'_x=(\sin 8x)'_x=$|положим $u=8x$, тогда $y=\sin u$|=

$$=y'_u\cdot u'_x=(\sin u)'_u\cdot(8x)'_x=\cos u\cdot 8=8\cos 8x;$$

3) $y'=\left(\cos^3 x\right)'=$|положим $u=\cos x$, тогда $y=u^3$|=

$$=y'_u\cdot u'_x=3u^2\cdot(-\sin x)=3\cos^2 x\cdot(-\sin x)=-3\sin x\cdot\cos^2 x;$$

4) $y'=\left(\sqrt{x^3+4}\right)'_x=\left|u=x^3+4;\ y=\sqrt{u}\right|=y'_u\cdot u'_x=$

$$=\frac{1}{2\sqrt{u}}\cdot 3x^2=\frac{3x^2}{2\sqrt{x^3+4}}.$$

После определённой тренировки промежуточный аргумент u можно не записывать (держать его «в уме»), таким способом в дальнейшем следует научиться вычислять производные сложных функций. Решим те же и оставшиеся примеры, держа «в уме» функцию u:

1) $y'=\left(\underbrace{\left(3x^2-4x+2\right)^4}_{u}\right)'=\underbrace{4\left(3x^2-4x+2\right)^3}_{\substack{\textit{производная}\\ \textit{сложной}\\ \textit{функции}}}\cdot\underbrace{(6x-4)}_{\substack{\textit{производная}\\ \textit{основания}\\ \textit{функции}}};$

2) $y'=\left(\sin\underbrace{8x}_{u}\right)'=\cos 8x\cdot 8=8\cos 8x$;

3) $y'=\left(\cos^3 x\right)'=\underbrace{3\cos^2 x}_{\substack{\text{производная}\\ \text{степени}}}\cdot\underbrace{(-\sin x)}_{\substack{\text{производная}\\ \text{основания}}}=-3\sin x\cdot\cos^2 x$;

4) $y'=\left(\sqrt{x^3+4}\right)'=\left(\left(\underbrace{x^3+4}_{u}\right)^{\frac{1}{2}}\right)'=\underbrace{\frac{1}{2}\left(x^3+4\right)^{-\frac{1}{2}}}_{\substack{\text{производная}\\ \text{степени}}}\cdot\underbrace{3x^2}_{\substack{\text{призводная}\\ \text{основания}}}=$

$=\frac{3x^2}{2\sqrt{x^2+4}}$ |производная от корня $\frac{1}{2\sqrt{x^3+4}}$ умножается на производную подкоренного выражения $3x^2$|;

5) $y'=\left(\sin^2 x+\sin x^2\right)'=\left(\sin^2 x\right)'+\left(\sin x^2\right)'=$

$=2\sin x\cdot\cos x+\cos x^2\cdot(2x)=\sin 2x+2x\cos x^2$;

$y'(0)=\sin 0+2\cdot 0\cdot\cos 0=0$;

6) $y'=\left(\frac{1}{\sqrt{x^2-x+1}}\right)'=\left(\left(x^2-x+1\right)^{-\frac{1}{2}}\right)'=$

$=-\frac{1}{2}\left(x^2-x+1\right)^{-\frac{3}{2}}\cdot\left(x^2-x+1\right)'=-\frac{1}{2}\left(x^2-x+1\right)^{-\frac{3}{2}}\cdot(2x-1)=$

$=-\frac{2x-1}{2\sqrt{\left(x^2-x+1\right)^3}}$; $y'(1)=-\frac{1}{2}$.

Задание 3. Найти производные сложных функций:

1) $y=\left(4x^3+7x^2-3\right)^5$; 2) $y=(a+x)^{10}$, a – число;

3) $y=\left(2-4x+3\sqrt{x}-\frac{1}{x}\right)^7$; 4) $y=\sqrt[3]{x^2-5x+6}$;

5) $S=\left(\dfrac{t+1}{3t-1}\right)^9$, вычислить $S'(1)$;

6) $y=\cos\dfrac{x}{a}+\cos\dfrac{a}{x}$, a – число, вычислить $y'(a)$.

Ответы. 1) $y'=5\left(4x^3+7x^2-3\right)^4\cdot\left(12x^2+14x\right)$;

2) $y'=10(a+x)^9$;

3) $y'=7\left(2-4x+3\sqrt{x}-\dfrac{1}{x}\right)^6\cdot\left(-4+\dfrac{3}{2\sqrt{x}}+\dfrac{1}{x^2}\right)$;

4) $y'=\dfrac{2x-5}{3\left(\sqrt[3]{x^2-5x+6}\right)^2}$ (см. пример 3 из п. 1.8);

5) $S'(t)=-\left(\dfrac{t+1}{3t-1}\right)\cdot\dfrac{36}{(3t-1)^2}$, $S'(1)=-9$;

6) $y'=-\dfrac{1}{a}\sin\dfrac{x}{a}+\dfrac{a}{x^2}\sin\dfrac{a}{x}$, $y'(a)=0$.

Задание 4. Найти производные функций:

1) $y=\sin\sqrt{x}$; 2) $y=\operatorname{tg}\dfrac{x-1}{x^2+1}$; 3) $y=\cos\sqrt{\dfrac{2}{1+x^2}}$;

4) $y=\sin^6 4x$; 5) $y=\sqrt[3]{\sin^3 x+3\cos^2 5x}$.

Решение:

1) $y'=\left(\sin\sqrt{x}\right)'=\underbrace{\cos\sqrt{x}}_{\text{производная синуса}}\cdot\underbrace{\dfrac{1}{2\sqrt{x}}}_{\text{производная корня}}=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\cos\sqrt{x}$;

$$2)\ \ y'=\left(\operatorname{tg}\frac{x-1}{x^2+1}\right)'=\underbrace{\frac{1}{\cos^2\dfrac{x-1}{x^2+1}}}_{\substack{\text{производная}\\ \text{тангенса}}}\cdot\underbrace{\left(\frac{x-1}{x^2+1}\right)'}_{\substack{\text{производная}\\ \text{дроби}}}=$$

$$=\frac{1}{\cos^2\dfrac{x-1}{x^2+1}}\cdot\frac{1\cdot\left(x^2+1\right)-2x\cdot(x-1)}{\left(x^2+1\right)^2}=$$

$$=\frac{1}{\cos^2\dfrac{x-1}{x^2+1}}\cdot\frac{-x^2+2x+1}{\left(x^2+1\right)^2};$$

$$3)\ \ y'=\left(\cos\sqrt{\frac{2}{1+x^2}}\right)'=\underbrace{-\sin\sqrt{\frac{2}{1+x^2}}}_{\substack{\text{производная}\\ \text{косинуса}}}\cdot\underbrace{\frac{1}{2\sqrt{\dfrac{2}{1+x^2}}}}_{\substack{\text{производная}\\ \text{корня}}}\cdot\underbrace{\left(\frac{-2x\cdot 2}{\left(1+x^2\right)^2}\right)}_{\substack{\text{производная}\\ \text{дроби}}}=$$

$$=\frac{\sqrt{2}x\cdot\sin\sqrt{\dfrac{2}{1+x^2}}}{\left(1+x^2\right)^{\frac{3}{2}}};$$

$$4)\ \ y'=\left(\sin^6 4x\right)'=6\sin^5 4x\cdot(\sin 4x)'=6\sin^5 4x\cdot\cos 4x\cdot(4x)'=$$

$$=6\sin^5 4x\cdot\cos 4x\cdot 4=24\sin^5 4x\cdot\cos 4x;$$

$$5)\ \ y'=\left(\sqrt[3]{\sin^3 x+3\cos^2 5x}\right)'=$$

$$=\underbrace{\frac{1}{3\sqrt[3]{\left(\sin^2 x+3\cos^2 5x\right)^2}}}_{\text{производная кубического корня}}\cdot\left(\sin^3 x+3\cos^2 5x\right)'=$$

$$=\frac{1}{3\sqrt[3]{\left(\sin^2 x+3\cos^2 5x\right)^2}}\cdot\left(3\sin^2 x\cdot(\sin x)'+6\cos 5x\cdot(\cos 5x)'\right)=$$

$$=\frac{3\left(\sin^2 x\cdot\cos x+2\cos 5x\cdot(-\sin 5x)\cdot(5x)'\right)}{3\sqrt[3]{\left(\sin^3 x+3\cos^2 5x\right)^2}}=$$

$$=\frac{\sin^2 x\cdot\cos x-5\sin 10x}{\sqrt[3]{\left(\sin^3 x+3\cos^2 5x\right)^2}}.$$

Задание 5. Найти производные:

1) $y=\cos\sqrt{\frac{1}{1+x}}$; 2) $y=\sqrt{\cos^2 x}$; 3) $S=\sqrt{t-\sqrt{t}}$;

4) $f(x)=\frac{1}{4}\mathrm{tg}4x-\mathrm{tg}4x=4$, вычислить $f\left(\frac{\pi}{4}\right)$.

Ответы: 1) $y'=\frac{\sin\sqrt{\frac{1}{1+x}}}{2\sqrt{(1+x)^3}}$; 2) $y'=-\frac{\sin 2x}{2\sqrt{\cos^2 x}}$;

3) $S'=\frac{2\sqrt{t}-1}{4\sqrt{t\left(t-\sqrt{t}\right)}}$;

4) $f'(x)=\frac{\mathrm{tg}^3 x}{\cos^2 x}-\frac{4}{\cos^2 4x}$; $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=-2$.

Задание 6. Найти производные:

1) $y=\arcsin 7x$; 2) $y=\arcsin\sqrt{x-1}$; 3) $y=\arccos 5x$;

4) $y=\arccos^5 x$; 5) $y=\mathrm{arctg}\,2x$; 6) $y=\mathrm{arctg}\sqrt[3]{x}$.

Решение. Используются формулы 9 – 12 из сводки формул п. 1.10.

1) $y' = (\arcsin 7x)' = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{1-(7x)^2}}}_{\substack{\textit{производная}\\ \textit{арксинуса}}} \cdot (7x)' = \frac{7}{\sqrt{1-49x^2}}$;

2) $y' = \left(\arcsin \sqrt{x-1}\right)' = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\sqrt{x-1}\right)^2}} \cdot \left(\sqrt{x-1}\right)' =$

$= \frac{1}{\sqrt{1-(x-1)}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x-1}} = \frac{1}{2\sqrt{(2-x)(x-1)}}$;

3) $y' = (\arccos 5x)' = -\frac{5}{\sqrt{1-25x^2}}$;

4) $y' = \left(\arccos^5 x\right)' = 5\arccos^4 x \cdot (\arccos x)' = -\frac{5\arccos^4 x}{\sqrt{1-x^2}}$;

5) $y' = (\operatorname{arctg} 2x)' = \underbrace{\frac{1}{1+(2x)^2}}_{\substack{\textit{производная}\\ \textit{арктангенса}}} \cdot (2x)' = \frac{2}{1+4x^2}$;

6) $y' = \left(\operatorname{arctg} \sqrt[3]{x}\right) = \underbrace{\frac{1}{1+\left(\sqrt[3]{x}\right)^2}}_{\substack{\textit{производная}\\ \textit{арктангенса}}} \cdot \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} = -\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}\left(1+\sqrt[3]{x^2}\right)}$.

Задание 7.

1) $y = \arcsin \sqrt{x}$; 2) $y = \arccos^3 4x$; 3) $y = \operatorname{arctg} \sqrt[4]{x}$;

4) $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{1}{\mathrm{x}}$; 5) $y = \operatorname{arcctg}\left(1-x^2\right)$, вычислить $y'(1)$.

Ответы: 1) $y' = \frac{1}{2\sqrt{x} \cdot \sqrt{1-x}}$; 2) $y' = -\frac{12\arccos^2 4x}{\sqrt{1-16x^2}}$;

3) $y' = \frac{1}{4\sqrt[4]{x^3} \cdot \left(1+\sqrt{x}\right)}$; 4) $y' = -\frac{1}{1+x^2}$; 5) $y'(1) = 2$.

Задание 8.

1) $y=2^{\sqrt{\sin x}}$; 2) $y=e^{\sin^3 4x}$; 3) $y=\log_5 \operatorname{tg}\sqrt{x}$; 4) $y=\ln(\ln x)$;
5) $y=\sin^3 \ln 5x$; 6) $y=x^2\cdot\log_4(x+1)$, вычислить $y'(3)$.

Решение:

1) $$y'=\left(2^{\sqrt{\sin x}}\right)'=\underbrace{2^{\sqrt{\sin x}}\cdot\ln 2}_{\substack{\text{производная}\\\text{показательной}\\\text{функции}}}\cdot\left(\sqrt{\sin x}\right)'=$$

$$=2^{\sqrt{\sin x}}\cdot\ln 2\cdot\underbrace{\frac{1}{2\sqrt{x}}}_{\substack{\text{производная}\\\text{квадратного}\\\text{корня}}}\cdot(\sin x)'=2^{\sqrt{\sin x}}\cdot\ln 2\cdot\frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}};$$

2) $$y'=\left(e^{\sin^3 4x}\right)'=\underbrace{e^{\sin^3 4x}}_{\substack{\text{призводная}\\\text{показательной}\\\text{функции}}}\cdot\left(\sin^3 4x\right)'=$$

$$=e^{\sin^3 4x}\cdot 3\sin^2 4x\cos 4x\cdot 4=12e^{\sin^3 4x}\cdot\sin^2 4x\cos 4x;$$

3) $$y'=\left(\log_5 \operatorname{tg}\sqrt{x}\right)'=\underbrace{\frac{1}{\operatorname{tg}\sqrt{x}\cdot\ln 5}}_{\substack{\text{производная}\\\text{логарифмической}\\\text{функции}}}\cdot\left(\operatorname{tg}\sqrt{x}\right)'=$$

$$=\frac{1}{\operatorname{tg}\sqrt{x}\cdot\ln 5\cdot\cos^2\sqrt{x}\cdot 2\sqrt{x}}=\frac{1}{\dfrac{\sin\sqrt{x}}{\cos\sqrt{x}}\cdot\ln 5\cdot\cos^2\sqrt{x}\cdot 2\sqrt{x}}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{x}\cdot\sin 2\sqrt{x}\cdot\ln 5};$$

4) $$y'=(\ln(\ln x))'=\frac{1}{\ln x}\cdot(\ln x)'=\frac{1}{x\ln x};$$

5) $$y'=\left(\sin^3 \ln 5x\right)'=3\sin^2 \ln 5x\cdot\cos\ln 5x\cdot(\ln 5x)'=$$

$$=3\sin^2\ln 5x\cdot\cos\ln 5x\cdot\frac{1}{5x}\cdot(5x)'=\frac{3\sin^2\ln 5x\cdot\cos\ln 5x}{x};$$

6) $y'=\underbrace{\left(x^2\cdot\log_4(x+1)\right)'}_{\text{производная от призведения}}=2x\log_4(x+1)+\dfrac{x^2}{(x+1)\cdot\ln 4}$,

$$y'(3)=2\cdot 3\log_4(3+1)+\frac{3^2}{(3+1)\ln 4}=6+\frac{9}{4\ln 4}.$$

Задание 9. Найти производные:

1) $y=2^{\sqrt{\operatorname{tg}4x}}$; 2) $y=e^{arctgshx}$; 3) $y=\log_3\left(x^3-2x\right)$;

4) $y=\operatorname{tg}^5\ln(4x-3)$; 5) $y=\dfrac{e^{4x}}{\lg(7x)}$.

