

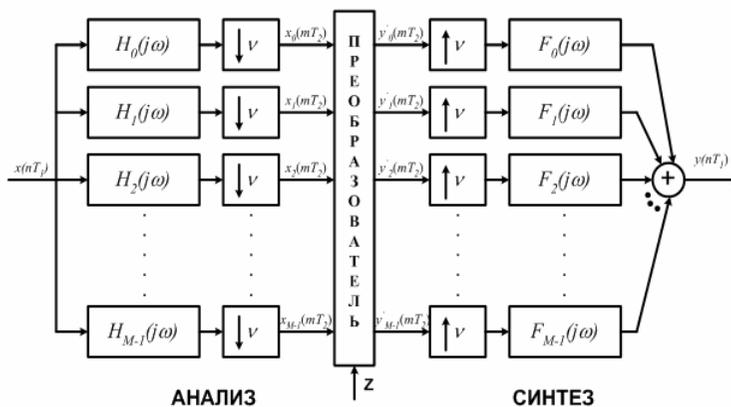
ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

РЯЗАНСКАЯ ГОСУДАРСТВЕННАЯ РАДИОТЕХНИЧЕСКАЯ АКАДЕМИЯ

В.В. ВИТЯЗЕВ, А.А. ЗАЙЦЕВ

ОСНОВЫ МНОГОСКОРОСТНОЙ ОБРАБОТКИ СИГНАЛОВ

Учебное пособие



Рязань 2005

УДК 621.372.542

Основы многоскоростной обработки сигналов: Учеб. пособие. Ч. 1 / В.В. Витязев, А.А. Зайцев; Рязан. гос. радиотехн. акад. Рязань, 2005. 124 с.

Рассмотрены базовые понятия и эволюция теории и техники многоскоростной обработки сигналов. Приводятся классификация и описание методов синтеза цифровых фильтров на основе многоступенчатой децимации и интерполяции преобразуемых сигналов и импульсных характеристик каскадно соединенных гребенчатых фильтров. Даны анализ их потенциальной вычислительной эффективности и методика оптимизации по различным критериям. Описание методики сопровождается примерами расчета.

Предназначено для студентов дневного отделения, обучающихся по специальностям: 210402 – «Средства связи с подвижными объектами» и 220201 – «Управление и информатика в технических системах». Может быть полезно студентам и аспирантам всех радиотехнических и телекоммуникационных специальностей.

Табл. 4. Ил. 55. Библиогр.: 86 назв.

Сигнал, фильтрация, децимация, интерполяция, метод, алгоритм, оптимизация, цифровая, многоскоростная.

Печатается по решению редакционно-издательского совета Рязанской государственной радиотехнической академии.

Рецензент: кафедра телекоммуникаций и основ радиотехники РГРТА (зам. зав. кафедрой, канд. техн. наук С.Л. Соколов)

В и т я з е в Владимир Викторович
З а й ц е в Алексей Анатольевич
Основы многоскоростной обработки сигналов
Редактор М.Е. Цветкова
Корректор С.В. Макушина

Подписано в печать .Формат бумаги 60 x 84 1/16.

Бумага газетная. Печать трафаретная. Усл. печ. л. 7,75.

Уч.-изд. л. 7,75. Тираж 50 экз. Заказ

Рязанская государственная радиотехническая академия.

390005, Рязань, ул. Гагарина, 59/1.

Редакционно-издательский центр РГРТА.

