

УДК 621.396.626

А.В. Ксендзов

## ГРАНИЦЫ ВЕРОЯТНОСТИ ОШИБКИ ПРИЕМА СИГНАЛА С ДВОИЧНОЙ ФАЗОВОЙ МАНИПУЛЯЦИЕЙ В МІМО КАНАЛЕ С КОРРЕЛИРОВАННЫМИ ЗАМИРАНИЯМИ

*Рассмотрено влияние коррелированных замираний на вероятность ошибки приема сигнала с двоичной фазовой манипуляцией в МІМО канале. Введено понятие числа эффективных степеней свободы МІМО канала, зависящего от количества антенн, глубины и корреляции замираний. Получены выражения для верхней и нижней границ вероятности ошибки в МІМО канале, а также соответствующие границы числа эффективных степеней свободы.*

**Ключевые слова:** МІМО канал, вероятность ошибки, коррелированные замирания, эффективные степени свободы, выигрыш разнесения.

**Введение.** МІМО (Multiple Input – Multiple Output) канал с многоантенными системами (МАС) на приемной и передающей сторонах используется для повышения пропускной способности и уменьшения вероятности ошибки цифрового сообщения за счет *выигрыша разнесения*, позволяющего снизить отрицательное влияние замираний сигнала на качество приема [1], [2]. Однако данный выигрыш может уменьшаться из-за влияния корреляции замираний сигналов в элементах МАС [3]. Обычно такая корреляция пространственно зависима, то есть определяется взаимным расположением антенн в МАС [4]. Кроме того, на выигрыш разнесения оказывает влияние глубина замираний и наличие луча прямой видимости (ЛПВ). Как правило, в литературе приводят зависимости вероятности ошибки и пропускной способности канала от отношения сигнал-шум (ОСШ), полученные путем имитационного моделирования для типовых случаев пространственной корреляции рэлеевских замираний, без аналитического обобщения результата на случай произвольной корреляции и глубины замираний [3], [5].

*Целью данной работы* является исследование влияния числа антенн, корреляции, глубины замираний и ЛПВ на вероятность ошибки цифрового сообщения, а также определение аналитических выражений границ вероятности ошибки и условий их достижения. В канале предполагается сигнал с двоичной фазовой манипуляцией (ДФМ, BPSK), поскольку вероятность ошибки приема сигнала с более сложными видами цифровой модуляции может быть получена путем пересчета из вероятности

ошибки для сигнала с ДФМ [5].

**SISO канал.** SISO (Single Input – Single Output) канал имеет одиночные антенны на передающей и приемной сторонах. Для математического описания SISO канала в системах цифровой связи используют комплексную дискретную модель [2]:

$$Y = hS + n, \quad (1)$$

где  $Y$  – принятый сигнал,  $h$  – канальный коэффициент,  $S$  – переданный символ,  $n$  – комплексный гауссовский шум с дисперсией  $\sigma^2$  для реальной и мнимой частей [5].

Последетекторное ОСШ определяется следующим образом [5]:

$$q = \frac{E_S}{2\sigma^2} |h|^2, \quad (2)$$

где  $E_S = |S|^2$  – энергия сигнала.

Для SISO канала без замираний считается, что  $h=1$ , то есть постоянное затухание сигнала в канале учитывается величиной  $E_S$ . В этом случае вероятность ошибки рассчитывается по известной формуле [5]:

$$P_0(q) = Q(\sqrt{2q}), \quad (3)$$

где  $Q(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^\infty e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ .

Для SISO канала с рэлеевскими замираниями канальный коэффициент  $h$  является комплексной случайной дискретной гауссовской величиной с дисперсией 0,5 для реальной и мнимой частей. Тогда из (2) следует, что величина ОСШ

на приемной стороне также случайная с плотностью распределения вероятности (ПВ) по закону хи-квадрат с 2 степенями свободы [6]:

$$p(q) = \frac{1}{\bar{q}} e^{-\frac{q}{\bar{q}}}, \quad (4)$$

где  $\bar{q} = M(q) = \frac{E_S}{2\sigma^2}$  – среднее значение ОСШ.

Вероятность ошибки на бит в канале с замираниями находят усреднением соответствующей зависимости вероятности от ОСШ на бит в канале без замираний  $P_0(q)$  по ПВ ОСШ  $p(q)$ :

$$P = \int_{-\infty}^{\infty} P_0(q)p(q)dq. \quad (5)$$

В частности, подставив (3) и (4) в (5), получим выражение для рэлеевских замираний [5]:

$$P(\bar{q}) = 0,5 \left( 1 - \sqrt{\frac{\bar{q}}{1 + \bar{q}}} \right). \quad (6)$$

Для SISO канала с замираниями Накагами с параметром  $m$  ОСШ распределено по закону хи-квадрат с  $2m$  степенями свободы [6]:

$$p(q) = \frac{1}{(2\sigma_q^2)^m \Gamma(m)} q^{m-1} e^{-\frac{q}{2\sigma_q^2}}, \quad m \geq 0,5, \quad (7)$$

где  $\sigma_q^2 = \frac{\bar{q}}{2m}$ ,  $\Gamma(m) = \int_0^{\infty} t^{m-1} e^{-t} dt, m > 0$  – гамма-функция. При целом  $m$  распределение Накагами описывает энергетическое сложение  $m$  независимо флюктуирующих рэлеевских лучей, при этом с ростом  $m$  глубина замираний уменьшается и при  $m \rightarrow \infty$  замираний не наблюдается. Случай  $m=1, \Gamma(1)=1$  соответствует рэлеевским замираниям, случай  $0,5 \leq m < 1$  – замираниям более глубоким, чем рэлеевские. Таким образом, замирания Накагами являются наиболее общим случаем. Вероятность ошибки для него находим аналогично подстановкой (7) в (5). Полученный интеграл, в общем случае не берущийся, однако для целых  $m$  он дает формулу [5]:

$$P_{SISO}(\bar{q}) = \left[ 0,5 \left( 1 - \sqrt{\frac{\bar{q}}{1 + \bar{q}}} \right) \right]^m \times \prod_{i=1}^m C_i^{m-1+i} \left[ 0,5 \left( 1 + \sqrt{\frac{\bar{q}}{1 + \bar{q}}} \right) \right]^i. \quad (8)$$

Заметим, что при  $m \rightarrow \infty$  выражение (8) обращается в (3), при  $m=1$  в (6).