Ответы: 1) $y'=\dfrac{2\ln 2\cdot 2^{\sqrt{\operatorname{tg}4x}}}{\sqrt{\operatorname{tg}4x}\cdot\cos^2 4x}$; 2) $y'=\dfrac{e^{\mathrm{arctgsh}x}}{\operatorname{ch}x}$;

3) $y'=\dfrac{3x^2-2}{\left(x^3-2x\right)\cdot\ln 3}$; 4) $y'=\dfrac{20tg^4\ln(4x-3)}{(4x-3)\cos^2\ln(4x-3)}$;

5) $y'=\dfrac{e^{4x}(4x\ln 10\cdot\lg(7x)-1)}{x\ln 10\cdot\ln^2(7x)}$.

Задание 10. Найти дифференциалы функций:

1) $y=x^4-4^x$; 2) $y=\ln^2(1+x)+\arcsin 2x$;

3) $f(x)=\operatorname{arctg}(3x-2)$; 4) $y=\operatorname{sh}^3 x$.

Решение. Используем формулу (12) из п. 1.12 дифференциала функций:

1) $dy=d\left(x^4-4^x\right)=\left(x^4-4^x\right)'dx=\left(4x^3-4^x\cdot\ln 4\right)dx$;

2) $dy=d\left(\ln^2(1+x)+\arcsin 2x\right)=\left(\ln^2(1+x)+\arcsin 2x\right)'dx=$

$$=\left(\frac{2\ln(1+x)}{1+x}+\frac{2}{\sqrt{1-4x^2}}\right)dx;$$

3) $df(x) = f'(x)dx = (\operatorname{arctg}(3x-2))' dx = \dfrac{3dx}{1+(3x-2)^2}$;

4) $dy = \left(\operatorname{sh}^3 x\right)' dx = 3\operatorname{sh}^2 x \cdot \operatorname{ch} x dx$.

Задание 11. Найти дифференциалы:

1) $y = e^x - \cos^2 x$; 2) $y = \dfrac{\sin^2 x}{\cos x}$; 3) $y = \log_4(3x+5)$.

Ответы: 1) $dy = \left(e^x + \sin 2x\right)dx$;

2) $dy = \dfrac{\sin 2x \cos x + \sin^3 x}{\cos^2 x} dx$; 3) $dy = \dfrac{3dx}{(3x+5)\ln 4}$.

Задание 12.

1. Определить приращение и дифференциал функции $y = 2x^3 + 5x^2$ при переходе x от значения $x_0 = 1$ к значению $x = 1{,}01$. Найти абсолютную погрешность γ и относительную погрешность δ.

2. Найти приближённое значение $\operatorname{arctg} 1{,}05$.

3. Найти приближённо $\sqrt[3]{8{,}6}$.

Решение (см. пример из п. 1.13):

1) найдём приращение функции:

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) =$$
$$= 2(x_0 + \Delta x)^3 + 5(x_0 + \Delta x)^2 - 2x_0^3 - 5x_0^2 =$$
$$= 2\left(x_0^3 + 3x_0^2 \cdot \Delta x + 3x_0 \cdot \Delta x^2 + \Delta x^3\right) +$$
$$+ 5\left(x_0^2 + 3x_0 \cdot \Delta x + \Delta x^2 - 2x_0^2 - 5x_0^2\right) =$$
$$= 2x_0^3 + 6x_0^2 \cdot \Delta x + 6x_0 \cdot \Delta x^2 + 2\Delta x^3 + 5x_0^2 +$$
$$+ 10x_0 \cdot \Delta x + 5\Delta x^2 - 2x_0^2 - 5x_0^2 =$$
$$= \underbrace{\left(6x_0^2 + 10x_0\right)\Delta x}_{dy} + (6x_0 + 5)\Delta x^2 + 2\Delta x^3.$$

Так как $x_0=1$, $\Delta x = x - x_0 = 1{,}01-1=0{,}01$, то:

$$\Delta y(1)=(6+10)\cdot 0{,}01+(6+5)\cdot(0{,}01)^2+2\cdot(0{,}01)^3=$$
$$=0{,}16+0{,}0011+0{,}000002=0{,}161102\,.$$

Вычисляем дифференциал функции:

$$dy=y'\cdot dx=\left(2x^3=5x^2\right)'dx=\left(6x^2=10x\right)dx\,,\quad dx=\Delta x\,,$$
$$dy(1)=(6+10)\cdot 0{,}01=0{,}16\,.$$

Абсолютная погрешность

$$\gamma=\left|\Delta y-dy\right|=\left|0{,}161102-0{,}16\right|=0{,}001102\,.$$

Относительная погрешность

$$\delta=\left|\frac{\Delta y-dy}{\Delta y}\right|=\frac{0{,}001102}{0{,}161102}\approx 0{,}007\ -$$

очень мала, поэтому при малых значениях Δx приращение Δy заменяется на дифференциал dy с относительной погрешностью δ;

2) найдём приближённо с помощью дифференциала $\operatorname{arctg}1{,}05$.

Решение: рассмотрим функцию $f(x)=\operatorname{arctg}x$. Положим $x_0=1$, $x=1{,}05$, тогда $\Delta x=x-x_0=1{,}05-1=0{,}05$. Применим формулу (14) из п. 1.13:

$$\operatorname{arctg}(x_0+\Delta x)\approx\operatorname{arctg}x_0+d(\operatorname{arctg}x)_{x=x_0}\,.$$

$$d\operatorname{arctg}x=(\operatorname{arctg}x)'\cdot dx=\frac{dx}{1+x^2}\,,$$

$$d\operatorname{arctg}x_0=\frac{dx}{1+x_0^2}\,,\quad d\operatorname{arctg}1=\frac{0{,}05}{1+1}=0{,}025\,,$$

$$\operatorname{arctg}x_0=\operatorname{arctg}1=\frac{\pi}{4}\approx 0{,}7854\,.$$

Следовательно,

$$\operatorname{arctg}1{,}05\approx\operatorname{arctg}1+d\operatorname{arctg}1\approx 0{,}7854+0{,}025=0{,}8104\,;$$

3) найдём с помощью дифференциала $\sqrt[3]{8{,}6}$.

Решение. Рассмотрим функцию $f(x)=\sqrt[3]{x}$. Положим $x_0=8$, $x=8{,}6$, $\Delta x=8{,}6-8=0{,}6$.

$$d\sqrt[3]{x}=\left(\sqrt[3]{x}\right)'dx=\frac{dx}{3\sqrt[3]{x^2}},\ \left(d\sqrt[3]{x}\right)_{x_0=8}=\frac{0{,}6}{3\sqrt[3]{8^2}}=\frac{0{,}6}{12}=0{,}05,$$

$$\sqrt[3]{x_0}=\sqrt[3]{8}=2\text{, тогда } \sqrt[3]{8{,}6}\approx\sqrt[3]{8}+\left(d\sqrt[3]{8}\right)_{x_0=8}=2+0{,}05=2{,}05.$$

Задание 13. 1. Определить приращение и дифференциал функции $f(x)=x^2-3x+2$ при переходе x от $x_0=0$ до $x=0{,}1$. Найти абсолютную и относительную погрешности.

2. Найти приближённое значение $\sqrt[3]{27{,}54}$ с помощью дифференциала.

3. Найти приближённо $\sin 31^\circ$.

Ответы:

1. $\Delta f(0)=-0{,}29$; $df(0)=-0{,}3$; $\gamma=0{,}01$; $\delta\approx0{,}03$.
2. $\approx3{,}02$. 3. $\approx0{,}515$.

1.17. Производные и дифференциалы высших порядков

1.17.1. Определение производной n-го порядка

Пусть производная $f'(x)$ функции $f(x)$ является дифференцируемой функцией x в области X.

Определение 6. *Производной второго порядка (второй производной) функции* $f(x)$ *называется производная от производной* $f'(x)$.

Вторую производную обозначают y'', $f''(x)$, $\dfrac{d^2y}{dx^2}$, $f^{(2)}(x)$, $\ddot{y}$.

Пример 1. $y=x^4$, функция дифференцируема в области $X=(-\infty;+\infty)$, $y'=4x^3$ – функция дифференцируема в $(-\infty;+\infty)$.

$$y''=\left(4x^3\right)'=12x^2$$

Предполагая, что все рассматриваемые функции дифференцируемы, аналогично можно ввести определения производных третьего, четвёртого и т.д. порядков.

Обозначения: y''', $f'''(x)$, $\dfrac{d^3y}{dx^3}$, $f^{(4)}(x)$ и т.д.

Пусть найдена производная $(n-1)$-го порядка $f^{(n-1)}(x)$, и пусть эта функция дифференцируема.

Определение 7. *Производной* n*-го порядка (*n*-й производной) функции* $y=f(x)$ *называется производная от производной* $(n-1)$*-го порядка* $\left(f^{(n-1)}(x)\right)'=f^{(n)}(x)$.

Обозначения: $y^{(n)}$, $f^{(n)}(x)$, $\dfrac{d^ny}{dx^n}$.

Замечание. Функцию $y=f(x)$ называют нулевой производной: $f(x)=f^{(0)}(x)$.

Для нахождения производной какого-либо высшего порядка от функции $y=f(x)$ последовательно находят все производные низших порядков.

Определение 8. *Функция* $y=f(x)$*, имеющая конечные производные до* n*-го порядка включительно в области* X*, называется* n ***раз дифференцируемой*** *в области* X.

Производная высшего порядка функции $y=f(x)$ в фиксированной точке $x_0\in X$ является числом.

Пример 2. Найти $y^{(n)}$ для функции $y=x^5-3x^3+2x-1$ в точке $x_0=1$.

Решение. $y' = 5x^4 - 9x^2 + 2$, $y'' = 20x^3 - 18x$,

$$y''' = 60x^2 - 18,\ y^{(IV)} = 120x,\ y^{(IV)}(1) = 120.$$

1.17.2. Физический смысл производной второго порядка

Пусть функция $y = f(x)$, дважды дифференцируемая в области X, описывает закон движения материальной точки. Первая производная $y' = f'(x)$ есть скорость движения $\forall x \in X$. Вторая производная $y'' = f''(x)$ является ускорением (ускорение – это производная от скорости движения):

$$\left(f''(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f'(x + \Delta x) - f'(x)}{\Delta x} \right).$$

Пример. Найти скорость $S'(t)$ и ускорение $S''(t)$ свободно падающего тела, если пройденный путь $S(t) = \dfrac{gt^2}{2} + v_0 t$, где $g = 9{,}8\,\frac{м}{с^2}$ – ускорение движения, v_0 – начальная скорость движения, t – время.

Решение: $S'(t) = g \cdot t + v_0$ – скорость падения,

$S''(t) = (g \cdot t + v_0)' = g$ – ускорение.

1.17.3. Вычисление производных высших порядков

Оно не представляет никаких трудностей по сравнению с вычислением первой производной.

Задание 1. Найти производную n-го порядка:

1) $y = x^a$; 2) $y = \ln x$; 3) $y = a^x$; 4) $y = \sin x$;

5) $y = f(ax + b)$, $a \in \mathbf{R}$, $b \in \mathbf{R}$;

6) $y = u(x) \cdot v(x)$, где $u(x)$ и $v(x)$ – n раз дифференцируемые функции в X.

Решение: 1) $y = x^\alpha$, $\alpha \in \mathbf{R}$.

$y' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$, $y'' = \left(\alpha \cdot x^{\alpha-1}\right)' = \alpha \cdot \left(x^{\alpha-1}\right)' = \alpha \cdot (\alpha-1) \cdot x^{\alpha-2}$,

$y''' = \alpha \cdot (\alpha-1) \cdot \left(x^{\alpha-2}\right)' = \alpha \cdot (\alpha-1) \cdot (\alpha-2) \cdot x^{\alpha-3}$.

Нетрудно увидеть общий закон (можно, например, применить метод математической индукции),

$$y^{(n)} = a \cdot (a-1) \cdot \ldots \cdot (a-n+1) \cdot x^{a-n}.$$

Если $a = n$ ($n \in N$ – натуральное число), то $y^{(n)} = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 = n!$, (читается n факториал).

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n,\ 0! = 1,\ 1! = 1,\ 5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5.$$

Тогда $y^{(n)} = 0$ при $n > a$ $(a \in N)$.