© Рязанская государственная
радиотехническая академия, 2005

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	4
Глава 1 Многоскоростная фильтрация и банки фильтров	5
1.1 Введение в многоскоростную обработку сигналов	5
1.2 Эволюция теории и техники многоскоростной обработки сигналов	16
1.3 Многоскоростная обработка сигналов в радиотехнике и системах телекоммуникаций	24
Глава 2 Цифровые фильтры с многоступенчатой децимацией и интерполяцией сигналов	33
2.1 Основные понятия, связанные с преобразованием частоты дискретизации НЧ сигналов	33
2.2 Основные понятия, связанные с преобразованием частоты дискретизации полосовых сигналов	42
2.3 Методы синтеза узкополосного фильтра на основе децимации и интерполяции цифровых сигналов	49
2.4 Синтез многоступенчатой структуры на основе полуполосных фильтров	66
2.5 Оптимальный синтез многоступенчатых структур	76
2.5.1 Прямая форма построения	76
2.5.2 Параллельная форма построения	85
Глава 3 Цифровые узкополосные фильтры с многоступенчатой децимацией и интерполяцией импульсных характеристик	90
3.1 Цифровые гребенчатые и сглаживающие фильтры	90
3.2 Методы синтеза структуры узкополосного фильтра на основе децимации и интерполяции импульсной характеристики	99
3.3 Оптимальный синтез многоступенчатых структур	106
3.4 Синтез многоступенчатых структур в классе БИХ-цепей	109
3.5 Метод частотной выборки и его модификация	118
Библиографический список	129

ПРЕДИСЛОВИЕ

С появлением во второй половине 60-х годов прошлого столетия работ Кайзера по анализу и синтезу цифровых фильтров и работ Кули и Тьюки о быстрых методах вычисления дискретного преобразования Фурье связывают становление нового научного направления – теории цифровой обработки сигналов (ЦОС). В течение последующих десятилетий были поставлены и успешно решены многие проблемы теории ЦОС, и, в первую очередь, проблемы анализа, синтеза и схемотехнического проектирования цифровых фильтров частотной селекции.

Поистине фантастические успехи в области микроэлектроники, в частности появление микропроцессоров и цифровых сигнальных процессоров, способствовали дальнейшему развитию и широкому практическому использованию методов ЦОС. Методы и техника обработки цифровых сигналов в настоящее время занимают ведущие позиции при разработке контрольно-измерительной и радиоэлектронной аппаратуры, в том числе бытового назначения, радио- и гидролокационных систем, систем связи и управления.

Одной из актуальных проблем ЦОС, имеющей широкое прикладное значение, является поиск эффективных методов построения цифровых полосовых фильтров и их наборов — систем частотной селекции сигналов. Достаточно назвать такие области применения фильтров частотной селекции, как панорамные радиоприемники и анализаторы спектра, полосные вокодеры и системы скрытой связи, трансмультиплексоры и корректоры каналов, чтобы показать ту значимость, которую они приобретают в современных радиотехнических системах и системах связи.

Фундаментальной идеей в области построения систем частотной селекции сигналов, давшей широкий спектр методов и инженерных решений, является идея многоскоростной обработки на основе вторичной дискретизации («децимации») и цифровой интерполяции. Эта идея была впервые предложена М. Белланже и получила дальнейшее развитие в работах других авторов [1-3]. В последние годы в области применения многоскоростной обработки сигналов и банков фильтров систем частотной селекции достигнуты значительные успехи [4-7]. Многоскоростная фильтрация, предполагающая возможность изменения частоты дискретизации цифровых сигналов в процессе их преобразования, является эффективным инструментом уменьшения требуемых вычислительных ресурсов и емкости памяти данных, используемых для реализации микропроцессорных систем. Банки цифровых фильтров-дециматоров лежат в основе алгоритмов сжатия и кодирова-

ния аудиосигналов и видеоизображений стандартов MPEG-1, MPEG-2, MPEG-4 и др.

Учебное пособие состоит из двух частей. В первой части настоящего пособия рассматриваются базовые понятия и эволюция теории и техники многоскоростной обработки сигналов. Приводится классификация и описание методов синтеза цифровых фильтров с многоступенчатой децимацией и интерполяцией. Дается анализ их потенциальной вычислительной эффективности при использовании предложенной методики оптимизации по различным критериям.

Глава 1 Многоскоростная фильтрация и банки фильтров

1.1 Введение в многоскоростную обработку сигналов

Многоскоростная обработка сигналов (multirate processing) предполагает, что в процессе линейного преобразования цифровых сигналов возможно изменение частоты дискретизации в сторону уменьшения или увеличения. Это приводит к более эффективной обработке сигналов, так как открывается возможность использования минимально допустимых частот дискретизации и, как следствие, значительного уменьшения требуемой вычислительной производительности проектируемой цифровой системы.

