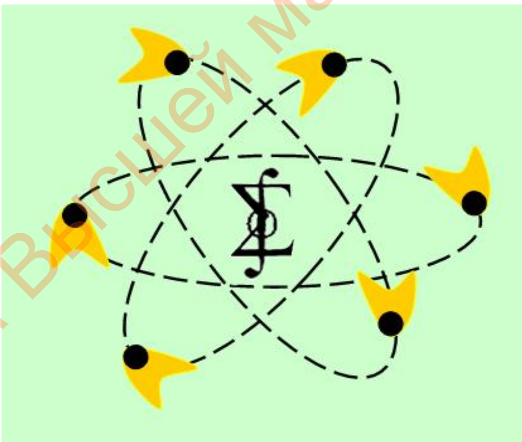
МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

РЯЗАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ РАДИОТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Н.В. ЕЛКИНА,

Г.С. ЛУКЬЯНОВА

ЛИНЕЙНЫЕ ПРОСТРАНСТВА И ОПЕРАТОРЫ



Рязань 2018

Министерство образования и науки Российской Федерации

Рязанский государственный радиотехнический университет

Н.В. ЕЛКИНА,

Г.С. ЛУКЬЯНОВА

ЛИНЕЙНЫЕ ПРОСТРАНСТВА И ОПЕРАТОРЫ

Учебное пособие

Рязань 2018

УДК 517.98

Линейные пространства и операторы: учеб. пособие /Н.В. Елкина, Г.С. Лукьянова; Рязан. гос. радиотехн. ун-т. – Рязань, 2018. – 80 с.

Содержит основные теоретические сведения и решение типовых задач по теме «Линейные пространства и операторы» в соответствии с Федеральным государственным образовательным стандартом высшего образования.

Предназначено для студентов всех направлений и специальностей, изучающих высшую математику.

Библиогр.: 8 назв.

Линейное пространство, линейный оператор, матрица оператора, квадратичная форма

Печатается по решению редакционно-издательского совета Рязанского государственного радиотехнического университета.

Рецензент: кафедра высшей математики Рязанского государственного радиотехнического университета (доц. кафедры канд. экон. наук А.И. Новиков)

1. Линейные пространства

Рассмотрим множество $\mathbf{V}$ элементов произвольной природы, которые будем называть векторами и обозначать $\overline{x}$ (учтите, что под вектором может пониматься как геометрический или арифметический вектор, так и матрица, функция и т.д.). На этом множестве зададим две линейные операции – сложение векторов и умножение вектора на действительное число. Причем множество $\mathbf{V}$ ***замкнуто относительно этих операций***, т.е. результат выполнения операций принадлежит рассматриваемому множеству $\mathbf{V}$:

а) $\forall \overline{x} \in \mathbf{V}\ \ \forall \overline{y} \in \mathbf{V}$ верно $(\overline{x}+\overline{y}) \in \mathbf{V}$,

б) $\forall \overline{x} \in \mathbf{V}\ \ \forall \alpha \in \mathbb{R}$ верно $(\alpha \cdot \overline{x}) \in \mathbf{V}$.

Множество $\mathbf{V}$ с введенными на нем операциями сложения элементов $(\,+\,)$ и умножения элемента на число $(\,\cdot\,)$ называется ***линейным (векторным) пространством***, если выполняются следующие условия:

1º. $\forall \overline{x}, \overline{y} \in \mathbf{V}:\ \left(\overline{x}+\overline{y}=\overline{y}+\overline{x}\right)$ – аксиома коммутативности сложения векторов.

2º. $\forall \overline{x}, \overline{y}, \overline{z} \in \mathbf{V}:\ \left(\overline{x}+\overline{y}\right)+\overline{z}=\overline{x}+\left(\overline{y}+\overline{z}\right)$ – аксиома ассоциативности сложения векторов.

3º. $\exists \overline{\theta} \in \mathbf{V},\ \forall \overline{x} \in \mathbf{V}:\ \overline{x}+\overline{\theta}=\overline{x}$ – существование нулевого элемента $\overline{\theta}$ во множестве $\mathbf{V}$.

4º. $\forall \overline{x} \in \mathbf{V},\ \exists\left(-\overline{x}\right) \in \mathbf{V}:\ \overline{x}+\left(-\overline{x}\right)=\overline{\theta}$ – для каждого элемента $\overline{x}$ существование противоположного элемента $\left(-\overline{x}\right)$.

5º. $\forall \alpha \in \mathbb{R},\ \forall \overline{x}, \overline{y} \in \mathbf{V}:\ \alpha \cdot\left(\overline{x}+\overline{y}\right)=\alpha \cdot \overline{x}+\alpha \cdot \overline{y}$ – аксиома дистрибутивности относительно сложения векторов.

6º. $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R},\ \forall \overline{x} \in \mathbf{V}:\ \left(\alpha+\beta\right) \cdot \overline{x}=\alpha \cdot \overline{x}+\beta \cdot \overline{x}$ – аксиома дистрибутивности относительно сложения чисел.

7º. $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R},\ \forall \overline{x} \in \mathbf{V}:\ \alpha \cdot\left(\beta \overline{x}\right)=\left(\alpha\beta\right) \cdot \overline{x}$ – аксиома ассоциативности умножения вектора на число.

8$^{\mathbf{o}}$. $\forall\ \bar{x} \in \mathbf{V}:\ 1\cdot\bar{x} = \bar{x}$ – особая роль единицы.

Линейное пространство будем обозначать $(\mathbf{V}, +, \cdot\,)$.

Примерами линейных пространств могут служить:

1. Множества V_3 – векторов в пространстве, V_2 – векторов на плоскости, V_1 – векторов на прямой с обычными операциями сложения и умножения на число образуют линейные пространства. Выполнение аксиом 1^0 - 8^0 линейного пространства доказывается в курсе аналитической геометрии.

2. Множество $M_{m\times n}$ – матриц размером $m\times n$ с операциями сложения матриц и умножения матриц на число. Аксиомы линейного пространства выполняются, при этом нулевым вектором $\bar{\theta}$ служит нулевая матрица $\Theta = \{0\}_{m\times n}$.

3. Множество $P_n(x)$ – многочленов степени, не превосходящей n, где сложение векторов-многочленов и умножение на число определяются по формулам:

а) если $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ и $Q(x) = b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + b_1 x + b_0$, то

$$P(x) + Q(x) = (a_n + b_n)x^n + \ldots + (a_1 + b_1)x + (a_0 + b_0);$$

б) если $\lambda \in \mathbb{R}$, то

$$\lambda\cdot P(x) = (\lambda\cdot a_n)x^n + (\lambda\cdot a_{n-1})x^{n-1} + \ldots + (\lambda\cdot a_1)x + (\lambda\cdot a_0).$$

Задача 1. Пусть множество M состоит из всевозможных упорядоченных пар действительных чисел $\bar{x} = (x_1, x_2)$. Пусть на этом множестве заданы следующие операции:

а) $\forall\bar{x} = (x_1, x_2)$, $\forall\bar{y} = (y_1, y_2) \in M$:

$$\bar{x} \oplus \bar{y} = (x_1 + y_1;\ x_2 + y_2),$$

б) $\forall\alpha \in \mathbb{R}$, $\forall\bar{x} = (x_1, x_2) \in M$:

$$\alpha \odot \bar{x} = (\alpha x_1;\ x_2).$$

Является ли M линейным пространством?

►Проверим выполнимость аксиом линейного пространства.

1. Коммутативность сложения:

$$\overline{x} \oplus \overline{y} = (x_1 + y_1; x_2 + y_2) = (y_1 + x_1; y_2 + x_2) = \overline{y} \oplus \overline{x}.$$

2. Ассоциативность сложения:

$$(\overline{x} \oplus \overline{y}) \oplus \overline{z} = ((x_1 + y_1) + z_1; (x_2 + y_2) + z_2) =$$

$$= (x_1 + (y_1 + z_1);\ x_2 + (y_2 + z_2)) = \overline{x} \oplus (\overline{y} \oplus \overline{z}).$$

3. Существование нулевого элемента:

$$\exists \overline{\Theta} = (0;0) \in M: \quad \overline{x} \oplus \overline{\Theta} = (x_1 + 0; x_2 + 0) = (x_1; x_2) = \overline{x}.$$

4. Существование противоположного элемента:

$$\exists (-\overline{x}) \in M, \quad -\overline{x} = (-x_1, -x_2):$$

$$\overline{x} \oplus (-\overline{x}) = (x_1 - x_1; x_2 - x_2) = (0;0) = \overline{\Theta}.$$

5. Дистрибутивность сложения векторов:

$$\alpha \odot (\overline{x} \oplus \overline{y}) = \alpha \odot (x_1 + y_1; x_2 + y_2) = (\alpha(x_1 + y_1); x_2 + y_2) =$$

$$= (\alpha x_1 + \alpha y_1; x_2 + y_2) = (\alpha x_1; x_2) \oplus (\alpha y_1; y_2) = \alpha \odot \overline{x} \oplus \alpha \odot \overline{y}.$$

6. Дистрибутивность сложения чисел:

$$(\alpha + \beta) \odot \overline{x} = ((\alpha + \beta) x_1; x_2) = (\alpha x_1 + \beta x_1; x_2) =$$

$$= (\alpha x_1; x_2) \oplus (\beta x_1; 0) = \alpha \odot \overline{x} \oplus (\beta x_1; 0) \neq$$

$$\neq \alpha \odot \overline{x} \oplus \beta \odot \overline{x} = (\alpha x_1; x_2) \oplus (\beta x_1; x_2).$$

Так как аксиома 6 не выполняется, то заданное множество M, с введенными операциями $\oplus$ и $\odot$, не задает линейное пространство относительно заданных операций.◄

Замечание. Если множество **не образует** линейное пространство, то достаточно указать хотя бы одну аксиому, которая не выполняется на этом множестве.

Задача 2. Выяснить, является ли линейным пространством множество всех действительных чисел, если операции ввести по следующим правилам:

$$\overline{x} \oplus \overline{y} = x + y, \ \alpha \odot \overline{x} = |\alpha| \cdot x, \text{ где } x, y, \alpha \in \mathbb{R}.$$

►Проверим аксиому 6 (дистрибутивность):

$$(\alpha+\beta)\odot\bar{x}=\alpha\odot\bar{x}\oplus\beta\odot\bar{x}.$$

Левая часть равенства: $(\alpha+\beta)\odot\bar{x}=|\alpha+\beta|\cdot\bar{x}$.

Правая часть равенства:

$$\alpha\odot\bar{x}\oplus\beta\odot\bar{x}=|\alpha|\cdot x+|\beta|\cdot x=(|\alpha|+|\beta|)\cdot x.$$

Для действительных чисел α и β выполняется $|\alpha+\beta|\le|\alpha|+|\beta|$. Тогда $|\alpha+\beta|\cdot x\le(|\alpha|+|\beta|)\cdot x$, то есть аксиома 6 не выполняется, например для $\alpha=3, \beta=-5$ получим:

$$|\alpha+\beta|\cdot x=|3-5|\cdot x=|-2|\cdot x=2x,$$

$$(|\alpha|+|\beta|)\cdot x=(|3|+|-5|)\cdot x=(3+5)\cdot x=8x,$$

то есть $2x<8x$ или $|\alpha+\beta|\cdot x\le(|\alpha|+|\beta|)\cdot x$. Значит, множество $\mathbb{R}$ с заданными операциями не образует линейное пространство.◄

Рассмотрим произвольную систему векторов $\bar{v}_1, \bar{v}_2, ..., \bar{v}_{n-1}, \bar{v}_n$ из линейного векторного пространства $\mathbf{V}$ и систему действительных чисел $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_{n-1}, \lambda_n$ из множества $\mathbb{R}$. Вектор $\lambda_1\bar{v}_1+\lambda_2\bar{v}_2+...+\lambda_n\bar{v}_n$ принято называть ***линейной комбинацией*** векторов $\bar{v}_1, \bar{v}_2, ..., \bar{v}_n$ с коэффициентами $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$.

Векторы $\bar{v}_1, \bar{v}_2, ..., \bar{v}_n \in \mathbf{V}$ называются ***линейно зависимыми***, если существуют такие числа $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \in \mathbb{R}$, что линейная комбинация этих векторов равна нулевому вектору при условии, что хотя бы один из коэффициентов не равен нулю (нетривиальная линейная комбинация равна нулевому вектору), т.е.

$$\exists\lambda_1, ..., \lambda_n\in\mathbb{R}:\quad \lambda_1^2+...+\lambda_n^2\ne0 \Rightarrow \lambda_1\bar{v}_1+...+\lambda_n\bar{v}_n=\bar{0}.$$

В противном случае, если линейная комбинация указанных векторов равна нулевому вектору только при условии, что все коэффициенты равны нулю, то такая система векторов называется ***линейно независимой***, то есть

$$\lambda_1\overline{v}_1+\ldots+\lambda_n\overline{v}_n=\overline{0} \iff \lambda_1=\ldots=\lambda_n=0.$$

Свойства линейно зависимых векторов:

1. Если к линейно зависимой системе векторов $\overline{v}_1, \overline{v}_2, \ldots, \overline{v}_n$ добавить несколько векторов, то полученная система будет линейно зависимой.

2. Если из линейно независимой системы векторов $\overline{v}_1, \overline{v}_2, \ldots, \overline{v}_n$ исключить несколько векторов, то полученная система будет линейно независимой.

3. Если в системе векторов $\overline{v}_1, \overline{v}_2, \ldots, \overline{v}_n$ есть хотя бы один нулевой вектор, то такая система линейно зависимая.

4. Если система векторов $\overline{v}_1, \overline{v}_2, \ldots, \overline{v}_n$ линейно зависима, то хотя бы один из ее векторов линейно выражается через остальные. Если система векторов $\overline{v}_1, \overline{v}_2, \ldots, \overline{v}_n$ линейно независима, то ни один из векторов не выражается через остальные.

Систему векторов $\langle \overline{e}_1, \overline{e}_2, \ldots, \overline{e}_n \rangle \in \mathbf{V}$, взятых в указанном порядке, называют ***базисом*** линейного пространства $(\mathbf{V},+,\cdot)$, если она удовлетворяет следующим условиям:

1) векторы $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \ldots, \overline{e}_n$ линейно независимы;

2) для любого вектора $\overline{x} \in \mathbf{V}$ система векторов $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \ldots, \overline{e}_n, \overline{x}$ линейно зависима.

Число элементов в базисе линейного пространства $(\mathbf{V},+,\cdot)$ называется ***размерностью*** линейного пространства и обозначается $\dim(\mathbf{V})$.

Из определения базиса $E=\langle \overline{e}_1, \ldots, \overline{e}_n \rangle$ следует, что для любого вектора $\overline{x} \in \mathbf{V}$ существуют такие числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$, что

$$\overline{x}=x_1\overline{e}_1+x_2\,\overline{e}_2+\ldots+x_n\overline{e}_n.$$

Эти числа называются ***координатами*** вектора $\overline{x}$ в базисе $\langle \overline{e}_1, \overline{e}_2, \ldots, \overline{e}_n \rangle$. В этом случае говорят, что вектор $\overline{x}$ разложен по векторам базиса.

Координаты вектора $\bar{x}$ в базисе E можно записывать одним из двух способов:

$$\bar{x} = (x_1;\ x_2; \ldots;\ x_n)_E \text{ или } \bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}_E .$$

В линейном пространстве $\mathbf{V}$ существует бесчисленное множество базисов. В n-мерном пространстве любая упорядоченная линейно независимая система из n векторов образует базис. Поэтому укажем так называемые ***стандартные*** (***канонические***) ***базисы*** в некоторых пространствах:

1) в пространстве векторов V_2 на плоскости стандартным базисом является $\langle \bar{i}, \bar{j} \rangle$; в пространстве V_3 стандартный базис – $\langle \bar{i}, \bar{j}, \bar{k} \rangle$, где $\bar{i}$, $\bar{j}$ и $\bar{k}$ – единичные ортогональные векторы;

2) в пространстве многочленов $P_n(x)$ степени, не превосходящей n, стандартный базис $\langle 1, x, x^2, \ldots, x^n \rangle$;

3) в пространстве $M_{2\times 2}$ квадратных матриц вида $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ стандартный базис $\langle E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22} \rangle$, где $E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Задача 3. В линейном пространстве V_3 заданы три вектора:

$$\bar{a}_1 = (1;4;3),\ \bar{a}_2 = (3;3;2),\ \bar{a}_3 = (8;5;3).$$

Выяснить, является ли система этих векторов линейно зависимой.

►Составим линейную комбинацию этих векторов и найдем значения коэффициентов, при которых она будет равна нулевому вектору:

$$\lambda_1\bar{a}_1+\lambda_2\bar{a}_2+\lambda_3\bar{a}_3=\bar{0},$$
$$\lambda_1\cdot(1;4;3)+\lambda_2\cdot(3;3;2)+\lambda_3\cdot(8;5;3)=(0;0;0),$$
$$(\lambda_1;4\lambda_1;3\lambda_1)+(3\lambda_2;3\lambda_2;2\lambda_2)+(8\lambda_{31};5\lambda_3;3\lambda_3)=(0;0;0).$$

Выполним покоординатное сложение:

$$(\lambda_1+3\lambda_2+8\lambda_3;\ 4\lambda_1+3\lambda_2+5\lambda_3;\ 3\lambda_1+2\lambda_2+3\lambda_3)=(0;0;0).$$

Как известно, векторы равны, если равны их соответствующие координаты. Поэтому получим систему уравнений:

$$\begin{cases}\lambda_1+3\lambda_2+8\lambda_3=0,\\ 4\lambda_1+3\lambda_2+5\lambda_3=0,\\ 3\lambda_1+2\lambda_2+3\lambda_3=0.\end{cases}$$

Решим эту систему методом Гаусса:

$$A=\begin{pmatrix}1&3&8\\4&3&5\\3&2&3\end{pmatrix}\overset{\substack{II-4\cdot I\\ III-3\cdot I}}{\sim}\begin{pmatrix}1&3&8\\0&-9&-27\\0&-7&-21\end{pmatrix}\overset{\substack{II:(-9)\\ III:(-7)}}{\sim}$$
$$\sim\begin{pmatrix}1&3&8\\0&1&3\\0&1&3\end{pmatrix}\overset{III-II}{\sim}\begin{pmatrix}1&3&8\\0&1&3\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

В данном случае имеем $rg(A)=2$ (по количеству ненулевых строк в ступенчатой матрице), $n=3$ (количество неизвестных), то есть $rg(A)<n$ и система имеет множество решений.

Составим и решим систему по последней ступенчатой матрице:

$$\begin{pmatrix}1&3&8\\0&1&3\\0&0&0\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}\lambda_1+3\lambda_2+8\lambda_3=0,\\ \lambda_2+3\lambda_3=0\to\lambda_2=-3\lambda_3.\end{cases}$$

Из первого уравнения получим:

$$\lambda_1=-3\lambda_2-8\lambda_3=-3\cdot(-3\lambda_3)-8\lambda_3=\lambda_3.$$

Пусть $\lambda_3=c$, где $c=const$. Тогда получим решение:

$$\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\\ \lambda_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c\\ -3c\\ c\end{pmatrix},\quad c\in\mathbb{R}.$$

Получили, что при $c\neq 0$

$$\lambda_1\bar{a}_1+\lambda_2\bar{a}_2+\lambda_3\bar{a}_3=c\bar{a}_1-3c\bar{a}_2+c\bar{a}_3=\bar{0},$$

то есть система векторов $\bar{a}_1,\bar{a}_2,\bar{a}_3$ является линейно зависимой. Найдем эту зависимость:

$$c\bar{a}_1-3c\bar{a}_2+c\bar{a}_3=\bar{0}\,|:c\neq 0,$$

$$\bar{a}_1-3\bar{a}_2+\bar{a}_3=\bar{0}\rightarrow\ \bar{a}_1=3\bar{a}_2-\bar{a}_3,$$

один из векторов линейно выражается через другие векторы.◄

Пусть функции $y_1(x),y_2(x),...,y_n(x)$ непрерывны вместе со своими производными (до $n-1$ порядка включительно) на интервале $(a;b)$. ***Определитель Вронского*** (***вронскиан***) указанной системы функций задаётся следующей формулой:

$$W(y_1,y_2,...,y_n)=\begin{vmatrix}y_1(x) & y_2(x) & ... & y_n(x)\\ y_1'(x) & y_2'(x) & ... & y_n'(x)\\ y_1''(x) & y_2''(x) & ... & y_n''(x)\\ ... & ... & ... & ...\\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & ... & y_n^{(n-1)}(x)\end{vmatrix}.$$

Для того чтобы функции $y_1(x),y_2(x),...,y_n(x)$ были линейно независимыми на $(a;b)$, достаточно, чтобы $W(y_1,y_2,...,y_n)\neq 0$ хотя бы в одной точке интервала. Отметим, что это условие является достаточным, но не необходимым. Т.е. если $W(y_1,y_2,...,y_n)=0$ для всех значений переменной из интервала $(a;b)$, то про линейную зависимость функций $y_1(x),y_2(x),...,y_n(x)$ в общем случае ничего определённого сказать нельзя.