**SIMO канал с рэлеевскими замираниями.** SIMO (Single Input – Multiple Output) канал имеет одиночную антенну на передающей стороне и МАС из  $N$  антенн на приемной. Математическая модель SIMO канала имеет вид [1]:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{h}\mathbf{S} + \mathbf{n},$$

где  $\mathbf{Y} = \{y_i, i=1 \dots N\}$  –  $N \times 1$  вектор принятых сигналов,  $\mathbf{h} = \{h_i, i=1 \dots N\}$  –  $N \times 1$  вектор канальных коэффициентов передачи от общей передающей антенны к  $i$ -й приемной антенне,  $\mathbf{n}$  –  $N \times 1$  вектор независимых гауссовских одинаково распределенных шумовых компонент с дисперсией  $\sigma^2$  для реальной и мнимой частей.

Замирания в SIMO канале описываются случайными величинами канальных коэффициентов, в общем случае коррелированными [4], [7] с корреляционной матрицей  $\Phi_{\mathbf{R}} = M\{\mathbf{h}\mathbf{h}^H\} = \{\phi_{uv} = M\{h_u h_v^*\}, u, v=1 \dots N\}$ . Тогда значения ОСШ  $q_i$  (2) в  $N$  приемных каналах также являются коррелированными случайными величинами. При оптимальной обработке сигналов  $N$  приемных каналов в весовом сумматоре по критерию минимума среднеквадратичной ошибки (МСКО) [5], [8] последетекторное ОСШ максимально и равно сумме ОСШ приемных каналов:

$$q_{\Sigma} = \sum_{i=1}^N q_i, \quad M(q_i) = \bar{q} = \frac{E_S}{2\sigma^2}. \quad (9)$$

Для SIMO канала с рэлеевскими замираниями величины ОСШ (2) распределены по закону хи-квадрат с 2 степенями свободы (4), а значит, последетекторное ОСШ (9) имеет характеристическую функцию вида [6]:

$$\Psi_{q_{\Sigma}}(j\nu) = [\det(\mathbf{I}_N - j\nu\bar{q}\Phi_{\mathbf{R}})]^{-1} \quad (10)$$

и среднее значение  $\bar{q}_{\Sigma} = M\{q_{\Sigma}\} = N\bar{q}$ .

Вероятность ошибки в SIMO канале вычисляется подстановкой (10) в (5) [6]:

$$P_{SIMO}(\bar{q}) = \int_0^{\infty} P_0(q)p(q_{\Sigma})dq = \int_0^{\infty} Q(\sqrt{2q_{\Sigma}})p(q_{\Sigma})dq = \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Psi_{q_{\Sigma}}(j\nu) \Big|_{\nu = -\frac{1}{\sin^2 \vartheta}} d\vartheta = \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[ \det \left( \mathbf{I}_N + \frac{\bar{q}}{\sin^2 \vartheta} \Phi_{\mathbf{R}} \right) \right]^{-1} d\vartheta =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[ \det \left( \mathbf{I}_N + \frac{\bar{q}_\Sigma}{N \sin^2 \vartheta} \Phi_{\mathbf{R}} \right) \right]^{-1} d\vartheta. \quad (11)$$

Из выражения (11) следует, что вероятность ошибки  $P_{SIMO}(\bar{q})$  уменьшается при увеличении значения определителя

$$\Delta(\Phi_{\mathbf{R}}) = \det \left( \mathbf{I}_N + \frac{\bar{q}_\Sigma}{N \sin^2 \vartheta} \Phi_{\mathbf{R}} \right) = \det \left( \mathbf{I}_N + \frac{\bar{q}_\Sigma}{N \sin^2 \vartheta} \Lambda_{\mathbf{R}} \right) = \prod_{i=1}^N \left( 1 + \frac{\bar{q}_\Sigma}{N \sin^2 \vartheta} \lambda_i \right), \quad (12)$$

где  $\Lambda_{\mathbf{R}} = \{\lambda_i, i=1 \dots N\}$  –  $N \times N$  диагональная матрица неотрицательных собственных чисел  $\Phi_{\mathbf{R}}$ . Исходя из этого, определитель (12) имеет следующие граничные значения [4]:

$$\Delta_{\max} = \left( 1 + \frac{\bar{q}_\Sigma}{N \sin^2 \vartheta} \right)^N,$$

при  $\phi_{uv} = 0, u, v=1 \dots N, u \neq v \Rightarrow \lambda_i = 1$ ;

$$\Delta_{\min} = \left( 1 + \frac{\bar{q}_\Sigma}{\sin^2 \vartheta} \right),$$

при  $|\phi_{uv}| = 1, u, v=1 \dots N \Rightarrow \prod_{i=1}^N \lambda_i = 0. \quad (13)$

Подставляя (13) в (11), получаем выражения для вычисления *граничных значений вероятностей ошибок* в наилучшем и наихудшем случаях корреляции рэлеевских замираний [4]:

$$P_{SIMO \min}(\bar{q}_\Sigma) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( 1 + \frac{\bar{q}_\Sigma}{N \sin^2 \vartheta} \right)^{-N} d\vartheta = \left[ 0,5 \left( 1 - \sqrt{\frac{\bar{q}_\Sigma}{1 + \bar{q}_\Sigma}} \right) \right]^N \times \sum_{i=1}^N C_i^{N-1+i} \left[ 0,5 \left( 1 + \sqrt{\frac{\bar{q}_\Sigma}{1 + \bar{q}_\Sigma}} \right) \right]^i, \quad (14)$$

$$P_{SIMO \max}(\bar{q}_\Sigma) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( 1 + \frac{\bar{q}_\Sigma}{\sin^2 \vartheta} \right)^{-1} d\vartheta = 0,5 \left( 1 - \sqrt{\frac{\bar{q}_\Sigma}{1 + \bar{q}_\Sigma}} \right). \quad (15)$$

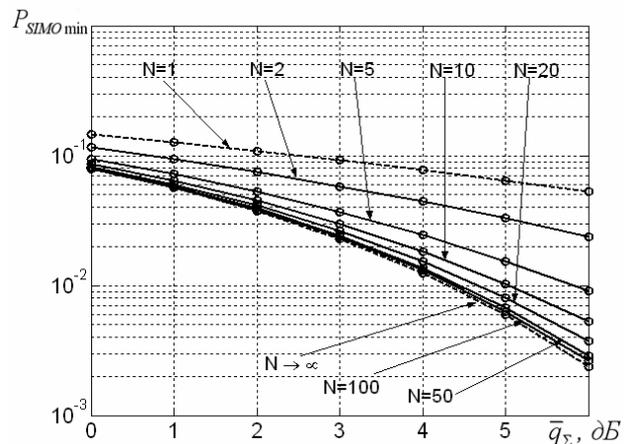
Как видно, *нижняя граница* вероятности ошибки для *независимых рэлеевских замираний* (14) дает результат (8) при замене числа антенн  $N$  на параметр распределения Накагами  $m$ , в то время как *верхняя граница* для *дружных*

*рэлеевских замираний* (15) совпадает с результатом (6) для рэлеевских замираний в SISO канале [4].