В последние годы в области многоскоростной обработки сигналов достигнуты громадные успехи. Многоскоростная фильтрация и особенности ее применения стали предметом исследований многочисленных научных работ по ЦОС. Появились десятки монографий и учебных пособий, так или иначе связанных с научными и практическими достижениями в этой области [1 – 7].

Основными составными элементами системы многоскоростной ЦОС являются компрессоры и экспандеры частоты дискретизации, понижающие и соответственно повышающие частоту дискретизации преобразуемых цифровых последовательностей. При этом, если понижение частоты дискретизации в ν раз (ν – целое число) с помощью компрессора сводится к тому, что в выходном сигнале сохраняются только отсчеты с номерами, кратными ν , то повышение частоты дискретизации в ν раз с помощью экспандера предполагает размещение $(\nu - 1)$ нулей между каждой парой соседних отсчетов входного сигнала. Поскольку простая компрессия цифровых последовательностей приводит к наложению периодических составляющих спектра «прореженного» сигнала вследствие эффекта отражения, а размещение нулей эквивалентно сжатию в ν раз и периодическому продолжению спектра входного сигнала (в значениях новой приведенной частоты $\omega = 2\pi fT/\nu$, где f – частота в Гц, T – период дискретизации входного сигнала), то в том и другом случаях понижение и соответственно повышение частоты дискретизации требуют подключения низкочастотного фильтра (НЧФ), идеальная функция передачи которого принимает вид

$$H(j\omega) = \begin{cases} 1, & \text{при } |\omega| \leq \frac{\pi}{\nu} \\ 0, & \text{при остальных } \omega. \end{cases} \quad (1.1)$$

Пусть входной $x(nT)$ и выходной $y(nT)$ сигналы цифрового НЧФ связаны друг с другом линейной сверткой вида

$$y(nT) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[(n-k)T]h(kT), \quad (1.2)$$

где $h(nT)$ - импульсная характеристика фильтра полностью определяется его функцией передачи $H(j\omega)$,

$$h(nT) = \frac{1}{2\pi j} \int_{-\pi}^{\pi} H(j\omega) e^{jn\omega} d\omega.$$

В линейном преобразовании (1.2) участвуют три временные последовательности: $x(nT)$, $y(nT)$, и $h(nT)$. К каждой из этих последовательностей можно применить процедуру понижения или повышения частоты дискретизации с использованием введенных выше составных элементов системы многоскоростной ЦОС.

В зависимости от схемы подключения компрессора и экспандера частоты дискретизации возможны следующие структурные реализации двухскоростной одноканальной системы ЦОС.

1. **Фильтр-дециматор**: компрессор частоты дискретизации подключен на выходе НЧФ (рис. 1.1).

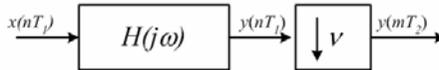


Рис. 1.1 Структурная схема фильтра-дециматора

Выходной сигнал фильтра-дециматора

$$y(mT_2) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[(m\nu - k)T_1]h(kT_1) \quad (1.3)$$

сохраняет только каждый ν -й отсчет. Следовательно, для класса фильтров с конечной импульсной характеристикой (КИХ-фильтров), когда пределы суммирования (1.3) принимают конечные значения, потенциально возможно уменьшение приведенных вычислительных затрат в ν раз.

2. **Фильтр-интерполятор**: экспандер частоты дискретизации подключен на входе НЧФ (рис. 1.2).

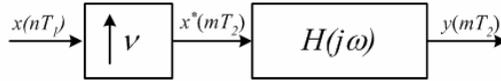


Рис. 1.2 Структурная схема фильтра-интерполятора

Выходной сигнал фильтра-интерполятора

$$y(mT_2) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x^*[(m-k)T_2]h(kT_2), \quad (1.4)$$

где

$$x^*(mT_2) = \begin{cases} x(nT_1), & \text{при } m = vn; \\ 0, & \text{при } m \neq vn, \end{cases}$$

использует «прореженную» в v раз входную последовательность $x^*(mT_2)$. Следовательно, вычислительные затраты и память КИХ-фильтра потенциально уменьшаются в v раз.