2) $y = \ln x$, $y' = \dfrac{1}{x}$, $y'' = \left(\dfrac{1}{x}\right)' = \left(x^{-1}\right)' = -1 \cdot x^{-2} = -\dfrac{1}{x^2}$,

$$y''' = \left(-\frac{1}{x^2}\right)' = -\left(x^{-2}\right)' = (-1) \cdot (-2) \cdot x^{-3} = \frac{2}{x^3},$$

$$y^{(IV)} = \left(\frac{2}{x^3}\right)' = 2 \cdot \left(x^{-3}\right)' = -1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot x^{-4} = -\frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{x^4} = -\frac{3!}{x^4}, \ldots,$$

$$y^{(n)} = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{x^n}.$$

Заметим, что множитель $(-1)^{n-1}$ при изменении числа $(n-1)$ на единицу изменяет знак на противоположный;

3) $y = a^x$; $y' = a^x \cdot \ln a$,

$y'' = \left(a^x \cdot \ln a\right)' = \ln a \cdot \left(a^x\right)' = a^x \cdot \ln^2 a$, $\quad y''' = a^x \cdot \ln^3 a$, $\quad \ldots$, $y^{(n)} = a^x \ln^n a$;

4) $y = \sin x$; $y' = \cos x = \sin\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)$,

$y'' = (\cos x)' = -\sin x = \sin\left(x + \dfrac{\pi}{2} \cdot 2\right)$, аналогично

$$y''' = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\cdot 3\right),\ \ldots,\ y^{(n)} = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\cdot n\right);$$

5) $y = f(ax+b)$, где x – независимая переменная, a и b – действительные числа.

Данная функция является сложной. Применяем формулу (8) дифференцирования сложной функции:

$$y' = f'\underbrace{(ax+b)}_{u}\cdot a,$$

$$y'' = \left(f'(ax+b)\cdot a\right)' = a\cdot\left(f'(ax+b)\right)' = a^2 f''(ax+b),\ \ldots,$$

$$y^{(n)} = a^n\cdot f^{(n)}(ax+b);$$

6) $y = u(x)\cdot v(x)$. Последовательно дифференцируем данную функцию.

$$y' = u'\cdot v + u\cdot v',$$

$$y'' = (u'\cdot v + u\cdot v')' = (u'v)' + (v'u)' = u''v + u'v' + u'v' + uv'' =$$
$$= u'' + 2u'v' + uv'';$$

$$y''' = (u''v + 2u'v' + uv'')' = (u''v)' + (2u'v')' + (uv'')' =$$
$$= u'''v + u''v' + 2u''v' + 2u'v'' + u'v'' + uv''' =$$
$$= u'''v + 3u''v + 3u'v'' + uv'''.$$

Аналогично находятся $y^{(IV)}$, y^{V}, … .

$$y^{(n)} = (u\cdot v)^{(n)} = u^{(n)}v + nu^{(n-1)}\cdot v' + \frac{n\cdot(n-1)}{2!}\cdot u^{(n-2)}\cdot v'' +$$
$$+ \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)}{3!}\cdot u^{(n-3)}\cdot v''' + \ldots + u\cdot v^{(n)}. \qquad (15)$$

Полученная формула носит название формулы Лейбница. Она совпадает с формулой бинома Ньютона $y = (u+v)^n$, где n – показатель степени, а в формуле (15) вместо степени u^n и v^n стоят производные $u^{(n)}$ и $v^{(n)}$ (производные обозначаются скобками: (n), а показатель степени n – без скобок).

Задание 2. Найти $y^{(n)}$ функции:

1) $y=\log_a x$; 2) $y=e^{kx}$; 3) $y=\cos x$;

4) $y=a\cdot u(x)+b\cdot v(x)$, $a\in\mathbf{R}$, $b\in\mathbf{R}$, 5) $y=a\cdot u(x)\; a\in\mathbf{R}$.

Ответы: 1) $y^{(n)}=\dfrac{(-1)^{n-1}}{\ln a}\cdot\dfrac{(n-1)!}{x^n}$; 2) $y^{(n)}=k^n e^{kx}$;

3) $y^{(n)}=\cos\left(x+\dfrac{\pi}{2}n\right)$; 4) $y^{(n)}=a\cdot u^{(n)}+b\cdot v^{(n)}$;

5) $y^{(n)}=a\cdot u^{(n)}$.

1.17.4. Дифференциалы высших порядков

Пусть функция $y=f(x)$ n раз дифференцируема в области X. Найдём дифференциал функции $y=f(x)$ по формуле (12): $dy=f'(x)dx$, назовём его дифференциалом первого порядка (первым дифференциалом) функции $y=f(x)$. Так как $f'(x)$ в области X является функцией, то дифференциал первого порядка dy также является функцией в области X.

Определение 9. *Дифференциалом второго порядка (вторым дифференциалом) функции* $y=f(x)$ *называется дифференциал от дифференциала первого порядка:*

$$d^2y=d(dy).$$

Определение 10. *Дифференциалом* n*-го порядка (*n*-ым дифференциалом) функции* $y=f(x)$ *называется дифференциал от дифференциала* $(n-1)$*-го порядка:*

$$d^n y=d\left(d^{n-1}y\right).$$

Вычисляя дифференциалы высших порядков, рассматривают два случая:

1) x – независимая переменная;

2) x – зависимая переменная, т.е. функция некоторой переменной t: $x = x(t)$ – пусть дифференцируема в области T.

В первом случае dx является приращением независимой переменной и, следовательно, dx – число, поэтому:
$d^2y = d(dy) = d(f'(x)dx) = df'(x) \cdot dx = f''(x) \cdot dx^2 = f''(x)dx^2$,
т.е.

$$d^2y = y'' \cdot dx^2. \tag{16}$$

$d^3y = d(d^2y) = d(y''dx^2) = dx^2dy'' = dx^2 \cdot y''' \cdot dx = y'''dx^3$ и т.д.

$$d^ny = d(d^{n-1}y) = d(y^{(n-1)}dx^{n-1}) = dx^{n-1} \cdot d(y^{(n-1)}) =$$
$$= dx^{n-1} \cdot y^{(n)} \cdot dx = y^{(n)}dx^n.$$

Таким образом, $d^ny = y^{(n)}dx^n$.

Отсюда следует, что $y^{(n)} = \dfrac{d^ny}{dx^n}$, т.е. производная n-го порядка функции $y = f(x)$, дифференцируемой n раз в области X, равна дроби, числитель которой равен дифференциалу n-го порядка функции $y = f(x)$, а знаменатель – n-я степень приращения dx независимой переменной x.

Рассмотрим второй случай. Используя п.1.15 (инвариантность формы дифференциала), получаем:

$$dy = f'(x)dx, \text{ где } dx = x'(t)dt.$$

Тогда по определению находим d^2y:

$$d^2y = d(dy) = d(f'(x) \cdot dx) =$$

$=$|применяем формулу дифференциала произведения (**) из п. 1.14|$= dx \cdot d(f'(x)) + f'(x) \cdot d(dx) = f''(x)dx^2 + f'(x) \cdot d^2x$.

Следовательно, для сложной функции $y = f(x)$, $x = x(t)$ второй дифференциал d^2y имеет два слагаемых, в то время как для функции в *первом* случае – одно слагаемое [см. формулу (16)].

Вывод: для второго дифференциала сложной функции (второй случай) *инвариантность формы нарушается*. Аналогичное заключение можно сделать и для дифференциалов более высоких порядков.

1.18. Дифференцирование неявных функций

Соотношение между функцией y и аргументом x может быть задано различными способами:

1) в явном виде: $y = f(x)$;
2) в неявном виде: $F(x, y) = 0$;
3) в параметрической форме: переменные x и y являются функциями переменной t, называемой параметром: $\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t) \end{cases}$ $\alpha \le t \le \beta$, где предполагается, что функция $x = \varphi(t)$ имеет обратную $t = t(x)$.

Дифференцирование явно заданных функций рассмотрено в предыдущих параграфах. В этом параграфе рассмотрим дифференцирование неявных функций, а в следующем – функций, заданных параметрически.

Пусть $F(x, y) = 0$, где $y = f(x)$. По условию

$$F(x, f(x)) = 0. \tag{17}$$

Дифференцируем тождество (17) по x, используя правило вычисления сложной функции. Затем из полученного уравнения относительно y' находим производную y'.

Задание 1. Найти производную y' неявных функций:

1) $x^2 + y^2 - 9 = 0$; 2) $x^2 \cdot y^3 - \sin y + \cos x - 5 = 0$;

3) $x^y = y^x$; 4) $\operatorname{tg}\dfrac{y}{x} = 5x$.

Решение: 1) $x^2 + y^2 - 9 = 0$. Дифференцируем обе части уравнения по x, где y есть функция от x:

$$2x+2y\cdot y'=0 \quad\Rightarrow\quad y'=-\frac{x}{y};$$

2) $\left(x^2\cdot y^3-\sin y+\cos x-5\right)'=0$,

$$\underbrace{\left(x^2y^3\right)'}_{\text{производная произведения}}-(\sin y)'+(\cos x)'-(5)'=0,$$

$$2x\cdot y^3+x^2\cdot\underbrace{3y^2\cdot y'}_{y\text{ – сложная функция от }x}-(\cos y)\cdot y'-\sin x=0,$$

$$y'\left(3x^2y^2-\cos y\right)=\sin x-2xy^3 \quad\Rightarrow\quad y'=\frac{\sin x-2xy^3}{3x^2y^2-\cos y};$$

3) $x^y=y^x$. Прологарифмируем обе части уравнения по основанию e и применим формулу логарифмической производной (9) из п. 1.8.

$$y\ln x=x\ln y,\quad \underbrace{(y\ln x)'}_{\text{произведение}}=\underbrace{(x\ln y)'}_{\text{произведение}},$$

$$y'\cdot\ln x+y\cdot(\ln x)'=x'\cdot\ln y+x\cdot(\ln y)'.$$

$$y'\ln x+\frac{y}{x}=\ln y+x\cdot\underbrace{\frac{y'}{y}}_{\text{формула (9)}};$$

решим уравнение относительно y':

$$y'\cdot\left(\ln x-\frac{x}{y}\right)=\ln y-\frac{y}{x},$$

$$y'\cdot\frac{y\ln x-x}{y}=\frac{x\ln y-y}{x} \quad\Rightarrow\quad y'=\frac{y\cdot(x\ln y-y)}{x\cdot(y\ln x-x)}.$$

4) $\left(\operatorname{tg}\dfrac{y}{x}\right)'=(5x)'$; $\dfrac{1}{\cos^2\dfrac{y}{x}}\cdot\underbrace{\left(\dfrac{y}{x}\right)'}_{\text{производная дроби}}=5$;

$$\frac{y'x-y}{x^2\cos^2\frac{y}{x}}=5;\ y'\cdot x-y=5x^2\cdot\cos^2\frac{y}{x},$$

$$y'\cdot x=y+5x^2\cdot\cos^2\frac{y}{x}\quad\Rightarrow\quad y'=\frac{y+5x^2\cdot\cos^2\frac{y}{x}}{x}.$$

Задание 2. Найти y' неявных функций:

1) $x^2+y^2-5x+6y-7=0$; 2) $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$, $a\in\mathbf{R}$, $b\in\mathbf{R}$;

3) $x-y+e^x\cdot\operatorname{arctg}x=0$. Найти $y'(0)$.

Ответы: 1) $y'=\dfrac{5-2x}{2y+6}$; 2) $y'=\dfrac{b^2x}{a^2y}$; 3) $y'(0)=2$.

Указание. В заданное уравнение подставить $x=0$ и найти y.

1.19. Дифференцирование функций, заданных параметрически

Пусть зависимость y от x выражена через вспомогательную переменную t, называемую параметром:

$$x=x(t),\ y=y(t),\ \alpha\le t\le\beta, \tag{18}$$

где функция $x=x(t)$ имеет обратную функцию $t=t(x)$. Если из уравнений (18) можно исключить параметр t, то получаем явную функцию. Подставляя, например, $t=t(x)$ во второе уравнение (18), будем иметь явную функцию $y=y(t(x))$, которую можно продифференцировать как сложную функцию. Но в большинстве случаев исключение параметра t является трудной задачей, а в некоторых случаях вообще нельзя исключить параметр t.

Задание 1. Построить графики функций:

1) $\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = a\sin t, \end{cases}$ где $0 \le t \le 2\pi$, $a > 0$; 2) $\begin{cases} x = 4t^2, \\ y = 5t^2, \end{cases}$ $t \in \mathbf{R}$;

3) $\begin{cases} x = 3t^2, \\ y = 2t, \end{cases}$ $t \in \mathbf{R}$.

Решение. 1. Покажем, что при изменении от 0 до 2π множество точек $\{(x; y)\}$ с координатами x и y принадлежат окружности $\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = a\sin t \end{cases}$ радиусом a с центром в начале координат.

Построим таблицу:

t	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
x	a	$\frac{a\sqrt{3}}{2}$	$\frac{a\sqrt{2}}{2}$	$\frac{a}{2}$	0	$-\frac{a\sqrt{2}}{2}$	$-a$	$-\frac{a\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{a\sqrt{2}}{2}$	a
y	0	$\frac{a}{2}$	$\frac{a}{\sqrt{2}}$	$\frac{a\sqrt{3}}{2}$	a	$\frac{a\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{a\sqrt{2}}{2}$	$-a$	$-\frac{a\sqrt{2}}{2}$	0

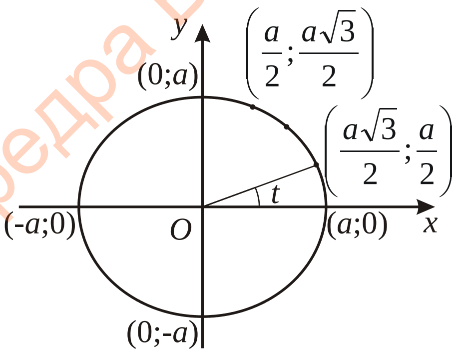


Рис. 7

$x(0) = a \cdot \cos 0 = a$;

$y(0) = a \cdot \sin 0 = 0$;

$x\left(\frac{\pi}{6}\right) = a \cdot \cos\frac{\pi}{6} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$;

$y\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{a}{2}$, и т.д.

Построим линию (рис.7).

Исключим из параметрических уравнений параметр t. Возведём оба уравнения в квадрат:

$$\begin{cases} x^2 = a^2\cos^2 t, \\ y^2 = a^2\sin^2 t. \end{cases}$$

Почленно складывая, получаем уравнение окружности: $x^2 + y^2 = a^2$. Неявное уравнение окружности $x^2 + y^2 = a^2$ определяет две явные функции: $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ и $y = -\sqrt{a^2 - x^2}$, графики которых соответственно образуют верхнюю и нижнюю полуокружности. В механике уравнения (18) называют *уравнениями движения материальной точки*, где параметром t является время.