Действительно, при независимых рэлеевских замираниях последетекторное ОСШ (9) распределено по закону хи-квадрат с  $2N$  степенями свободы (7), как и ОСШ в SISO канале с замираниями Накагами глубиной  $m = N$ , в то время как при дружных рэлеевских замираниях закон распределения последетекторного ОСШ одинаков для любого  $N$ , то есть хи-квадрат с 2 степенями свободы (4). Заметим, что при  $N = 1$  формула (14) обращается в (15).

Таким образом, SIMO канал с  $N$  антеннами и *дружными замираниями* дает только *энергетический выигрыш* (9) благодаря обработке по критерию МСКО, однако *выигрыш разнесения* в нем отсутствует. При *не полностью коррелированных замираниях* выигрыш разнесения зависит от количества антенн  $N$ . При декорреляции замираний и увеличении  $N$  без учета энергетического выигрыша в предельном случае SIMO канал с рэлеевскими замираниями будет эквивалентен SISO каналу *без замираний*.

Семейство зависимостей нижней границы вероятности ошибки в SIMO канале (14) от  $\bar{q}_\Sigma$  при различном  $N$  приведено на рисунке 1. В общем случае произвольной корреляции кривая будет лежать между нижней граничной кривой, соответствующей SIMO каналу с рэлеевскими независимыми замираниями и числом приемных антенн  $N$ , и верхней, соответствующей SISO каналу ( $N = 1$ ) с рэлеевскими замираниями. Чем менее коррелированы между собой канальные коэффициенты  $\mathbf{h}$ , тем ближе к нижней границе проходит кривая.



**Рисунок 1 – Зависимость вероятности ошибки в SIMO канале с независимыми рэлеевскими замираниями от среднего значения последетекторного ОСШ при различном количестве антенн**

На основании сказанного выше эти графики также справедливы для SISO канала с замираниями Накагами и показывают влияние параметра  $m$  при подстановке его вместо  $N$ .

**Число эффективных степеней свободы.** Параметр распределения Накагами  $m$  в литературе иногда называют числом степеней свободы данного распределения [6]. Также в литературе, посвященной MIMO проблематике, встречается понятие числа эффективных степеней свободы (ЭСС) [3], [9], которое показывает эквивалентное число каналов с независимыми замираниями, обеспечивающее ту же пропускную способность, что и заданное число каналов в условиях коррелированных замираний. В данном случае число ЭСС  $\zeta(\Phi_R, \bar{q}_\Sigma)$  можно определить как параметр распределения замираний Накагами в эквивалентном SISO канале, обеспечивающих ту же вероятность ошибки, что и рассматриваемый канал с коррелированными замираниями Накагами при том же фиксированном среднем последетекторном ОСШ  $\bar{q}_\Sigma$  (рисунок 2):

$$P_{SIMO}(\bar{q}_\Sigma) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( 1 + \frac{\bar{q}_\Sigma}{\zeta(\Phi_R, \bar{q}_\Sigma) \sin^2 \vartheta} \right)^{-\zeta(\Phi_R, \bar{q}_\Sigma)} d\vartheta. \quad (16)$$

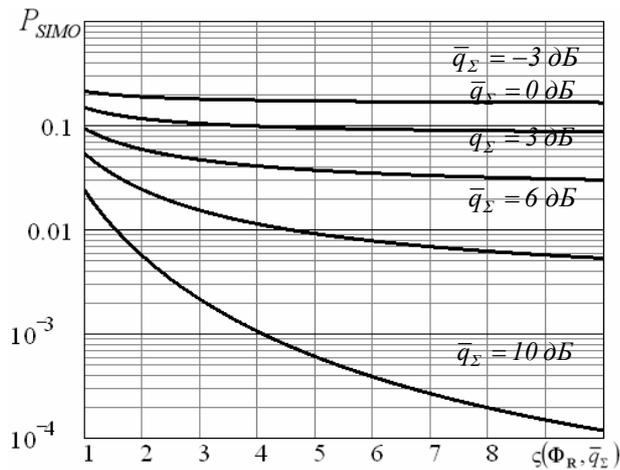


Рисунок 2 – Зависимость вероятности ошибки на бит от числа эффективных степеней свободы при различных значениях среднего ОСШ

В литературе [10] показатель степени  $\zeta(\Phi_R, \bar{q}_\Sigma)$  называют также *выигрышем разнесения* (diversity gain). Как видно из соотношений (14) и (15), для SIMO канала с рэлеевскими замираниями число ЭСС в зависимости от корреляции изменяется в пределах

$$1 \leq \zeta(\Phi_R, \bar{q}_\Sigma) \leq N \quad (17)$$

Таким образом, полная декорреляция, соответствующая нижней границе вероятности ошибки (14), обеспечивает максимальное число ЭСС  $\zeta(\Phi_R, \bar{q}_\Sigma) = N$  и, следовательно, максимальный выигрыш разнесения, а при полной корреляции, соответствующей верхней границе (15), число ЭСС минимально и равно единице  $\zeta(\Phi_R, \bar{q}_\Sigma) = 1$ , то есть *выигрыш пространственного разнесения в данном случае отсутствует*.

Следует отметить, что при частично коррелированных замираниях число ЭСС зависит не только от корреляции  $\Phi_R$ , но также от среднего ОСШ  $\bar{q}_\Sigma$ . Тем не менее при малых изменениях  $\bar{q}_\Sigma$  число ЭСС может быть оценено численным решением нелинейного уравнения, полученного приравниванием (11) и (16). При целом числе ЭСС выражение (16) можно переписать в замкнутой форме аналогично (14) [10]:

$$P_{SIMO}(\bar{q}_\Sigma) = \left[ 0,5 \left( 1 - \sqrt{\frac{\bar{q}_\Sigma}{1 + \bar{q}_\Sigma}} \right) \right]^{\zeta(\Phi_R, \bar{q}_\Sigma)} \times \sum_{i=1}^{\zeta(\Phi_R, \bar{q}_\Sigma)} C_i^{\zeta(\Phi_R, \bar{q}_\Sigma) - 1 + i} \left[ 0,5 \left( 1 + \sqrt{\frac{\bar{q}_\Sigma}{1 + \bar{q}_\Sigma}} \right) \right]^i. \quad (18)$$

В случае дробного числа ЭСС выражение (18) может служить оценкой максимальной вероятности ошибки при подстановке в него ближайшего меньшего целого числа ЭСС.