3. **Одноступенчатый узкополосный фильтр на основе децимации и интерполяции выходного сигнала**: последовательно использует понижение и повышение частоты дискретизации (рис. 1.3).

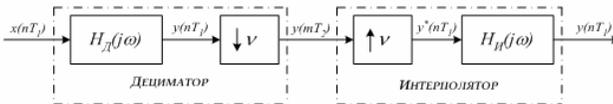


Рис. 1.3 Структурная схема узкополосного фильтра на основе децимации и интерполяции выходного сигнала

Фильтр-дециматор с функцией передачи $H_D(j\omega)$, полностью определяемой требуемыми свойствами частотной избирательности проектируемого узкополосного фильтра, реализует основную функцию – выделение низкочастотных составляющих, попадающих в полосу пропускания фильтра. В отличие от обычного узкополосного фильтра дециматор вычисляет только каждый v -й отсчет. Поэтому к выходу дециматора подключается фильтр-интерполятор с функцией передачи $H_I(j\omega)$, близкой по своим свойствам частотной избирательности

функции передачи проектируемого фильтра. Интерполятор восстанавливает исходную частоту дискретизации выходного сигнала $y(nT_1)$, обеспечивая тем самым полную эквивалентность (для идеальных дециматора и интерполятора) узкополосному фильтру, реализуемому по обычной структуре.

Нетрудно видеть, что переход к структуре фильтра, представленной на рис. 1.3 (для класса КИХ-цепей), позволяет уменьшить вычислительные затраты в $\nu/2$ раз. При этом, чем уже полоса пропускания проектируемого фильтра, тем большее значение может принимать коэффициент децимации (интерполяции) ν и, следовательно, тем больший выигрыш в минимизации вычислительных затрат дает рассмотренное представление одноступенчатой структуры.

Вместе с тем введение фильтра-интерполятора требует некоторого увеличения памяти данных. Но главное – вследствие неидеальности частотных характеристик дециматора и интерполятора имеют место собственные шумы, обусловленные эффектом отражения при понижении частоты дискретизации и ошибками интерполяции при повышении частоты дискретизации. Поэтому представляет интерес альтернативный подход, в основе которого лежит идея децимации и интерполяции импульсной характеристики узкополосного фильтра $h(nT_1)$.

4. Цифровой гребенчатый фильтр: компрессор и экспансер частоты дискретизации применяются к импульсной характеристике узкополосного фильтра (рис.1.4).

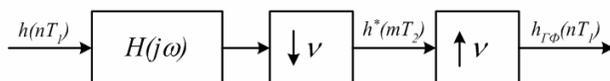


Рис. 1.4 Структурная схема цифрового гребенчатого фильтра

Входной НЧФ с идеальной функцией передачи (1.1) служит для устранения наложений при последующей децимации (компрессии) исходной импульсной характеристики $h(nT_1)$. Экспансер, подключенный к выходу рассматриваемой схемы, размещает по $(\nu - 1)$ нулей между каждой парой соседних отсчетов прореженной импульсной характеристики $h^*(mT_2)$, повышая тем самым частоту ее дискретизации до исходной.

Таким образом,

$$h_{ГФ}(nT_1) = \begin{cases} h^*(mT_2) = h^*(n\nu T_1), & \text{при } n = \nu m; \\ 0, & \text{при } n \neq \nu m \end{cases}$$

и функция передачи

$$H_{ГФ}(j\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_{ГФ}(nT_1)e^{-j\omega n}$$

полученного фильтра принимает в диапазоне рабочих частот $-\pi \leq \omega \leq \pi$ гребенчатый характер, так как является периодическим продолжением с периодом $2\pi/\nu$ выделенного участка передаточной функции исходного фильтра с импульсной характеристикой $h(nT_1)$,

расположенного в диапазоне частот $|\omega| \leq \frac{\pi}{\nu}$. Отметим, что цифровой

гребенчатый фильтр, имеющий прореженную в ν раз импульсную характеристику, соответственно требует в ν раз меньший объем вычислительных затрат при реализации линейной свертки (1.2) в классе КИХ-цепей.