Если функции $y_1(x), y_2(x),..., y_n(x)$, непрерывные вместе со своими производными до $n-1$ порядка включительно на интервале $(a;b)$, линейно зависимы, то $W(y_1, y_2,..., y_n)=0$ для всех $x \in (a;b)$.

Задача 4. Доказать, что система функций $1, x, x^2,..., x^{n-1}$ образует базис в пространстве $\mathbf{P}_n$ всех многочленов степени, не превышающей $(n-1)$. Найти координаты многочлена $2x^2+3x$ в таком каноническом базисе:

а) в пространстве $\mathbf{P}_3$,

б) в пространстве $\mathbf{P}_4$.

► Докажем линейную независимость заданной системы функций с помощью определителя Вронского.

В данной задаче:

$$f_1(x)=1 \to f_1'(x)=0 \to f_1''(x)=0 \to ... \to f_1^{(n-1)}(x)=0,$$

$$f_2(x)=x \to f_2'(x)=1 \to f_2''(x)=0 \to ... \to f_2^{(n-1)}(x)=0,$$

$$f_3(x)=x^2 \to f_3'(x)=2x \to f_3''(x)=2 \to ... \to f_3^{(n-1)}(x)=0,$$

$$\dots$$

$$f_n(x)=x^{n-1} \to f_1'(x)=(n-1)x^{n-2} \to f_1''(x)=(n-1)(n-2)x^{n-3} \to$$

$$\to ... \to f_1^{(n-2)}(x)=(n-1)(n-2)...\cdot 2x \to$$

$$\to f_1^{(n-1)}(x)=(n-1)(n-2)...\cdot 2\cdot 1=(n-1)!.$$

Составим и вычислим определитель Вронского:

$$W=\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & ... & x^{n-1} \\ 0 & 1 & 2x & ... & (n-1)x^{n-2} \\ 0 & 0 & 2 & ... & (n-1)(n-2)x^{n-3} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & (n-1)! \end{vmatrix}.$$

Определитель треугольной матрицы равен произведению элементов, стоящих на главной диагонали, поэтому

$$W = 1\cdot 1\cdot 2\cdot (3\cdot 2)\cdot \ldots \cdot (n-1)! = 0!\cdot 1!\cdot 2!\cdot 3!\cdot \ldots \cdot (n-1)! \neq 0.$$

Вронскиан отличен от 0 при $\forall x \in (-\infty;+\infty)$, то есть система функций $1, x, x^2, \ldots, x^{n-1}$ линейно независима.

Любой многочлен

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_{n-1}x^{n-1} \in \mathbf{P}_n$$

является линейной комбинацией системы функций $1, x, x^2, \ldots, x^{n-1}$. Значит, эта система функций является базисом пространства $\mathbf{P}_n$.

а) Канонический базис пространства $\mathbf{P}_3$ состоит из функций $1, x, x^2$. Многочлен $f(x) = 2x^2 + 3x$ может быть разложен по этому базису: $f(x) = 0\cdot 1 + 2x^2 + 3x$ и его координаты $f(x) = (0;3;2)$ в $\mathbf{P}_3$.

б) В пространстве $\mathbf{P}_4$ канонический базис: $1, x, x^2, x^3$. Значит, $f(x) = 2x^2 + 3x = 0\cdot 1 + 3x + 2x^2 + 0\cdot x^3 = (0;3;2;0)$.

Ответ: а) $(0;3;2)_{\mathbf{P}_3}$; б) $(0;3;2;0)_{\mathbf{P}_4}$. ◄

Задача 5. Найти координаты вектора $\bar{x} = (1;2;1;1) \in \mathbb{R}^4$ в базисе, состоящем из векторов $\bar{e}_1 = (1;1;1;1)$, $\bar{e}_2 = (1;1;-1;-1)$, $\bar{e}_3 = (1;-1;1;-1)$, $\bar{e}_4 = (1;-1;-1;1)$.

► Отметим, что в пространстве $\mathbb{R}^4$ любые четыре линейно независимых вектора образуют базис. Поэтому если линейная комбинация $\lambda_1\bar{e}_1 + \ldots + \lambda_4\bar{e}_4$ заданных векторов равна $\bar{0}$ только при нулевых коэффициентах, то эти векторы образуют базис.

В задаче требуется найти такие числа $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$, что $\bar{x} = \alpha\bar{e}_1 + \beta\bar{e}_2 + \gamma\bar{e}_3 + \delta\bar{e}_4$, тогда эти числа и будут координатами вектора $\bar{x}$ в заданном базисе.

Перейдем от векторного уравнения к координатному:

$$\begin{pmatrix}1\\2\\1\\1\end{pmatrix}=\alpha\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}+\beta\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\-1\end{pmatrix}+\gamma\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}+\delta\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\1\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}1\\2\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha\\\alpha\\\alpha\\\alpha\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\beta\\\beta\\-\beta\\-\beta\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\gamma\\-\gamma\\\gamma\\-\gamma\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\delta\\-\delta\\-\delta\\\delta\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}1\\2\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha+\beta+\gamma+\delta\\\alpha+\beta-\gamma-\delta\\\alpha-\beta+\gamma-\delta\\\alpha-\beta-\gamma+\delta\end{pmatrix}.$$

Отсюда, используя равенство векторов, получаем:

$$\begin{cases}\alpha+\beta+\gamma+\delta=1,\\\alpha+\beta-\gamma-\delta=2,\\\alpha-\beta+\gamma-\delta=1,\\\alpha-\beta-\gamma+\delta=1.\end{cases}$$

Решим эту систему методом Гаусса:

$$\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\1&1&-1&-1&2\\1&-1&1&-1&1\\1&-1&-1&1&1\end{pmatrix}\overset{\substack{II-I\\III-I\\IV-I}}{\sim}\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\0&0&-2&-2&1\\0&-2&0&-2&0\\0&-2&-2&0&0\end{pmatrix}\sim$$

$$\overset{II\leftrightarrow III}{\sim}\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\0&-2&0&-2&0\\0&0&-2&-2&1\\0&-2&-2&0&0\end{pmatrix}\overset{IV-I}{\sim}\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\0&-2&0&-2&0\\0&0&-2&-2&1\\0&-2&-2&2&0\end{pmatrix}\sim$$

$$\overset{III-IV}{\sim}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

Получили $rg(A|B) = rg(A) = 4 = n$, то есть система имеет единственное решение.

Составим систему по последней ступенчатой матрице:

$$\begin{cases} \alpha+\beta+\gamma+\delta=1, \\ -2\beta-2\delta=0, \\ -2\gamma-2\delta=1, \\ 4\delta=-1. \end{cases}$$

Решим эту систему «снизу вверх»:

$$(IV)\to\delta=-\frac{1}{4},\quad (III)\to\gamma=-\frac{1}{4},$$

$$(II)\to\beta=\frac{1}{4},\quad (I)\to\alpha=\frac{5}{4}.$$

Получили, что координаты вектора $\bar{x}$ в заданном базисе следующие: $\bar{x}=\left(\frac{5}{4};\frac{1}{4};-\frac{1}{4};-\frac{1}{4}\right)$. ◄

Пусть в линейном пространстве $(\mathbf{V},+,\cdot)$ заданы два базиса: «старый» $E=\langle \bar{e}_1,\ldots,\bar{e}_n\rangle$ и «новый» $E'=\langle \bar{e}'_1,\ldots,\bar{e}'_n\rangle$. При этом известны координаты векторов «нового» базиса в «старом»:

$$\bar{e}'_1=(\alpha_{11},\alpha_{21},\ldots,\alpha_{n1})_E,\ \bar{e}'_2=(\alpha_{12},\alpha_{22},\ldots,\alpha_{n2})_E,\ldots,$$

$$\bar{e}'_n=(\alpha_{1n},\alpha_{2n},\ldots,\alpha_{nn})_E.$$

Некоторый произвольный вектор $\bar{x}\in\mathbf{V}$ имеет координаты $\bar{x}=(x_1,x_2,\ldots,x_n)_E$ в базисе E и $\bar{x}=(x'_1,x'_2,\ldots,x'_n)_{E'}$ в базисе E'.

Матрица $U_{E\to E'}=(\alpha_{ij})$, столбцами которой являются координаты векторов «нового» базиса в «старом», называется ***матрицей перехода от «старого» базиса*** $E=\langle \overline{e}_1,\overline{e}_2,\ldots,\overline{e}_n\rangle$ ***к «новому»*** $E'=\langle \overline{e}'_1,\overline{e}'_2,\ldots,\overline{e}'_n\rangle$:

$$U=U_{E\to E'}=\begin{pmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2n}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \ldots & \alpha_{nn}\end{pmatrix}.$$

Можно доказать формулу перехода

$$\boxed{X_E=U\cdot X_{E'}},$$

где X_E – столбец координат некоторого произвольного вектора $\overline{x}\in\mathbf{V}$ в базисе E, $X_{E'}$ – столбец координат этого вектора в базисе E'.

Для матрицы перехода $\det U\neq 0$ и существует обратная матрица U^{-1}, которая является матрицей перехода от «нового» базиса $E'=\langle \overline{e}'_1,\overline{e}'_2,\ldots,\overline{e}'_n\rangle$ к «старому» $E=\langle \overline{e}_1,\overline{e}_2,\ldots,\overline{e}_n\rangle$. Из предыдущей формулы следует, что

$$\boxed{X_{E'}=U^{-1}\cdot X_E}.$$

Задача 6. Найти координаты вектора $\overline{x}$ в базисе $E=<\overline{e}_1,\overline{e}_2,\overline{e}_3>$, если известны его координаты $(-1;4;3)$ в базисе $B=<\overline{b}_1,\overline{b}_2,\overline{b}_3>$, а эти базисы связаны соотношениями:

$$\begin{cases}\overline{e}_1=-\overline{b}_1+\overline{b}_2-3\overline{b}_3,\\ \overline{e}_2=\overline{b}_1-2\overline{b}_2-\overline{b}_3,\\ \overline{e}_3=-\overline{b}_1+2\overline{b}_2+2\overline{b}_3.\end{cases}$$

► По условию задачи $X_B=\begin{pmatrix}-1\\ 4\\ 3\end{pmatrix}_B$ – координаты вектора $\overline{x}$

в базисе B. Также $E_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\-3\end{pmatrix}_B$, $E_2=\begin{pmatrix}1\\-2\\-1\end{pmatrix}_B$, $E_3=\begin{pmatrix}-1\\2\\2\end{pmatrix}_B$ – координаты базисных векторов $\bar{e}_1,\bar{e}_2,\bar{e}_3$ в базисе B. Тогда можно составить матрицу перехода U от базиса B к базису E:

$$U_{B\to E}=\begin{pmatrix}-1&1&-1\\1&-2&2\\-3&-1&2\end{pmatrix},$$

для которой $X_B=U_{B\to E}\cdot X_E\Rightarrow X_E=U^{-1}_{B\to E}\cdot X_B=U_{E\to B}\cdot X_B$.

Найдем обратную матрицу $U^{-1}_{B\to E}$:

$$U^{-1}_{B\to E}=\frac{1}{|U|}\begin{pmatrix}A_{11}&A_{21}&A_{31}\\A_{12}&A_{22}&A_{32}\\A_{13}&A_{23}&A_{33}\end{pmatrix},$$

где $|U|$ – определитель матрицы $U_{B\to E}$ и A_{ij} – алгебраические дополнения. Вычислим их:

$$|U|=\begin{vmatrix}-1&1&-1\\1&-2&2\\-3&-1&2\end{vmatrix}=4+1-6+6-2-2=1,$$

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}-2&2\\-1&2\end{vmatrix}=-4+2=-2,$$

$$A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}1&2\\-3&2\end{vmatrix}=-2-6=-8,$$

$$A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}1&-2\\-3&-1\end{vmatrix}=-1-6=-7,$$

$$A_{21}=-\begin{vmatrix}1&-1\\-1&2\end{vmatrix}=-1,\ A_{22}=\begin{vmatrix}-1&-1\\-3&2\end{vmatrix}=-5,$$

$$A_{23}=-\begin{vmatrix}-1 & 1\\ -3 & -1\end{vmatrix}=-4,\ A_{31}=\begin{vmatrix}1 & -1\\ -2 & 2\end{vmatrix}=0,$$

$$A_{32}=-\begin{vmatrix}-1 & -1\\ 1 & 2\end{vmatrix}=1,\ A_{33}=\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 1 & -2\end{vmatrix}=1.$$

Значит, обратная матрица имеет вид:

$$U^{-1}=\begin{pmatrix}-2 & -1 & 0\\ -8 & -5 & 1\\ -7 & -4 & 1\end{pmatrix}.$$

Тогда можно найти координаты вектора $\bar{x}$ в базисе E:

$$X_E=U^{-1}_{B\to E}\cdot X_B=\begin{pmatrix}-2 & -1 & 0\\ -8 & -5 & 1\\ -7 & -4 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1\\ 4\\ 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2-4+0\\ 8-20+3\\ 7-16+3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\ -9\\ -6\end{pmatrix}_E.$$

Ответ: $\bar{x}=(-2;-9;-6)_E$. ◄

Задача 7. В линейном пространстве две системы векторов $B=(\bar{b}_1,\bar{b}_2,\bar{b}_3)$ и $E=(\bar{e}_1,\bar{e}_2,\bar{e}_3)$ заданы своими координатами в некотором базисе:

$$\bar{b}_1=\begin{pmatrix}-1\\ 3\\ -4\end{pmatrix},\ \bar{b}_2=\begin{pmatrix}1\\ -1\\ 1\end{pmatrix},\ \bar{b}_3=\begin{pmatrix}1\\ 1\\ -1\end{pmatrix},$$

$$\bar{e}_1=\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\end{pmatrix},\ \bar{e}_2=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ -1\end{pmatrix},\ \bar{e}_3=\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 0\end{pmatrix}.$$

Доказать, что эти системы являются базисами. Найти:

а) матрицу перехода $U_{B\to E}$ от базиса B к базису E;

б) матрицу $U_{E\to B}$ обратного перехода от базиса E к базису B;

в) координаты вектора $\bar{e}_2$ в обоих базисах;

г) координаты вектора $\bar{x}=-3\bar{b}_1-5\bar{b}_2+2\bar{b}_3$ в базисе E.

► Выясним, является ли система векторов $B=\left(\bar{b}_1,\bar{b}_2,\bar{b}_3\right)$ базисом. Для этого найдем ранг этой системы или ранг матрицы, столбцами которой являются координаты векторов системы B:

$$rg\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ 3 & -1 & 1\\ -4 & 1 & -1\end{pmatrix}\overset{\substack{II+3I\\ III-4I}}{=} rg\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 4\\ 0 & -3 & -5\end{pmatrix}\overset{II+III}{=} rg\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ 0 & -1 & -1\\ 0 & -3 & -5\end{pmatrix}=$$

$$\overset{III-3II}{=} rg\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ 0 & -1 & -1\\ 0 & 0 & -2\end{pmatrix}=3.$$

Так как система B состоит их трех векторов и ранг этой системы также равен 3, то система B является базисом.

Аналогично можно доказать, что система векторов E также является базисом. Сделайте это самостоятельно.

а) Найдем матрицу перехода $U_{B\to E}$ от базиса B к базису E.

Для этого нужно найти такие числа $\alpha_i,\beta_i,\gamma_i$, что

$$\bar{e}_1=\alpha_1\bar{b}_1+\beta_1\bar{b}_2+\gamma_1\bar{b}_3,$$

$$\bar{e}_2=\alpha_2\bar{b}_1+\beta_2\bar{b}_2+\gamma_2\bar{b}_3,$$

$$\bar{e}_3=\alpha_3\bar{b}_1+\beta_3\bar{b}_2+\gamma_3\bar{b}_3.$$

Запишем первое из этих векторных уравнений в координатной форме:

$$\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\alpha_1\cdot\begin{pmatrix}-1\\3\\-4\end{pmatrix}+\beta_1\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}+\gamma_1\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\alpha_1+\beta_1+\gamma_1\\ 3\alpha_1-\beta_1+\gamma_1\\ -4\alpha_1+\beta_1-\gamma_1\end{pmatrix},$$

$$\begin{cases}-\alpha_1+\beta_1+\gamma_1=1,\\ 3\alpha_1-\beta_1+\gamma_1=1,\\ -4\alpha_1+\beta_1-\gamma_1=1,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\alpha_1=-2,\\ \beta_1=-4,\\ \gamma_1=3.\end{cases}$$

Отметим, что решение системы можно найти методом Гаусса.

Аналогично запишем второе векторное уравнение $\bar{e}_2 = \alpha_2 \bar{b}_1 + \beta_2 \bar{b}_2 + \gamma_2 \bar{b}_3$ в координатной форме:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \alpha_2 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} + \beta_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 \\ 3\alpha_2 - \beta_2 + \gamma_2 \\ -4\alpha_2 + \beta_2 - \gamma_2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{cases} -\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 = 1, \\ 3\alpha_2 - \beta_2 + \gamma_2 = 0, \\ -4\alpha_2 + \beta_2 - \gamma_2 = -1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_2 = 1, \\ \beta_2 = 5/2, \\ \gamma_2 = -1/2. \end{cases}$$

Аналогично из векторного уравнения $\bar{e}_3 = \alpha_3 \bar{b}_1 + \beta_3 \bar{b}_2 + \gamma_3 \bar{b}_3$ можно найти:

$$\alpha_3 = -1,\ \beta_3 = -2,\ \gamma_3 = 2.$$

Столбцами матрицы перехода $U_{B \to E}$ являются координаты векторов $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ в базисе B:

$$U_{B \to E} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ -4 & 5/2 & -2 \\ 3 & -1/2 & 2 \end{pmatrix}.$$

б) Найдем матрицу обратного перехода $U_{E \to B}$ от базиса E к базису B.

Известно, что

$$U_{E \to B} = U_{B \to E}^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ -4 & 5/2 & -2 \\ 3 & -1/2 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{|U_{B \to E}|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}.$$

Используя эту формулу как в задаче 6, можно найти:

$$U_{E \to B} = U_{B \to E}^{-1} = \begin{pmatrix} -8 & 3 & -1 \\ -4 & 2 & 0 \\ 11 & -4 & 2 \end{pmatrix}.$$

в) Найдем координаты вектора $\bar{e}_2$ в базисах E и B.

Так как базис $E = < \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3 >$, то $\bar{e}_2 = (0;1;0)_E$.

В пункте «а» было найдено решение уравнения $\bar{e}_2 = \alpha_2 \bar{b}_1 + \beta_2 \bar{b}_2 + \gamma_2 \bar{b}_3$, то есть были найдены координаты вектора $\bar{e}_2$ в базисе B. Поэтому $\bar{e}_2 = (1;\ 5/2;\ -1/2)_B$.

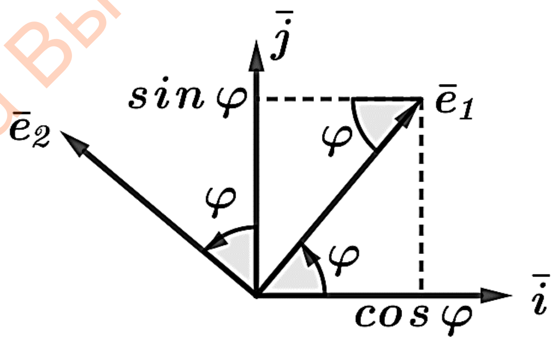
г) Найдем координаты вектора $\bar{x} = -3\bar{b}_1 - 5\bar{b}_2 + 2\bar{b}_3$ в базисе E по формуле:

$$X_E = U^{-1}_{B\to E} \cdot X_B = \begin{pmatrix} -8 & 3 & -1 \\ -4 & 2 & 0 \\ 11 & -4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ -9 \end{pmatrix}_E . \blacktriangleleft$$

Задача 8. В пространстве векторов V_2 задан базис $B = < \bar{i}, \bar{j} >$. Новый базис $E = < \bar{e}_1, \bar{e}_2 >$ получен из старого базиса B путем поворота на заданный угол φ. Найти матрицу перехода U от базиса B к базису E.