Если из уравнений (18) исключить параметр t, то получится уравнение *траектории* точки. Траекторией движения материальной точки в примере 1 является окружность.

Примеры 2 и 3 решить самостоятельно.

Ответы: 2) прямая $5x - 4y = 0$; 3) парабола $y^2 = \frac{4}{3}x$.

Задание 1. Пусть функции (18) дифференцируемы, причём $x'(t) \neq 0$. Найти $\frac{dy}{dx}$.

Решение. Воспользуемся инвариантностью формы первого дифференциала. Из формулы (12) (п. 1.12) получаем: $y' = \frac{dy}{dx}$, где $x = x(t)$, $y = y(t)$. Так как $dy = y'(t)dt$, $dx = x'(t)dt$, то $y'_x = \frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)dt}{x'(t)dt} = \frac{y'_t}{x'_t}$.

Таким образом, производная y' по переменной x параметрически заданной функции вычисляется по формуле:

$$y'_x = \frac{dy}{dx} = \frac{y'_t}{x'_t}. \tag{19}$$

Если функции $x = x(t)$ и $y = y(t)$ дифференцируемы несколько раз, то можно найти вторые, третьи и т.д. производные по x. Например:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = (y'_x)'_x = \frac{dy'_x}{dx} = \frac{(y'_x)'_t \cdot dt}{x'_t \cdot dt} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t},$$

где y'_x вычисляется по формуле (19).

Задание 2. Найти производные 2-го порядка:

1) $\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b\sin t, \end{cases}$ $0 \le t \le 2\pi$, $a > 0$, $b > 0$ – действительные числа;

2) $\begin{cases} x = 4\cdot(t - \sin t), \\ y = 4\cdot(1 - \cos t) \end{cases}$ в точке $t = \frac{\pi}{2}$;

3) $\begin{cases} x = \cos t + t\sin t, \\ y = \sin t - t\cos t. \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x = \frac{1}{3}\cos^3 t, \\ y = \frac{1}{3}\sin^3 t \end{cases}$ в точке $t = \frac{\pi}{6}$.

Решение: 1) $x'_t = -a\sin t$, $y'_t = b\cos t$. По формуле (19) получаем: $\frac{dy}{dx} = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{b\cos t}{-a\sin t} = -\frac{b}{a}\operatorname{ctg} t$;

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t} = \frac{\left(-\frac{b}{a}\operatorname{ctg} t\right)'_t}{-a\sin t} = -\frac{b}{a^2\sin^3 t};$$

2) $x'_t = 4\cdot(1 - \cos t)$, $y'_t = 4\sin t$.

По формуле (19)

$$y'_x=\frac{y'_t}{x'_t}=\frac{4\cdot\sin t}{4\cdot(1-\cos t)}=\frac{2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}}{4\cdot 2\sin^2\frac{t}{2}}=\frac{1}{4}\operatorname{ctg}\frac{t}{2};$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d(y'_x)}{x'_t}=\frac{\left(\frac{1}{4}\operatorname{ctg}\frac{t}{2}\right)'_t}{(4\cdot(t-\sin t))'_t}=\frac{-\frac{1}{\sin^2\frac{t}{2}}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}}{4\cdot(1-\cos t)}=$$

$$=\frac{1}{32\sin^2\frac{t}{2}\cdot 2\sin^2\frac{t}{2}}=-\frac{1}{64\sin^4\frac{t}{2}},$$

$$y''_{xx}\Big|_{t=\frac{\pi}{2}}=-\frac{1}{64\sin^4\frac{\pi}{4}}=-\frac{1}{64\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^4}=\frac{1}{16}.$$

Примеры 3 и 4 выполнить самостоятельно.

Ответы: 3) $y'_x=\operatorname{tg}t;\ y''_{xx}=\frac{1}{t\cos^3 t};$

4) $y''_{xx}=\frac{1}{\cos^4 t\cdot\sin t},\ y''\Big|_{\frac{\pi}{6}}=\frac{32}{9}.$

2. Некоторые теоремы о дифференцируемых функциях

Теорема 1. (*Теорема Ролля*) *Пусть функция* $y=f(x)$ *удовлетворяет следующим условиям:*
1) определена и непрерывна на отрезке $[a;b]$*;*
2) дифференцируема в интервале $(a;b)$*;*
3) $f(a)=f(b)$.
Тогда $\exists c\in(a;b)$: $f'(c)=0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как функция $y=f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, то по теореме Вейерштрасса

$$\exists x_1, x_2 \in [a;b]: \ f(x_1) = M\ , \ f(x_2) = m\,,$$

где M и m соответственно наибольшее и наименьшее значения функции $y = f(x)$ на отрезке $[a;b]$.

Возможны два случая.

1. $M = m$. Тогда $f(x) = const \Rightarrow f'(x) = 0 \quad \forall x \in (a;b)$.

2. $M \neq m$. Так как по условию 3 данной теоремы $f(a) = f(b)$, то функция $f(x)$ достигает хотя бы одного из значений M или m в интервале $(a;b)$.

Пусть, например $\exists c \in (a;b)$, в которой $f(c) = M$. Тогда

$$f'(c) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(c+\Delta x) - f(c)}{\Delta x} = \begin{cases} \leq 0 \text{ при } \Delta x > 0, \\ \geq 0 \text{ при } \Delta x < 0 \end{cases} \Rightarrow$$

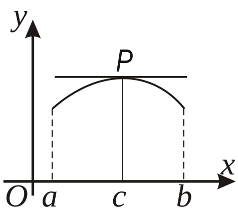


Рис. 8

$\Rightarrow f'(c) = 0$, так как по условию 2 данной теоремы функция $f(x)$ дифференцируема в $(a;b)$. ■

Геометрический смысл теоремы Ролля следующий: $\exists c: f'(c) = 0$ – касательная, проведённая в точке P к графику функции $y = f(x)$, параллельна оси абсцисс (рис. 8).

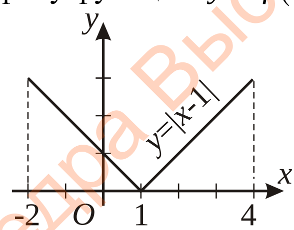


Рис. 9

Из рис. 9 видно, что дифференцируемость функции очень важна. Функция $y = |x-1|$, $-2 \leq x \leq 4$, на концах промежутка принимает равные значения, но её производная не обращается в нуль.

Теорема 2 (*теорема Лагранжа*). *Пусть* функция $y = f(x)$ *удовлетворяет следующим условиям:*

1) определена и непрерывна на отрезке $[a;b]$;

2) дифференцируема в интервале $(a;b)$.

Тогда $\exists c \in (a;b)$:

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c). \qquad (20)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. На отрезке $[a;b]$ рассмотрим вспомогательную функцию

$$\mathsf{F}(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a),$$

которая удовлетворяет всем условиям теоремы Ролля: непрерывна на $[a;b]$, дифференцируема в $(a;b)$, $\mathsf{F}(a)=\mathsf{F}(b)$. На основании теоремы Ролля $\exists c \in (a;b)$ такая, что $F'(c)=0$. Найдём $\mathsf{F}'(x)$:

$$\mathsf{F}'(x)=f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a},\ F'(c)=f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}. \ \blacksquare$$

Формулу (20) называют формулой Лагранжа или формулой конечных приращений: приращение $f(b)-f(a)$ дифференцируемой функции $y=f(x)$ на отрезке $[a;b]$ равно приращению $(b-a)$ аргумента, умноженному на значение производной функции в некоторой точке интервала $(a;b)$.

Геометрический смысл теоремы Лагранжа: угловой коэффициент касательной $f'(c)=\operatorname{tg}\alpha$ равен угловому коэффициенту секущей AB: $\frac{BC}{AC}=\operatorname{tg}\alpha$, т.е. касательная $\mathsf{P}K$, проведённая к графику функции $y=f(x)$ в точке P с абсциссой c, параллельна секущей AB.

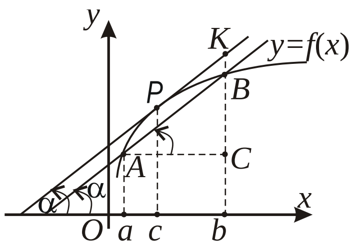


Рис. 10

Замечание. Так как $c \in (a;b)$, то $c = a + \theta(b-a)$, где $0 < \theta < 1$ – правильная дробь, то формулу Лагранжа можно записать:

$$f(b) - f(a) = f'(a + \theta(b-a))(b-a).$$

Теорема 3 (*Коши*). *Пусть функции* $f(x)$ *и* $g(x)$ *удовлетворяют следующим условиям:*

1) непрерывны на отрезке $[a;b]$*;*

2) дифференцируемы в интервале $(a;b)$*;*

3) $g'(x) \neq 0 \ \ \forall x \in (a;b)$.

Тогда $\exists c \in (a;b)$:

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}. \qquad (21)$$

Доказательство теоремы Коши аналогично доказательству теоремы Лагранжа. Вводится вспомогательная функция

$$\mathsf{F}(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}(g(x) - g(a)),$$

и повторяется доказательство теоремы 2.

Следует заметить, что формула (20) является частным случаем формулы (21): $g(x) = x$. Если $f(b) = f(a)$, то из теоремы 2 следует теорема 1 (Ролля).

3. Правила Лопиталя

Существуют два правила Лопиталя раскрытия неопределённостей: $\left(\frac{0}{0}\right)$ и $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$.

Теорема 1. (*Первое правило раскрытия неопределённости вида* $\left(\frac{0}{0}\right)$). *Пусть функции* $f(x)$ *и* $g(x)$ *удовлетворяют следующим условиям:*

1) определены, непрерывны и дифференцируемы в некоторой окрестности точки $x=a$*, за исключением, может быть, самой точки* a*;*

2) $g'(x)\neq 0$*;*

3) $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$*;*

4) $\exists$ *конечный или бесконечный предел:* $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

Тогда и существует предел

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Теорема 2. (*Второе правило раскрытия неопределённости вида* $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$). *Пусть функции* $f(x)$ *и* $g(x)$ *удовлетворяют следующим условиям:*

1) определены, непрерывны и дифференцируемы в некоторой окрестности точки $x=a$*, за исключением, может быть, самой точки* a*;*

2) $g'(x)\neq 0$*;*

3) $\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$ *(или* $-\infty$*),* $\lim\limits_{x\to a} g(x)=+\infty$ *(или* $-\infty$*);*

4) $\exists$ *конечный или бесконечный предел:* $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

Тогда существует и $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$*, равный* $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$*,*

т.е. справедлива формула:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 1. Пусть (x_n) – произвольная последовательность $(x_n)\to a$, причём $\forall n\in\mathbf{N}$ $x_n\neq a$. Доопределим функции $f(x)$ и $g(x)$ в точке a:

$f(a)=g(a)=0$ Тогда функции $f(x)$ и $g(x)$ будут непрерывны в окрестности точки a, дифференцируемы в интервале $(a;x_n)$ и $g'(x)\neq 0$. По теореме Коши, в интервале $(a;x_n)$ существует точка c_n, в которой

$$\frac{f(x_n)-f(a)}{g(x_n)-g(a)}=\frac{f'(c_n)}{g'(c_n)} \quad\Rightarrow\quad \frac{f(x_n)}{g(x_n)}=\frac{f'(c_n)}{g'(c_n)}.$$

При $n\to+\infty$ $x_n\to a$ $\Rightarrow$ $c_n\to a$, так как $c_n\in(a;x_n)$.
Следовательно,

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{f(x_n)}{g(x_n)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)},$$

т.е.

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}. \ \blacksquare$$

Пример 1. Вычислить предел с помощью правила Лопиталя: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4\sin 3x-12x}{x^3}$.

Решение. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4\sin 3x-12x}{x^3}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=$

$=|$применяем первое правило Лопиталя$|=$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{12\cos 3x-12}{3x^2}=\left(\frac{0}{0}\right)=$$

$=|$повторно применяем правило Лопиталя$|=$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-36\sin 3x}{6x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{-108\cos 3x}{6}=\frac{-108}{6}=-18.$$

Доказательство второго правила Лопиталя (теорема 2) аналогично доказательству теоремы 1.

Пример 2. Найти $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+2x+1}{x^2+4}$.

Решение. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+2x+1}{x^2+4}=\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x+2}{2x}=\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)=$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{2}=1.$$

Пример 3. Вычислить $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln^2 x}{\lg^2 x+5}$.

Решение. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln^2 x}{\lg^2 x+5}=\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{2}{x}\ln x}{\frac{2\lg x}{x\ln 10}}=$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln 10\ln x}{\lg x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}\ln 10}{\frac{1}{x\ln 10}}=\ln^2 10. \blacktriangleright$$

Замечание. Если предел отношения производных не существует, то ничего нельзя сказать о пределе отношения функций.

Пример 4. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-\cos x}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(x-\cos x)'}{x'}=$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1+\sin x}{1}=\lim\limits_{x\to+\infty}(1+\sin x)$ не существует.

Следовательно, правило Лопиталя применять нельзя, но

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x+\cos x}{x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x-\cos x}{x}}{\frac{x}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{\cos x}{x}\right)=1 \quad -$$

существует.

4. Раскрытие неопределённостей других видов

К таким неопределённостям относятся $(0\cdot\infty)$, $(\infty-\infty)$, (1^{∞}), (0^{0}), (∞^{0}).

Покажем, что с помощью алгебраических преобразований эти неопределённости можно свести к рассмотренным ранее неопределённостям $\left(\frac{0}{0}\right)$ и $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$.

1) $\lim\limits_{x\to a}\left(f(x)\cdot g(x)\right)=\left|\lim\limits_{x\to a} f(x)=0, \lim\limits_{x\to a} g(x)=\infty\right|=(0\cdot\infty)=$

$$=\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\dfrac{1}{g(x)}}=\left(\frac{0}{0}\right).$$

Пример 1. Найти $\lim\limits_{x+0} x^3\ln x$.