5. Одноступенчатый узкополосный фильтр на основе децимации и интерполяции импульсной характеристики: последовательно исползует понижение и повышение частоты дискретизации импульсной характеристики фильтра (рис. 1.5).

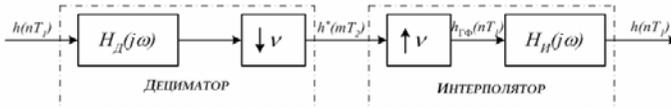


Рис. 1.5 Структурная схема одноступенчатой реализации узкополосного фильтра на основе децимации и интерполяции его импульсной характеристики

Фильтр-дециматор с функцией передачи $H_D(j\omega)$ выделяет участок рабочих частот в диапазоне $|\omega| \leq \frac{\pi}{\nu}$, который далее периодически про-

должается с периодом $2\pi/\nu$ на выходе экспандера частоты дискретизации импульсной характеристики, формируя тем самым функцию передачи цифрового гребенчатого фильтра $H_{ГФ}(j\omega)$. Выходной фильтр-интерполятор с функцией передачи $H_I(j\omega)$ сглаживает («срезает») все $(\nu-1)$ боковые спектральные составляющие функции передачи

гребенчатого фильтра, оставляя только низкочастотную составляющую, и тем самым восстанавливает импульсную характеристику $h(nT_1)$ исходного фильтра.

Таким образом, общая структура узкополосного фильтра принимает следующий вид (рис. 1.6).

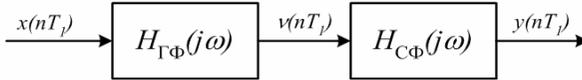


Рис. 1.6 Структурная схема узкополосного фильтра на основе каскадного соединения гребенчатого и сглаживающего фильтров

Входной гребенчатый фильтр с функцией передачи $H_{ГФ}(j\omega)$ фактически формирует заданную прямоугольность АЧХ и свойства частотной избирательности проектируемого фильтра в полосе его пропускания, но одновременно выделяет $(\nu - 1)$ частотных полос спектра входного сигнала $x(nT_1)$, равномерно расположенных в диапазоне рабочих частот $-\pi \leq \omega \leq \pi$ с периодом $2\pi/\nu$. С целью селекции боковых спектральных составляющих сигнала $V(nT_1)$ на выходе гребенчатого фильтра используется сглаживающий фильтр с функцией передачи $H_{СФ}(j\omega)$, интерполирующий импульсную характеристику входного гребенчатого фильтра. Заметим, что возможно изменение последовательности включения фильтров. Но в том и другом случае общие вычислительные затраты существенно уменьшаются по отношению к прямой форме реализации узкополосного КИХ-фильтра: входной гребенчатый фильтр имеет «прореженную» в ν раз импульсную характеристику, а выходной сглаживающий фильтр является относительно широкополосным с плавно спадающей АЧХ в переходной зоне и, следовательно, имеющим сравнительно невысокий порядок.

Ранее были рассмотрены типовые схемы подключения компрессоров и экспандеров частоты дискретизации для систем многоскоростной ЦОС, использующих одноступенчатую реализацию. Показано, что в рамках представленных структурных схем, реализуемых в классе КИХ-цепей, достигается значительное уменьшение общих вычислительных затрат. Как будет показано в последующих главах, системы многоскоростной обработки имеют значительное преимущество и при реализации в классе цепей с бесконечной импульсной характеристикой (БИХ-цепей), но уже с позиции минимизации уровня собственных шумов и

чувствительности характеристик фильтров к неточному представлению коэффициентов. Кроме того, переход от одной к многоступенчатой реализации систем ЦОС данного класса дает возможность дальнейшего повышения их эффективности.

