Физико-математическая Олимпиада РГРТУ среди школьников и абитуриентов, посвященная 110-летию со дня рождения академика И.К. Кикоина

2 этап. 16 июля 2018 года.
Тур «Математика».

Задача 1.
Решить математический ребус: ФРТ+ФЭ+ФАИТУ+ФВТ+ИЭФ=РГРТУ. Одинаковые буквы соответствуют одинаковым цифрам, разные буквы – разным цифрам.
Ответ:
1. Ф=1, Р=2, Т=6, Э=7, А=9, И=4, У=3 или У=5, В=8, Г=0.
126+17+19463+186+471=20263.
126+17+19465+186+471=20265.
2. Ф=3, Р=4, Т=0, Э=7, А=9, И=8, У=2 или У=6, В=5, Г=1.
340+37+39802+350+873=41402.
340+37+39806+350+873=41406.
3. Ф=7, Р=8, Т=5, Э=3, А=9, И=6, У=2 или У=4, В=0, Г=1.
785+73+79652+705+637=81852.
785+73+79654+705+637=81854.

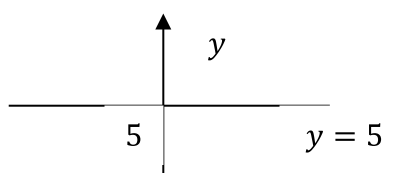
Задача 2.

Найти решение неравенства $1 - y - z^2 \geq \sqrt{y - 1 - z^2}$.
Решение.
Из условия получим
$$1 - z^2 \geq y + \sqrt{y - 1 - z^2}$$
Поскольку $y - 1 - z^2 \geq 0$, то $y \geq z^2 + 1$. Так как $\sqrt{y - 1 - z^2} \geq 0$, то $1 - z^2 \geq y$ и $z^2 + 1 \leq 1 - z^2$ и, следовательно, $z = 0 \Rightarrow \ 1 \leq y \leq 1$ и $y = 1$. Пара чисел $y = 1,\ z = 0$ удовлетворяет исходному неравенству.
Ответ: $y = 1,\ z = 0$.

Задача 3.

Построить график функции $y = \sqrt{sin^4x - 4cos^2x + 8} + \sqrt{cos^4x - 4sin^2x + 8}$.

Решение.
$y = \sqrt{sin^4x - 4cos^2x + 8} + \sqrt{cos^4x - 4sin^2x + 8}$,
$y = \sqrt{sin^4x + (-4cos^2x + 4) + 4} + \sqrt{cos^4x + (-4sin^2x + 4) + 4}$,
$y = \sqrt{sin^4x + 4(1 - cos^2x) + 4} + \sqrt{cos^4x + 4(1 - sin^2x) + 4}$,
$y = \sqrt{sin^4x + 4sin^2x + 4} + \sqrt{cos^4x + 4cos^2x + 4}$,



$y=\sqrt{(sin^2x+2)^2}+\sqrt{(cos^2x+2)^2}$,
$y=sin^2x+2+cos^2x+2$,
$y=5$ – прямая, параллельная оси *Ox*.

Задача 4.

Доказать, используя метод математической индукции:

$$\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cdots\cos\frac{x}{2^n}=\frac{\sin x}{2^n\sin\frac{x}{2^n}}$$

Решение.

1. При $n=1$ получим: $\cos\frac{x}{2}=\frac{\sin x}{2\sin\frac{x}{2}}$

$$\cos\frac{x}{2}=\frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}}$$

$\cos\frac{x}{2}=\cos\frac{x}{2}$ - верно.

2. Допустим, что тождество справедливо при n=k, т. е. докажем, что

$$\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cdots\cos\frac{x}{2^k}=\frac{\sin x}{2^k\sin\frac{x}{2^k}}\,(*)$$

Необходимо доказать, что данное тождество справедливо при n=k+1, т. е. докажем, что

$$\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cdots\cos\frac{x}{2^k}\cos\frac{x}{2^{k+1}}=\frac{\sin x}{2^{k+1}\sin\frac{x}{2^{k+1}}},$$

используя $(*)$.

$$\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cdots\cos\frac{x}{2^k}\cos\frac{x}{2^{k+1}}=\frac{\sin x}{2^k\sin\frac{x}{2^k}}\cos\frac{x}{2^{k+1}}=$$

$$=\frac{\sin x\cos\frac{x}{2^{k+1}}}{2^k\cdot 2\sin\frac{x}{2^{k+1}}\cos\frac{x}{2^{k+1}}}=\frac{\sin x}{2^{k+1}\sin\frac{x}{2^{k+1}}}$$, что и требовалось доказать.

Задача 5.

Найти уравнение с целыми коэффициентами, корнем которого является число $x = \sqrt[3]{\sqrt{52}+5} - \sqrt[3]{\sqrt{52}-5}$.

Решение.

$x^3 = \left(\sqrt[3]{\sqrt{52}+5} - \sqrt[3]{\sqrt{52}-5}\right)^3$,

$x^3 = \sqrt{52} + 5 - 3\sqrt[3]{\left(\sqrt{52}+5\right)^2} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{52}-5} + 3\sqrt[3]{\left(\sqrt{52}-5\right)^2} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{52}+5} - \sqrt{52} + 5$,

$x^3 = 10 - 3\sqrt[3]{\left(\sqrt{52}-5\right)\cdot\left(\sqrt{52}+5\right)}\left(\sqrt[3]{\sqrt{52}+5} - \sqrt[3]{\sqrt{52}-5}\right)$,

$x^3 = 10 - 3\sqrt[3]{52-25} \cdot x$,

$x^3 = -9x + 10$,

$x^3 + 9x - 10 = 0$.

Задача 6.

В треугольной пирамиде $SABC$ ребра $SA = SB = SC = AB = AC = 2$. Радиус описанного шара равен 2. Найти длину ребра BC.

Решение.

Пусть O – центр описанного шара, M – середина BC. Пирамиды $OBSA,\ OASC$ являются правильными тетраэдрами, так как все их ребра равны 2. Отрезок BC равен сумме длин высот $BM,\ CM$ этих тетраэдров и тогда $BC = \frac{4\sqrt{6}}{3}$.

Ответ: $\frac{4\sqrt{6}}{3}$.