► Исходя из заданного угла поворота, можно найти координаты векторов $\bar{e}_1$ и $\bar{e}_2$ нового базиса E относительно старого B:

$$\begin{cases} \bar{e}_1 = \cos\varphi \cdot \bar{i} + \sin\varphi \cdot \bar{j}, \\ \bar{e}_2 = -\sin\varphi \cdot \bar{i} + \cos\varphi \cdot \bar{j}. \end{cases}$$



Эти разложения позволяют составить матрицу перехода U от базиса B к базису E:

$$U_{B\to E}=\begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}.$$

Найдем обратную матрицу перехода:

$$U^{-1}=U_{E\to B}=\frac{1}{|U_{B\to E}|}\begin{pmatrix}A_{11} & A_{21}\\ A_{12} & A_{22}\end{pmatrix},$$

$$|U_{B\to E}|=\begin{vmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{vmatrix}=\cos^2\varphi-\left(-\sin^2\varphi\right)=1,$$

$$A_{11}=\cos\varphi,\ A_{21}=-\left(-\sin\varphi\right)=\sin\varphi,$$

$$A_{12}=-\sin\varphi,\ A_{22}=\cos\varphi.$$

Тогда получим $U^{-1}=U_{E\to B}=\begin{pmatrix}\cos\varphi & \sin\varphi\\ -\sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}.$

Найденные матрицы перехода U^{-1} и U позволяют записать соотношения между старыми x_1 и x_2 и новыми x_1' и x_2' координатами произвольного вектора $\bar{x}\in V_2$:

$$\begin{cases}x_1'=x_1\cos\varphi+x_2\sin\varphi,\\ x_2'=-x_1\sin\varphi+x_2\cos\varphi\end{cases}\quad\text{и}\quad\begin{cases}x_1=x_1'\cos\varphi-x_2'\sin\varphi,\\ x_2=x_1'\sin\varphi+x_2'\cos\varphi.\end{cases}$$ ◄

Задача 9. Является ли матрица

$$A=\begin{pmatrix}1 & 3 & 2\\ 4 & 2 & -3\\ 2 & 2 & -1\end{pmatrix}$$

матрицей перехода от одного базиса трехмерного пространства к его другому базису?

► В n-мерном линейном пространстве невырожденная матрица n-го порядка может являться матрицей перехода от одного базиса к другому .

Найдем определитель заданной матрицы:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & -3 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -2+16-18-8+6+12 = -6 \neq 0,$$

то есть матрица A невырожденная, поэтому она является матрицей перехода от одного базиса к другому.

2. Евклидовы, нормированные и метрические пространства

Скалярным произведением двух векторов линейного пространства $\bar{x} \in \mathbf{V}$ и $\bar{y} \in \mathbf{V}$ называется число, обозначаемое $(\bar{x}, \bar{y})$ и удовлетворяющее следующим условиям:

1°. $\forall \bar{x}, \bar{y} \in \mathbf{V}:\ (\bar{x}, \bar{y}) = (\bar{y}, \bar{x})$ (коммутативность).

2°. $\forall \bar{x}, \bar{y}, \bar{z} \in \mathbf{V}:\ (\bar{x} + \bar{y}, \bar{z}) = (\bar{x}, \bar{z}) + (\bar{y}, \bar{z})$ (аддитивность).

3°. $\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall \bar{x}, \bar{y} \in \mathbf{V}:\ (\lambda \bar{x}, \bar{y}) = \lambda (\bar{x}, \bar{y})$ (однородность).

4°. $\forall \bar{x} \in \mathbf{V}:\ (\bar{x}, \bar{x}) \geqslant 0$, причем $(\bar{x}, \bar{x}) = 0 \Leftrightarrow \bar{x} = \bar{0}$ (неотрицательность скалярного квадрата).

Линейное пространство $(\mathbf{V}, +, \cdot\,)$ с введенным на нем скалярным произведением называется ***евклидовым пространством***, которое будем обозначать $\mathbf{E}$.

Для любых двух векторов $\bar{x}$ и $\bar{y}$ произвольного евклидова пространства выполняется неравенство Коши – Буняковского $(\bar{x}, \bar{y}) \leqslant \sqrt{(\bar{x}, \bar{x})} \cdot \sqrt{(\bar{y}, \bar{y})}$, причем равенство имеет место тогда и только тогда, когда векторы $\bar{x}$ и $\bar{y}$ линейно зависимы.

Задача 1. Пусть $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix}$ – произвольные векторы-матрицы пространства $M_{2\times 2}$. Показать, что скалярное произведение в $M_{2\times 2}$ можно задать так:

$$(A,B)=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3+a_4b_4.$$

Найти скалярное произведение матриц $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ по вышеуказанному правилу.

► Проверим выполнимость аксиом.

1. Коммутативность:

$$(A,B)=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3+a_4b_4=$$
$$=b_1a_1+b_2a_2+b_3a_3+b_4a_4=(B,A),$$

то есть свойство для матриц выполняется, так как для чисел коммутативность верна.

2. Аддитивность. Пусть $C=\begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ c_3 & c_4 \end{pmatrix}$, тогда $A+C=\begin{pmatrix} a_1+c_1 & a_2+c_2 \\ a_3+c_3 & a_4+c_4 \end{pmatrix}$, поэтому

$$(A+C,B)=(a_1+c_1)b_1+(a_2+c_2)b_2+(a_3+c_3)b_3+(a_4+c_4)b_4=$$
$$=(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3+a_4b_4)+(c_1b_1+c_2b_2+c_3b_3+c_4b_4)=$$
$$=(A,B)+(C,B),$$

то есть свойство для матриц выполняется, так как для чисел аддитивность верна.

3. Однородность. Возьмем произвольное число $\lambda\in\mathbb{R}$, тогда $\lambda A=\begin{pmatrix} \lambda a_1 & \lambda a_2 \\ \lambda a_3 & \lambda a_4 \end{pmatrix}$, поэтому

$$(\lambda A,B)=(\lambda a_1)b_1+(\lambda a_2)b_2+(\lambda a_3)b_3+(\lambda a_4)b_4=$$
$$=\lambda(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3+a_4b_4)=\lambda\cdot(A,B),$$

то есть свойство для матриц выполняется, так как для чисел однородность верна.

4. Неотрицательность скалярного квадрата:

$$(A,A)=a_1a_1+a_2a_2+a_3a_3+a_4a_4=$$
$$=a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2\geq 0,$$

причем $(A,A)=0$ тогда и только тогда, когда $a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2=0$ или $a_1=a_2=a_3=a_4=0$, то есть при этом $A=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}=\Theta=\overline{0}$.

Так как все аксиомы скалярного произведения выполняются, то указанное правило $(A,B)=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3+a_4b_4$ задает скалярное произведение.

Вычислим требуемое скалярное произведение:

$$\left(\begin{pmatrix}3&-2\\1&4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2&1\\-2&3\end{pmatrix}\right)=3\cdot 2+(-2)\cdot 1+1\cdot(-2)+4\cdot 3=14.\blacktriangleleft$$

Замечание. Чтобы доказать, что указанное правило **не задает** скалярное произведение, нужно привести хотя бы одну аксиому, которая не выполняется.

Задача 2. Пусть $\overline{a}=(a_1,a_2)$ и $\overline{b}=(b_1,b_2)$ – произвольные векторы арифметического пространства $\mathbb{R}^2$. Проверить, задают ли указанные правила скалярное произведение:

1) $(\overline{a},\overline{b})=a_1^2+a_1b_2+a_2b_1+b_2^2$;

2) $(\overline{a},\overline{b})=a_1b_1+a_1b_2$;

3) $(\overline{a},\overline{b})=a_1b_1-a_1b_2+a_2b_1-a_2b_2$.

► 1. Проверим выполнимость аксиомы однородности. Возьмем произвольное число $\lambda\in\mathbb{R}$, тогда $\lambda\overline{a}=(\lambda a_1,\lambda a_2)$. Имеем

$$(\lambda\overline{a},\overline{b})=(\lambda a_1)^2+(\lambda a_1)b_2+(\lambda a_2)b_1+b_2^2=$$

$$=\lambda^2 a_1^2+\lambda a_1 b_2+\lambda a_2 b_1+b_2^2.$$

С другой стороны,

$$\lambda\left(\bar{a},\bar{b}\right)=\lambda\left(a_1^2+a_1 b_2+a_2 b_1+b_2^2\right)=$$

$$=\lambda a_1^2+\lambda a_1 b_2+\lambda a_2 b_1+\lambda b_2^2.$$

Найдем разность между последними выражениями:

$$\left(\lambda\bar{a},\bar{b}\right)-\lambda\left(\bar{a},\bar{b}\right)=$$

$$=a_1^2\left(\lambda^2-\lambda\right)+a_1 b_2\left(\lambda-\lambda\right)+a_2 b_1\left(\lambda-\lambda\right)+b_2^2\left(1-\lambda\right)=$$

$$=a_1^2\left(\lambda^2-\lambda\right)+b_2^2\left(1-\lambda\right)\neq 0,$$

поэтому $\left(\lambda\bar{a},\bar{b}\right)\neq\lambda\left(\bar{a},\bar{b}\right)$, то есть аксиома однородности не выполняется. Значит, правило $\left(\bar{a},\bar{b}\right)=a_1^2+a_1 b_2+a_2 b_1+b_2^2$ не задает скалярное произведение.

2. Проверим выполнимость аксиомы коммутативности. Если $\left(\bar{a},\bar{b}\right)=a_1 b_1+a_1 b_2$, то $\left(\bar{b},\bar{a}\right)=b_1 a_1+b_1 a_2$. Поэтому

$$\left(\bar{a},\bar{b}\right)-\left(\bar{b},\bar{a}\right)=a_1 b_1+a_1 b_2-b_1 a_1-b_1 a_2=$$

$$=a_1 b_2-b_1 a_2\neq 0,$$

то есть $\left(\bar{a},\bar{b}\right)\neq\left(\bar{b},\bar{a}\right)$, а значит, аксиома коммутативности не выполняется. В связи с этим правило $\left(\bar{a},\bar{b}\right)=a_1 b_1+a_1 b_2$ не задает скалярное произведение.

3. Проверим выполнимость аксиомы неотрицательности скалярного квадрата. Если $\left(\bar{a},\bar{b}\right)=a_1 b_1-a_1 b_2+a_2 b_1-a_2 b_2$, то скалярный квадрат $\left(\bar{a},\bar{a}\right)=a_1 a_1-a_1 a_2+a_2 a_1-a_2 a_2=a_1^2-a_2^2$. Тогда

$$\left(\bar{a},\bar{a}\right)=0\leftrightarrow a_1^2-a_2^2=0\leftrightarrow\left(a_1-a_2\right)\left(a_1+a_2\right)=0\leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow a_1=a_2 \text{ или } a_1=-a_2.$$

Значит, для векторов $\bar{a}=\left(a_1,a_1\right)$ и $\bar{a}=\left(a_1,-a_1\right)$ при условии $a_1\neq 0$ имеем $\left(\bar{a},\bar{a}\right)=0$, но при этом $\bar{a}\neq\bar{0}=\left(0,0\right)$. Поэтому аксиома неотрицательности скалярного квадрата не выполняется, то есть правило $(\bar{a},\bar{b}) = a_1b_1 - a_1b_2 + a_2b_1 - a_2b_2$ не задает скалярного произведения.◄

Задача 3. В пространстве $\mathbb{R}[0;1]$ действительных функций, определенных и непрерывных на отрезке $[0;1]$, скалярное произведение определено следующим образом:

$$(\bar{f},\bar{g}) = \int_0^1 f(t)\cdot g(t)\,dt.$$

Вычислить скалярное произведение векторов $\bar{f} = f(t) = t$ и $\bar{g} = g(t) = \sin \pi t$.

► По заданному правилу имеем:

$$(\bar{f},\bar{g}) = \int_0^1 t\cdot \sin \pi t dt.$$

Применим интегрирование по частям $\int_a^b u\cdot dv = (u\cdot v)\big|_a^b - \int_a^b v\cdot du$, обозначив $u = t$ и $dv = \sin \pi t dt$. Тогда $du = dt$ и $v = -\frac{1}{\pi}\cos \pi t$. Поэтому

$$(\bar{f},\bar{g}) = \int_0^1 t\cdot \sin \pi t dt =$$

$$= -\frac{t}{\pi}\cos \pi t\Big|_0^1 - \left(-\frac{1}{\pi}\right)\cdot \int_0^1 \cos \pi t dt =$$

$$= -\frac{1}{\pi}\cos \pi + 0 + \frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{\pi}\sin \pi t\Big|_0^1 = |\cos \pi = -1| =$$

$$= \frac{1}{\pi} + \frac{1}{\pi^2}\cdot(\sin \pi - \sin 0) = |\sin \pi = \sin 0 = 0| = \frac{1}{\pi}.$$

Ответ: $\left(\overline{f}, \overline{g}\right) = \left(t, \sin \pi t\right) = \dfrac{1}{\pi}$. ◄

Два вектора $\overline{x}$ и $\overline{y}$ евклидова пространства $\mathbf{E}$ называются ***ортогональными***, если их скалярное произведение равно нулю:

$$\boxed{\overline{x} \perp \overline{y} \Leftrightarrow (\overline{x}, \overline{y}) = 0},$$

где $\perp$ – символ ортогональности (перпендикулярности).

Задача 4. Найти, при каком значении числового параметра $\lambda \in \mathbb{R}$ векторы $\overline{f} = f\left(t\right) = t^2$ и $\overline{g} = g\left(t\right) = 2\lambda + t$ из пространства $\mathbb{R}\left[0; 2\right]$ будут ортогональны.

► Векторы будут ортогональны, если их скалярное произведение равно нулю:

$$\overline{f} \perp \overline{g} \quad \Leftrightarrow \quad \left(\overline{f}, \overline{g}\right) = 0.$$

Поэтому в данном случае имеем:

$$\left(\overline{f}, \overline{g}\right) = \int_0^2 f\left(t\right) \cdot g\left(t\right) dt = \int_0^2 t^2 \cdot \left(2\lambda + t\right) dt =$$

$$= \int_0^2 \left(2\lambda t^2 + t^3\right) dt = \left.\left(2\lambda \cdot \frac{t^3}{3} + \frac{t^4}{4}\right)\right|_0^2 = \frac{16\lambda}{3} + 4.$$

Значит, по свойству ортогональности получим:

$$\overline{f} \perp \overline{g} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{16\lambda}{3} + 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = -\frac{3}{4}.$$

Ответ: $\lambda = -\frac{3}{4}$. ◄

Нормой $\left\|\overline{x}\right\|$ вектора $\overline{x}$ линейного пространства $\mathbf{V}$ называется такое число, которое удовлетворяет трем аксиомам:

1⁰. $\forall \overline{x} \in \mathbf{V}: \| \overline{x} \| \geqslant 0$, причем $\| \overline{x} \| = 0 \Leftrightarrow \overline{x} = \overline{0}$ (нулевую норму имеет только нулевой вектор).

2⁰. $\forall \overline{x}, \overline{y} \in \mathbf{V}: \| \overline{x} + \overline{y} \| \leqslant \| \overline{x} \| + \| \overline{y} \|$ (неравенство треугольника – норма суммы векторов не превосходит суммы норм этих векторов).

3⁰. $\forall\alpha\in\mathbb{R},\ \forall\overline{x}\in\mathbf{V}:\ \|\alpha\cdot\overline{x}\|=|\alpha|\cdot\|\overline{v}\|$ (константу можно выносить за знак нормы только под знаком модуля).

Линейное пространство $(\mathbf{V},+,\cdot)$ с введенной на нем нормой $\|\overline{x}\|$ называется ***нормированным***.

Задача 5. Доказать, что в n-мерном евклидовом пространстве $\mathbf{E}$ можно определить норму так: $\|\overline{x}\|=\sqrt{(\overline{x},\ \overline{x})}$ (такая норма, как корень квадратный из скалярного квадрата, называется ***евклидовой нормой***).

► Проверим выполнимость всех аксиом нормы:

1) $\|\overline{x}\|=\sqrt{(\overline{x},\overline{x})}\geqslant 0$ (арифметический корень есть неотрицательное число), причем $\|\overline{x}\|=0\Leftrightarrow\ \overline{x}=\overline{0}$ (из свойств скалярного произведения);

2) $\|\overline{x}+\overline{y}\|=\sqrt{(\overline{x}+\overline{y},\overline{x}+\overline{y})}=\sqrt{(\overline{x},\overline{x})+2(\overline{x},\overline{y})+(\overline{y},\overline{y})}$.

Применим ко второму слагаемому $(\overline{x},\overline{y})$ подкоренного выражения неравенство Коши – Буняковского $(\overline{x},\overline{y})\leqslant\sqrt{(\overline{x},\overline{x})}\cdot\sqrt{(\overline{y},\overline{y})}$, получим:

$$\sqrt{(\overline{x},\overline{x})+2(\overline{x},\overline{y})+(\overline{y},\overline{y})}\leqslant\sqrt{\sqrt{(\overline{x},\overline{x})}^2+2\sqrt{(\overline{x},\overline{x})}\cdot\sqrt{(\overline{y},\overline{y})}+\sqrt{(\overline{y},\overline{y})}^2}=$$

$$=|\text{выделим полный квадрат}|=$$

$$=\sqrt{\left(\sqrt{(\overline{x},\ \overline{x})}+\sqrt{(\overline{y},\overline{y})}\right)^2}=\sqrt{(\overline{x},\ \overline{x})}+\sqrt{(\overline{y},\overline{y})}=\|\overline{x}\|+\|\overline{y}\|.$$

Отсюда следует, что $\|\overline{x}+\overline{y}\|\leqslant\|\overline{x}\|+\|\overline{y}\|$;

3) $\|\lambda\overline{x}\|=\sqrt{(\lambda\overline{x},\lambda\overline{x})}=\sqrt{\lambda^2(\overline{x},\overline{x})}=|\lambda|\sqrt{(\overline{x},\overline{x})}=|\lambda|\cdot\|\overline{x}\|$.

Так как все аксиомы нормы выполнены, то $\|\overline{x}\|=\sqrt{(\overline{x},\overline{x})}$ (корень квадратный из скалярного квадрата) является нормой евклидова пространства $\mathbf{E}$.◄

Примеры нормированных пространств.

1. Множество действительных чисел $\mathbb{R}$ с обычным сложением и умножением на число является нормированным пространством с нормой $\|x\|=|x|$ (норма есть модуль действительного числа).

2. Пространство $\mathbb{R}^n$ арифметических векторов $\bar{x}=(x_1;\,x_2;\,...;\,x_n)$ является нормированным с нормой:

$$\|\,\bar{x}\,\|=\sqrt{x_1^2+x_2^2+...+x_n^2}\,.$$

Также в пространстве $\mathbb{R}^n$ норму можно задать так:

$$\|\,\bar{x}\,\|=|\,x_1\,|+|\,x_2\,|+...+|\,x_n\,|\,.$$

3. Пространство $\mathbb{R}[a;\,b]$ действительных функций, определенных и непрерывных на отрезке $[a;\,b]$, является нормированным с нормой $\|\,f(t)\,\|=\sqrt{\int\limits_a^b f^2(t)dt}\,.$

Задача 6. Найти евклидову норму вектора $\bar{a}=(3;-2)$, заданного своими координатами в базисе $E=\langle\bar{e}_1,\bar{e}_2\rangle$, где $\|\bar{e}_1\|=1$, $\|\bar{e}_2\|=3$ и $(\bar{e}_1,\bar{e}_2)=-2$.

► По определению евклидовой нормы имеем:

$$\|\bar{a}\|=\sqrt{(\bar{a},\bar{a})}\,.$$

Так как вектор $\bar{a}$ задан в базисе $E=\langle\bar{e}_1,\bar{e}_2\rangle$, то

$$\bar{a}=(3;-2)=3\bar{e}_1-2\bar{e}_2\,.$$

Тогда можно найти искомую норму:

$$\|\bar{a}\|=\sqrt{(\bar{a},\bar{a})}=\sqrt{(3\bar{e}_1-2\bar{e}_2,\,3\bar{e}_1-2\bar{e}_2)}=$$

$$=\sqrt{9(\bar{e}_1,\bar{e}_1)-6(\bar{e}_1,\bar{e}_2)-6(\bar{e}_2,\bar{e}_1)+4(\bar{e}_2,\bar{e}_2)}=$$

$$=\left|\begin{array}{ll}(\bar{e}_1,\bar{e}_1)=\|\bar{e}_1\|^2=1, & \\ & (\bar{e}_1,\bar{e}_2)=(\bar{e}_2,\bar{e}_1)\\ (\bar{e}_2,\bar{e}_2)=\|\bar{e}_2\|^2=9, & \end{array}\right|=$$

$$=\sqrt{9\cdot1-12\cdot(-2)+4\cdot9}=\sqrt{69}\,.$$

Ответ: $\|\bar{a}\|=\sqrt{69}$.◄

Задача 7. Найти евклидову норму вектора $\bar{a}=(4;-3;1)$, заданного своими координатами в ортогональном базисе $E=\langle \bar{e}_1,\bar{e}_2,\bar{e}_3\rangle$, если $\|\bar{e}_1\|=2$, $\|\bar{e}_2\|=1$ и $\|\bar{e}_3\|=3$.