Решение. $\lim\limits_{x+0} x^3\ln x=(0\cdot(-\infty))=\lim\limits_{x+0}\dfrac{\ln x}{\dfrac{1}{x^3}}=\left(\dfrac{-\infty}{+\infty}\right)=$

$$=\lim_{x\to+0}\frac{\dfrac{1}{x}}{-\dfrac{3}{x^4}}=\lim_{x\to+0}\left(-\frac{x^3}{3}\right)=0. \blacktriangleright$$

2) $\lim\limits_{x\to a}\left(f(x)-g(x)\right)=\left|\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty, \lim\limits_{x\to a} g(x)=\infty\right|=(\infty-\infty)=$

$$=\lim_{x\to a}\left(\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{f(x)}\right):\frac{1}{f(x)\cdot g(x)}=\left(\frac{0}{0}\right).$$

Пример 2. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}\right)$.

Решение. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)=(\infty-\infty)=$ |приведём дроби к общему знаменателю| $=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x(e^x-1)}=\left(\frac{0}{0}\right)=$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{e^x-1+xe^x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{2e^x+xe^x}=\frac{1}{2}. \ ▶$$

3) Раскрытие неопределённостей вида 1^∞, 0^0, ∞^0.

Пусть $y=f(x)^{g(x)}$ – показательно-степенная функция, для которой требуется найти $\lim\limits_{x\to a} y$. Рассмотрим следующие случаи:

а) $\lim\limits_{x\to a} f(x)=1$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)=\infty$, имеет неопределённость 1^∞;

б) $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$, имеет неопределённость 0^0;

в) $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$, имеет неопределённость ∞^0.

Прологарифмируем $y=f(x)^{g(x)}$: $\ln y=g(x)\ln f(x)$. При $x\to a$ получим

$$\lim_{x\to a}\ln y=\lim_{x\to a} g(x)\ln f(x),\ \ln\lim_{x\to a} y=\lim_{x\to a} g(x)\cdot\ln\lim_{x\to a} f(x).$$

Вычисляем пределы для случаев а, б и в.

а) $\ln\lim\limits_{x\to a} y=\left|\lim\limits_{x\to a} g(x)=\infty,\ \lim\limits_{x\to a} f(x)=1\right|=(\infty\cdot 0)$;

б) $\ln\lim\limits_{x\to a} y=\left|\lim\limits_{x\to a} g(x)=0,\ \lim\limits_{x\to a} f(x)=0\right|=(0\cdot\infty)$;

в) $\ln\lim\limits_{x\to a} y=\left|\lim\limits_{x\to a} g(x)=0,\ \lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty\right|=(0\cdot\infty)$.

Следовательно, случаи а, б и в свелись к неопределённости $(0\cdot\infty)$, рассмотренной в случае 1.

Пример 3. Найти $\lim\limits_{x\to 0} x^{\sin x}$.

Решение. $\lim\limits_{x\to 0} x^{\sin x} = \left(0^0\right)$. Логарифмируем функцию $y = x^{\sin x}$ и затем вычисляем предел.

$\ln y = \sin x \ln x$, $\ln \lim\limits_{x\to 0} y = \lim\limits_{x\to 0}(\sin x \ln x) = (0\cdot\infty) =$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\frac{1}{\sin x}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{\cos x}{\sin^2 x}} = -\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x\cos x} = \left(\frac{0}{0}\right) =$$

$$= -\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\cos x} = -1\cdot 0 = 0.$$

Итак, $\ln \lim\limits_{x\to 0} y = 0$, $\lim\limits_{x\to 0} y = e^0 = 1$. ►

Пример 4. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\left(3^x + x\right)^{\frac{1}{x}}$.

Решение. $y = \left(3^x + x\right)^{\frac{1}{x}}$, $\ln y = \frac{1}{x}\ln\left(3^x + x\right) = (0\cdot\infty)$.

$$\lim_{x\to\infty}\ln y = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\ln\left(3^x + x\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(3^x + x\right)}{x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{3^x + x}\left(3^x\ln 3 + 1\right)}{1} = \lim_{x\to\infty}\frac{3^x\ln 3 + 1}{3^x + x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{3^x\ln^2 3}{3^x\ln 3 + 1} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{3^x\ln^3 3}{3^x\cdot\ln^2 3} = \ln 3.$$

Следовательно, $\lim\limits_{x\to\infty}\ln y = \ln 3 \;\Rightarrow\; \lim\limits_{x\to\infty} y = e^{\ln 3} = 3$. ►

Найти следующие пределы.

№ 1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-x}{e^x-1}$. № 2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln x}{\operatorname{ctg} x}$. № 3. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin^2 x}-\dfrac{1}{x^2}\right)$.

№ 4. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-2x^2-x+2}{x^3-7x^2+6}$. № 5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x-\sin x}{x-\sin x}$.

№ 6. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x}\right)$. № 7. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}(\pi-2x)\operatorname{tg} x$.

№ 8. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}(\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x}$. № 9. $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{\pi}{2}-\operatorname{arctg} x\right)^{\frac{1}{\ln x}}$.

№ 10. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{\operatorname{tg} x}{\sec x}$. № 11. $\lim\limits_{x\to +0}\dfrac{\ln\sin x}{\ln\sin 5x}$.

№ 12. $\lim\limits_{x\to +0}\sqrt[3]{x}\ln x$. № 13. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{x}\right)$.

№ 14. $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}}\sin(2x-1)\cdot\operatorname{tg}\pi x$. № 15. $\lim\limits_{t\to 0}\left(\operatorname{ctg} t-\dfrac{1}{t}\right)$.

№ 16. $\lim\limits_{x\to +\infty}(\ln x)^{\frac{1}{x}}$. №17. $\lim\limits_{x\to +0} x^{\frac{6}{1+2\ln x}}$.

№ 18. $\lim\limits_{x\to 1}(2-x)^{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}}$. №19. $\lim\limits_{x\to 1+0}(x-1)^{\frac{a}{\ln 2(x-1)}}$.

№ 20. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}(\pi-2x)^{\cos x}$. № 21. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)^{x}$.

Ответы. № 1. -1. № 2. 0. № 3. 1. № 4. $\dfrac{1}{2}$. № 5. 3. № 6. $\dfrac{1}{2}$. № 7. 2. № 8. -1. № 9. $\dfrac{1}{e}$. № 10. 1. № 11. 1. № 12. 0. № 13. 0. № 14. $-\dfrac{2}{\pi}$. № 15. 0. № 16. 1. № 17. e^3. № 18. $e^{\frac{2}{\pi}}$. № 19. e^a. № 20. 1. № 21. 1.

5. Формула Тейлора

Во многих случаях вычисление значений функции $f(x)$ при конкретных значениях x оказывается затруднительным. Например, как найти значения функций $\cos x$, $\ln(1-x)$ для любых x из области определения данных функций? Один из эффективных приёмов в этих случаях – замена функции $f(x)$ степенным многочленом (полиномом) вида:

$$P_n(x)=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\ldots+a_n(x-x_0)^n, \quad (22)$$

значение которого при $x=x_0$ равно значению $f(x_0)$.

Пусть функция $y=f(x)$ дифференцируема $(n+1)$ раз в некоторой окрестности точки x_0. Потребуем, чтобы в точке x_0 были равны значения $f^{(k)}(x_0)=P_n^{(k)}(x_0)$, $k=0,1,\ldots,n$.

Тогда $f(x_0)=a_0$, $f'(x_0)=a_1$, $f''(x_0)=2a_2$, …, $f^{(n)}(x_0)=a_n\cdot n!$. Из полученных равенств найдём коэффициенты a_k:

$$a_k=\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!},\ k=\overline{0,n}. \quad (23)$$

Подставим найденные числа a_k в формулу (22):

$$\begin{aligned}P_n(x)&=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\\&+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.\end{aligned} \quad (24)$$

Формула (24) называется многочленом Тейлора функции $y=f(x)$. Очевидно, что в других точках $x\neq x_0$ $f(x)\neq P_n(x)$. Разность между $f(x)$ и $P_n(x)$ обозначим $R_n(x)$:

$$R_n(x)=f(x)-P_n(x), \quad (25)$$

которую называют остаточным членом.

Из равенства (25) получаем формулу

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+$$
$$+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x). \qquad (26)$$

Вблизи точки x_0 остаточный член $R_n(x)$ во многих случаях является малой величиной, поэтому многочлен $P_n(x)$ даёт приближённое значение $f(x)$. Оценить ошибку позволяет формула остаточного члена:

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}, \qquad (27)$$

где c – некоторая точка, принадлежащая промежутку $(x;x_0)$. Формула (27) называется *формулой Лагранжа* остаточного члена. Величину c можно представить в виде: $c=x_0+\theta(x-x_0)$, где $0<\theta<1$ – правильная дробь. Тогда формула (6) примет вид:

$$R_n(x)=\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}\,f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0)).$$

Формула остаточного члена может быть представлена и в другой форме:

а) $R_n(x)=\dfrac{(x-x_0)^{n+1}}{n!}(1-\theta)^n\cdot f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))$ – форма Коши;

б) $R_n(x)=o\left((x-x_0)^n\right)$ – форма Пеано, где $o\left((x-x_0)^n\right)$ – бесконечно малая более высокого порядка по сравнению с $(x-x_0)^n$.

Формула (26) называется формулой Тейлора разложения функции $f(x)$.

При $x_0=0$ формула (26) принимает вид:

$$f(x)=f(0)+f'(0)\cdot x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+R_n(x), \quad (28)$$

где $R_n(x)=\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\theta x)$, $0<\theta<1$. Формула (28) называется *формулой Маклорена.*

6. Разложение важнейших функций по формуле Маклорена с остаточным членом в форме Лагранжа

1. $y=e^x$.

Найдём значение функции e^x и её производные до $(n+1)$-го порядка в точке $x_0=0$.

$y'=e^x$, $y''=e^x$, …, $y^{(n)}=e^x$, $y^{(n+1)}=e^x$.

$f(0)=y'(0)=e^0=1$, $f'(0)=1$, $f''(0)=1$, …, $f^{(n)}(0)=1$,

$f^{(n+1)}(\theta x)=e^{\theta x}$, где $0<\theta<1$ – некоторое число.

Формула (28) для функции e^x имеет вид:

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}. \quad (29)$$

2. $y=\sin x$.

$y'=\cos x$, $y''=-\sin x$, …, $y^{(n)}=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}n\right)$,

$y^{(n+1)}=\sin\left(x+(n+1)\frac{\pi}{2}\right)$.

$f(0)=\sin 0=0$, $f'(0)=\cos 0=1$, $f''(0)=-\sin 0=0$, …,

$f^{(n)}(0)=\sin\left(\frac{\pi}{2}n\right)$.

Все производные чётного порядка равны нулю. Поэтому формула (29) имеет вид:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + R_{2n}, \tag{30}$$

где $R_{2n} = \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\sin\left(\theta x + (2n+1)\dfrac{\pi}{2}\right)$, $0 < \theta < 1$.

3. $y = \cos x$.

Формула (28) имеет вид:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + R_{2n+1}, \tag{31}$$

где $R_{2n+1} = \dfrac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}\cos\left[\theta x + (2n+2)\dfrac{\pi}{2}\right]$, $0 < \theta < 1$.

4. $y = \ln(1+x)$.

По формуле (28)

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + R_n, \tag{32}$$

где $R_n = (-1)^n \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}}$, $0 < \theta < 1$, $-1 < x \le 1$.

5. $y = (1+x)^m$.

По формуле (28)

$$\begin{aligned}(1+x)^m &= 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \ldots + \\ &+ \frac{m(m-1)\cdot\ldots\cdot(m-n+1)}{n!}x^n + R_n,\end{aligned} \tag{33}$$

где $R_n = \dfrac{m(m-1)\cdot\ldots\cdot(m-n)}{(n+1)!}\cdot(1+\theta x)^{m-n-1}\cdot x^{n+1}$,

$-1 < x \le 1$, $0 < \theta < 1$.

6. $y = \operatorname{arctg} x$.

По формуле (7)

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1} + R_n, \qquad (34)$$

где $R_{2n} < \dfrac{1}{2n+1}$, $\forall x \in [-1;1]$.

7. Применение формул Тейлора и Маклорена в приближённых вычислениях

Для важнейших функций, рассмотренных в предыдущем параграфе, $\lim\limits_{n\to+\infty} R_n(x) = 0$. Формула Тейлора (26) и формула Маклорена (28) позволяют приближённо представлять функцию $f(x)$ в виде многочлена:

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots +$$
$$+ \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

или $f(x) \approx f(0) + f'(0)x + \dfrac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$,

который называется многочленом Тейлора.

Остаточный член можно сделать меньше любого положительного числа:

$$\exists n_0 (n_0 \in \mathbf{N}),\ \forall n > n_0 \quad \Rightarrow \quad |R_n(x)| < \varepsilon$$

для любого положительного числа ε.

Пример 1. Найти приближённое значение числа e с точностью до $0{,}001$.

Решение. В формуле (29) положим $x = 1$:

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \frac{e^\theta}{(n+1)!}.$$

Найдём такое значение n, чтобы $R_n(1) = \dfrac{e^\theta}{(n+1)!} < 0{,}001$.

Так как $0<\theta<1$, то $e^{\theta}<3$, поэтому $\dfrac{e^{\theta}}{(n+1)!}<\dfrac{3}{(n+1)!}$.

Если $n=4$, то $\dfrac{3}{5!}=\dfrac{\cancel{3}}{1\cdot 2\cdot \cancel{3}\cdot 4\cdot 5}=\dfrac{1}{40}>0{,}001$.

Если $n=5$, то $\dfrac{3}{6!}=\dfrac{1}{240}>0{,}001$.

Если $n=6$, то $\dfrac{3}{7!}=\dfrac{1}{1680}<0{,}001$.

Тогда $e\approx 1+1+\dfrac{1}{2!}+\dfrac{1}{3!}+\dfrac{1}{4!}+\dfrac{1}{5!}+\dfrac{1}{6!}\approx$

$$\approx 2+0{,}5000+0{,}1667+0{,}0417+0{,}0083+0{,}0014=$$
$$=2{,}7181\approx 3{,}718.\ \blacktriangleright$$

Пример 2. Записать формулу Маклорена для бинома $(x+a)^n$, где $n\in\mathbf{N}$, при $n>1$.