**SIMO канал с замираниями Накагами.** В этом случае ОСШ в каждом приемном канале распределено по закону хи-квадрат с  $2m$  степенями свободы. Следовательно, при независимых замираниях Накагами с целым  $m$  последетекторное ОСШ (9) будет иметь закон распределения хи-квадрат с  $2mN$  степенями свободы, что эквивалентно SIMO каналу с рэлеевскими замираниями и  $2mN$  приемными антеннами.

Обобщение случая SIMO канала с рэлеевскими замираниями на случай замираний Накагами с произвольным  $m$  дает формулу вероятности ошибки, аналогичную (11) [6], [11]:

$$P_{SIMO}(\bar{q}) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[ \det \left( \mathbf{I}_N + \frac{\bar{q}}{m \sin^2 \vartheta} \Phi_R \right) \right]^{-m} d\vartheta, \quad (19)$$

и выражения для граничных значений вероятностей ошибок, аналогичные (14) и (15):

$$P_{SIMO \min}(\bar{q}_\Sigma) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( 1 + \frac{\bar{q}_\Sigma}{Nm \sin^2 \vartheta} \right)^{-Nm} d\vartheta, \quad (20)$$

$$P_{SIMO \max}(\bar{q}_\Sigma) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( 1 + \frac{\bar{q}_\Sigma}{m \sin^2 \vartheta} \right)^{-m} d\vartheta. \quad (21)$$

Из (20) и (21) следует, что для SIMO канала с замираниями Накагами вероятность ошибки также может быть оценена по (16) или (18) через число ЭСС, которое лежит в пределах

$$m \leq \zeta(\Phi_R, \bar{q}_\Sigma) \leq mN. \quad (22)$$

**Неравномерное распределение энергий.**

Пусть средняя энергия принятого сигнала различна для элементов приемной МАС SIMO канала. Тогда средние ОСШ в приемных каналах также будут различны,

$$q_i = \frac{E_{S_i}}{2\sigma^2} |h_i|^2, \quad \bar{q}_i = \frac{E_{S_i}}{2\sigma^2}, \quad i=1 \dots N. \quad (23)$$

Характеристическая функция (10) последетекторного ОСШ  $q_\Sigma$  (9) с учетом (23) имеет вид:

$$\begin{aligned} \Psi_{q_\Sigma}(j\nu) &= \left[ \det \left( \mathbf{I}_N - j\nu \frac{\mathbf{E}_S}{2\sigma^2} \Phi_R \right) \right]^{-1} = \\ &= \left[ \det \left( \mathbf{I}_N - j\nu \bar{q}_\Sigma \frac{\mathbf{E}_S}{\text{tr}(\mathbf{E}_S)} \Phi_R \right) \right]^{-1}, \end{aligned} \quad (24)$$

где  $\mathbf{E}_S$  –  $N \times N$  диагональная матрица усредненных энергий  $E_{S_1} \dots E_{S_N}$  в элементах МАС.

С учетом (24) формула (19) приобретает вид [12]:

$$P_{SIMO}(\bar{q}_\Sigma) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[ \det \left( \mathbf{I}_N + \frac{\bar{q}_\Sigma}{m \sin^2 \vartheta} \frac{\mathbf{E}_S}{\text{tr}(\mathbf{E}_S)} \Phi_R \right) \right]^{-m} d\vartheta, \quad (25)$$

т.е. в данном случае определитель  $\Delta(\Phi_R)$  (12) вычисляется следующим образом:

$$\begin{aligned} \Delta(\Phi_R) &= \det \left( \mathbf{I}_N + \frac{\bar{q}_\Sigma}{mN \sin^2 \vartheta} \frac{N\mathbf{E}_S}{\text{tr}(\mathbf{E}_S)} \Phi_R \right) = \\ &= \prod_{i=1}^N \left( 1 + \frac{\bar{q}_\Sigma}{mN \sin^2 \vartheta} \xi_i \lambda_i \right), \end{aligned} \quad (26)$$

где  $\xi_i = \frac{NE_{S_i}}{\text{tr}(\mathbf{E}_S)}$ ,  $i=1 \dots N$  – величины, характеризующие распределение усредненных энергий, нормированные так, что  $\xi_i \geq 0$ ,  $\sum_{i=1}^N \xi_i = N$ , то есть аналогично собственным числам  $\lambda_i$  матрицы  $\Phi_R$ . Отсюда следует, что *наименьшая*

*вероятность ошибки в SIMO канале* соответствует случаю  $\xi_i \lambda_i = 1$ , в частности, при  $\xi_i = 1$ ,  $\lambda_i = 1$ ,  $i=1 \dots N$ , то есть при *равномерном распределении энергии и полной декорреляции*. Однако при коррелированных замираниях появление энергетической неравномерности может по-разному влиять на ЭСС как уменьшая, так и увеличивая вероятность ошибки. В условиях неравномерного распределения энергии определитель  $\Delta(\Phi_R)$  (26) максимален при  $\lambda_i = \xi_i^{-1}$ , однако при этом нарушается условие  $\sum_{i=1}^N \lambda_i = N$ , поэтому собственные числа, максимизирующие  $\Delta(\Phi_R)$ , следует находить по правилу «водозаполнения» [1]:

$$\lambda_{i \text{ opt}} = (\mu - \xi_i^{-1})^+, \quad i=1 \dots N, \quad (27)$$

где  $(\bullet)^+$  – оператор обнуления при отрицательном аргументе,  $\mu$  выбрано так, что  $\sum_{i=1}^N \lambda_{i \text{ opt}} = N$ .

В свою очередь, в условиях фиксированной корреляции через правило «водозаполнения» рассчитывается распределение энергии по каналам, минимизирующее вероятность ошибки.

Обобщая сказанное на случай произвольной глубины замираний, корреляции и неравномерного распределения энергии, делаем следующие выводы.

1. ЭСС в рассматриваемом случае изменяется в пределах (22), формулы для вероятности ошибки (16) и (18) остаются справедливыми.

2. Наличие хотя бы одного из двух явлений корреляции и энергетической неравномерности снижает число ЭСС и, следовательно, повышает вероятность ошибки.

3. Если одно из двух перечисленных явлений присутствует и фиксировано, возникновение второго явления или изменение его параметров может как повысить, так и снизить вероятность ошибки.

4. При уменьшении глубины замираний влияние обоих явлений на вероятность ошибки уменьшается.