Представленное краткое введение в многоскоростную обработку сигналов считалось бы неполным, если бы ничего не было сказано о применении децимации и интерполяции для построения банков фильтров и систем цифровой частотной селекции сигналов [2, 3]. Конечно, дальнейшее развитие и применение многоскоростной ЦОС было связано с синтезом и эффективной реализацией многокомпонентных систем обработки сигналов, имеющих множество входов и выходов.

На рис. 1.7 представлена общая структура M -компонентной системы анализа-синтеза сигналов на базе банка из M цифровых полосовых фильтров с использованием децимации и интерполяции преобразуемых сигналов.

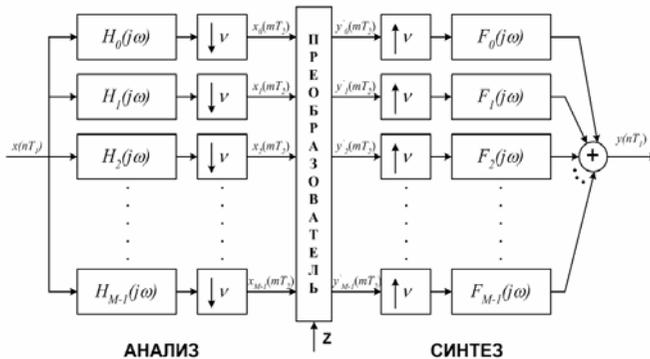


Рис. 1.7 M -компонентная система анализа-синтеза сигналов

В состав системы входят: M полосовых фильтров $H_i, i = \overline{0, M-1}$, анализатора входного процесса $x(nT_1)$; преобразователь канальных сигналов $x_i(mT_2), i = \overline{0, M-1}$ и M полосовых фильтров $F_j, j = \overline{0, M-1}$, синтезатора выходного процесса $y(nT)$. Преобразователь канальных сигналов, в зависимости от конкретной цели Z применения системы, может выделять и подавлять отдельные компоненты $x_i(mT_2), i = \overline{0, M-1}$, входного процесса $x(nT_1)$, понижать и повышать их частоту дискретизации, производить адаптивную обработку по каждому из каналов, оценивать параметры компонент с целью распознава-

ния или сжатия информации о процессе $x(nT_1)$, «перемешивать» каналы и переставлять сегменты компонент для его шифрации и выполнять другие операции по всей совокупности частотных компонент.

В большинстве рассмотренных случаев полосовые фильтры $H_i, i = \overline{0, M-1}$, строятся, как фильтры-дециматоры, понижающие в ν раз частоту дискретизации канальных сигналов $x_i(mT_2), i = \overline{0, M-1}$, а полосовые фильтры $F_j, j = \overline{0, M-1}$, - как фильтры-интерполяторы, повышающие в ν частоту дискретизации преобразованных компонент. Применение двухступенчатой обработки позволяет не только снизить в ν раз требования по скорости ввода и преобразования каждой из компонент $x_i(mT_2), i = \overline{0, M-1}$, но и значительно уменьшить порядок последующих операторов преобразования. Решение сложной многопараметрической задачи обобщенной фильтрации входного процесса $x(nT_1)$ сводится к решению M относительно простых задач преобразования отдельных компонент $x_i(mT_2), i = \overline{0, M-1}$, и межканальной обработке.

Дополнительный выигрыш может дать переход к трехступенчатой обработке, предполагающей, что на этапе канальных преобразований отдельных компонент $x_i(mT_2), i = \overline{0, M-1}$ будет использована отдельная подсистема анализа-синтеза сигналов с промежуточным понижением частоты дискретизации. Этот процесс многоступенчатого понижения и повышения частоты дискретизации внутри каждого отдельного канала может быть продолжен по аналогичной схеме [2].

Представленная выше структура многоскоростной системы анализа-синтеза сигналов обеспечивает:

- предварительный анализ сигнала путем разделения по отдельным частотным каналам;
- понижение частоты дискретизации и пропорциональное уменьшение требований к скорости обработки по каждому из каналов;
- режекцию узкополосных помех и «мешающих» компонент;
- уменьшение избыточности обработки за счет исключения из последующего преобразования неинформативных каналов;
- уменьшение влияния собственных шумов и неточного представления коэффициентов операторов преобразования;
- возможность простой и эффективной многопроцессорной реализации.