Решение. Найдём значение функции $y=(x+a)^n$ и её производных $y^{(k)}$, $k=1,2,\ldots,n$ в точке $x=0$:

$y'=n(x+a)^{n-1}$, $y''=n(n-1)(x+a)^{n-2}$, …,

$y^{(n)}=n(n-1)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1=n!$.

$y(0)=a^n$, $y'(0)=na^{n-1}$, $y''(0)=n(n-1)a^{n-2}$, …, $y^{(n)}(0)=n!$.

По формуле (29) ищем:

$$(x+a)^n=a^n+na^{n-1}x+\frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}x^2+\ldots+x^n. \qquad (35)$$

Остаточный член $R_n(x)=0$ (почему?).

$(a+x)^2=a^2+2ax+x^2$, $(a+x)^3=a^3+3a^2x+3ax^2+x^3$ можно получить из формулы (35) соответственно при $n=2$ и $n=3$.

Пример 3. Найдите приближённое значение $\cos 5^{\circ}$ с точностью до 0,000001.

Решение. В формуле (31) положим $x = \frac{\pi}{180} \cdot 5 = \frac{\pi}{36}$ – радианная мера угла.

$$\cos 5^\circ = 1 - \frac{\pi^2}{2!36^2} + \frac{\pi^4}{4!36^4} - \ldots + (-1)^n \frac{\pi^{2n}}{(2n)!36^{2n}} + R_{2n+1}.$$

Определим число слагаемых этой формулы для получения заданной точности вычислений. Оценим величины последовательных остаточных членов R_{2n+1}:

$$|R_{2n+1}| = \left| \frac{\pi^{2n+2}}{(2n+2)!\,36^{2n+2}} \right| \cdot \left| \cos\left(\theta \frac{\pi}{36} + (2n+2)\frac{\pi}{2} \right) \right| \le$$

$$\le \frac{\pi^{2n+2}}{(2n+2)!\,36^{2n+2}},$$

$$|R_1| \le \frac{\pi^2}{2!\,36^2} \approx 0{,}004 > 10^{-6}, \; |R_3| \le \frac{\pi^4}{4!\,36^4} \approx 0{,}000003 > 10^{-6},$$

$$|R_5| \le \frac{\pi^6}{6!\,36^6} \approx 0{,}00000003.$$

Следовательно, $|R_5| < 0{,}000001$ и для получения заданной точности вычисления достаточно взять три первых члена:

$$\cos 5^\circ \approx 1 - \frac{\pi^2}{2!36^2} + \frac{\pi^4}{4!36^4} \approx 1 - 0{,}0038077 + 0{,}0000024 \approx$$

$$\approx 0{,}996195. \; ►$$

Пример 4. Найдите приближённое значение $\sqrt[3]{29}$ с точностью до $0{,}001$.

Решение. Преобразуем $\sqrt[3]{29}$:

$$\sqrt[3]{29}=\sqrt[3]{27+2}=\sqrt[3]{27\left(1+\frac{2}{27}\right)}=3\left(1+\frac{2}{27}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

В формуле (33) положим $x=\dfrac{2}{27}$ и $m=\dfrac{1}{3}$:

$$\sqrt[3]{29}=$$

$$=3\left(1+\frac{2}{27\cdot 3}+\frac{\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdot 2^2}{2!\cdot 27^2}+\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\cdot\left(\frac{1}{3}-2\right)2^3}{3!\cdot 27^3}+\ldots+R_n\right).$$

Оценим величины последовательных остаточных членов:

$$3|R_n|=3\left|\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\cdot\ldots\cdot\left(\frac{1}{3}-n\right)}{(n+1)!}\cdot\left(1+\theta\frac{2}{27}\right)^{\frac{1}{3}-n-2}\cdot\left(\frac{2}{27}\right)^{n+1}\right|,$$

$$3|R_1|<\left|\frac{3\cdot\frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot 2^2}{2!\cdot 27^2}\right|=\frac{3\cdot 2\cdot 2}{3^2\cdot 27^2}=\frac{12}{6561}\approx 0{,}002>0{,}001,$$

$$3|R_2|<\left|\frac{3\cdot\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{3}-1\right)\cdot\left(\frac{1}{3}-2\right)\cdot 2^3}{3!\cdot 27^2}\right|=\frac{3\cdot 5\cdot 8}{81^3}\approx 0{,}0002 \quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad |R_2|\approx 0{,}0007<0{,}001.$$

Следовательно, для получения заданной точности вычисления достаточно взять три первых члена:

$$\sqrt[3]{29}\approx 3(1+0{,}0247-0{,}0005)\approx 3{,}072. \ \blacktriangleright$$

Вычислите приближённо

№ 1. $\sqrt{e}$ с точностью до $0{,}0001$.

№ 2. $\sin 36^\circ$ с точностью до $0{,}001$.

№ 3. $\cos 10^\circ$ с точностью до $0{,}0001$.

№ 4. $\sqrt{70}$ с точностью до $0{,}001$.

№ 5. $\sqrt[7]{129}$ с точностью до $0{,}0001$.

Ответы: **1.** $1{,}6487$. **2.** $0{,}587$. **3.** $0{,}9848$.
4. $4{,}121$. **5.** $2{,}0022$.

8. Возрастание и убывание функции

Пусть функция $y = f(x)$ определена, непрерывна и дифференцируема в интервале $X = (a;b)$ (на отрезке $X = [a;b]$). Справедлива следующая теорема.

Теорема. *Необходимым и достаточным условием неубывания (невозрастания) функции* $y = f(x)$ в X является $f'(x) \ge 0$ $(f'(x) \le 0)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. *Необходимость.* Пусть функция $y = f(x)$ не убывает в X. Докажем, что $f'(x) \ge 0$ $\forall x \in X$.

Пусть $x \in X$ и $x + \Delta x \in X$. По теореме Лагранжа

$$f(x+\Delta x) - f(x) = f'(x+\theta\cdot\Delta x)\cdot\Delta x, \text{ где } 0<\theta<1.$$

Так как функция не убывает в X, то:

1) при $\Delta x > 0 \Rightarrow f'(x+\theta\cdot\Delta x)\cdot\Delta x \ge 0 \Rightarrow f'(x+\theta\cdot\Delta x) \ge 0$;

2) при $\Delta x < 0 \Rightarrow f'(x+\theta\cdot\Delta x)\cdot\Delta x \le 0 \Rightarrow f'(x+\theta\cdot\Delta x) \ge 0$.

Достаточность. Пусть $f'(x) \ge 0$ в X. Неубывание функции следует также из теоремы Лагранжа.

Доказательство невозрастания функции аналогично доказательству неубывания функции. ■

9. Экстремумы функции

Пусть функция $y = f(x)$ определена на отрезке $[a;b]$.

Определение 1. *Точка* $x_0 \in (a;b)$ *называется точкой максимума (минимума) функции* $y = f(x)$, *если существует такая* δ *– окрестность точки* x_0 $U = (x_0 - \delta; x_0 + \delta)$, *что* $\forall x \in \overset{o}{U}(x_0;\delta) \Rightarrow \Delta f(x_0) < 0 \ \ (\Delta f(x_0) > 0)$.

Точки максимума и минимума называются точками ***экстремума***. В интервале $(a;b)$ может быть несколько точек экстремума. Краткая запись: x_0 – точка max, x_0 – точка min, x_0 – точка ext – соответствует точке максимума, минимума, экстремума.

Значение функции в точке max x_0 называется максимумом функции $f(x)$: $y_{\max} = f(x_0)$, значение функции в точке минимума x_0 называется минимумом функции $f(x)$: $y_{\min} = f(x_0)$.

Максимумы и минимумы (max и min) называются экстремумами (ext) функции $f(x)$.

Теорема 1 ***(необходимое условие экстремума функции).*** *Если функции* $f(x)$ *в точке* $x_0 \in (a;b)$ *имеет экстремум, то* $f'(x_0) = 0$ *или не существует.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть, например, точка x_0 – точка max функции $f(x)$. Тогда $f(x_0) > f(x_0 + \Delta x)$ при достаточно малых Δx. Найдём производную $f'(x_0)$:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \begin{cases} \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} \le 0 \text{ при } \Delta x > 0, \\ \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} \ge 0 \text{ при } \Delta x < 0. \end{cases}$$

Рассмотрим случаи:

1) производная $f'(x_0)$ существует, тогда

$$f'(x_0-0)=f'(x_0+0) \quad \Rightarrow \quad f'(x_0)=0;$$

2) производная $f'(x_0)$ не существует, тогда

$$f'(x_0-0)\neq f'(x_0+0).$$

Аналогично рассматривается случай для минимума функции. ■

Следует заметить, что обратная теорема неверна, т.е. достаточного условия не существует.

Пример 1. $y=x^3$.

Найдём производную: $y'=3x^2$, которая равна нулю в точке $x=0$. Но в окрестности точки $x_0=0$ $\Delta f(0)$ меняет знак при переходе через точку $x_0=0$, т.е. функция $y=x^3$ возрастает и экстремума в точке $x_0=0$ не имеет.

Пример 2. $y=x^2$.

$y'=2x$, $2x=0$, $x=0$. $\Delta f(0)>0$ в точке $x=0$. По определению 1, точка $x_0=0$ является точкой экстремума.

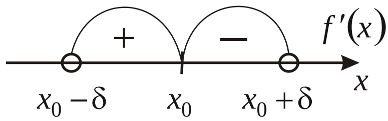
Определение 2. *Точки $x_1, x_2, \ldots$, в которых $f'(x)=0$, называются стационарными точками.*

Определение 3. *Точки $x_1, x_2, \ldots$, в которых производная $f'(x)$ не существует, называются критическими точками.*

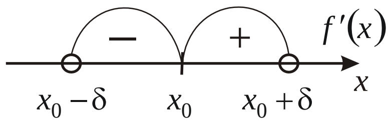
Стационарные и критические точки в дальнейшем будем называть точками возможного экстремума.

Теорема 2. *Пусть функция $y=f(x)$ непрерывно дифференцируема в окрестности точки возможного экстремума x_0, т.е. $f'(x_0)=0$ или $f'(x)$ не существует. Тогда:*

1) если при переходе через точку x_0 производная $f'(x)$ меняет знак, то x_0 – точка ext:

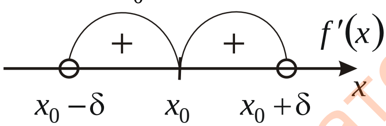
а) 

x_0 - точка *max*;

б) 

x_0 - точка *min*;

2) если при переходе через точку x_0 производная $f'(x)$ не меняет знак, то x_0 не является точкой ext:

в) 

Изобразим а, б и в на рис. 11

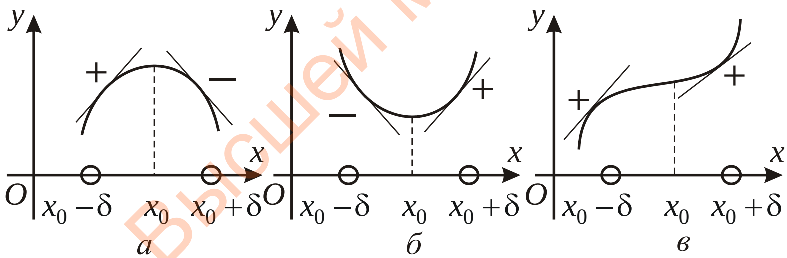


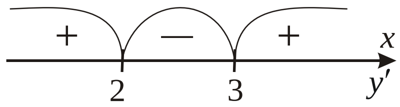
Рис. 11

Пример 3. Найти точки *max* и *min* функции $y = x^3 - \dfrac{15}{2}x^2 + 18x - 1$.

Решение. $y' = 3x^2 - 15x + 18$. Найдём возможные точки *ext:*

$3x^2 - 15x + 18 = 0$, $x^2 - 5x + 6 = 0 \Rightarrow x_1 = 2$, $x_2 = 3$.

$y' = 3(x-2)(x-3)$.



$\Rightarrow$

$\Rightarrow x_1 = 2$ – точка *max*, $x_2 = 3$ – точка *min*.

$$y_{\max} = f(2) = 2^3 - \frac{15}{2} \cdot 2^2 + 18 \cdot 2 - 1 = 13,$$

$$y_{\min} = f(3) = 3^3 - \frac{15}{2} \cdot 3^2 + 18 \cdot 3 - 1 = 12{,}5. \ \blacktriangleright$$

Теорема 3. *(2-е достаточное условие ext).*

Пусть функция $y = f(x)$ *дважды непрерывно дифференцируема в окрестности стационарной точки* x_0. *Если* $f''(x_0) < 0$ $\left(f''(x_0) > 0\right)$, *то точка* x_0 *является точкой максимума (минимума) функции* $y = f(x)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Запишем формулу Тейлора (5) п. 5 с остаточным членом в форме Пеано:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + o\left((x - x_0)^2\right).$$

Так как $f'(x_0) = 0$, то из этой формулы получим:

$$\Delta f(x_0) = f(x) - f(x_0) = \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + o\left((x - x_0)^2\right).$$

По условию теоремы 3 $f''(x_0) < 0$ $\left(f''(x_0) > 0\right)$, следовательно, $\Delta f(x_0) < 0$ $\left(\Delta f(x_0) > 0\right)$. По определению 1 точка x_0 является точкой *max* (точкой *min*). ■

Пример 4. Найти точки экстремума функции $y = 2x^3 + 3x^2 - 2$.

Решение. $y' = 6x^2 + 6x = 6x(x+1)$, $6x(x+1) = 0$, $x_1 = 0$, $x_2 = -1$ – стационарные точки. Найдём y'': $y'' = 12x + 6$. $y''(0) = 6 > 0$, $y''(-1) = -6 < 0$ $\Rightarrow$ $x_1 = 0$ – точка *min*, $x_2 = -1$ – точка *max*. ▶

10. Наименьшее и наибольшее значения функции

Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$.

Определение 1. *Число m называется наименьшим значением функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$, если*

$$m = f(x_1) \le f(x) \quad \forall x \ne x_1 \in [a;b].$$

Определение 2. *Число M называется наибольшим значением функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$, если*

$$M = f(x_2) \ge f(x) \quad \forall x \ne x_2 \in [a;b].$$

По теореме Вейерштрасса, для функции $y = f(x)$, непрерывной на отрезке $[a;b]$, наименьшее и наибольшее значения существуют.