**Луч прямой видимости.** При наличии ЛПВ среднее последетекторное ОСШ складывается из двух составляющих, обусловленных соответственно флюктуациями и ЛПВ:

$$\bar{q}_\Sigma = M\{q_\Sigma\} = \bar{q}_{-\Sigma} + \bar{q}_{0\Sigma} = \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^N E_{S_i} (1 + |c_i|^2),$$

$$\bar{q}_{-\Sigma} = M\{q_{-\Sigma}\} = \frac{\text{tr}(\mathbf{E}_S)}{2\sigma^2} = \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^N E_{S_i},$$

$$\bar{q}_{0\Sigma} = M\{q_{0\Sigma}\} = \frac{\mathbf{C}^H \mathbf{E}_S \mathbf{C}}{2\sigma^2} = \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^N E_{S_i} |c_i|^2, \quad (28)$$

где  $\mathbf{C} = \{c_i, i = 1 \dots N\}$  –  $N \times 1$  вектор-столбец отношений комплексных составляющих сигнала прямой видимости к комплексным флюктуирующим составляющим,  $|c_i|^2 = M\{|h_i|^2\} = \frac{E_{0i}}{E_{S_i}}$ ,  $\text{Re}\{c_i\} = M\{\text{Re}\{h_i\}\}$ ,  $\text{Im}\{c_i\} = M\{\text{Im}\{h_i\}\}$ ,  $i = 1 \dots N$ .

В условиях замираний с ЛПВ, описываемых законом Рэлея-Райса, ОСШ (9) имеет нецентральное хи-квадрат распределение с характеристической функцией вида [13]:

$$\Psi_{q_\Sigma}(j\nu) = e^{j\nu \frac{1}{N_0} \mathbf{C}^H \mathbf{E}_S^{0.5} \left( \mathbf{I}_N - j\nu \bar{q}_{\sim\Sigma} \frac{\mathbf{E}_S}{\text{tr}(\mathbf{E}_S)} \Phi_{\mathbf{R}} \right)^{-1} \mathbf{E}_S^{0.5} \mathbf{C}} \times \times \left[ \det \left( \mathbf{I}_N - j\nu \bar{q}_{\sim\Sigma} \frac{\mathbf{E}_S}{\text{tr}(\mathbf{E}_S)} \Phi_{\mathbf{R}} \right) \right]^{-1}, \quad (29)$$

где  $\Phi_{\mathbf{R}} = M\{(\mathbf{h} - \mathbf{C})(\mathbf{h} - \mathbf{C})^H\}$  – в данном случае матрица ковариации, не зависящая от наличия ЛПВ и его энергии  $E_{0i}$ .

Из (28) следуют соотношения:

$$\frac{\bar{q}_\Sigma}{\bar{q}_{0\Sigma}} = 1 + \frac{\text{tr}(\mathbf{E}_S)}{\mathbf{C}^H \mathbf{E}_S \mathbf{C}}, \quad \frac{\bar{q}_{\sim\Sigma}}{\bar{q}_{\sim\Sigma}} = 1 + \frac{\mathbf{C}^H \mathbf{E}_S \mathbf{C}}{\text{tr}(\mathbf{E}_S)}. \quad (30)$$

Подставив (29) и (30) в (11), получим формулу вероятности ошибки:

$$P_{SIMO}(\bar{q}_\Sigma) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[ \det \left( \mathbf{I}_N + \frac{\bar{q}_{\sim\Sigma}}{\sin^2 \vartheta} \frac{\mathbf{E}_S}{\text{tr}(\mathbf{E}_S)} \Phi_{\mathbf{R}} \right) \right]^{-1} \times \times e^{-\frac{\bar{q}_{\sim\Sigma}}{\text{tr}(\mathbf{E}_S)} \mathbf{C}^H \mathbf{E}_S^{0.5} \left( \mathbf{I}_N \sin^2 \vartheta + \bar{q}_{\sim\Sigma} \frac{\mathbf{E}_S}{\text{tr}(\mathbf{E}_S)} \Phi_{\mathbf{R}} \right)^{-1} \mathbf{E}_S^{0.5} \mathbf{C}} d\vartheta = = \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[ \det \left( \mathbf{I}_N + \frac{\bar{q}_\Sigma}{\sin^2 \vartheta} \frac{\mathbf{E}_S}{\text{tr}(\mathbf{E}_S) + \mathbf{C}^H \mathbf{E}_S \mathbf{C}} \Phi_{\mathbf{R}} \right) \right]^{-1} \times \times e^{-\frac{\bar{q}_\Sigma}{\text{tr}(\mathbf{E}_S) + \mathbf{C}^H \mathbf{E}_S \mathbf{C}} \mathbf{C}^H \mathbf{E}_S^{0.5} \left( \mathbf{I}_N \sin^2 \vartheta + \bar{q}_\Sigma \frac{\mathbf{E}_S}{\text{tr}(\mathbf{E}_S) + \mathbf{C}^H \mathbf{E}_S \mathbf{C}} \Phi_{\mathbf{R}} \right)^{-1} \mathbf{E}_S^{0.5} \mathbf{C}} d\vartheta. \quad (31)$$

Рассмотрим далее частный случай равномерного распределения по приемным каналам энергии флюктуаций  $\mathbf{E}_S = E_S \mathbf{I}_N$  и энергии ЛПВ,  $\mathbf{C} = [c \ c \ \dots \ c]^T$ . Тогда

$$\frac{\mathbf{E}_S}{\text{tr}(\mathbf{E}_S) + \mathbf{C}^H \mathbf{E}_S \mathbf{C}} = \frac{\mathbf{I}_N}{N + \mathbf{C}^H \mathbf{C}},$$

$$= \frac{\mathbf{I}_N}{N(1 + |c|^2)} = \frac{\mathbf{I}_N}{N \left( 1 + \frac{E_0}{E_S} \right)}. \quad (32)$$

Подставляя (32) в (31), получаем результат, схожий с (11):

$$P_{SIMO}(\bar{q}_\Sigma) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[ \det \left( \mathbf{I}_N + \frac{\bar{q}_\Sigma}{N(1 + |c|^2)} \sin^2 \vartheta \Phi_{\mathbf{R}} \right) \right]^{-1} \times \times e^{-\frac{\bar{q}_\Sigma}{N(1 + |c|^2)} \mathbf{C}^T \left( \mathbf{I}_N \sin^2 \vartheta + \frac{\bar{q}_\Sigma}{N(1 + |c|^2)} \Phi_{\mathbf{R}} \right)^{-1} \mathbf{C}} d\vartheta, \quad (33)$$