► Так как $\bar{a}=(4;-3;1)_E$, то $\bar{a}=4\bar{e}_1-3\bar{e}_2+\bar{e}_3$. Учтем также, что базис $E=\langle \bar{e}_1,\bar{e}_2,\bar{e}_3\rangle$ ортогональный, поэтому $\bar{e}_1\perp\bar{e}_2\perp\bar{e}_3$ или $(\bar{e}_1,\bar{e}_2)=(\bar{e}_1,\bar{e}_3)=(\bar{e}_2,\bar{e}_3)=0$. Отсюда искомая евклидова норма равна:

$$\|\bar{a}\|=\sqrt{(\bar{a},\bar{a})}=\sqrt{(4\bar{e}_1-3\bar{e}_2+\bar{e}_3,\,4\bar{e}_1-3\bar{e}_2+\bar{e}_3)}=$$

$$=\sqrt{16(\bar{e}_1,\bar{e}_1)-24(\bar{e}_1,\bar{e}_2)-6(\bar{e}_2,\bar{e}_3)+8(\bar{e}_1,\bar{e}_3)+9(\bar{e}_2,\bar{e}_2)+(\bar{e}_3,\bar{e}_3)}=$$

$$=\sqrt{16\|\bar{e}_1\|^2-24(\bar{e}_1,\bar{e}_2)-6(\bar{e}_2,\bar{e}_3)+8(\bar{e}_1,\bar{e}_3)+9\|\bar{e}_2\|^2+\|\bar{e}_3\|^2}=$$

$$=\left|\,(\bar{e}_1,\bar{e}_2)=(\bar{e}_1,\bar{e}_3)=(\bar{e}_2,\bar{e}_3)=0\,\right|=$$

$$=\sqrt{16\|\bar{e}_1\|^2+9\|\bar{e}_2\|^2+\|\bar{e}_3\|^2}=\sqrt{16\cdot 2^2+9\cdot 1^2+3^2}=\sqrt{82}.$$

Ответ: $\|\bar{a}\|=\sqrt{82}$. ◄

Задача 8. Проверить ортогональность системы векторов $\bar{e}_1=(1;1;1;2)$ и $\bar{e}_2=(1;2;3;-3)$ в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^4$. Дополнить эту систему до ортогонального базиса.

► Для ортогональных векторов скалярное произведение равно нулю. Поэтому в данном случае имеем:

$$(\bar{e}_1,\bar{e}_2)=(1;1;1;2)\cdot(1;2;3;-3)=1\cdot1+1\cdot2+1\cdot3+2\cdot(-3)=0,$$

то есть заданные векторы ортогональны.

В пространстве $\mathbb{R}^4$ ортогональный базис состоит из четырех взаимно ортогональных векторов. Найдем вектор $\bar{e}_3=(x_3;\,y_3;\,z_3;\,t_3)$ такой, что $\bar{e}_3\perp\bar{e}_1$ и $\bar{e}_3\perp\bar{e}_2$. Тогда:

$$\begin{cases}(\bar{e}_3,\bar{e}_1)=0,\\(\bar{e}_3,\bar{e}_2)=0,\end{cases}\Rightarrow\quad\begin{cases}(1;1;1;2)\cdot(x_3;\,y_3;\,z_3;\,t_3)=0,\\(1;2;3;-3)\cdot(x_3;\,y_3;\,z_3;\,t_3)=0,\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} x_3 + y_3 + z_3 + 2t_3 = 0, \\ x_3 + 2y_3 + 3z_3 - 3t_3 = 0. \end{cases}$$

Последнюю систему решим методом Жордана – Гаусса:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & -3 \end{pmatrix} \overset{II-I}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -5 \end{pmatrix} \overset{I=II}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & -5 \end{pmatrix}.$$

По последней матрице составим и решим систему:

$$\begin{cases} x_3 - z_3 + 7t_3 = 0, \\ y_3 + 2z_3 - 5t_3 = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_3 = z_3 - 7t_3, \\ y_3 = -2z_3 + 5t_3. \end{cases}$$

При $z_3 = 1$ и $t_3 = 0$ получим $x_3 = 1$ и $y_3 = -2$, то есть получим вектор $\overline{e}_3 = (1; -2; 1; 0)$, который ортогонален заданным векторам $\overline{e}_1 = (1; 1; 1; 2)$ и $\overline{e}_2 = (1; 2; 3; -3)$. Можно заметить, что при выборе других значений для z_3 и t_3 можно получить другой вектор $\overline{e}_3$, который также будет ортогонален заданным векторам $\overline{e}_1$ и $\overline{e}_2$.

Найдем вектор $\overline{e}_4 = (x_4; y_4; z_4; t_4) \in \mathbb{R}^4$ такой, что $\overline{e}_4 \perp \overline{e}_1$, $\overline{e}_4 \perp \overline{e}_2$ и $\overline{e}_4 \perp \overline{e}_3$. При этом будем иметь:

$$\begin{cases} (\overline{e}_4, \overline{e}_1) = 0, \\ (\overline{e}_4, \overline{e}_2) = 0, \\ (\overline{e}_4, \overline{e}_3) = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (1,1,1,2) \cdot (x_4, y_4, z_4, t_4) = 0, \\ (1,2,3,-3) \cdot (x_4, y_4, z_4, t_4) = 0, \\ (1,-2,1,0) \cdot (x_4, y_4, z_4, t_4) = 0, \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_4 + y_4 + z_4 + t_4 = 0, \\ x_4 + 2y_4 + 3z_4 - 3t_4 = 0, \\ x_4 - 2y_4 + z_4 = 0. \end{cases}$$

Решим систему методом Жордана – Гаусса:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \overset{\substack{II-I \\ III-I}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -5 \\ 0 & -3 & 0 & -2 \end{pmatrix} \overset{\substack{I-II \\ III+3II}}{\sim}$$

$$\sim\begin{pmatrix}1&0&-1&7\\0&1&2&-5\\0&0&6&-17\end{pmatrix}\overset{\substack{III\cdot 1/6\\ I+III\\ II-2III}}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&0&25/6\\0&1&0&2/3\\0&0&1&-17/6\end{pmatrix}.$$

Далее составим и решим систему по последней матрице:

$$\begin{cases}x_4+{}^{25}\!/_6\,t_4=0,\\ y_4+{}^{2}\!/_3\,t_4=0,\\ z_4-{}^{17}\!/_6\,t_4=0,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_4=-{}^{25}\!/_6\,t_4,\\ y_4=-{}^{2}\!/_3\,t_4,\\ z_4={}^{17}\!/_6\,t_4.\end{cases}$$

Пусть $t_4=-6$. Тогда $x_4=25$, $y_4=4$ и $z_4=-17$, то есть получим вектор $\overline{e}_4=(25;4;-17;-6)$.

Ответ: ортогональный базис состоит из векторов:

$$\overline{e}_1=(1;1;1;2),\ \overline{e}_2=(1;2;3;-3),$$

$$\overline{e}_3=(1;-2;1;0),\ \overline{e}_4=(25;4;-17;-6).◄$$

Система векторов евклидова пространства $\mathbf{E}$ называется ***ортонормированной***, если она ортогональная, и каждый вектор этой системы имеет норму, равную единице.

Вектор $\overline{x}$ с единичной нормой $\|\overline{x}\|=1$ называется ***единичным*** или ***нормированным*** вектором.

Любой ненулевой вектор $\overline{x}\neq\overline{0}$ можно нормировать, умножив на величину, обратную его норме:

$$\forall\overline{x}\neq\overline{0}\in\mathbf{V}\ \ \exists\overline{x}^0\in\mathbf{V}:\ \overline{x}^0=\frac{\overline{x}}{\|\overline{x}\|},\ \text{при этом } \|\overline{x}^0\|=1.$$

При этом вектор $\overline{x}^0$ называется **ортом** ненулевого вектора $\overline{x}$.

Задача 9. В линейном пространстве V_2 рассмотрим векторы $\overline{a}_1$ и $\overline{a}_2$, для которых $\|\overline{a}_1\|=2$, $\|\overline{a}_2\|=6$, $\angle(\overline{a}_1,\overline{a}_2)=\varphi=\dfrac{\pi}{3}$. Так как векторы ненулевые и неколлинеарные, то они образуют базис в V_2. Построим ортонормированный базис при помощи ***процесса Грама – Шмидта***.

► 1. Нормируем первый вектор базиса:

$$\bar{e}_1 = \frac{\bar{a}_1}{\|\bar{a}_1\|} = \frac{1}{2}\bar{a}_1.$$

2. Построим вектор $\bar{g}_2 = \bar{a}_2 + \alpha\bar{e}_1$ так, чтобы $\bar{g}_2 \perp \bar{e}_1$:

$$\bar{g}_2 \perp \bar{e}_1 \quad \Rightarrow \quad (\bar{g}_2, \bar{e}_1) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\bar{e}_1,\ \bar{a}_2 + \alpha\bar{e}_1) = (\bar{e}_1,\ \bar{a}_2) + \alpha(\bar{e}_1,\ \bar{e}_1) = 0 \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ \alpha = -\frac{(\bar{e}_1, \bar{a}_2)}{(\bar{e}_1, \bar{e}_1)} = -\frac{\left(\tfrac{1}{2}\bar{a}_1,\ \bar{a}_2\right)}{\left(\tfrac{1}{2}\bar{a}_1,\ \tfrac{1}{2}\bar{a}_1\right)} = -2\cdot\frac{(\bar{a}_1,\ \bar{a}_2)}{\bar{a}_1^2} =$$

$$= -2\cdot\frac{\|\bar{a}_1\|\cdot\|\bar{a}_2\|\cdot\cos\varphi}{\|\bar{a}_1\|^2} = -2\cdot\frac{\|\bar{a}_2\|\cdot\cos\varphi}{\|\bar{a}_1\|} = -3.$$

Поэтому получим:

$$\bar{g}_2 = \bar{a}_2 + \alpha\bar{e}_1 = \bar{a}_2 - 3\cdot\tfrac{1}{2}\bar{a}_1 = \bar{a}_2 - \tfrac{3}{2}\bar{a}_1.$$

3. Нормируем вектор $\bar{g}_2$:

$$\|\bar{g}_2\| = \sqrt{(\bar{g}_2, \bar{g}_2)} = \sqrt{\left(\bar{a}_2 - \tfrac{3}{2}\bar{a}_1,\ \bar{a}_2 - \tfrac{3}{2}\bar{a}_1\right)} =$$

$$= \sqrt{\bar{a}_2\cdot\bar{a}_2 - \tfrac{3}{2}\bar{a}_2\cdot\bar{a}_1 - \tfrac{3}{2}\bar{a}_1\cdot\bar{a}_2 + \tfrac{9}{4}\bar{a}_1\cdot\bar{a}_1} =$$

$$= \sqrt{\|\bar{a}_2\|^2 - 3\cdot\|\bar{a}_1\|\cdot\|\bar{a}_2\|\cdot\cos\varphi + \tfrac{9}{4}\cdot\|\bar{a}_1\|^2} =$$

$$= \sqrt{6^2 - 3\cdot 2\cdot 6\cdot\cos\tfrac{\pi}{3} + \tfrac{9}{4}\cdot 2^2} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}.$$

Тогда найдем вектор $\bar{e}_2$:

$$\bar{e}_2 = \frac{\bar{g}_2}{\|\bar{g}_2\|} = \frac{\bar{a}_2 - \tfrac{3}{2}\bar{a}_1}{3\sqrt{3}} = \frac{1}{3\sqrt{3}}\bar{a}_2 - \frac{1}{2\sqrt{3}}\bar{a}_1.$$

Получили ортонормированный базис $\langle \bar{e}_1, \bar{e}_2 \rangle$, где $\bar{e}_1 = \dfrac{1}{2}\bar{a}_1$ и $\bar{e}_2 = \dfrac{1}{3\sqrt{3}}\bar{a}_2 - \dfrac{1}{2\sqrt{3}}\bar{a}_1$. ◄

Задача 10. Дано четырехмерное пространство $\mathbf{P}_3(x)$, векторами которого являются многочлены степени не выше третьей. Скалярное произведение задано соотношением:

$$(\overline{x},\overline{y})=\int\limits_{-1}^{1}P(x)\cdot Q(x)dx.$$

Перейти от стандартного базиса $\langle 1,x,x^2,x^3\rangle$ к ортогональному базису.

► Обозначим $f_1=1$, $f_2=x$, $f_3=x^2$ и $f_4=x^3$. Построим ортогональный базис $G=\langle g_1,g_2,g_3,g_4\rangle$.

1. Пусть $g_1=f_1=1$.

2. Найдем $g_2=f_2+a\cdot g_1$, где $g_2\perp g_1$, то есть $a=-\dfrac{(f_2,g_1)}{(g_1,g_1)}$ (подробный вывод см. в задаче 9). Тогда:

$$a=-\frac{\int\limits_{-1}^{1}x\cdot 1dx}{\int\limits_{-1}^{1}1\cdot 1dx}=-\frac{\frac{1}{2}x^2\Big|_{-1}^{1}}{x\Big|_{-1}^{1}}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1^2-(-1)^2}{1-(-1)}=0.$$

Значит, $g_2=f_2+a\cdot g_1=f_2=x$.

3. Найдем $g_3=f_3+b\cdot g_1+c\cdot g_2$, где $g_3\perp g_1$ и $g_3\perp g_2$, то есть $b=-\dfrac{(f_3,g_1)}{(g_1,g_1)}$ и $c=-\dfrac{(f_3,g_2)}{(g_2,g_2)}$. Поэтому получим:

$$b=-\frac{\int\limits_{-1}^{1}x^2\cdot 1dx}{\int\limits_{-1}^{1}1\cdot 1dx}=-\frac{\frac{1}{3}x^3\Big|_{-1}^{1}}{x\Big|_{-1}^{1}}=-\frac{1}{3}\cdot\frac{1^3-(-1)^3}{1-(-1)}=-\frac{1}{3},$$

$$c=-\frac{\int\limits_{-1}^{1}x^2\cdot xdx}{\int\limits_{-1}^{1}x\cdot xdx}=-\frac{\frac{1}{4}x^4\Big|_{-1}^{1}}{\frac{1}{3}x^3\Big|_{-1}^{1}}=-\frac{3}{4}\cdot\frac{1^4-(-1)^4}{1^3-(-1)^3}=0.$$

В итоге имеем: $g_3=f_3+b\cdot g_1+c\cdot g_2=f_3-\frac{1}{3}\cdot g_1=x^2-\frac{1}{3}$.

4. Найдем $g_4=f_4+d\cdot g_1+e\cdot g_2+h\cdot g_3$, где $g_4\perp g_1$, $g_4\perp g_2$ и $g_4\perp g_3$, то есть $d=-\frac{(f_4,g_1)}{(g_1,g_1)}$, $e=-\frac{(f_4,g_2)}{(g_2,g_2)}$ и $h=-\frac{(f_4,g_3)}{(g_3,g_3)}$. Аналогично получим:

$$d=-\frac{\int\limits_{-1}^{1}x^3\cdot 1dx}{\int\limits_{-1}^{1}1\cdot 1dx}=-\frac{\frac{1}{4}x^4\Big|_{-1}^{1}}{x\Big|_{-1}^{1}}=0,\quad e=-\frac{\int\limits_{-1}^{1}x^3\cdot xdx}{\int\limits_{-1}^{1}x\cdot xdx}=-\frac{\frac{1}{5}x^5\Big|_{-1}^{1}}{\frac{1}{3}x^3\Big|_{-1}^{1}}=-\frac{3}{5},$$

$$h=-\frac{\int\limits_{-1}^{1}x^3\cdot\left(x^2-\frac{1}{3}\right)dx}{\int\limits_{-1}^{1}\left(x^2-\frac{1}{3}\right)\cdot\left(x^2-\frac{1}{3}\right)dx}=-\frac{\int\limits_{-1}^{1}\left(x^5-\frac{1}{3}x^3\right)dx}{\int\limits_{-1}^{1}\left(x^4-\frac{2}{3}x^2+\frac{1}{9}\right)dx}=$$

$$=-\frac{\left(\frac{1}{6}x^6-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}x^4\right)\Big|_{-1}^{1}}{\left(\frac{1}{5}x^5-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{9}\cdot x\right)\Big|_{-1}^{1}}=0.$$

Тогда получим:

$$g_4=f_4+d\cdot g_1+e\cdot g_2+h\cdot g_3=f_4-\frac{3}{5}g_2=x^3-\frac{3}{5}x.$$

В итоге имеем систему ортогональных многочленов:

$$g_1=1,\ g_2=x,\ g_3=x^2-\frac{1}{3},\ g_4=x^3-\frac{3}{5}x,$$

которая является ортогональным базисом пространства $\mathbf{P}_3(x)$.

Однако эта система многочленов не является нормированной. Найдем ортонормированный базис пространства $\mathbf{P}_3(x)$. Для этого каждый многочлен базиса $G=\langle g_1,g_2,g_3,g_4\rangle$ нужно разделить на его норму.

Найдем нормы базисных многочленов.

$$\|g_1\|=\sqrt{(g_1,g_1)}=\sqrt{\int_{-1}^{1}1\cdot 1dx}=\sqrt{x\big|_{-1}^{1}}=\sqrt{1-(-1)}=\sqrt{2}\,.$$

$$\|g_2\|=\sqrt{(g_2,g_2)}=\sqrt{\int_{-1}^{1}x\cdot xdx}=\sqrt{\tfrac{1}{3}x^3\big|_{-1}^{1}}=\sqrt{\tfrac{1}{3}\cdot\left(1^3-(-1)^3\right)}=\sqrt{\tfrac{2}{3}}\,.$$

$$\|g_3\|=\sqrt{(g_3,g_3)}=\sqrt{\int_{-1}^{1}\left(x^2-\tfrac{1}{3}\right)\cdot\left(x^2-\tfrac{1}{3}\right)dx}=$$

$$=\sqrt{\int_{-1}^{1}\left(x^4-\tfrac{2}{3}x^2+\tfrac{1}{9}\right)dx}=\sqrt{\left(\tfrac{1}{5}x^5-\tfrac{2}{3}\cdot\tfrac{1}{3}x^3+\tfrac{1}{9}x\right)\Big|_{-1}^{1}}=\tfrac{2}{3}\sqrt{\tfrac{2}{5}}\,.$$

$$\|g_4\|=\sqrt{(g_4,g_4)}=\sqrt{\int_{-1}^{1}\left(x^3-\tfrac{3}{5}x\right)\cdot\left(x^3-\tfrac{3}{5}x\right)dx}=$$

$$=\sqrt{\int_{-1}^{1}\left(x^6-\tfrac{6}{5}x^4+\tfrac{9}{25}x^2\right)dx}=\tfrac{2}{5}\sqrt{\tfrac{2}{7}}\,.$$

Пронормируем базисные многочлены:

$$\tilde{P}_0(x)=\frac{g_1}{\|g_1\|}=\frac{1}{\sqrt{2}},\quad \tilde{P}_1(x)=\frac{g_2}{\|g_2\|}=\sqrt{\tfrac{3}{2}}\,x,$$

$$\tilde{P}_2(x)=\frac{g_3}{\|g_3\|}=\sqrt{\tfrac{5}{2}}\left(\tfrac{3}{2}x^2-\tfrac{1}{2}\right),$$

$$\tilde{P}_3(x)=\frac{g_4}{\|g_4\|}=\sqrt{\tfrac{7}{2}}\left(\tfrac{5}{2}x^3-\tfrac{3}{2}x\right).$$

Такая система ортонормированных многочленов называется системой многочленов Лежандра. ◄

Метрикой (или ***расстоянием***) в пространстве $\mathbf{V}$ называется правило, по которому каждой паре элементов $x,\, y\in\mathbf{V}$ соответствует единственное неотрицательное число $\rho(x, y)$, удовлетворяющее следующим трем условиям (аксиомам метрического пространства):

1⁰. $\forall x, y \in \mathbf{V}: \quad \rho(x, y) \geqslant 0$, причем $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ (аксиома тождества).

2⁰. $\forall x, y \in \mathbf{V}: \quad \rho(x, y) = \rho(y, x)$ (аксиома симметрии).

3⁰. $\forall x, y, z \in \mathbf{V}: \quad \rho(x, y) + \rho(y, z) \geqslant \rho(x, z)$ (аксиома треугольника).

Пространство $\mathbf{V}$ с заданной на нем метрикой $\rho(x, y)$ называется ***метрическим пространством***.