Если наименьшее значение m (наибольшее M) достигается в некоторой внутренней точке отрезка $[a;b]$ (в интервале $(a;b)$), то это будет, очевидно, одним из минимумов (максимумов). Но оно может достигаться хотя бы на одном конце промежутка, т.е. в точках a и b.

Таким образом, для нахождения наименьшего и наибольшего значений функции нужно сравнить все значения в точках возможного *ext* и в её граничных точках a и b. Наименьшее и наибольшее значения из этих чисел и будут решением задачи на нахождения наименьшего и наибольшего значений функции $y = f(x)$ на отрезке $[a;b]$.

Самостоятельно найти M и m для монотонно возрастающей функции $f(x)$ на $[a;b]$.

Пример 1. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $y = \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} + 4$ на отрезке $[-2;2]$.

Решение. $y' = x^3 - x$, $y' = 0 \Rightarrow x^3 - x = 0$,

$x(x-1)(x+1) = 0 \Rightarrow x_1 = 0, \quad x_2 = -1, \quad x_3 = 1$ – стационарные точки принадлежат интервалу $(-2;2)$.

Найдём значения функции в точках 0; -1; -2; 2; 1.

$$f(0)=4,\ f(-1)=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}+4=3{,}75,\ f(1)=3{,}75;$$

$$f(-2)=\frac{(-2)^4}{4}-\frac{(-2)^2}{2}+4=4-2+4=6;\ f(2)=6.$$

$$y_{наим.}=f(\pm1)=3{,}75,\ y_{наиб.}=f(\pm2)=6. \ ▶$$

Пример 2. Найти стороны прямоугольника наибольшей площади, который можно вписать в окружность $x^2+y^2=R^2$ (см. рис. 12).

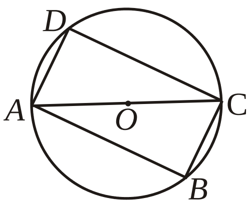


Рис. 12

Решение. Пусть $AB=x$, тогда из ΔABC $BC=\sqrt{4R^2-x^2}$. Площадь прямоугольника $ABCD$

$$S(x)=x\cdot\sqrt{4R^2-x^2},\ x\in[0;2R].$$

Найдём наибольшую площадь прямоугольника на отрезке $[0;2R]$:

$$S'(x)=\sqrt{4R^2-x^2}+\frac{x\cdot(-2x)}{2\sqrt{4R^2-x^2}}=\frac{4R^2-2x^2}{\sqrt{4R^2-x^2}}$$

$$\left[\begin{array}{l} y'=0, \\ y' \text{ не существует}\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 4R^2-2x^2=0 \\ 4R^2-x^2=0\end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=R\sqrt{2} \\ x=\pm2R\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=R\sqrt{2} \\ x=2R\end{array}\right. \text{ – точки возможного } ext.$$

Вычислим значение функции в точках $R\sqrt{2}$, 0 и $2R$:

$$S\left(R\sqrt{2}\right)=R\sqrt{2}\cdot\sqrt{4R^2-2R^2}=R\sqrt{2}\cdot R\sqrt{2}=2R^2,$$

$S(0)=0$, $S(2R)=0$. Следовательно, $S_{наиб.}=2R^2$, стороны прямоугольника $R\sqrt{2}$ и $R\sqrt{2}$ – квадрат. ▶

11. Выпуклость и вогнутость графика функции. Точки перегиба

Пусть функция $y=f(x)$ дифференцируема в интервале $(a;b)$. Тогда существует касательная к графику функции в любой точке этого интервала.

Определение 1. *График функции называется* ***выпуклым*** *в интервале* $(a;b)$, *если он расположен ниже касательной, проведённой в любой точке этого интервала (рис. 13).*

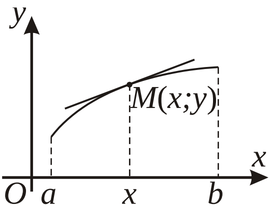


Рис. 13

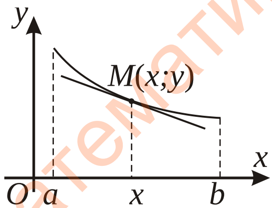


Рис. 14

Определение 2. *График функции называется* ***вогнутым*** *в интервале* $(a;b)$, *если он расположен выше касательной, проведённой в любой точке этого интервала (рис. 14).*

Определение 3. *Точка* $x_0\in(a;b)$ *называется абсциссой точки перегиба* $M_0(x_0;y_0)$ *графика функции* $y=f(x)$, *если в этой точке выпуклость меняется на вогнутость* (рис. 15).

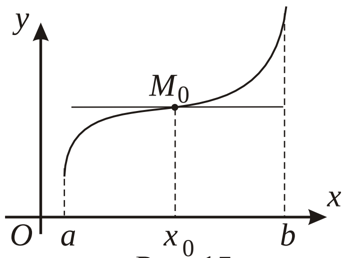


Рис. 15

Теорема 1 *[достаточный признак выпуклости (вогнутости) графика функции]. Если функция* $y=f(x)$ *дважды непрерывно дифференцируемая в интервале* $(a;b)$ *и* $f''(x)<0$ $(f''(x)>0)$, *то график функции* $y=f(x)$ *– выпуклый (вогнутый) в этом интервале.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Разложим функцию $y = f(x)$ по формуле Тейлора (5) п. 5 для любой точки $x_0 \in (a;b)$:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0 + \theta\Delta x)}{2!}(x - x_0)^2 .$$

Введём обозначения: $y_k = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ – уравнение касательной, $f''(x_0 + \theta\Delta x) = f''(x_0) + \alpha(\Delta x)$, где $\alpha(\Delta x)$ – бесконечно малая функция. Тогда

$$f(x) = y_k + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{\alpha(\Delta x)}{2!}(x - x_0)^2 .$$

Если $f''(x_0) < 0$, то $f(x) - y_k < 0$, т.е. $f(x) < y_k$ – график функции $y = f(x)$ выпуклый по определению 1; если $f''(x_0) > 0$, то $f(x) - y_k > 0$, т.е. $f(x) > y_k$ – график функции $y = f(x)$ вогнутый по определению 2.

Теорема 2 *(необходимое условие точки перегиба).*

Пусть функция $y = f(x)$ *удовлетворяет следующим условиям:*

1) непрерывна в интервале $(a;b)$*;*

2) $x_0 \in (a;b)$ *– абсцисса точки перегиба* $M_0(x_0, f(x_0))$*,*

3) в окрестности точки x_0*, за исключением, быть может, точки* x_0*, существует* $f''(x)$.

Тогда $f''(x) = 0$ *или не существует.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим противное, то есть, что $f''(x_0) \neq 0$. Пусть, например, $f''(x) < 0$. Но, по теореме 1, график функции $y = f(x)$ – выпуклый и, следовательно, точка $M_0(x_0, f(x_0))$ не будет являться точкой перегиба, что противоречит условию теоремы. ■

Теорема 3 *(достаточное условие точки перегиба).*

Пусть в $(a;b)$ *функция* $y=f(x)$ *дважды непрерывно дифференцируема в окрестности точки* $x_0\in(a;b)$, *за исключением, быть может, самой точки* x_0 *и пусть* $f''(x_0)=0$ *или не существует. Если при переходе через точку* x_0 $f''(x)$ *меняет свой знак, то* x_0 *– абсцисса точки перегиба.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $f''(x)<0$ при $x<x_0$ и $f''(x)>0$ при $x>x_0$. Это означает, что слева от точки x_0 график функции $y=f(x)$ выпуклый, а справа – вогнутый. По определению 3, точка $M_0(x_0, f(x_0))$ является точкой перегиба.

Определение 4. *Точки, в которых* $f''(x)=0$ *или не существуют, называются* ***критическими точками на перегиб***.

Пример 1. Определить промежутки выпуклости и вогнутости графика функции

$$y=3x^5-5x^4+3x-2,$$

а также найти точки перегиба.

Решение. $y=3x^5-5x^4+3x-2$, $y'=15x^4-20x^3+3$, $y''=60x^3-60x^2$. Найдём критические точки на перегиб:

$$60x^3-60x^2=0,\ 60x^2(x-1)=0\Rightarrow x_1=0,\ x_2=1.$$

Исследуем $y''=60x^2(x-1)$ методом интервалов.

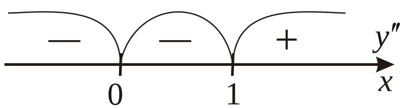


График выпуклый на промежутке $(-\infty;1]$, так как $y''\le 0$, и вогнутый на промежутке $[1;+\infty)$, так как $y''>0$

при $x>1$. В точке $x=1$ y'' меняет свой знак, следовательно, $x=1$ – абсцисса точки перегиба. Найдём $y(1)$: $y(1)=3-5+3-2=-1$. Точка $M_0(1;-1)$ – точка перегиба. ◄

12. Асимптоты графика функции

Определение 1. *Прямая ℓ называется* ***асимптотой*** *кривой $y=f(x)$, если расстояние от точки $M(x,y)$ этой кривой до прямой ℓ стремится к нулю при неограниченном удалении точки M по кривой от начала координат, т.е. при стремлении хотя бы одной из координат точки $M(x,y)$ к бесконечности (рис. 16).*

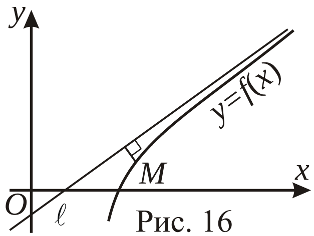


Рис. 16

Существуют два вида асимптот: *вертикальные* и *наклонные*.

Определение 2. *Прямая $x=a$ называется вертикальной асимптотой кривой $y=f(x)$, если хотя бы один из односторонних пределов $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)$ или $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$ равен $+\infty$ или $(-\infty)$.*

Определение 3. *Прямая $y=kx+b$ называется наклонной асимптотой кривой $y=f(x)$ при $x\to+\infty$ (или $x\to-\infty$), если $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty \\ (x\to-\infty)}} \left(f(x)-(kx+b)\right)=0$.*

При $k=0$ прямая $y=b$ называется *горизонтальной асимптотой*.

Задача. Кривая $y=f(x)$ задана в промежутке $(-\infty;+\infty)$ и имеет наклонную асимптоту $y=kx+b$ при $x\to+\infty$.

Найти k и b.

Решение. По определению 3 наклонной асимптоты,

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-(kx+b)\right)=0,\ \lim_{x\to+\infty} x\left(\frac{f(x)}{x}-k-\frac{b}{x}\Rightarrow\right)=0\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{f(x)}{x}-k\right)=0\ \Rightarrow\ k=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}.$$

Зная k, найдём $b=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-kx\right)$. ►

Следовательно, прямая $y=kx+b$ является наклонной асимптотой кривой $y=f(x)$, если существуют конечные пределы

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x},\ b=\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-kx\right). \qquad (36)$$

В этом случае говорят о существовании правой асимптоты.

Аналогичные рассуждения можно провести для $x\to-\infty$. В этом случае говорят о существовании левой асимптоты.

Если не существует хотя бы один конечный предел (36), то кривая $y=f(x)$ не имеет правой (левой при $x\to-\infty$) асимптоты.

Пример. Найти асимптоты функции $y=\dfrac{x^4}{8-x^3}$.

Решении:. а) вертикальная асимптота $x=2$, так как

$$\lim_{\substack{x\to2-0\\(x\to2+0)}}\frac{x^4}{8-x^3}=+\infty\ \left(-\infty\right);$$

б) наклонная асимптота $y=kx+b$.

$$k=\lim_{\substack{x\to+\infty\\(x\to-\infty)}}\frac{f(x)}{x}=\lim_{\substack{x\to+\infty\\(x\to-\infty)}}\frac{x^4}{x\left(8-x^3\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{8-x^3}=-1.$$

$$b=\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-kx\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^4}{8-x^3}-x\right)=0.$$

Таким образом, наклонная асимптота $y=-x$.

Ответ: $x=2$, $y=-x$.

13. Общая схема исследования функции и построения её графика

Зная основные характерные особенности исследуемой функции $y=f(x)$ (экстремумы, точки перегиба, асимптоты) , можно провести полное исследование функции и построить её график. Под полным исследованием функции обычно понимается решение вопросов по следующей схеме.

1. Найти область определения функции.
2. Найти точки разрыва функции.
3. Исследовать функцию на чётность, нечетность, периодичность.
4. Найти асимптоты.
5. Найти точки пересечения с осями координат.
6. Найти промежутки возрастания и убывания функции и её экстремумы.
7. Найти промежутки выпуклости и вогнутости графика функции и точки её перегиба.
8. Построить график функции, используя все полученные результаты.

Пример. Исследовать функцию $y=\dfrac{x^3}{3-x^2}$ и построить её график.

Решение. По общей схеме последовательно находим сдедующее.

1. Область определения функции.

$$D(f)=\left(-\infty;-\sqrt{3}\right)\cup\left(-\sqrt{3};\sqrt{3}\right)\cup\left(\sqrt{3};+\infty\right).$$

2. $x_1=-\sqrt{3}$, $x_1=\sqrt{3}$ – точки разрыва 2-го рода, так как

$$\lim_{x\to-\sqrt{3}-0}\frac{x^3}{3-x^2}=+\infty,\quad \lim_{x\to\sqrt{3}-0}\frac{x^3}{3-x^2}=+\infty.$$

3. $f(-x)=\dfrac{(-x)^3}{3-(-x)^2}=-\dfrac{x^3}{3-x^2}=-f(x)$ – нечётная функция. $f(x+T)\neq f(x)$ $\forall T\neq 0$ – непериодическая функция.

4. а) Из второго пункта схемы следует, что прямые $x=-\sqrt{3}$ и $x=\sqrt{3}$ являются вертикальными асимптотами.

б) найдём наклонные асимптоты: $y=kx+b$.

$$k=\lim_{\substack{x\to+\infty\\(x\to-\infty)}}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{x\left(3-x^2\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{3-x^3}=-1.$$

$$b=\lim_{\substack{x\to+\infty\\(x\to-\infty)}}\left(f(x)-kx\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{3-x^2}+x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{3x}{3-x^2}=0.$$

Следовательно, $y=-x$ – наклонная асимптота.