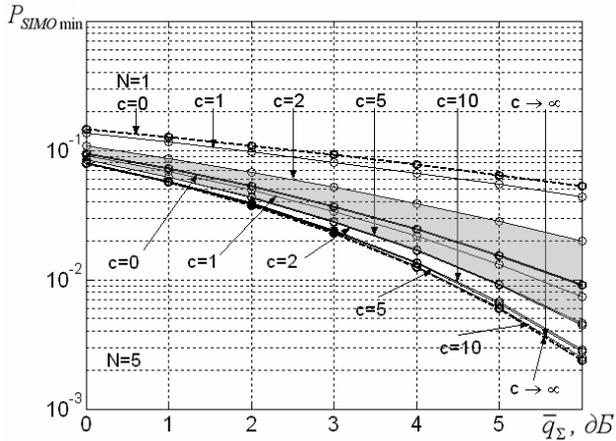
который при подстановке граничных значений определителя  $\Delta(\Phi_{\mathbf{R}})$  (13) дает граничные значения вероятностей ошибок в SIMO канале с замираниями Рэлея-Райса, аналогичные (20) и (21):

$$P_{SIMO \min}(\bar{q}_\Sigma) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( 1 + \frac{\bar{q}_\Sigma}{N(1 + |c|^2)} \sin^2 \vartheta \right)^{-N} \times \times e^{-\frac{N|c|^2 \bar{q}_\Sigma}{N(1 + |c|^2) \sin^2 \vartheta + \bar{q}_\Sigma}} d\vartheta, \quad (34)$$

$$P_{SIMO \max}(\bar{q}_\Sigma) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( 1 + \frac{\bar{q}_\Sigma}{(1 + |c|^2) \sin^2 \vartheta} \right)^{-N} \times \times e^{-\frac{|c|^2 \bar{q}_\Sigma}{(1 + |c|^2) \sin^2 \vartheta + \bar{q}_\Sigma}} d\vartheta. \quad (35)$$

Аналогично формулам (14) и (15) для SIMO канала с рэлеевскими замираниями верхняя граница (35) не зависит от числа антенн  $N$ , в то время как нижняя (34) при увеличении  $N$  стремится к кривой, соответствующей случаю без замираний (3). При  $c=0$  замирания рэлеевские без ЛПВ и формулы (34) и (35) обращаются в (14) и (15) соответственно. При  $c \rightarrow \infty$  ЛПВ преобладает над флюктуационной составляющей сигнала, и обе кривые (34) и (35) стремятся к граничной кривой без замираний (3). Пример кривых вероятности ошибки для различных значений  $c$  в канале с числом антенн  $N=1$  (SISO), а также  $N=5$  и независимыми замираниями приведен на рисунке 3.

В общем случае коррелированных замираний Рэлея-Райса с фиксированным  $c$ , одинаковым для всех антенн, кривая вероятности ошибки будет лежать между нижней граничной кривой для  $N$  антенн и верхней, соответствующей SISO каналу. К примеру, диапазон, в котором при различной корреляции замираний находится кривая для случая  $N=5$ ,  $c=2$ , выделен на рисунке 3 серым цветом.



**Рисунок 3 – Зависимости вероятности ошибки в SISO и SIMO канале с  $N = 5$  антеннами и независимыми замираниями Рэлея-Райса от среднего значения последетекторного ОСШ**

Для оценивания диапазона изменения числа ЭСС в канале с ЛПВ необходимо привести формулы граничных кривых (34) и (35) к виду (16). Для этого представим показатель степени экспоненты в (34) следующим образом:

$$-\frac{N|c|^2 \bar{q}_\Sigma}{N(1+|c|^2) \sin^2 \vartheta + \bar{q}_\Sigma} = -N|c|^2 \frac{\bar{q}_\Sigma}{N(1+|c|^2) \sin^2 \vartheta} \frac{1}{1 + \frac{\bar{q}_\Sigma}{N(1+|c|^2) \sin^2 \vartheta}}. \quad (36)$$

Далее, воспользовавшись разложением в ряд Тейлора экспоненциальной функции, из (36) получим приближенную оценку, которая тем точнее, чем меньше  $\bar{q}_\Sigma$  и больше  $N$  и  $c$ :

$$\left( e^{\frac{\bar{q}_\Sigma}{N(1+|c|^2) \sin^2 \vartheta}} \right)^{-\frac{N|c|^2}{1 + \frac{\bar{q}_\Sigma}{N(1+|c|^2) \sin^2 \vartheta}} \approx \left( 1 + \frac{\bar{q}_\Sigma}{N(1+|c|^2) \sin^2 \vartheta} \right)^{-N|c|^2}. \quad (37)$$

Подставив (37) в (34) и (35), получим:

$$P_{SIMO \min}(\bar{q}_\Sigma) \approx \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( 1 + \frac{\bar{q}_\Sigma}{N(1+|c|^2) \sin^2 \vartheta} \right)^{-N(1+|c|^2)} d\vartheta, \quad (38)$$

$$P_{SIMO \max}(\bar{q}_\Sigma) \approx \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( 1 + \frac{\bar{q}_\Sigma}{(1+|c|^2) \sin^2 \vartheta} \right)^{-(1+|c|^2)} d\vartheta. \quad (39)$$

Из (38) и (39) следует, что для канала с коррелированными замираниями Рэлея-Райса число ЭСС лежит в приближительных пределах

$$1 + |c|^2 \leq \zeta(\Phi_R, \bar{q}_\Sigma) \leq N(1 + |c|^2), \quad (40)$$

то есть при фиксированном среднем ОСШ наличие ЛПВ увеличивает надежность приема. Например, для SISO канала или SIMO канала с дружными замираниями и мощным ЛПВ,  $N=1, c=5$ , число ЭСС  $\zeta=26$ . Для SIMO канала с 5 антеннами, независимыми замираниями и менее мощным ЛПВ,  $N=5, c=2$ , число ЭСС  $\zeta=25$ . То есть эти каналы почти эквивалентны по надежности, что можно наблюдать по практически совпавшим графикам вероятности ошибки на рисунке 3 для указанных случаев.

Заметим, что  $1 + |c|^2 = \frac{E_0 + E_S}{E_S} = k$  – фактор Райса. Тогда (40) можно переписать:

$$k \leq \zeta(\Phi_R, \bar{q}_\Sigma) \leq Nk, \quad (41)$$

что схоже с (22). Данный результат подтверждается близостью распределений Рэлея-Райса и Накагами при  $k = m > 1$  [6], [12].