Задача 11. Доказать, что в пространстве действительных чисел $\mathbb{R}$ в качестве метрики можно рассматривать функцию:

$$\rho(x, y) = |x - y|.$$

► Проверим выполнимость аксиом метрики.

1. Модуль есть неотрицательное число, то есть $|x - y| \geq 0$.

При этом по свойствам модуля имеем:

$$|x - y| = 0 \Leftrightarrow x - y = 0 \Leftrightarrow x = y.$$

2. Из свойства модуля $|x| = |-x|$ следует, что $|x - y| = |y - x|$, т.е. аксиома симметрии выполняется.

3. Зная свойство модуля $|x + y| \leqslant |x| + |y|$, получаем:

$$|x - z| = |(x - y) + (y - z)| \leqslant |x - y| + |y - z|,$$

т.е. аксиома треугольника выполнена, поэтому правило $\rho(x, y) = |x - y|$ задает метрику.◄

Полученное метрическое пространство называют ***одномерным арифметическим пространством*** или ***числовой прямой***.

В пространстве арифметических векторов $\mathbb{R}^n$ для любых векторов (точек) пространства $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ можно определить расстояние следующими правилами:

$$\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2} \text{ или } \rho(x, y) = \max_{1 \le i \le n} |x_i - y_i|.$$

В пространстве $\mathbb{R}[a, b]$ всех функций, непрерывных на отрезке $[a, b]$, расстояние между двумя элементами можно вычислять по формуле:

$$\rho(f, g) = \sup_{x\in[a,b]} \left| f(x) - g(x) \right|.$$

Задача 12. На множестве действительных чисел $\mathbb{R}$ заданы несколько правил: 1) $\rho(x, y) = x - y$, 2) $\rho(x, y) = 1$, 3) $\rho(x, y) = \ln(1 + |x - y|)$. Определить, какие из них являются метриками.

► Проверим выполнимость аксиом метрики.

1. Для чисел $x = 2$ и $y = 7$ имеем:

$$\rho(x, y) = x - y = 2 - 7 = -5 < 0,$$

то есть первая аксиома не выполняется, поэтому $\rho(x, y) = x - y$ не задает метрику.

2. Для заданного правила $\rho(x, y) = 1$ имеем $\rho(x, y) > 0$, но для $x = y$ получим $\rho(x, x) = 1 \neq 0$, поэтому аксиома тождества не выполняется и $\rho(x, y) = 1$ не является метрикой.

3. Для $\rho(x, y) = \ln(1 + |x - y|)$ имеем:

$$|x - y| \geq 0 \Rightarrow 1 + |x - y| \geq 1 \Rightarrow \ln(1 + |x - y|) \geq 0.$$

При этом если $x = y$, то получим:

$$|x - y| = 0 \Rightarrow \ln(1 + |x - y|) = \ln 1 = 0,$$

значит, первая аксиома выполняется.

Аксиома симметрии выполняется по аналогии с задачей 12.

Для аксиомы треугольника имеем:

$$\rho(x, z) = \ln(1 + |x - z|) = \ln\left(1 + \left|(x - y) + (y - z)\right|\right).$$

По свойству модуля $|a + b| \leqslant |a| + |b|$ получим:

$$\rho(x, z) \leq \ln(1 + |x - y|) + \ln(1 + |y - z|) = \rho(x, y) + \rho(y, z),$$

значит, аксиома треугольника выполняется.

В итоге правило $\rho(x, y) = \ln(1 + |x - y|)$ задает метрику. ◄

3. Линейные операторы

3.1. Определение линейного оператора и его матрица

Линейные отображения векторных пространств появляются в различных разделах математики. Их примерами могут служить вращения и отражения в трехмерном пространстве, а также операции дифференцирования и интегрирования в пространствах функций.

Пусть заданы два линейных пространства $\mathbf{V}$ и $\mathbf{W}$. ***Линейным отображением*** или ***линейным оператором*** $\tilde{A}$ пространства $\mathbf{V}$ в пространство $\mathbf{W}$ называется такая функция $\tilde{A}:\mathbf{V}\to\mathbf{W}$, что:

1) $D\left(\tilde{A}\right)=\mathbf{V}$ – область определения функции $\tilde{A}$ совпадает с множеством $\mathbf{V}$;

2) $E\left(\tilde{A}\right)\subseteq\mathbf{W}$ – область значений функции $\tilde{A}$ является подмножеством множества $\mathbf{W}$ или совпадает с ним;

3) для любых $\bar{x},\bar{y}\in\mathbf{V}$: $\boxed{\tilde{A}\left(\bar{x}+\bar{y}\right)=\tilde{A}\left(\bar{x}\right)+\tilde{A}\left(\bar{y}\right)}$;

4) для любого $\bar{x}\in\mathbf{V}$ и любого $\lambda\in\mathbb{R}$: $\boxed{\tilde{A}\left(\lambda\bar{x}\right)=\lambda\tilde{A}\left(\bar{x}\right)}$.

Из определения линейного оператора следует, что он отображает линейно зависимые элементы $\bar{x}_1$, $\bar{x}_2,\ldots,$ $\bar{x}_n$ в линейно зависимые.

Примером линейного отображения является функция $\tilde{A}:\mathbf{P}_n\to\mathbb{R}^{n+1}$, которая каждому многочлену

$$f\left(x\right)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0\in\mathbf{P}_n$$

ставит в соответствие вектор

$$\bar{a}=\tilde{A}\left(f\left(x\right)\right)=\left(a_0,a_1,\ldots,a_n\right)\in\mathbb{R}^{n+1}.$$

Линейный оператор $\tilde{A}:\mathbf{V}\to\mathbf{V}$ называется также ***линейным преобразованием***. Ограничимся далее рассмотрением только линейных операторов $\tilde{A}:\mathbf{V}\to\mathbf{V}$.

Рассмотрим **примеры линейных операторов** $\tilde{A}:\mathbf{V}\to\mathbf{V}$.

1. Пусть $\mathbf{V}=V_2$ – множество векторов на плоскости. Примерами линейных операторов в этом пространстве являются: поворот вокруг начала координат на некоторый угол; растяжение или сжатие в некотором направлении.

2. Пусть $\mathbf{V}=\mathbb{R}^n$. Определим функцию $A(\overline{x})=k\overline{x}$. Данная функция определяет растяжение в k раз каждого элемента $\overline{x}\in\mathbb{R}^n$ и является линейным оператором.

3. Пусть $\mathbf{V}=\mathbf{P}_n$ – множество многочленов степени, не превосходящей n. Примером линейного оператора в этом пространстве является оператор дифференцирования $\tilde{D}$ (нахождение производной).

Если $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0\in\mathbf{P}_n$, то

$$\tilde{D}(f(x))=na_nx^{n-1}+(n-1)a_{n-1}x^{n-2}+\ldots+2a_2x+a_1\in\mathbf{P}_n.$$

Линейность оператора $\tilde{D}$ следует из свойств производной (производная суммы равна сумме производных, постоянный множитель можно выносить за знак производной).

Образом линейного оператора $\tilde{A}$ называется множество $\mathrm{im}\tilde{A}$ всех элементов $\overline{y}$ пространства $\mathbf{V}$, обладающих свойством: $\overline{y}\in\mathrm{im}\tilde{A}$, если существует $\overline{x}\in\mathbf{V}$ такой, что $\overline{y}=\tilde{A}\overline{x}$, то есть

$$\boxed{\mathrm{im}\tilde{A}=\{\overline{y}\in\mathbf{V}:\exists\overline{x}\in\mathbf{V}(\overline{y}=\tilde{A}\overline{x})\}}.$$

Фактически образ линейного оператора - это множество его значений.

Рангом линейного оператора $\tilde{A}$ называется число, равное размерности пространства $\mathrm{im}\tilde{A}$, то есть $\boxed{\mathrm{rang}\tilde{A}=\dim(\mathrm{im}\tilde{A})}$.

Ядром линейного оператора $\tilde{A}$ называется множество $\ker\tilde{A}$ всех $\overline{x}\in\mathbf{V}$ таких, что $\tilde{A}\overline{x}=\overline{\theta}$, то есть $\boxed{\ker\tilde{A}=\{\overline{x}\in\mathbf{V}:\tilde{A}\overline{x}=\overline{\theta}\}}$.

Множества $\mathrm{im}\tilde{A}$ и $\ker\tilde{A}$ являются подпространствами линейного пространства $\mathbf{V}$.

Дефектом линейного оператора называется число, равное размерности пространства $\ker\tilde{A}$, то есть $\boxed{\mathrm{defect}\tilde{A} = \dim(\ker\tilde{A})}$.

Справедлива формула $\boxed{\mathrm{rang}\tilde{A} + \mathrm{defect}\tilde{A} = \dim\mathbf{V}}$.

Задача 1. Пусть задано трехмерное пространство геометрических векторов V_3, $\bar{a} \neq \bar{0}$ - некоторый фиксированный вектор. Доказать, что отображение $\tilde{A}$ является линейным оператором, где $\tilde{A}\bar{x} = \dfrac{(\bar{x},\bar{a})}{(\bar{a},\bar{a})} \cdot \bar{a}$ и $\left(\bar{x},\bar{a}\right)$ – скалярное произведение векторов $\bar{x}$ и $\bar{a}$. Найти его образ, ядро, ранг и дефект.

► Очевидно, что отображение $\tilde{A}$ удовлетворяет первым двум условиям определения линейного оператора:

$$D\left(\tilde{A}\right) = V_3,\ E\left(\tilde{A}\right) \subset V_3.$$

Проверим выполнение условий 3 и 4. При их проверке используем известные свойства скалярного произведения векторов.

Пусть $\bar{x} \in V_3$ и $\bar{y} \in V_3$. Тогда

$$\tilde{A}(\bar{x}+\bar{y}) = \frac{(\bar{x}+\bar{y},\bar{a})}{(\bar{a},\bar{a})} \cdot \bar{a} = \frac{(\bar{x},\bar{a})+(\bar{y},\bar{a})}{(\bar{a},\bar{a})} \cdot \bar{a} =$$

$$= \frac{(\bar{x},\bar{a})}{(\bar{a},\bar{a})} \cdot \bar{a} + \frac{(\bar{y},\bar{a})}{(\bar{a},\bar{a})} \cdot \bar{a} = \tilde{A}\bar{x} + \tilde{A}\bar{y}.$$

Следовательно, условие 3 выполняется.

Пусть $\bar{x} \in V_3$ и $\lambda \in \mathbb{R}$. Тогда

$$\tilde{A}(\lambda\bar{x}) = \frac{(\lambda\bar{x},\bar{a})}{(\bar{a},\bar{a})} \cdot \bar{a} = \frac{\lambda(\bar{x},\bar{a})}{(\bar{a},\bar{a})} \cdot \bar{a} = \lambda\frac{(\bar{x},\bar{a})}{(\bar{a},\bar{a})} \cdot \bar{a} = \lambda\tilde{A}\bar{x}.$$

Следовательно, условие 4 выполняется.

Так как выполнены все условия определения линейного оператора, то отображение $\tilde{A}$ является линейным оператором.

Можно заметить, что $\tilde{A}$ – геометрическая проекция вектора на вектор.

Образом линейного оператора $\tilde{A}$ является множество векторов, коллинеарных вектору $\bar{a}$, так как $\tilde{A}\bar{x} = \dfrac{(\bar{x},\bar{a})}{(\bar{a},\bar{a})}\cdot\bar{a} \parallel \bar{a}$. Следовательно, ранг оператора $\mathrm{rang}\tilde{A} = 1$. Ядром линейного оператора $\tilde{A}$ является множество векторов, перпендикулярных к вектору $\bar{a}$, так как если $\bar{x} \perp \bar{a}$, то $(\bar{x},\bar{a}) = 0$ и $\tilde{A}\bar{x} = \dfrac{(\bar{x},\bar{a})}{(\bar{a},\bar{a})}\cdot\bar{a} = \bar{0}$. Дефект оператора $\mathrm{defect}\tilde{A} = \dim V - \mathrm{rang}\tilde{A} = 3 - 1 = 2$. ◄

Задача 2. Пусть $\bar{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. Проверить, являются ли следующие операторы линейными:

а) $\tilde{A}\bar{x} = (2x_1 - 3x_2, x_1 + x_2)$,

б) $\tilde{B}\bar{x} = (x_1 + 4x_2, 5x_2 + 2)$,

в) $\tilde{C}\bar{x} = (-x_1^2 + x_2, x_1)$.

► Первые два условия из определения линейного оператора выполняются для всех операторов $\tilde{A}$, $\tilde{B}$ и $\tilde{C}$. Проверим выполнение условий 3 и 4.

Пусть $\bar{x} = (x_1, x_2)$, $\bar{y} = (y_1, y_2)$ и $\lambda \in \mathbb{R}$. Тогда

$$\bar{x} + \bar{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2) \text{ и } \lambda\bar{x} = (\lambda x_1, \lambda x_2).$$

а) Для оператора $\tilde{A}$ имеем:

$$\tilde{A}\bar{x} = (2x_1 - 3x_2, x_1 + x_2),\ \tilde{A}\bar{y} = (2y_1 - 3y_2, y_1 + y_2),$$

$$\tilde{A}\bar{x} + \tilde{A}\bar{y} = ((2x_1 - 3x_2) + (2y_1 - 3y_2), (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)) =$$

$$= (2(x_1 + y_1) - 3(x_2 + y_2), (x_1 + y_1) + (x_2 + y_2)) = \tilde{A}(\bar{x} + \bar{y}).$$

Следовательно, условие 3 выполняется.

$$\tilde{A}(\lambda\overline{x}) = (2(\lambda x_1) - 3(\lambda x_2), (\lambda x_1) + (\lambda x_2)) =$$
$$= (\lambda(2x_1 - 3x_2), \lambda(x_1 + x_2)) = \lambda(2x_1 - 3x_2, x_1 + x_2) = \lambda\tilde{A}\overline{x}.$$

Следовательно, условие 4 выполняется.

Значит, оператор $\tilde{A}$ **является линейным**.

б) Для оператора $\tilde{B}$ имеем:

$$\tilde{B}\overline{x} = (x_1 + 4x_2, 5x_2 + 2),\ \tilde{B}\overline{y} = (y_1 + 4y_2, 5y_2 + 2),$$
$$\tilde{B}\overline{x} + \tilde{B}\overline{y} = ((x_1 + 4x_2) + (y_1 + 4y_2), (5x_2 + 2) + (5y_2 + 2)) =$$
$$= ((x_1 + y_1) + 4(x_2 + y_2), 5(x_2 + y_2) + 4),$$
$$\tilde{B}(\overline{x} + \overline{y}) = ((x_1 + y_1) + 4(x_2 + y_2), 5(x_2 + y_2) + 2).$$

$\tilde{B}\overline{x} + \tilde{B}\overline{y} \neq \tilde{B}(\overline{x} + \overline{y})$, так как $5(x_2 + y_2) + 4 \neq 5(x_2 + y_2) + 2$.

Следовательно, условие 3 не выполняется. Значит, оператор $\tilde{B}$ **не является линейным**.

в) Для оператора $\tilde{C}$ имеем:

$$\lambda\tilde{C}\overline{x} = \lambda(-x_1^2 + x_2, x_1),\ \tilde{C}(\lambda\overline{x}) = (-(\lambda x_1)^2 + (\lambda x_2), (\lambda x_1)) =$$
$$= (-\lambda^2 x_1^2 + \lambda x_2, \lambda x_1) = \lambda(-\lambda x_1^2 + x_2, x_1).$$

$\tilde{C}(\lambda\overline{x}) \neq \lambda\tilde{C}\overline{x}$, так как $-\lambda x_1^2 + x_2 \neq -x_1^2 + x_2$.

Следовательно, условие 4 не выполняется.

Значит, оператор $\tilde{C}$ **не является линейным**. ◄

Задача 3. Пусть линейный оператор $\tilde{A}$ действует в линейном пространстве $(\mathbf{V},+,\cdot)$. Известно, что размерность линейного пространства равна 4, а дефект оператора $\tilde{A}$ равен 1. Указать ранг данного оператора.

► По условию задачи $\dim \mathbf{V} = 4, \operatorname{defect} \tilde{A} = 1$. Выразим ранг данного оператора из формулы $\operatorname{rang}\tilde{A} + \operatorname{defect}\tilde{A} = \dim \mathbf{V}$. Получим $\operatorname{rang}\tilde{A} = \dim \mathbf{V} - \operatorname{defect}\tilde{A} = 4 - 1 = 3$. ◄

Рассмотрим, каким образом можно задавать линейные операторы. Выберем в пространстве $(\mathbf{V},+,\cdot)$ какой-нибудь базис

$E=\langle \bar{e}_1, \bar{e}_2, ..., \bar{e}_n \rangle$. Предположим, что известны образы векторов базиса: $\tilde{A}(\bar{e}_1)=\bar{f}_1$, $\tilde{A}(\bar{e}_2)=\bar{f}_2$,…, $\tilde{A}(\bar{e}_n)=\bar{f}_n$.

Разложим векторы $\bar{f}_1$, $\bar{f}_2$,…, $\bar{f}_n$ по базису E. Пусть $\bar{f}_1=a_{11}\bar{e}_1+a_{21}\bar{e}_2+...+a_{n1}\bar{e}_n$, $\bar{f}_2=a_{12}\bar{e}_1+a_{22}\bar{e}_2+...+a_{n2}\bar{e}_n$,…, $\bar{f}_n=a_{1n}\bar{e}_1+a_{2n}\bar{e}_2+...+a_{nn}\bar{e}_n$, то есть векторы $\bar{f}_1$, $\bar{f}_2$,…, $\bar{f}_n$ в базисе E имеют координаты

$$\bar{f}_1=\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{n1} \end{pmatrix}_E, \quad \bar{f}_2=\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{n2} \end{pmatrix}_E, \dots, \quad \bar{f}_n=\begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \dots \\ a_{nn} \end{pmatrix}_E.$$

Пусть $\bar{x}\in\mathbf{V}$ – произвольный вектор пространства, имеющий координаты

$$\bar{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}_E, \text{ или } \bar{x}=x_1\bar{e}_1+x_2\bar{e}_2+...+x_n\bar{e}_n.$$

Тогда $\bar{y}=\tilde{A}(\bar{x})$ имеет координаты:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}_E = \mathrm{A}\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}_E,$$

где матрица $\mathrm{A}=(a_{ij})$ – ***матрица линейного оператора*** $\tilde{A}$ в базисе $E=\langle \bar{e}_1, \bar{e}_2, ..., \bar{e}_n \rangle$. Столбцами матрицы A являются координатные столбцы образов базисных векторов.

Задание линейного оператора $\tilde{A}$ равносильно заданию его матрицы A в некотором базисе.

Задача 4. Пусть задано трехмерное пространство геометрических векторов V_3 и $\tilde{A}$ - линейный оператор проектирования вектора $\overline{x} \in V_3$ на плоскость Oxy. Найти матрицу этого оператора в базисе $E = <\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}>$.

► Найдем образы векторов базиса $\tilde{A}(\overline{i}) = \overline{i} = (1, 0, 0)$, $\tilde{A}(\overline{j}) = \overline{j} = (0, 1, 0)$ и $\tilde{A}(\overline{k}) = \overline{0} = (0, 0, 0)$. Запишем матрицу линейного оператора $\tilde{A}$:

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \blacktriangleleft$$

Задача 5. Пусть $\overline{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. Записать матрицу линейного оператора $\tilde{A}\overline{x} = (2x_1 - 3x_2, x_1 + x_2)$ в базисе $E = <\overline{e}_1, \overline{e}_2>$, где $\overline{e}_1 = (1, 0)$ и $\overline{e}_2 = (0, 1)$.

► Найдем образы векторов базиса:

$$\tilde{A}\overline{e}_1 = (2 \cdot 1 - 3 \cdot 0, 1 + 0) = (2, 1) = 2\overline{e}_1 + \overline{e}_2,$$

$$\tilde{A}\overline{e}_2 = (2 \cdot 0 - 3 \cdot 1, 0 + 1) = (-3, 1) = -3\overline{e}_1 + \overline{e}_2.$$

Запишем матрицу линейного оператора $\tilde{A}$: $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. ◄

Замечание. Линейным операциям над векторами соответствуют аналогичные операции над их матрицами в некотором базисе. В частности, если $\tilde{B}$ - линейный оператор, обратный линейному оператору $\tilde{A}$, то его матрица $\mathrm{B}=\mathrm{A}^{-1}$, где A – матрица линейного оператора $\tilde{A}$.

При переходе к другому базису линейный оператор не изменяется, но изменяется его матрица.