5. Точка пересечения графика функции с осями координат $O(0;0)$.

6. Найдём точки возможного экстремума:

$$y'=\frac{3x^2\left(3-x^2\right)+2x\cdot x^3}{\left(3-x^2\right)^2}=\frac{x^2\left(9-x^2\right)}{\left(3-x^2\right)^2}=\frac{x^2(3-x)(3+x)}{\left(3-x^2\right)^2}.$$

$$\left[\begin{array}{l} y'=0,\\ y'\ \text{не существует}\end{array}\right.\qquad \left[\begin{array}{l} x^2\left(9-x^2\right)=0,\\ \left(3-x^2\right)^2=0\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x_1=0,\ x_2=-3,\ x_3=3\\ x_4=-\sqrt{3},\ x_5=-\sqrt{3}-\text{точки разрыване являются}\\ \qquad\qquad\qquad\qquad\text{критическими.}\end{array}\right.$$

Исследуем y' методом интервалов (рис. 17):

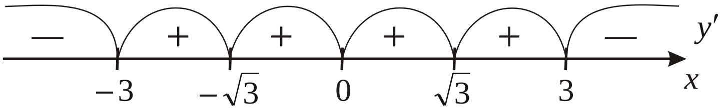


Рис. 17

На рис. 17 видно, что точка 0 не является точкой *ext*, точка (-3) – точка *min*, 3 – точка *max*.

$$y_{\min} = f(-3) = \frac{(-3)^3}{3-(-3)^2} = 4{,}5; \quad y_{\max} = \frac{3^3}{3-3^2} = -4{,}5.$$

Функция убывает на промежутках $(-\infty;-3]$ и $[3;+\infty)$, функция возрастает на промежутках $\left[-3;\sqrt{3}\right)$, $\left(-\sqrt{3};\sqrt{3}\right)$, $\left(\sqrt{3};3\right]$.

7. Найдём промежутки выпуклости и вогнутости функции, точки перегиба. Для этого вычислим производную второго порядка y'':

$$y'' = \frac{\left(18x-4x^3\right)\left(3-x^2\right)^2 + 2\left(3-x^2\right)\cdot 2x^3\left(9-x^2\right)}{\left(3-x^2\right)^4} =$$

$$= \frac{2x\left(3-x^2\right)\left(27-9x^2-6x^2+2x^4+18x^2-2x^4\right)}{\left(3-x^2\right)^4} =$$

$$= \frac{2x\left(27+3x^2\right)}{\left(3-x^2\right)^3} = \frac{6x\left(9+x^2\right)}{\left(3-x^2\right)^3}.$$

$$\left[\begin{array}{l} y''=0, \\ y'' \text{ не } \exists \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} 6x\left(x^2+9\right)=0 \\ \left(3-x^2\right)^3=0 \end{array}\right. \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ $x=0$ – критическая точка на перегиб.

Точки $x = \pm\sqrt{3} \notin D(f)$ и не являются критическими. Исследуем поведение y'' методом интервалов:

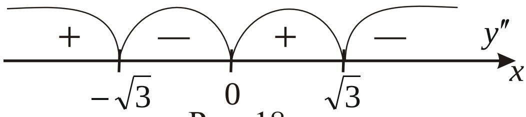


Рис. 18

Точка $x = 0$ – абсцисса точки перегиба, так как вторая производная в её окрестности меняет знак.

Точка перегиба $O(0;0)$, так как $y(0) = 0$.

График функции является выпуклым на промежутках $\left(-\sqrt{3};0\right]$ и $\left(\sqrt{3};+\infty\right)$, а на промежутках $\left(-\infty;-\sqrt{3}\right)$, $\left[0;\sqrt{3}\right)$ – вогнутым.

8. Для построения графика функции (рис. 20) сведём все результаты в таблицу (рис.19).

	$-\infty$		-3		$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$		3		$+\infty$
y'		—		+		+		+		+		—	
y''		+		+		—		+		—		—	
y			4,5				0				$-4,5$		

Рис. 19

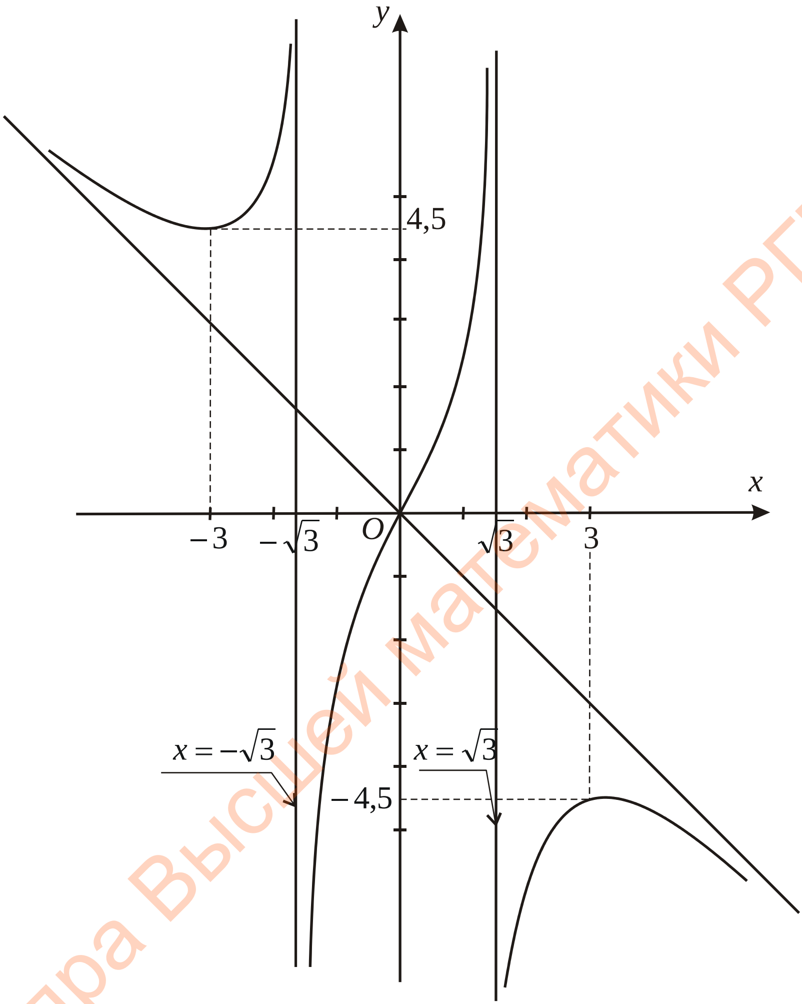


Рис. 20

14. Задания для самостоятельной работы

№ 1. Определить интервалы возрастания и убывания функций:

а) $y=x^3+3x^2+3x-2$; б) $y=\lg\left(1-x^2\right)$; в) $y=x-2\sin x$;

г) $y=|x-1|$; д) $y=\ln|x|$.

№ 2. Исследовать функции на экстремум:

а) $y = x^3 - 12x$; б) $y = x\sqrt{1 - x^2}$;

в) $y = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 5$.

№ 3. Найти наименьшее и наибольшее значения функций:

а) $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 35$ на отрезке $[-4;4]$;

б) $y = x - 2\ln x$ на отрезке $[1;e]$;

в) найти стороны прямоугольника наибольшей площади, который можно вписать в эллипс $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{9} = 1$;

г) найти наибольший объём цилиндра, у которого полная поверхность равна S.

№ 4. Найти интервалы выпуклости и вогнутости графика функции и точки перегиба:

а) $y = (x+1)^2(x-2)$; б) $y = 3 - \sqrt[5]{(x+2)^7}$;

в) $y = x^4 - 8x^3 + 24x^2$.

№ 5. Найти асимптоты:

а) $y = \dfrac{x^3 + 4}{x^2}$; б) $y = \dfrac{x^3}{(x-2)^2}$; в) $y = x + 2 - \sqrt[3]{x^5}$.

№ 6. Исследовать функции по общей схеме и построить их графики:

а) $y = \dfrac{x^3}{x^2 + 1}$; б) $y = \dfrac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$; в) $y = xe^{-x^2}$;

г) $y = \dfrac{3 - x^2}{x + 2}$; д) $y = 1 + \dfrac{4x + 1}{x^2}$.

Ответы.

№ 1. а) возрастает в $\mathbf{R}$;

б) $(-1;0)$ – возрастает; $(0;1)$ – убывает;

в) $\left(\frac{\pi}{3}+2\pi n;\frac{5\pi}{3}+2\pi n\right)$, $n\in\mathbf{Z}$, – возрастает;

$\left(-\frac{\pi}{3}+2\pi n;\frac{\pi}{3}+2\pi n\right)$, $n\in\mathbf{Z}$, – убывает;

г) $(-\infty;1)$ – убывает, $(1;+\infty)$ – возрастает;

д) $(-\infty;0)$ – убывает, $(0;+\infty)$ – возрастает.

№ 2. а) $x_1=-2$ – точка *max*,

$y_{\max}=16$, $x_2=2$ – точка *min*, $y_{\min}=-16$;

б) $y_{\max}=f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=0{,}5$, $y_{\min}=f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-0{,}5$;

в) $y_{\min}=f(1)=4$.

№ 3. а) $y_{наим}=f(-4)=-41$; $y_{наиб}=f(-1)=40$;

б) $y_{наим}=f(2)=2(1-\ln 2)$; $y_{наиб}=f(1)=1$;

в) $5\sqrt{2}$ и $3\sqrt{2}$; г) $V=\frac{S}{3}\sqrt{\frac{S}{6\pi}}$.

№ 4. а) $(-\infty;0)$ – выпуклый график,

$(0;+\infty)$ – вогнутый график; $(0;-2)$ – точка перегиба;

б) $(-\infty;-2)$ – вогнутый график,

$(-2;+\infty)$ – выпуклый график; $(-2;3)$ – точка перегиба;

в) график вогнутый в $\mathbf{R}$.

№ 5. а) $x=0$ – вертикальная асимптота, $y=x$ – наклонная асимптота; б) $x=2$ – вертикальная асимптота, $y=x+4$ – наклонная асимптота; в) асимптот нет.

№ 6. а) $y=x$ – наклонная асимптота; $x_1=0$, $x_2=-\sqrt{3}$, $x_3=\sqrt{3}$ – абсциссы и точек перегиба;

б) $x=-1$, $x=1$ – вертикальные асимптоты,

$y=1$ – горизонтальная асимптота; $y_{\max}=f(0)=-1$;

в) $y_{\max} = f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \approx -0{,}5$, $y_{\min} = f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \approx 0{,}5$,

$x_1 = 0$, $x_2 = -\frac{\sqrt{6}}{2}$, $x_3 = \frac{\sqrt{6}}{2}$ – абсциссы точек перегиба;

г) $x = -2$, $y = -x + 2$ – асимптоты, $y_{\min} = f(-3) = 6$,

$y_{\max} = f(-1) = 2$;

д) $x = 0$, $y = 1$ – асимптоты, $x_1 = -0{,}5$ – точка *min*,

$y_{\min} = -3$, $x_2 = -\frac{3}{4}$ – абсцисса точек перегиба,

$\left(-\frac{3}{4}; -\frac{23}{9}\right)$ – точка перегиба.

Библиографический список

1. *Данко П.Е., Попов А.К., Кожевникова Т.Я.* Высшая математика в упражнениях и задачах. Т.1. – М.: АСТ Мир и образ, 2016.
2. *Пискунов Н.С.* Дифференциальное и интегральное исчисление. Т.1. – М: Интеграл – Пресс, 2004.

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Производная…………………………………………………3
1.1. Задачи, приводящие к понятию производной функции……………………………..3
1.2. Определение производной…………………………...5
1.3. Понятие дифференцируемости функции в данной точке………………………………………..8
1.4. Связь между дифференцируемостью и непрерывностью функции…………………………...8
1.5. Правила дифференцирования суммы, произведения и частного…………………………...10
1.6. Производная обратной функции…………………...12
1.7. Производная сложной функции……………………13
1.8. Вычисление производных элементарных функций14
1.9. Производная степенно-показательных выражений.18
1.10. Сводка формул…………………………………….19
1.11 Уравнение касательной и уравнение нормали к кривой……..……………20
1.12. Определение дифференциала функции…………..21
1.13. Геометрический смысл дифференциала………….22
1.14. Основные формулы дифференциалов……………23
1.15. Инвариантность формы дифференциала…………24
1.16. Методические указания к практическим занятиям…………………………..25
1.17. Производные и дифференциалы высших порядков……………………………………..38
1.17.1. Определение производной n-го порядка….38
1.17.2. Физический смысл производной второго порядка……………………………..40
1.17.3. Вычисление производных высших порядков…………………………...40
1.17.4. Дифференциалы высших порядков………..43
1.18. Дифференцирование неявных функций…………45

1.19. Дифференцирование функций,
заданных параметрически…………………………...47
2. Некоторые теоремы о дифференцируемых функциях...51
3. Правила Лопиталя…………………………………...54
4. Раскрытие неопределённостей других видов…………..58
5. Формула Тейлора…………………………………….....62
6. Разложение важнейших функций по формуле
Маклорена с остаточным членом в форме Лагранжа….64
7. Применение формул Тейлора и Маклорена
в приближённых вычислениях……………………….66
8. Возрастание и убывание функции……………………70
9. Экстремумы функции…………………………………71
10. Наименьшее и наибольшее значения функции……….75
11. Выпуклость и вогнутость графика функции.
Точки перегиба…………………………………………77
12. Асимптоты графика функции…………………………80
13. Общая схема исследования функции
и построения её графика………………………………...82
14. Задания для самостоятельной работы…………………86
Библиографический список ……………………………....89

К а р а с ё в Иван Петрович

Производная

Редактор М.Е. Цветкова
Корректор С.В. Макушина
Подписано в печать 28.05.18. Формат бумаги 60×84 1/16.
Бумага писчая. Печать трафаретная. Усл. печ. л. 5,75.
Тираж 25 экз. Заказ
Рязанский государственный радиотехнический университет
390005, Рязань, ул. Гагарина, 59/1.
Редакционно-издательский центр РГРТУ.