Переход от SIMO канала Рэлея-Райса к SIMO каналу Накагами-Райса аналогичен переходу от рэлеевского канала (17) к каналу Накагами (22). Число ЭСС в SIMO канале Накагами-Райса с равномерным распределением энергии флюктуаций и ЛПВ по приемным антеннам будет лежать в пределах

$$mk \leq \zeta(\Phi_R, \bar{q}_\Sigma) \leq Nmk. \quad (42)$$

**MISO канал.** MISO (Multiple Input – Single Output) канал имеет МАС из  $N$  передающих антенн и одну приемную антенну, то есть он является обратным SIMO каналу. Математическая модель MISO канала имеет вид:

$$Y = \mathbf{h}\mathbf{S} + n = \sum_{i=1}^N h_i S_i + n, \quad (43)$$

где  $\mathbf{h} = \{h_i, i=1 \dots N\}$  –  $1 \times N$  вектор канальных коэффициентов с корреляционной матрицей  $\Phi_T = M\{\mathbf{h}^H \mathbf{h}\}$  [7],  $S_i$  – сигнал на выходе  $i$ -й передающей антенны. Наилучшее качество связи в MISO канале достигается при фазировании передаваемых сигналов и взвешивании их уровней пропорционально модулям соответствующих канальных коэффициентов с учетом постоянства суммарной энергии передачи [14]:

$$\mathbf{S} = S \frac{\mathbf{h}^H}{\sqrt{\|\mathbf{h}\|}}, \quad S_i = S \frac{h_i^*}{\sqrt{\|\mathbf{h}\|}}, \quad (44)$$

где  $S$  – общий передаваемый сигнал до обработки в многоканальном тракте передатчика,  $\|\bullet\|$  – оператор вычисления 2-нормы вектора.

С учетом (44) математическая модель (43) принимает вид:

$$Y = \frac{S}{\sqrt{\|\mathbf{h}\|}} \sum_{i=1}^N |h_i|^2 + n = S \sqrt{\|\mathbf{h}\|} + n = S \sqrt{\sum_{i=1}^N |h_i|^2} + n. \quad (45)$$

По выражению (45) рассматриваемый MISO канал эквивалентен SISO каналу (1) с канальным коэффициентом  $h_{MISO} = \sqrt{\sum_{i=1}^N |h_i|^2}$  и последетекторным ОСШ (2):

$$q = \frac{E_S}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^N |h_i|^2 = \sum_{i=1}^N q_i, \quad (46)$$

что аналогично (9). Из (46) следует, что оптимальная обработка на передатчике MISO канала (44) эквивалентна оптимальной обработке по критерию МСКО в приемнике соответствующего SIMO канала, и последетекторные ОСШ в соответствующих MISO и SIMO каналах имеют одинаковые законы распределения. Это означает, что для MISO канала справедлив анализ граничных вероятностей ошибок для SIMO канала, приведенный выше.

Таким образом, вероятность ошибки в MISO канале также может быть вычислена через число ЭСС по формулам (16) и (18) или графически оценена по рисунку 1 или рисунку 3. Число ЭСС MISO канала лежит в пределах (17) при *рэлеевских* замираниях, (22) при замираниях *Накагами*, (41) при замираниях *Рэлея-Райса* или (42) при замираниях *Накагами-Райса*.

**MIMO канал.** Математическая модель MIMO канала с передающей МАС из  $M$  антенн и приемной МАС из  $N$  антенн представлена в виде [1]:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{H}\mathbf{S} + \mathbf{n},$$

где  $\mathbf{H} = \{h_{ij}, i=1 \dots N, j=1 \dots M\}$  –  $N \times M$  матрица канальных коэффициентов передачи от  $j$ -й передающей антенны к  $i$ -й приемной антенне,  $\mathbf{S} = \{S_j, j=1 \dots N\}$  –  $M \times 1$  вектор переданных соответствующими антеннами в течение тактового интервала комплексных символов. Корреляция замираний в MIMO канале описывается в общем случае 4-мерным тензором, однако при значительном разнесении передатчика и приемника для ее описания достаточно двух корреляционных матриц [7]:

$$\Phi_{\mathbf{R}} = M \{ \mathbf{H}\mathbf{H}^H \}, \quad \Phi_{\mathbf{T}} = M \{ \mathbf{H}^H \mathbf{H} \}.$$

При  $M \leq N$  корреляция на передающей

стороне может быть преодолена пространственно-временным кодированием источника, когда с каждой передающей антенны за один тактовый интервал передается свой независимый символ [15], [16], то есть  $\Phi_{\mathbf{T}} = \mathbf{I}_M$ . В этом случае MIMO канал можно рассматривать как суперпозицию  $M$  независимых SIMO каналов, а вероятность ошибки, по аналогии с (33), рассчитать по формуле [11]

$$P_{MIMO}(\bar{q}_{\Sigma}) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[ \det \left( \mathbf{I}_N + \frac{\bar{q}_{\Sigma}}{NMm(1+|c|^2)\sin^2 \vartheta} \Phi_{\mathbf{R}} \right) \right]^{-Mm} \times e^{-\frac{\bar{q}_{\Sigma}}{NMm(1+|c|^2)} \mathbf{C}^T \left( \mathbf{I}_N \sin^2 \vartheta + \frac{\bar{q}_{\Sigma}}{NMm(1+|c|^2)} \Phi_{\mathbf{R}} \right)^{-1} \mathbf{C}} d\vartheta, \quad (47)$$

откуда получаем выражения для граничных вероятностей ошибки в MIMO канале с пространственно-временным кодированием, аналогичные (38) и (39):

$$P_{MIMOmin}(\bar{q}_{\Sigma}) \approx \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( 1 + \frac{\bar{q}_{\Sigma}}{NMm(1+|c|^2)\sin^2 \vartheta} \right)^{-NMm(1+|c|^2)} d\vartheta, \quad (48)$$

$$P_{MIMOmax}(\bar{q}_{\Sigma}) \approx \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( 1 + \frac{\bar{q}_{\Sigma}}{Mm(1+|c|^2)\sin^2 \vartheta} \right)^{-Mm(1+|c|^2)} d\vartheta. \quad (49)$$

Из (48) и (49) следует, что для MIMO канала с замираниями *Накагами-Райса* и *пространственно-временным кодированием* число ЭСС в зависимости от корреляции на приемной стороне  $\Phi_{\mathbf{R}}$  лежит в пределах

$$Mmk \leq \zeta(\Phi_{\mathbf{R}}, \bar{q}_{\Sigma}) \leq NMmk, \quad (50)$$

возрастая по сравнению с числом ЭСС SIMO канала в  $M$  раз.