Теорема. Если A – матрица линейного оператора $\tilde{A}$ в базисе $E = \langle \overline{e}_1, \overline{e}_2, ..., \overline{e}_n \rangle$, а A' – его матрица в базисе

$E' = \langle \bar{e}'_1, \bar{e}'_2, \ldots, \bar{e}'_n \rangle$, то $\boxed{\mathrm{A}' = U^{-1}\mathrm{A}U}$, где U – матрица перехода от базиса $E = \langle \bar{e}_1, \bar{e}_2, \ldots, \bar{e}_n \rangle$ к базису $E' = \langle \bar{e}'_1, \bar{e}'_2, \ldots, \bar{e}'_n \rangle$.

Задача 6. Найти матрицу A' линейного оператора $\tilde{A}$ в базисе $E' = \langle \bar{e}'_1, \bar{e}'_2, \bar{e}'_3 \rangle$, если в базисе $E = \langle \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3 \rangle$, где $\bar{e}_1 = (1,0,0)$, $\bar{e}_2 = (0,1,0)$ и $\bar{e}_3 = (0,0,1)$, она имеет вид

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

и $\bar{e}'_1 = (1,1,0)$, $\bar{e}'_2 = (1,0,1)$ и $\bar{e}'_3 = (0,1,1)$.

► Запишем матрицу перехода от базиса E к базису E':

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \text{ причем } \det U = |U| = -2 \neq 0.$$

Найдем матрицу, обратную матрице перехода:

$$U^{-1} = \frac{1}{-2} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Для нахождения матрицы A' используем формулу $\mathrm{A}' = U^{-1}\mathrm{A}U$. Получим:

$$\mathrm{A}' = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}. \blacktriangleleft$$

3.2. Собственные значения и собственные элементы линейного оператора

Элемент $\overline{x} \neq \overline{0} \in \mathbf{V}$ называется ***собственным вектором (элементом)*** линейного оператора $\tilde{A}$, если существует такое число $\lambda \in \mathbb{R}$, что $\boxed{\tilde{A}(\overline{x}) = \lambda \overline{x}}$. При этом λ называется ***собственным значением*** оператора $\tilde{A}$.

Пусть в пространстве $\mathbf{V}$ выбран некоторый базис $E = \langle \overline{e}_1, \overline{e}_2, \ldots, \overline{e}_n \rangle$. Если A – матрица линейного оператора $\tilde{A}$ в этом базисе, а $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}_E$ – координаты элемента $\overline{x}$, то

$$\boxed{\mathrm{A} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}_E = \lambda \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}_E}.$$

Теорема. Число λ является собственным значением линейного оператора $\tilde{A}$ (матрицы A) тогда и только тогда, когда оно является корнем уравнения $\det(\mathrm{A} - \lambda \mathrm{E}) = 0$, где E - единичная матрица, а $\det(\mathrm{A}-\lambda\mathrm{E})=|\mathrm{A}-\lambda\mathrm{E}|$ – определитель матрицы $\mathrm{A}-\lambda\mathrm{E}$.

Уравнение $\boxed{\det(\mathrm{A} - \lambda \mathrm{E}) = 0}$ называется ***характеристическим уравнением матрицы*** A (линейного оператора $\tilde{A}$), а его корни – ***характеристическими числами*** матрицы A. Все собственные значения матрицы являются ее характеристическими числами и наоборот.

Задача 7. Пусть $\tilde{A}\bar{x} = (11x_1 + 6x_2, -18x_1 - 10x_2)$ – линейный оператор, где $\bar{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. Найти его собственные значения.

► Найдем матрицу линейного оператора $\tilde{A}$ в стандартном базисе $E =< \bar{e}_1, \bar{e}_2 >$, где $\bar{e}_1 = (1,0)$ и $\bar{e}_2 = (0,1)$. Так как

$$\tilde{A}\bar{e}_1 = (11\cdot 1 + 6\cdot 0, -18\cdot 1 - 10\cdot 0) = (11, -18) = 11\bar{e}_1 - 18\bar{e}_2$$

и

$$\tilde{A}\bar{e}_2 = (11\cdot 0 + 6\cdot 1, -18\cdot 0 - 10\cdot 1) = (6, -10) = 6\bar{e}_1 - 10\bar{e}_2,$$

то матрица оператора $\tilde{A}$ имеет вид $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 11 & 6 \\ -18 & -10 \end{pmatrix}$.

Для нахождения собственных значений линейного оператора $\tilde{A}$ решим характеристическое уравнение $|\mathrm{A} - \lambda \mathrm{E}| = 0$.

В нашем случае оно имеет вид $\begin{vmatrix} 11-\lambda & 6 \\ -18 & -10-\lambda \end{vmatrix} = 0$, или

$$(11-\lambda)\cdot(-10-\lambda) - (-18)\cdot 6 = 0,\ \lambda^2 + 2\lambda - 3 = 0.$$

Отсюда $\lambda_1 = 2$ и $\lambda_2 = -1$ - корни характеристического уравнения и, следовательно, собственные значения линейного оператора $\tilde{A}$. ◄

Две квадратные матрицы А и В называются ***подобными***, если существует такая неособенная матрица Р ($\det \mathrm{P} = |\mathrm{P}| \neq 0$), что

$$\boxed{\mathrm{B} = \mathrm{P}^{-1}\cdot \mathrm{A}\cdot \mathrm{P}} \text{ или } \boxed{\mathrm{A}\cdot \mathrm{P} = \mathrm{P}\cdot \mathrm{B}}.$$

Если А и В – подобные матрицы, то они имеют одинаковые характеристические числа.

Если А и A' – матрицы одного линейного оператора $\tilde{A}$ в различных базисах, то эти матрицы подобны и имеют одинаковые собственные значения (характеристические числа). Таким образом, собственные значения линейного оператора не зависят от выбора базиса.

Задача 8. Проверить, являются ли подобными матрицы
$$A=\begin{pmatrix}4 & 1\\ -6 & -1\end{pmatrix} \text{ и } B=\begin{pmatrix}5 & -2\\ 12 & -5\end{pmatrix}.$$

► Подобные матрицы имеют одинаковые собственные значения. Найдем собственные значения матриц A и B.

Для матрицы A характеристическое уравнение имеет вид $\begin{vmatrix}4-\lambda & 1\\ -6 & -1-\lambda\end{vmatrix}=0$, откуда $(4-\lambda)(-1-\lambda)+6=0$ и, следовательно, $\lambda_1=1, \lambda_2=2$ - собственные значения матрицы A.

Для матрицы B характеристическое уравнение имеет вид $\begin{vmatrix}5-\lambda & -2\\ 12 & -5-\lambda\end{vmatrix}=0$, откуда $(5-\lambda)(-5-\lambda)+24=0$ и, следовательно, $\lambda_1=1, \lambda_2=-1$ - собственные значения матрицы B.

Так как матрицы A и B имеют различные собственные значения ($2\neq-1$), то они **не являются подобными.** ◄

Задача 9. Проверить, являются ли матрицы $A=\begin{pmatrix}2 & 3\\ -1 & 1\end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix}-12 & 5\\ -37 & 15\end{pmatrix}$ подобными.

► Матрицы A и B имеют одинаковые собственные значения (проверьте самостоятельно!), поэтому они могут оказаться подобными.

Попробуем найти неособенную матрицу P такую, что $A\cdot P=P\cdot B$. Пусть $P=\begin{pmatrix}p_{11} & p_{12}\\ p_{21} & p_{22}\end{pmatrix}$. Тогда

$$AP=\begin{pmatrix}2 & 3\\ -1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}p_{11} & p_{12}\\ p_{21} & p_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2p_{11}+3p_{21} & 2p_{12}+3p_{22}\\ -p_{11}+p_{21} & -p_{12}+p_{22}\end{pmatrix},$$

$$\text{PB}=\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -12 & 5 \\ -37 & 15 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -12p_{11}-37p_{12} & 5p_{11}+15p_{12} \\ -12p_{21}-37p_{22} & 5p_{21}+15p_{22} \end{pmatrix}.$$

Из равенства $\text{A}\cdot\text{P}=\text{P}\cdot\text{B}$ получим

$$\begin{pmatrix} 2p_{11}+3p_{21} & 2p_{12}+3p_{22} \\ -p_{11}+p_{21} & -p_{12}+p_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -12p_{11}-37p_{12} & 5p_{11}+15p_{12} \\ -12p_{21}-37p_{22} & 5p_{21}+15p_{22} \end{pmatrix},$$

откуда получим однородную СЛАУ для нахождения элементов матрицы P:

$$\begin{cases} -12p_{11}-37p_{12}=2p_{11}+3p_{21}, \\ 5p_{11}+15p_{12}=2p_{12}+3p_{22}, \\ -12p_{21}-37p_{22}=-p_{11}+p_{21}, \\ 5p_{21}+15p_{22}=-p_{12}+p_{22}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 14p_{11}+37p_{12}+3p_{21}=0, \\ 5p_{11}+13p_{12}-3p_{22}=0, \\ p_{11}-13p_{21}-37p_{22}=0, \\ p_{12}+5p_{21}+14p_{22}=0. \end{cases}$$

Приводим основную матрицу системы к ступенчатому виду:

$$\begin{pmatrix} 14 & 37 & 3 & 0 \\ 5 & 13 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & -13 & -37 \\ 0 & 1 & 5 & 14 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 1 & 0 & -13 & -37 \\ 0 & 1 & 5 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

и находим какое-нибудь ненулевое решение СЛАУ: $\begin{cases} p_{11} \quad -13p_{21}-37p_{22}=0, \\ p_{12}+5p_{21}+14p_{22}=0, \end{cases}$ равносильной исходной.

При $p_{21}=3,\ p_{22}=-1$ получим $p_{11}=2,\ p_{12}=-1$, откуда $\text{P}=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ и $\det\text{P}=|\text{P}|=2+3=5\neq 0$.

При этом

$$\text{PB}=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -12 & 5 \\ -37 & 15 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -24+37 & 10-15 \\ -36+37 & 15-15 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 13 & -5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

и $AP=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4+9 & -2-3 \\ -2+3 & 1-1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 13 & -5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Следовательно, матрицы $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix} -12 & 5 \\ -37 & 15 \end{pmatrix}$ подобны, так как существует матрица $P=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ такая, что $|P|\neq 0$ и $P\cdot B=A\cdot P$. ◄

Некоторые свойства собственных векторов и собственных значений:

1. Линейный оператор в n-мерном пространстве (матрица размерности $n\times n$) имеет ровно n собственных значений. При этом среди них могут быть кратные или комплексно сопряженные.

2. Если λ_1 и λ_2 – различные собственные значения линейного оператора $\tilde{A}$, а $\overline{x}_1$ и $\overline{x}_2$ – соответствующие им собственные векторы, то векторы $\overline{x}_1$ и $\overline{x}_2$ линейно независимы.

3. Если линейный оператор $\tilde{A}$ имеет n различных действительных собственных значений, то существует базис, в котором матрица этого оператора является диагональной.

Замечание 1. Если собственные значения линейного оператора $\tilde{A}$ различные, но среди них встречаются комплексные, то им будут соответствовать собственные векторы с комплексными координатами и в базисе из этих элементов матрица линейного оператора имеет диагональный вид. Если среди собственных значений линейного оператора $\tilde{A}$ есть кратные, то может не существовать базис, в котором матрица этого оператора имеет диагональный вид.

Замечание 2. Из определения подобных матриц следует, что матрица, имеющая n различных действительных собственных значений (характеристических чисел), подобна диагональной матрице.

Задача 10. Найти базис, в котором имеет диагональный вид матрица $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -5 \\ 3 & 4 & 5 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

► **1.** Найдем собственные значения матрицы A. Для этого запишем ее характеристическое уравнение:

$$\det(A - \lambda E) = 0 \text{ или } \begin{vmatrix} -1-\lambda & -2 & -5 \\ 3 & 4-\lambda & 5 \\ -3 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Вычислим определитель по правилу треугольника:

$$(-1-\lambda)(4-\lambda)(1-\lambda) - 5\cdot 3\cdot 2 + 2\cdot 5\cdot 3 -$$

$$-3\cdot(4-\lambda)\cdot 5 - 2\cdot 5\cdot(-1-\lambda) + 2\cdot 3\cdot(1-\lambda) = 0,$$

$$(4-\lambda)(\lambda^2 - 1) - 30 + 30 - 15(4-\lambda) + 10(1+\lambda) + 6(1-\lambda) = 0,$$

$$4\lambda^2 - \lambda^3 - 4 + \lambda - 60 + 15\lambda + 10 + 10\lambda + 6 - 6\lambda = 0,$$

$$\lambda^3 - 4\lambda^2 - 20\lambda + 48 = 0.$$

Корни уравнения $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -4$ и $\lambda_3 = 6$ нашли подбором среди делителей его свободного члена (числа 48). Они являются собственными значениями матрицы A.

Для каждого собственного значения найдем соответствующий собственный вектор из уравнения:

$$A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}_E = \lambda \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}_E \text{ или } (A - \lambda E) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}_E = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix}_E. \quad (*)$$

При $\lambda_1 = 2$ получим СЛАУ:

$$\begin{pmatrix} -1-2 & -2 & -5 \\ 3 & 4-2 & 5 \\ -3 & 2 & 1-2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Приведем основную матрицу данной системы к ступенчатому виду:

$$(\mathrm{A}-\lambda_1\mathrm{E})=\begin{pmatrix}-3 & -2 & -5\\ 3 & 2 & 5\\ -3 & 2 & -1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}3 & 2 & 5\\ 0 & 4 & 4\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Получим систему, равносильную исходной: $\begin{cases}x_1+x_3=0,\\ x_2+x_3=0.\end{cases}$

Она имеет ненулевые решения, например $x_1=1$, $x_2=1$, $x_3=-1$. Поэтому $\overline{x}_1=(1,1,-1)$ является собственным вектором матрицы A, соответствующим собственному числу $\lambda_1=2$.

При $\lambda_2=-4$ основная матрица СЛАУ (*) будет иметь вид:

$$(\mathrm{A}-\lambda_2\mathrm{E})=\begin{pmatrix}3 & -2 & -5\\ 3 & 8 & 5\\ -3 & 2 & 5\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}3 & -2 & 5\\ 0 & 10 & 10\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Получим систему $\begin{cases}x_1-x_3=0,\\ x_2+x_3=0.\end{cases}$ Эта система имеет решение: $x_1=1$, $x_2=-1$, $x_3=1$. Поэтому $\overline{x}_2=(1,-1,1)$ – собственный вектор, соответствующий собственному значению $\lambda_2=-4$.

При $\lambda_3=6$ получим:

$$(\mathrm{A}-\lambda\mathrm{E})=\begin{pmatrix}-7 & -2 & -5\\ 3 & -2 & 5\\ -3 & 2 & -5\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}-1 & -6 & 5\\ 3 & -2 & 5\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}-1 & -6 & 5\\ 0 & -20 & 20\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}-1 & -6 & 5\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}-1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Получим систему $\begin{cases} x_1 + x_3 = 0, \\ x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$ Эта система имеет решение: $x_1 = -1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1$. Поэтому $\overline{x}_3 = (-1,1,1)$ – собственный вектор, соответствующий собственному значению $\lambda_3 = 6$.

2. Выберем в пространстве $\mathbb{R}^3$ базис, состоящий из векторов $E = \langle \overline{x}_1, \overline{x}_2, \overline{x}_3 \rangle$. Столбцами матрицы перехода U от стандартного базиса к выбранному являются координаты собственных векторов матрицы A. Получим $\mathrm{U} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Найдем обратную матрицу U^{-1}:

$$\det \mathrm{U} = -4, \ \mathrm{U}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

3. Найдем матрицу $\mathrm{A}' = \mathrm{U}^{-1} \cdot \mathrm{A} \cdot \mathrm{U}$, подобную матрице A и соответствующую тому же линейному оператору в базисе $E = \langle \overline{x}_1, \overline{x}_2, \overline{x}_3 \rangle$:

$$\mathrm{A}' = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -2 & -5 \\ 3 & 4 & 5 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, в базисе E, состоящем из векторов $\overline{x}_1 = (1,1,-1)$, $\overline{x}_2 = (1,-1,1)$ и $\overline{x}_3 = (-1,1,1)$, матрица A имеет диагональный вид. ◄

Рассмотрим теперь линейные операторы в евклидовом пространстве $\mathbf{E}$. Линейный оператор $\tilde{A}$ называется ***самосопряженным***, если его матрица $\mathrm{A} = \left(a_{ij}\right)$ в некотором базисе является симметрической, то есть $a_{ij} = a_{ji}$ для любых $i, j = \overline{1, n}$.

1. Матрица самосопряженного оператора $\tilde{A}$ в любом ортонормированном базисе является симметрической.

2. Все собственные значения самосопряженного оператора (симметрической матрицы) являются действительными.

3. Собственные векторы, соответствующие различным собственным значениям самосопряженного оператора, ортогональны.

4. Если $\tilde{A}$ – самосопряженный оператор, то существует ортонормированный базис, состоящий из его собственных векторов, в котором матрица этого оператора имеет диагональный вид.

Задача 11. Найти ортонормированный базис, в котором матрица $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 2 & -10 & 2 \\ -10 & 5 & 8 \\ 2 & 8 & 11 \end{pmatrix}$ имеет диагональный вид.

► Матрица A является симметрической и, следовательно, соответствует самосопряженному оператору.

1. Найдем собственные значения матрицы A:

$$|\mathrm{A} - \lambda \mathrm{E}| = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 2-\lambda & -10 & 2 \\ -10 & 5-\lambda & 8 \\ 2 & 8 & 11-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Вычислим определитель по правилу треугольника:

$$(2-\lambda)(5-\lambda)(11-\lambda) - 160 - 160 -$$

$$-4(5-\lambda) - 64(2-\lambda) - 100(11-\lambda) = 0.$$

Приведем подобные слагаемые и получим характеристическое уравнение $\lambda^3 - 18\lambda^2 - 81\lambda + 1458 = 0$.

Данное уравнение имеет корни $\lambda_1 = 9$, $\lambda_2 = -9$ и $\lambda_3 = 18$, которые являются собственными значениями матрицы A.

2. Найдем собственные векторы матрицы A.

При $\lambda_1 = 9$ получим

$$(\mathrm{A}-\lambda_1\mathrm{E}) = \begin{pmatrix} -7 & -10 & 2 \\ -10 & -4 & 8 \\ 2 & 8 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Система $\begin{cases} x_1 - x_3 = 0, \\ 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$ имеет ненулевое решение $x_2 = -1$, $x_1 = x_3 = 2$. Соответственно матрица A имеет собственный вектор $\bar{x}_1 = (2,-1,2)$, соответствующий собственному значению $\lambda_1 = 9$. Элемент $\bar{x}_1$ не является нормированным, так как

$$\| \bar{x}_1 \| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2} = 3 \neq 1.$$

Поэтому будем рассматривать нормированный (единичный) собственный вектор $\bar{e}_1 = \dfrac{1}{\| \bar{x}_1 \|} \cdot \bar{x}_1 = \left(\dfrac{2}{3}; \dfrac{-1}{3}; \dfrac{2}{3} \right)$, также соответствующий $\lambda_1 = 9$.

При $\lambda_2 = -9$ получим

$$(\mathrm{A}-\lambda_2\mathrm{E}) = \begin{pmatrix} 11 & -10 & 2 \\ -10 & 14 & 8 \\ 2 & 8 & 20 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

откуда $\begin{cases} x_1 + 2x_3 = 0, \\ x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$ Тогда $\bar{x}_2 = (2,2,-1)$, причем $\| \bar{x}_2 \| = 3$, поэтому выбираем $\bar{e}_2 = \dfrac{1}{\| \bar{x}_2 \|} \cdot \bar{x}_2 = \left(\dfrac{2}{3}; \dfrac{2}{3}; \dfrac{-1}{3} \right)$ – нормированный собственный вектор, соответствующий собственному значению $\lambda_2 = -9$.

При $\lambda_3 = 18$ получим

$$(\mathrm{A} - \lambda_3 \mathrm{E}) = \begin{pmatrix} -16 & -10 & 2 \\ -10 & -13 & 8 \\ 2 & 8 & -7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, $\begin{cases} 2x_1 + x_3 = 0, \\ x_2 - x_3 = 0, \end{cases}$ откуда $\overline{x}_3 = (-1, 2, 2)$, $\| \overline{x}_3 \| = 3$, поэтому $\overline{e}_3 = \left(\frac{-1}{3}; \frac{2}{3}; \frac{2}{3} \right)$ – нормированный собственный вектор, соответствующий собственному значению $\lambda_3 = 18$.

3. Покажем, что векторы $\overline{e}_1$, $\overline{e}_2$ и $\overline{e}_3$ образуют ортонормированный базис пространства $\mathbb{R}^3$.

Та как $\| \overline{e}_1 \| = \| \overline{e}_2 \| = \| \overline{e}_3 \| = 1$, то все элементы нормированные.