Представленная на рис. 1.7. общая структура M -компонентной системы анализа-синтеза сигналов использует децимацию и интерполяцию преобразуемых сигналов и относится к классу систем частотной селекции с прореживанием по времени [1 – 3]. Как следует из [2], имеет место альтернативный подход к построению системы анализа-синтеза сигналов, использующий децимацию и интерполяцию импульсных характеристик набора полосовых фильтров. Подобный класс систем частотной селекции был назван классом систем с прореживанием по частоте, так как в основе синтеза их структуры лежит одно- или многоступенчатое соединение параллельного набора цифровых гребенчатых фильтров.

На рис.1.8 представлен вариант построения одноступенчатой структуры набора (банка) из M полосовых фильтров. Предполагается, что число частотных каналов $M = M_1 M_2$, где M_1 – число гребенчатых фильтров одноступенчатого частотного преобразования, выполняющего «прореживание» спектра входного сигнала $x(nT)$; M_2 – число сглаживающих фильтров, разделяющих M_2 спектральных составляющих на выходе каждого из M_1 гребенчатых фильтров. В результате на этапе анализа формируются M частотных компонент $y_i(nT), i = \overline{0, M-1}$ входного сигнала $x(nT)$, каждая из которых соответствует выходу i -го полосового фильтра для своей полосы частот. Поэтому процедура синтеза выходного сигнала $y(nT)$ по анализу частотных компонент $y_i(nT), i = \overline{0, M-1}$ сводится к простому суммированию тех компонент, которые отвечают заданным требованиям «информативности» Z .

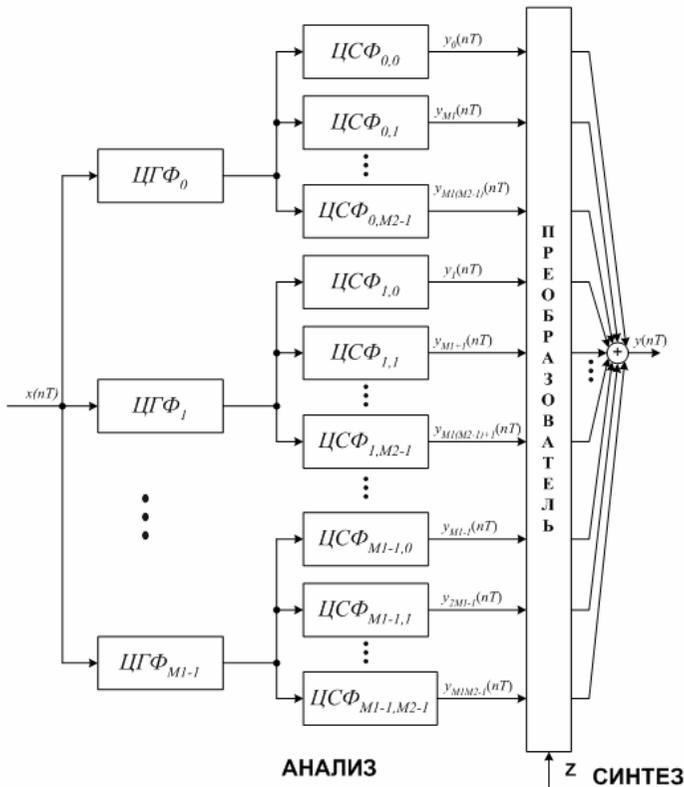


Рис. 1.8 Структурная схема анализа-синтеза сигналов на основе эффекта прореживания по частоте