Однако в случае отсутствия пространственно-временного кодирования начинает проявляться влияние корреляции на передающей стороне  $\Phi_{\mathbf{T}}$ , из-за чего число ЭСС может в худшем случае корреляции *не возрастать* по сравнению с SIMO каналом. Таким образом, в общем случае диапазон изменения числа ЭСС MIMO канала с замираниями *Накагами-Райса* может составлять

$$mk \leq \zeta(\Phi_{\mathbf{R}}, \Phi_{\mathbf{T}}, \bar{q}_{\Sigma}) \leq NMmk. \quad (51)$$

Формулы для оценивания вероятности ошибки по числу ЭСС (16) и (18), а также вспомогательные графики (рисунки 1 – 3) остаются справедливыми для MIMO канала.

**Выводы.** В данной статье проведен анализ зависимости вероятности ошибки от числа

антенн, корреляции и характера замираний в ММО канале. Введено понятие числа ЭСС ММО канала, на основании которого получен универсальный результат для граничных вероятностей ошибки приема сигнала с ДФМ в ММО канале. Полученный результат позволяет сделать следующие выводы.

1. Число ЭСС является обобщающим показателем, связывающим влияние корреляции, глубины замираний и энергии ЛПВ на вероятность ошибки в ММО канале. Кроме того, число ЭСС может быть использовано в качестве ресурсного показателя целесообразности и эффективности декорреляции замираний в заданных условиях.

2. При большой глубине замираний и отсутствии ЛПВ корреляция влияет на число ЭСС и, как следствие, на надежность передачи данных в широких пределах; это влияние тем больше, чем больше последетекторное ОСШ. К примеру, при ОСШ 6 дБ вероятность ошибки приема ДФМ сигнала в рэлеевском СИМО канале с 5 приемными антеннами может в зависимости от корреляции замираний изменяться на порядок (рисунок 1).

3. Наихудшим случаем корреляции, соответствующим максимальной вероятности ошибки, являются дружные замирания в МАС, в этом случае ММО канал с любым количеством антенн эквивалентен по надежности СИСО каналу с тем же типом замираний и той же энергией ЛПВ на одну приемную антенну, то есть при дружных замираниях выигрыш пространственного разнесения отсутствует, число ЭСС минимально.

4. Наилучшим случаем корреляции, соответствующим минимальной вероятности ошибки, являются независимые замирания в МАС, при этом число ЭСС увеличивается по сравнению со случаем дружных замираний в  $MN$  раз и при увеличении числа антенн рассматриваемый ММО канал в предельном случае эквивалентен по надежности СИСО каналу без замираний.

Практическое применение результатов статьи возможно для расчета эффективности декорреляции сигналов и принятия решения о ее целесообразности в системах связи, использующих МАС, пространственно-временное кодирование и эффект переотражения сигнала, таких как сотовая связь, Wi-Fi и Wi-Max в регламентированных диапазонах частот (1,8 – 11 ГГц).

#### Библиографический список

1. Telatar I.E. Capacity of multi-antenna Gaussian channels // Eur. Trans. Telecom. Vol. 10. Pp. 585–595. Nov. 1999.
2. Бакулин М.Г., Крейнделин В.Б., Шумов А.П. Повышение скорости передачи информации и спек-

тральной эффективности беспроводных систем связи // Цифровая обработка сигналов. Рязань: РГРТУ, 2006. №1. С. 2–12.

3. Shiu D.S., Foschini G., Gans M., Kahn J. Fading Correlation and Its Effect on the Capacity of Multi-Element Antenna Systems // IEEE Transactions on Communications. vol. 48. Pp. 502-513. Mar. 2000.

4. Паришин Ю.Н., Ксендзов А.В. Влияние пространственной корреляции на эффективность оптимизации пространственной структуры многоантенной системы при разнесенном приеме // Вестник Рязанской государственной радиотехнической академии. Вып. 19. – Рязань: РГРТУ, 2006. С. 54–62.

5. Прокус Дж. Цифровая связь. Пер. с англ./ Под ред. Д.Д. Кловского. – М.: Радио и связь, 2000. 800 с.

6. Luo J., Zeidler J.R., McLaughlin S. Performance Analysis of Compact Antenna Arrays with MRC in Correlated Nakagami Fading Channels // IEEE Transactions on Vehicular Technology, Vol. 50, №1. Pp. 267-277. 2001.

7. Chizhik D., Rashid-Farrokhi F., Ling J., Lozano A. Effect of antenna separation on the capacity of BLAST in correlated channels // IEEE communication letters. Vol.4, №11. Pp. 337-339. Nov. 2000.

8. Монзинго Р., Муллер Т. Адаптивные антенные решетки: введение в теорию: пер. с англ. М.: Радио и связь, 1986. 448 с.

9. Schumacher L., Pedersen K., Mogensen P. From Antenna Spacings to Theoretical Capacities – Guidelines for Simulating MIMO Systems // Proceedings of 13<sup>th</sup> IEEE International Symposium on Personal, Indoor and Mobile Radio Communications PIMRC 2002. Lisbon, Portugal, 15-18 Sept. 2002. Vol. 2. Pp. 587-592. Sept. 2002.

10. Kuhn V. Wireless Communications over MIMO channels. Applications to CDMA and Multiple Antenna Systems // John Wiley & Sons, Ltd. 2006.

11. Luo J., Zeidler J., Proakis J. Error probability Performance for W-CDMA Systems with Multiple Transmit and Receive Antennas in Correlated Nakagami Fading Channels // IEEE Trans. Veh. Technology. Vol. 51. №6. Pp. 1502–1516. Nov. 2002.

12. Lombardo P., Fedele G., Rao M. MRC Performance for Binary Signals in Nakagami Fading with General Branch Correlation // IEEE Transactions on Communications. Vol. 47. №1. Pp. 44–52. Jan. 1999.

13. Yang C., Bi G., Leyman A. MRC receiver performance with MQAM in correlated Rician fading channels // Statistical Signal Processing, 2001, Proceedings of the 11th IEEE Signal Processing Workshop on. Pp. 210–212. 2001.

14. Ivrlac M., Nossek J. On the impact of correlated fading for MIMO-systems // IEEE International Symposium on Circuits and Systems. Pp. 655–658. May 2002.

15. Alamouti S. A Simple Transmit Diversity Technique for Wireless Communications // IEEE Jour. Sel. Areas Commun. Vol. 16. №8. Pp. 1451–1458. Oct. 1998.

16. Wolniansky P., Foschini G., Golden G., Valenzuela R. V-BLAST: An architecture for realizing very high data rates over the rich-scattering wireless channel // Proc. IEEE ISSSE-98, Pisa, Italy. 30 Sept. 1998.