Вычислим скалярные произведения:

$$(\overline{e}_1, \overline{e}_2) = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} + \left(-\frac{1}{3} \right) \cdot \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \cdot \left(-\frac{1}{3} \right) = 0,$$

$$(\overline{e}_1, \overline{e}_3) = \frac{2}{3} \cdot \left(-\frac{1}{3} \right) + \left(-\frac{1}{3} \right) \cdot \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = 0,$$

$$(\overline{e}_2, \overline{e}_3) = \frac{2}{3} \cdot \left(-\frac{1}{3} \right) + \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} + \left(-\frac{1}{3} \right) \cdot \frac{2}{3} = 0.$$

Так как $(\overline{e}_1, \overline{e}_2) = (\overline{e}_1, \overline{e}_3) = (\overline{e}_2, \overline{e}_3) = 0$, то векторы $\overline{e}_1$, $\overline{e}_2$ и $\overline{e}_3$ ортогональны. Таким образом, базис $E = \langle \overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3 \rangle$ является ортонормированным.

4. Запишем матрицу перехода от стандартного базиса $\mathbb{R}^3$ к выбранному $\mathrm{U}=\begin{pmatrix} 2/3 & 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 & 2/3 \\ 2/3 & -1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$. Обратная матрица U^{-1} имеет вид $\mathrm{U}^{-1}=\mathrm{U}^{T}=\begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 & 2/3 \\ 2/3 & 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 & 2/3 \end{pmatrix}$.

5. Найдем матрицу $\mathrm{A}'=\mathrm{U}^{-1}\mathrm{AU}$, соответствующую матрице A в выбранном базисе.

$\mathrm{A}'=$

$$=\begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 & 2/3 \\ 2/3 & 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 & 2/3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & -10 & 2 \\ -10 & 5 & 8 \\ 2 & 8 & 11 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2/3 & 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 & 2/3 \\ 2/3 & -1/3 & 2/3 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 6 & -3 & 6 \\ -6 & -6 & 3 \\ -6 & 12 & 12 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2/3 & 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 & 2/3 \\ 2/3 & -1/3 & 2/3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & 18 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, матрица A в ортонормированном базисе $E=\langle \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3 \rangle$ имеет диагональный вид. ◄

4. Квадратичные формы

Квадратичной формой называется однородный многочлен 2-й степени от нескольких переменных. Квадратичные формы встречаются во многих разделах математики и ее приложений.

В теории чисел и кристаллографии рассматриваются квадратичные формы, принимающие целочисленные значения. В аналитической геометрии квадратичная форма входит в состав уравнения кривой или поверхности второго порядка. В механике и физике квадратичная форма используется для выражения кинетической энергии системы через компоненты обобщенных скоростей.

Кроме того, знание квадратичных форм необходимо при изучении функций от нескольких переменных, например при исследовании функции на максимум и минимум.

Пусть $\overline{x}=(x_1,x_2,...,x_n)$ – произвольная точка в пространстве $\mathbb{R}^n$. ***Квадратичной формой*** называется функция вида

$$\boxed{f(\overline{x})=f(x_1,x_2,\ldots,x_n)=\sum_{i,j=1}^{n}(a_{ij}\cdot x_i\cdot x_j)},$$

где $a_{ij}=a_{ji}$ – некоторые числа, которые называются ***коэффициентами*** квадратичной формы.

Примерами квадратичных форм в пространстве $\mathbb{R}^2$ являются функции

$$f_1(\overline{x})=x_1^2+x_2^2,$$

$$f_2(\overline{x})=2x_1^2-4x_1x_2-4x_2x_1+3x_2^2.$$

В пространстве $\mathbb{R}^3$ примерами квадратичных форм являются функции

$$f_3(\overline{x})=2x_1^2-5x_2^2+x_3^2,$$

$$f_4(\overline{x})=x_1^2+2x_1x_2+2x_2x_1-3x_1x_3-3x_3x_1+x_2x_3+x_3x_2-4x_2^2+5x_3^2.$$

Замечание. На практике при записи квадратичных форм обычно приводят подобные слагаемые и получают, например, $f_2(\overline{x})=2x_1^2-\underline{4x_1x_2}-\underline{4x_2x_1}+3x_2^2=2x_1^2-8x_1x_2+3x_2^2$ в пространстве $\mathbb{R}^2$ или

$$f_4(\overline{x})=x_1^2+\underline{2x_1x_2}+\underline{2x_2x_1}-\underline{\underline{3x_1x_3}}-\underline{\underline{3x_3x_1}}+\underline{\underline{\underline{x_2x_3}}}+\underline{\underline{\underline{x_3x_2}}}-4x_2^2+5x_3^2=$$

$=x_1^2+4x_1x_2-6x_1x_3+2x_2x_3-4x_2^2+5x_3^2$ в пространстве $\mathbb{R}^3$.

Симметрическая матрица

$$\boxed{A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \left(a_{ij}\right)_{n\times n}}$$

называется ***матрицей квадратичной формы*** $f\left(\bar{x}\right)$.

Для $f_1\left(\bar{x}\right) = x_1^2 + x_2^2$ получим $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Если $f_2\left(\bar{x}\right) = 2x_1^2 - 4x_1x_2 - 4x_2x_1 + 3x_2^2$, то $A_2 = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$.

Для $f_3\left(\bar{x}\right) = 2x_1^2 - 5x_2^2 + x_3^2$ получим $A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Матрица квадратичной формы

$$f_4\left(\bar{x}\right) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2x_1 - 3x_1x_3 - 3x_3x_1 + x_2x_3 + x_3x_2 - 4x_2^2 + 5x_3^2$$

имеет вид $A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -4 & 1 \\ -3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$.

Если задана форма $f\left(\bar{x}\right) = 3x_1^2 + 5x_1x_2 - x_1x_3 + 2x_2^2 - 4x_2x_3$,

то ее матрица $A = \begin{pmatrix} 3 & 5/2 & -1/2 \\ 5/2 & 2 & -2 \\ -1/2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

Рангом квадратичной формы называется ранг ее матрицы в некотором базисе.

Задача 1. Найти ранги квадратичных форм

$f_1\left(\bar{x}\right) = 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$ и $f_2\left(\bar{x}\right) = \left(x_1 - x_2 - 2x_3\right)^2$, заданных в пространстве $\mathbb{R}^3$.

► Запишем матрицу A_1 квадратичной формы $f_1(\overline{x}) = 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$ и приведем ее к ступенчатому виду:

$$\mathrm{A}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Так как ранг матрицы равен числу ненулевых строк в ступенчатой матрице, эквивалентной исходной, то $rg(f_1) = rg(\mathrm{A}_1) = 3$.

Преобразуем квадратичную форму $f_2(\overline{x}) = (x_1 - x_2 - 2x_3)^2$:

$f_2(\overline{x}) = (x_1 - x_2 - 2x_3)^2 = x_1^2 + x_2^2 + 4x_3^2 - 2x_1x_2 - 4x_1x_3 + 4x_2x_3$.

Запишем матрицу A_2 квадратичной формы $f_2(\overline{x})$ и приведем ее к ступенчатому виду:

$$\mathrm{A}_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

По количеству ненулевых строк в ступенчатой матрице имеем $rg(f_2) = rg(\mathrm{A}_2) = 1$.

Таким образом, ранг квадратичной формы $f_1(\overline{x})$ равен 3, а ранг квадратичной формы $f_2(\overline{x})$ равен 1. ◄

Рассмотрим, как изменится матрица A квадратичной формы при переходе в пространстве $\mathbb{R}^n$ от базиса $E = \langle \overline{e}_1, \overline{e}_2, ..., \overline{e}_n \rangle$ к другому базису $E' = \langle \overline{e}_1', \overline{e}_2', ..., \overline{e}_n' \rangle$.

Теорема. Пусть U – матрица перехода от базиса $E = \langle \overline{e}_1, \overline{e}_2, ..., \overline{e}_n \rangle$ к базису $E' = \langle \overline{e}_1', \overline{e}_2', ..., \overline{e}_n' \rangle$, а A' – матрица этой же квадратичной формы в базисе $E' = \langle \overline{e}_1', \overline{e}_2', ..., \overline{e}_n' \rangle$, тогда

$\boxed{A' = U^T \cdot A \cdot U}$.

Преобразование матрицы квадратичной формы связано с заменой переменных в пространстве $\mathbb{R}^n$:

$$\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) \to \left(x_1', x_2', \ldots, x_n'\right).$$

Задача 2. Пусть в стандартном базисе квадратичная форма имеет вид $f(\overline{x}) = x_1^2 - 2x_1x_2 + 3x_2^2$. Записать эту форму в базисе $E' = \langle \overline{e}_1', \overline{e}_2' \rangle$, если $\overline{e}_1' = (1,2)$, $\overline{e}_2' = (0,3)$.

► Так как векторы стандартного базиса $E = \langle \overline{e}_1, \overline{e}_2 \rangle$ имеют вид $\overline{e}_1 = (1,0)$, $\overline{e}_2 = (0,1)$, то

$$\overline{e}_1' = \overline{e}_1 + 2\overline{e}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}_E, \overline{e}_2' = 3\overline{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}_E.$$

Поэтому матрица перехода от базиса E к базису E' имеет вид $U = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Запишем матрицу формы $f(\overline{x}) = x_1^2 - 2x_1x_2 + 3x_2^2$ в стандартном базисе E: $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

Найдем матрицу этой формы в базисе E':

$$A' = U^T \cdot A \cdot U = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ -3 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 15 \\ 15 & 18 \end{pmatrix}.$$

Запишем квадратичную форму в базисе E'

$$f(\overline{x}) = 9(x_1')^2 + 30x_1' \cdot x_2' + 18(x_2')^2, \text{ где } \overline{x} = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix}_{E'}. \blacktriangleleft$$

Так как матрица квадратичной формы является симметрической, то существует ортонормированный базис $E'=\left\langle \vec{e}_1', \vec{e}_2', ..., \vec{e}_n' \right\rangle$, в котором эта матрица имеет диагональный вид.

Можно доказать, что матрица перехода U от стандартного базиса к этому ортонормированному базису, состоящему из собственных векторов матрицы A, обладает свойством $\mathrm{U}^{-1}=\mathrm{U}^{T}$.

Тогда $\boxed{\mathrm{A}'=\mathrm{U}^{-1}\cdot \mathrm{A}\cdot \mathrm{U}=\mathrm{U}^{T}\cdot \mathrm{A}\cdot \mathrm{U}}$ – матрица квадратичной формы в данном базисе. Она имеет вид $\boxed{\mathrm{A}'=\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}}$, где $\lambda_1,\ \lambda_2, ...,\ \lambda_n$ – собственные значения матрицы A, соответствующие собственным векторам матрицы A, образующим базис $E'=\left\langle \vec{e}_1', \vec{e}_2', ..., \vec{e}_n' \right\rangle$.

При этом квадратичная форма примет вид

$$\boxed{f(\overline{x})=\lambda_1\left(x_1'\right)^2+\lambda_2\left(x_2'\right)^2+...+\lambda_n\left(x_n'\right)^2}, \text{ где } \overline{x}=\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \cdots \\ x_n' \end{pmatrix}_{E'}.$$

Задача 3. Привести матрицу квадратичной формы

$$f(\overline{x})=5x_1^2-2x_1x_2+5x_2^2$$

в пространстве $\mathbb{R}^2$ к диагональному виду.

► Запишем матрицу квадратичной формы $\mathrm{A}=\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$ и приведем ее к диагональному виду. Для этого найдем ортонормированный базис пространства $\mathbb{R}^2$, состоящий из собственных векторов матрицы A.

1. Находим собственные значения матрицы A из уравне-

ния $|A-\lambda E|=0$, где E – единичная матрица.

В нашем случае получим уравнение $\begin{vmatrix} 5-\lambda & -1 \\ -1 & 5-\lambda \end{vmatrix}=0$ или $(5-\lambda)^2-1=0$. Отсюда $\lambda-5=\pm1$, то есть $\lambda_1=4$ и $\lambda_2=6$.

2. Находим нормированные собственные векторы матрицы A.

При $\lambda_1=4$ для нахождения собственного вектора получаем однородную СЛАУ, основная матрица которой имеет вид:

$$A-\lambda_1 E=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Получим уравнение: $x_1-x_2=0$, откуда $\overline{x}_1=(1,1)$. Так как $\|\overline{x}_1\|=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$, то выберем нормированный собственный вектор $\overline{e}'_1=\frac{1}{\|\overline{x}_1\|}\cdot\overline{x}_1=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $\|\overline{e}'_1\|=1$.

При $\lambda_2=6$ получим $A-\lambda_2 E=\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Отсюда $x_1+x_2=0$ и $\overline{x}_2=(-1,1)$. Так как $\|\overline{x}_2\|=\sqrt{(-1)^2+1^2}=\sqrt{2}$, то $\overline{e}'_2=\frac{1}{\|\overline{x}_2\|}\cdot\overline{x}_2=\left(\frac{-1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $\|\overline{e}'_2\|=1$.

3. Базис $E'=\langle\overline{e}'_1,\overline{e}'_2\rangle$ является ортонормированным, так как

$$(\overline{e}'_1,\overline{e}'_2)=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=0.$$

Запишем матрицу перехода от стандартного базиса к базису E'

$U=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$. Тогда $U^{-1}=U^T=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$.

4. Найдем матрицу A' квадратичной формы в базисе $E' = \langle \bar{e}_1', \bar{e}_2' \rangle$:

$$\mathrm{A}' = U^{-1}\mathrm{A}U = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{4}{\sqrt{2}} & \frac{4}{\sqrt{2}} \\ -\frac{6}{\sqrt{2}} & \frac{6}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{8}{2} & 0 \\ 0 & \frac{12}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, в базисе $E' = \langle \bar{e}_1', \bar{e}_2' \rangle$, где $\bar{e}_1' = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$ и $\bar{e}_2' = \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$, матрица квадратичной формы имеет вид $\mathrm{A}' = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$.

Соответственно квадратичная форма в этом базисе будет записана в виде $f(\bar{x}) = 4(x_1')^2 + 6(x_2')^2$, где $\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix}_{E'}$ – координаты вектора $\bar{x}$ в базисе E'. ◄

Квадратичную форму

$$\boxed{f(\bar{x}) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \ldots + a_{nn}x_n^2}$$

называют ***квадратичной формой канонического вида***.

Квадратичная форма канонического вида не содержит попарных произведений переменных. Любую квадратичную форму можно привести к каноническому виду.

Для приведения квадратичной формы к каноническому виду можно использовать **два способа**:

1) выделение полных квадратов (метод Лагранжа);

2) приведение матрицы квадратичной формы к диагональному виду путем перехода к ортонормированному базису, состоящему из собственных элементов матрицы квадратичной формы.

Закон инерции: независимо от способа приведения квадратичной формы к каноническому виду, число положительных (отрицательных) канонических коэффициентов постоянно.

Задача 4. Привести к каноническому виду квадратичную форму $f(\overline{x})=-x_1^2+4x_1x_2+2x_2^2$.

► **1-й способ (метод Лагранжа).** Выделим в квадратичной форме $f(\overline{x})=-x_1^2+4x_1x_2+2x_2^2$ полный квадрат по переменной x_1 и получим

$$f(\overline{x})=-x_1^2+4x_1x_2+2x_2^2=-(x_1^2-4x_1x_2)+2x_2^2=$$
$$=-(x_1^2-4x_1x_2+4x_2^2-4x_2^2)+2x_2^2=-(x_1-2x_2)^2+4x_2^2+2x_2^2=$$
$$=-(x_1-2x_2)^2+6x_2^2.$$

Сделаем замену переменных $\begin{cases} x_1'=x_1-2x_2, \\ x_2'=x_2. \end{cases}$ Заметим, что данной замене переменных соответствует переход от стандартного базиса E к базису $E'=<\overline{e}_1',\overline{e}_2'>$, где матрица перехода U^{-1} имеет вид $U^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $U=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\overline{e}_1'=\overline{e}_1$ и $\overline{e}_2'=2\overline{e}_1+\overline{e}_2$.

В результате квадратичная форма примет канонический вид $f(\overline{x})=-x_1'^2+6x_2'^2$.

2-й способ (переход к ортонормированному базису). Перейдем к ортонормированному базису, состоящему из собственных векторов матрицы квадратичной формы.

Запишем матрицу квадратичной формы $\mathrm{A}=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ и приведем ее к диагональному виду. Для этого найдем ортонормированный базис пространства $\mathbb{R}^2$, состоящий из собственных векторов матрицы A.

1. Находим собственные элементы матрицы A из уравнения $|\mathrm{A}-\lambda\mathrm{E}|=0$, где E – единичная матрица.

В нашем случае получим уравнение $\begin{vmatrix} -1-\lambda & 2 \\ 2 & 2-\lambda \end{vmatrix}=0$ или $(-1-\lambda)(2-\lambda)-4=0$. Отсюда $\lambda_1=3, \lambda_2=-2$.

2. Находим нормированные собственные векторы матрицы A. При $\lambda_1=3$ для нахождения собственного вектора получаем однородную СЛАУ, основная матрица которой имеет вид

$$\mathrm{A}-\lambda_1\mathrm{E}=\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Получим уравнение: $2x_1-x_2=0$, откуда $\overline{x}_1=(1,2)$. Так как $\|\overline{x}_1\|=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$, то выберем собственный вектор $\overline{e}_1'=\frac{1}{\|\overline{x}_1\|}\cdot\overline{x}_1=\left(\frac{1}{\sqrt{5}},\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$, $\|\overline{e}_1'\|=1$.

При $\lambda_2=-2$ получим $A-\lambda_2 E=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Отсюда $x_1+2x_2=0$ и $\overline{x}_2=(2,-1)$. Так как $\|\overline{x}_2\|=\sqrt{(2)^2+(-1)^2}=\sqrt{5}$, то $\overline{e}_2'=\frac{1}{\|\overline{x}_2\|}\cdot\overline{x}_2=\left(\frac{2}{\sqrt{5}},\frac{-1}{\sqrt{5}}\right)$, $\|\overline{e}_2'\|=1$.

3. Базис $E'=\langle\overline{e}_1', \overline{e}_2'\rangle$ является ортонормированным. Запишем матрицу перехода от стандартного базиса к базису E'

$$U=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt5} & \frac{2}{\sqrt5}\\ \frac{2}{\sqrt5} & \frac{-1}{\sqrt5}\end{pmatrix}.\text{ Тогда } U^{-1}=U^T=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt5} & \frac{2}{\sqrt5}\\ \frac{2}{\sqrt5} & \frac{-1}{\sqrt5}\end{pmatrix}.$$

4. Найдем матрицу A' квадратичной формы в базисе $E'=\langle \bar e_1', \bar e_2'\rangle$: $A'=U^TAU=\begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & -2\end{pmatrix}$.

Таким образом, в базисе $E'=\langle \bar e_1', \bar e_2'\rangle$ матрица квадратичной формы имеет диагональный вид $\mathrm{A}'=\begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & -2\end{pmatrix}$.

Соответственно квадратичная форма в этом базисе будет записана в каноническом виде $f(\bar x)=3x_1'^2-2x_2'^2$, где $\bar x=\begin{pmatrix}x_1'\\ x_2'\end{pmatrix}_{E'}$ – координаты элемента $\bar x$ в базисе E'. ◄

Замечание. Из рассмотренных примеров можно сделать выводы:

1) одна и та же квадратичная форма может иметь несколько различных канонических видов;

2) в случае пространств большой размерности 2-й способ является предпочтительным.

При использовании квадратичных форм особое значение имеет знак этой формы в зависимости от $\bar x$.

Квадратичная форма $f(\bar x)$ называется ***положительно (отрицательно) определенной***, если для любого $\bar x\neq\bar 0\in\mathbb{R}^n$

$$\boxed{f(\bar x)>0}\;\left(\boxed{f(\bar x)<0}\right).$$

Квадратичная форма $f(\bar x)$ называется ***знакопеременной***, если существуют такие $\bar x_1$ и $\bar x_2$, что $f(\bar x_1)>0$, а $f(\bar x_2)<0$.

Например: **1)** $f_1(\bar{x}) = x_1^2 + 3x_2^2 + 4x_3^2$ – положительно определенная квадратичная форма; **2)** $f_2(\bar{x}) = -\frac{1}{2}x_1^2 - \frac{5}{4}x_2^2$ – отрицательно определенная форма; **3)** $f_3(\bar{x}) = 3x_1^2 - x_2^2$ – знакопеременная форма, так как при $\bar{x}_1 = (1,0)$ имеем $f_3(\bar{x}_1) = 3 > 0$, а при $\bar{x}_2 = (0,1)$ получим $f_3(\bar{x}_2) = -1 < 0$.

Из рассмотренных примеров можно сделать вывод, что для квадратичной формы канонического вида достаточно легко определить знак.

Если все коэффициенты положительны (отрицательны), то и квадратичная форма положительно (отрицательно) определенная.

Если среди коэффициентов есть как положительные, так и отрицательные, то и квадратичная форма – знакопеременная.

Однако для определения знака квадратичной формы нет необходимости ее приведения к каноническому виду. Можно использовать ***критерий Сильвестра***.

Пусть $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ – матрица квадратичной формы $f(\bar{x})$ в некотором базисе. Обозначим:

$$\Delta_1 = a_{11},\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},\ \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \ldots,$$

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$ – угловые миноры матрицы A.

Критерий Сильвестра. Для того чтобы квадратичная форма $f\left(\overline{x}\right)$, где $\overline{x}\in\mathbb{R}^n$, была положительно определенной, необходимо и достаточно, чтобы

$$\boxed{\Delta_1>0,\ \Delta_2>0,\ldots,\ \Delta_n>0}.$$

Для того чтобы квадратичная форма $f\left(\overline{x}\right)$ была отрицательно определенной, необходимо и достаточно, чтобы

$$\boxed{\Delta_1<0,\ \Delta_2>0,\ \Delta_3<0,\ldots,\ (-1)^n\Delta_n>0}.$$

Задача 5. Определить знак следующих квадратичных форм:

1) $f_1\left(\overline{x}\right)=4x_1^2+6x_1x_2+2x_2^2,\ \overline{x}\in R^2$;

2) $f_2\left(\overline{x}\right)=-x_1^2+4x_1x_2-5x_2^2,\ \overline{x}\in R^2$;

3) $f_3\left(\overline{x}\right)=3x_1^2+4x_1x_2-2x_1x_3+5x_2^2+2x_2x_3+4x_3^2,\ \overline{x}\in R^3$;

4) $f_4\left(\overline{x}\right)=-4x_1^2+2x_1x_2-2x_1x_3-7x_2^2+4x_2x_3-4x_3^2,\ \overline{x}\in R^3$.

► **1.** Запишем матрицу квадратичной формы $f_1\left(\overline{x}\right)$ $A_1=\begin{pmatrix}4&3\\3&2\end{pmatrix}$. Найдем угловые миноры данной матрицы:

$$\Delta_1=4>0,\ \Delta_2=\begin{vmatrix}4&3\\3&2\end{vmatrix}=8-9=-1<0.$$

Следовательно, данная квадратичная форма является знакопеременной.

2. Для квадратичной формы $f_2\left(\overline{x}\right)$ матрица имеет вид $A_2=\begin{pmatrix}-1&2\\2&-5\end{pmatrix}$, причем

$$\Delta_1=-1<0,\ \Delta_2=\begin{vmatrix}-1&2\\2&-5\end{vmatrix}=5-4=1>0.$$

В соответствии с критерием Сильвестра квадратичная форма $f_2\left(\overline{x}\right)$ является отрицательно определенной.

3. Для квадратичной формы $f_3(\bar{x})$ матрица имеет вид:

$$A_3 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Найдем ее угловые миноры: $\Delta_1 = 3 > 0$,

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 15 - 4 = 11 > 0,\ \Delta_3 = |A_3| = 32 > 0.$$

Следовательно, по критерию Сильвестра квадратичная форма $f_3(\bar{x})$ является положительно определенной.

4. Запишем матрицу квадратичной формы $f_4(\bar{x})$:

$$A_4 = \begin{pmatrix} -4 & 1 & -1 \\ 1 & -7 & 2 \\ -1 & 2 & -4 \end{pmatrix}.$$

Ее угловые миноры: $\Delta_1 = -4 < 0$,

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} -4 & 1 \\ 1 & -7 \end{vmatrix} = 28 - 1 = 27 > 0,\ \Delta_3 = | A_4 | = -89 < 0.$$

В соответствии с критерием Сильвестра квадратичная форма $f_4(\bar{x})$ является отрицательно определенной. ◄

Квадратичные формы можно использовать для определения типа кривой или поверхности второго порядка. С этой целью уравнение заданной кривой (или поверхности) приводят к каноническому виду, используя следующий **алгоритм**:

1) выписать квадратичную форму кривой и привести ее к каноническому виду с помощью перехода к ортонормированному базису;

2) осуществить в уравнении кривой линейную замену переменных, соответствующую найденному ортогональному преобразованию;

3) по каждой из переменных выделить в полученном уравнении полные квадраты и осуществить параллельный перенос системы координат;

4) преобразовать полученное уравнение к каноническому виду, определить тип кривой и выполнить ее построение.

Задача 6. Исследовать и построить кривую второго порядка

$$5x^2+5y^2-2xy+10x-2y-19=0. \qquad (1)$$

► **1.** Выпишем квадратичную форму

$$f(x, y)=5x^2+5y^2-2xy,$$

соответствующую уравнению (1), и приведем ее к каноническому виду с помощью перехода к ортонормированному базису.

Матрица квадратичной формы имеет вид $\mathrm{A}=\begin{pmatrix}5 & -1\\ -1 & 5\end{pmatrix}$.

Найдем ее собственные значения, решив характеристическое уравнение $|\mathrm{A}-\lambda\mathrm{E}|=0$. Получим $\begin{vmatrix}5-\lambda & -1\\ -1 & 5-\lambda\end{vmatrix}=0$ или $\lambda^2-10\lambda+24=0$, откуда $\lambda_1=6$ и $\lambda_2=4$ – собственные значения матрицы A.

Найдем соответствующие полученным собственным значениям собственные векторы матрицы A.

При $\lambda_1=6$ получим $\mathrm{A}-\lambda_1\mathrm{E}=\begin{pmatrix}-1 & -1\\ -1 & -1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$.

Находим ненулевое решение уравнения $-x-y=0$. Если $x=1$, то $y=-1$. Тогда $\overline{h}_1=(1,-1)$ – собственный вектор, соответствующий собственному значению $\lambda_1=6$.

Так как $\|\overline{h}_1\|=\sqrt{1^2+(-1)^2}=\sqrt{2}\neq 1$, то берем $\overline{e}_1'=\frac{1}{\|\overline{h}_1\|}\cdot\overline{h}_1=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ – единичный собственный вектор, соответствующий собственному значению $\lambda_1=6$.

При $\lambda_2 = 4$ получим $\mathrm{A} - \lambda_2 \mathrm{E} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Находим ненулевое решение уравнения $x - y = 0$. Если $x = 1$, то $y = 1$. Тогда $\overline{h}_2 = (1, 1)$ – собственный вектор, соответствующий собственному значению $\lambda_2 = 4$.

Так как $\|\overline{h}_2\| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} \neq 1$, то берем $\overline{e}_2' = \frac{1}{\|\overline{h}_2\|} \cdot \overline{h}_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$ – единичный собственный вектор, соответствующий собственному значению $\lambda_2 = 4$.

Базис $E' = \langle \overline{e}_1', \overline{e}_2' \rangle$ является ортонормированным. Запишем матрицу перехода от стандартного базиса $E = \langle \overline{e}_1, \overline{e}_2 \rangle$, где $\overline{e}_1 = (1, 0)$ и $\overline{e}_2 = (0, 1)$, к базису E', состоящему из собственных векторов матрицы A. Столбцами матрицы перехода U являются координатные столбцы векторов $\overline{e}_1'$ и $\overline{e}_2'$:

$$\mathrm{U} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \; |\mathrm{U}| = 1.$$

В базисе E' квадратичная форма $f(x, y) = 5x^2 + 5y^2 - 2xy$ примет канонический диагональный вид $f(x_1, y_1) = 6x_1^2 + 4y_1^2$.

2. Если x_1 и y_1 – координаты точки в базисе E', то справедливо равенство

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \mathrm{U} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} x_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} y_1 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} x_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} y_1 \end{pmatrix}.$$

Отсюда

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}} x_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} y_1, \\ y = -\frac{1}{\sqrt{2}} x_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} y_1. \end{cases} \tag{2}$$

Формулам (2) соответствует переход от системы координат Oxy к системе координат Ox_1y_1, где направления осей Ox_1 и Oy_1 задаются векторами $\vec{e}_1' = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right)$ и $\vec{e}_2' = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$.

Подставим формулы (2) в уравнение кривой второго порядка (1) вместо x и y. В результате получим

$$5\left(\frac{1}{\sqrt{2}} x_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} y_1 \right)^2 + 5\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} x_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} y_1 \right)^2 -$$

$$-2\left(\frac{1}{\sqrt{2}} x_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} y_1 \right) \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} x_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} y_1 \right) +$$

$$+10\left(\frac{1}{\sqrt{2}} x_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} y_1 \right) - 2\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} x_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} y_1 \right) - 19 = 0$$

или (после упрощения)

$$6x_1^2 + 4y_1^2 + 6\sqrt{2}x_1 + 4\sqrt{2}y_1 - 19 = 0\,. \tag{3}$$

3. Выделим в уравнении (3) полные квадраты:

$$6\left(x_1^2 + \sqrt{2}x_1 \right) + 4\left(y_1^2 + \sqrt{2}y_1 \right) - 19 = 0\,,$$

$$6\left(x_1^2 + 2\frac{\sqrt{2}}{2} x_1 + \frac{1}{2} \right) + 4\left(y_1^2 + 2\frac{\sqrt{2}}{2} y_1 + \frac{1}{2} \right) - 3 - 2 - 19 = 0\,,$$

$$6\left(x_1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+4\left(y_1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=24. \tag{4}$$

Сделаем в уравнении (4) замену переменных

$$\begin{cases} x_2=x_1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \\ y_2=y_1+\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x_1=x_2-\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \\ y_1=y_2-\dfrac{\sqrt{2}}{2}. \end{cases} \tag{5}$$

Замене переменных (5) соответствует параллельный перенос системы координат в точку $O_2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)_{Ox_1y_1}$.

4. В результате уравнение кривой (4) примет вид $6x_2^2+4y_2^2=24$ или

$$\frac{x_2^2}{4}+\frac{y_2^2}{6}=1. \tag{6}$$

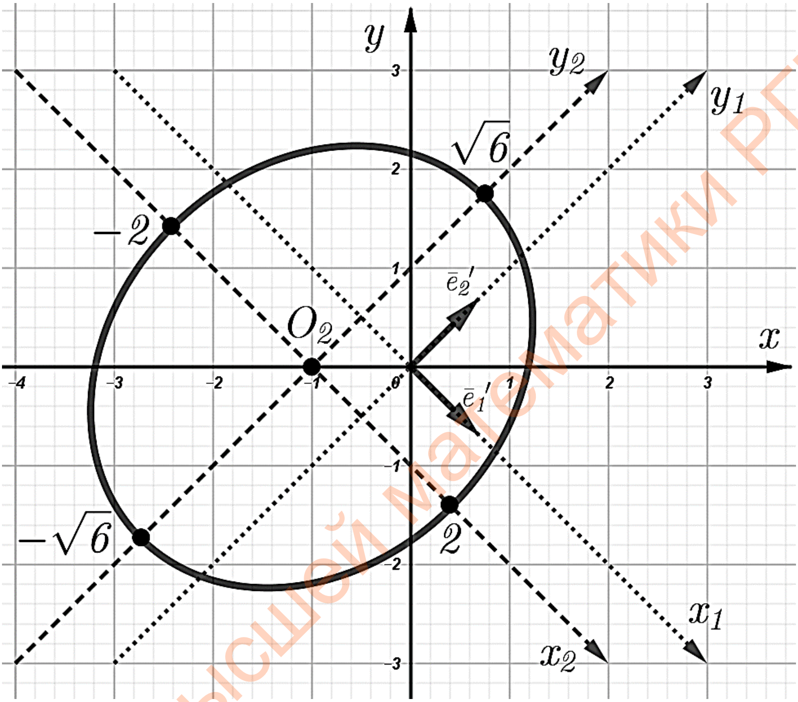
Уравнение (6) является каноническим уравнением эллипса с полуосями $a=\sqrt{4}=2$ и $b=\sqrt{6}$.

Запишем формулы перехода от стандартной системы координат Oxy к канонической для данного эллипса системе координат $O_2x_2y_2$. Для этого подставим формулы (5) в систему (2):

$$\begin{cases} x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}x_1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}y_1=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(x_2-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(y_2-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right), \\ y=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}x_1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}y_1=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(x_2-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(y_2-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right), \end{cases}$$

откуда $$\begin{cases} x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}x_2+\dfrac{1}{\sqrt{2}}y_2-1, \\ y=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}x_2+\dfrac{1}{\sqrt{2}}y_2. \end{cases}$$

Начало канонической системы координат $O_2x_2y_2$ точка O_2 в исходной системе координат Oxy имеет координаты $O_2\left(-1,\,0\right)_{Oxy}$. Построим кривую.



Тестовые задачи по теме
«Линейные пространства и операторы»

Задача 1. Указать, какие из перечисленных далее множеств вместе с обычными операциями сложения и умножения на число являются линейными пространствами $\mathbf{V}$ над множеством действительных чисел $\mathbb{R}$ (выбрать несколько вариантов ответа).

а) Множество векторов, угол между которыми и заданной прямой ℓ равен 30 .

б) Множество вектор-столбцов, состоящих из n действитель-

ных чисел, сумма которых равна нулю.
в) Множество векторов плоскости, длина которых не более 1.
г) Множество вектор-столбцов, состоящих из n действительных чисел, из которых каждое в строке с нечетным номером равно 1.
д) Множество вектор-столбцов с целыми элементами.

Задача 2. Найти ранг системы векторов:

$$f_1 = 2x^2 + 4x + 2,\ f_2 = -x^2 - 2x - 1,\ f_3 = 3x^2 + 5x + 1,$$
$$f_4 = -2x^2 + x + 8,\ f_5 = 4x^2 + 7x + 2.$$

Задача 3. Найти сумму координат вектора $\overline{x}$ в базисе $E = \langle \overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3 \rangle$, если в базисе $E' = \langle \overline{e}'_1, \overline{e}'_2, \overline{e}'_3 \rangle$, где $\overline{e}'_1 = -2\overline{e}_1 - 7\overline{e}_2 - 9\overline{e}_3$, $\overline{e}'_2 = -\overline{e}_1 - 4\overline{e}_2 + 10\overline{e}_3$, $\overline{e}'_3 = 10\overline{e}_1 - 5\overline{e}_2 + 7\overline{e}_3$, он имеет координаты $\overline{x} = (-6; -3; -2)_{E'}$.

Задача 4. Найти сумму координат вектора $\overline{u} = -8 + 8t + 6t^2 - 8t^3$ линейного пространства $\mathbf{P}_3(t)$ многочленов степени не выше третьей в базисе $E = \langle \overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3, \overline{e}_4 \rangle$, где $\overline{e}_1 = 1 + t + t^2$, $\overline{e}_2 = 1 + 2t + t^3$, $\overline{e}_3 = t - 2t^2 + t^3$, $\overline{e}_4 = 1 - t - t^2$.

Задача 5. Найти матрицу перехода $U_{E\to B}$ от базиса $E = \langle \overline{e}_1, \overline{e}_2 \rangle$, где $\overline{e}_1 = (-9; -5)$ и $\overline{e}_2 = (6; -1)$, к базису $B = \langle \overline{b}_1, \overline{b}_2 \rangle$, где $\overline{b}_1 = (-9; -2)$ и $\overline{b}_2 = (6; 6)$.

Задача 6. В пространстве $\mathbb{R}[0; 5]$ функций, определенных и непрерывных на отрезке $[0; 5]$, задано скалярное произведение двух функций $(f, g) = \int\limits_0^5 f(t) \cdot g(t)\,dt$. При каком числовом значении параметра λ функции $f(t) = 6$ и $g(t) = \lambda t + 8$ будут ортогональны?

Задача 7. Найти квадрат евклидовой нормы вектора

$\overline{u}=(4;10;8)$ в ортогональном базисе $E=\langle\overline{e}_1,\overline{e}_2,\overline{e}_3\rangle$, где $\|\overline{e}_1\|=3$, $\|\overline{e}_2\|=2$ и $\|\overline{e}_3\|=1$.

Задача 8. Пусть $\overline{x}=(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3$. Среди заданных отображений найти линейные операторы:

$$\tilde{A}\overline{x}=(x_1-2x_2;0;-x_1+2x_2-x_3),$$
$$\tilde{B}\overline{x}=(-2x_1+x_3;\,x_1+1;\,3x_2-2x_3),$$
$$\tilde{C}\overline{x}=(-x_1+x_2;\,x_2^2;\,x_2-x_3),$$
$$\tilde{D}\overline{x}=(-3x_3;\,x_1+2x_2;\,x_1+x_3).$$

Задача 9. В пространстве $\mathbb{R}^2$ задан линейный оператор:

$$\tilde{A}\overline{x}=(3x_1+7x_2;-10x_1+9x_2).$$

Найти сумму координат образа элемента $\overline{x}=(-8;1)$.

Задача 10. Найти сумму собственных чисел матрицы:

$$A=\begin{pmatrix}5 & -20 & 15\\ -10 & 25 & -20\\ -10 & 40 & -30\end{pmatrix}.$$

Задача 11. В стандартном базисе E задана квадратичная форма $f(\overline{x})=-2x_1^2+10x_1x_2+8x_2^2$. При переходе к базису $E'=\langle\overline{e}'_1,\overline{e}'_2\rangle$, где $\overline{e}'_1=(1;2)$ и $\overline{e}'_2=(2;3)$, форма $f(\overline{x})$ примет вид $f(\overline{x})=50x_1^2+158x_1x_2+\lambda x_2^2$. Найти значение λ.

Задача 12. Определить знак квадратичной формы:

$$f(\overline{x})=-4x_1^2-10x_1x_2-2x_1x_3+8x_2^2+6x_2x_3+x_3^2.$$

Ответы.

1. б. **2.** $rg(f_1,f_2,f_3,f_4,f_5)=2$.

3. $\overline{x}_E = U_{E \to E'} \cdot \overline{x}_{E'} = (-5; 64; 10)$, $\sum x_i = 69$.

4. $\overline{u}_E = (30; -26; 18; -12)$, $\sum u_i = 10$.

5. $U_{E \to B} = \begin{pmatrix} 4/7 & -1 \\ -9/14 & -1/2 \end{pmatrix}$. **6.** $\lambda = -\dfrac{16}{5}$.

7. $\left\| \overline{u} \right\|^2 = 608$. **8.** $\tilde{A}$ и $\tilde{D}$ – линейные.

9. Сумма координат равна 72.

10. $\lambda_1 - 5, \lambda_2 = 5, \lambda_3 = 0, \sum \lambda_i = 0$.

11. $\lambda = 134$. **12.** Знакопеременная квадратичная форма.

Библиографический список для дополнительного изучения

1. Вся высшая математика: учеб. Т.1. - 2-е изд. - М.: УРСС, 2003.
2. Высшая математика в упражнениях и задачах: в 2 ч.: учеб. пособие. Ч.1 / П. Е. Данко [и др.]. - 7-е изд., испр. - М.: ОНИКС: Мир и образование, 2009.
3. Зимина О.В., Кириллов А.И., Сальникова Т.А. Высшая математика (Решебник). – М., 2005.
4. Ильин В.А. Линейная алгебра: учебник для вузов. - М.: Физматлит, 2001.
5. Канатников А.Н. Линейная алгебра: учебник для втузов / под ред. В.С. Зарубина, А.П. Крищенко. - 2-е изд. - М.: Изд-во МГТУ, 2001.
6. Кострикин А.И. Линейная алгебра и геометрия: учеб. пособие / А. И. Кострикин, Ю. И. Манин. - 4-е изд., стер. - СПб.: Лань, 2008.
7. Люстерник Л.А., Соболев В.И. Краткий курс функционального анализа: учеб. пособие. – М.: Высш. школа, 1982.
8. Сборник задач по математике для втузов: учеб. пособие. Т.1 / под ред. А.В. Ефимова, А.С. Поспелова. - 5-е изд., испр. - М.: Физматлит, 2008.

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Линейные пространства 3
2. Евклидовы, нормированные и метрические пространства 22
3. Линейные операторы 39
3.1. Определение линейного оператора и его матрица 39
3.2. Собственные значения и собственные элементы линейного оператора 47
4. Квадратичные формы 58
Тестовые задачи по теме «Линейные пространства и операторы» 76
Библиографический список для дополнительного изучения 79

Е л к и н а Наталья Викторовна
Л у к ь я н о в а Галина Сергеевна

Линейные пространства и операторы

Редактор Р.К. Мангутова
Корректор С.В. Макушина
Подписано в печать 26.04.18. Формат бумаги 60×84 1/16.
Бумага писчая. Печать трафаретная. Усл. печ. л. 5,0.
Тираж 50 экз. Заказ
Рязанский государственный радиотехнический университет.
390005, Рязань, ул. Гагарина, 59/1.
Редакционно-издательский центр РГРТУ.