Таким образом, в отличие от структуры системы анализа-синтеза с прореживанием по времени, формирующей набор из M фильтров-демодуляторов (модуляторов) с понижением и последующим повышением частоты дискретизации, представленная на рис. 1.8 система анализа-синтеза сигналов с прореживанием по частоте эффективно формирует набор из M полосовых фильтров, не используя децимацию преобразуемых сигналов. Следовательно, в системе отсутствуют «шумы» децимации и интерполяции, а вычислительная эффективность остается очень высокой, в отдельных случаях соизмеримой с вычислительной эффективностью системы анализа-синтеза сигналов, представленной на рис. 1.7. Одной из причин дополнительного повышения вычислительной эффективности использования процедуры предвари-

тельного прореживания по частоте (рис. 1.8) является тот факт, что один и тот же гребенчатый фильтр (ЦГФ_{*i*}, $i = 0, M_i - 1$) «обслуживает» одновременно M_2 частотных полос. А значит, приведенные на один канал затраты на его реализацию уменьшаются в M_2 раз.

Идея включения в общую схему обработки цифровых сигналов компрессоров и экспандеров частоты дискретизации в условиях неидеальности характеристик фильтров частотной селекции поставила ряд вопросов. Прежде всего предстояло ответить на вопросы: к каким погрешностям приводят наложения при децимации и возможен ли взаимный синтез набора фильтров-дециматоров и фильтров-интерполяторов такой, что при «полной децимации» (когда коэффициент децимации ν равен числу частотных каналов M) и последующей интерполяции можно было бы восстановить сигнал с любой наперед заданной точностью (т.е. выполнить «полное восстановление»)? Второй круг вопросов касался поиска эффективных структур систем многоскоростной обработки сигналов, позволяющих не только существенно уменьшить вычислительные затраты, объем памяти данных, собственные шумы, но и раскрыть новые возможности их применения. Стал очевидным переход от частотной к частотно-временной обработке с использованием пирамидальных многоступенчатых структур [2]. Обнаружилась прямая связь такого подхода к синтезу банка фильтров с вейвлет-преобразованием [8 – 11]. На все эти вопросы предстояло ответить в ближайшие годы.

1.2 Эволюция теории и техники многоскоростной обработки сигналов

Как показывает анализ работ, опубликованных по проблемам многоскоростной обработки сигналов в период с начала 70-х годов прошлого столетия и по настоящее время, в развитии данного направления исследований можно условно выделить три этапа. На первом этапе (1975 – 1985 гг.) были заложены теоретические основы многоскоростной фильтрации и обработки сигналов с применением децимации и интерполяции, эффектов прореживания по времени и по частоте [1, 2]. На втором этапе (1985 – 1995 гг.) получила развитие теория компенсации наложений и полного восстановления при синтезе банка фильтров с полной децимацией [3]. Была установлена связь с вейвлет-преобразованием [8 – 11]. Третий этап (1995 – 2005 гг.) – это этап широкого практического внедрения методов многоскоростной обработки

сигналов и дальнейшего их развития и систематизации [6,7]. Важную роль на этом этапе играет создание эффективных инструментальных средств автоматизированного проектирования систем многоскоростной ЦОС, реализуемых на базе цифровых сигнальных процессорах (ЦСП) и программируемых логических интегральных схемах (ПЛИС).

Этап 1. Основы многоскоростной обработки сигналов

Исторически первыми работами по многоскоростной обработке сигналов являются исследования американских ученых Р. Шафера, Л. Рабинера [12], Г. Оуткина, Т. Паркса [13] по применению линейных цифровых фильтров к интерполяции сигналов. В то время как полиномиальная интерполяция недостающих данных оставалась классической проблемой численного анализа, новый подход вызвал повышенный интерес у специалистов в области ЦОС. Однако точкой отсчета следует считать 1974 год, когда появилась статья французских ученых М. Белланже, Ж. Догета, Г. Лепанола «Интерполяция, экстраполяция и уменьшение скорости вычислений в цифровых фильтрах» [14]. Год спустя выходит серия работ американских специалистов Л. Рабинера, Р. Крошье [15, 16], Р. Шивели [17], в которых рассматривается оптимизация многоскоростных структур узкополосных КИХ-фильтров по критерию минимизации общего числа умножений и ячеек памяти данных. Дальнейшие исследования этих авторов были продолжены в работах [18, 19]. В [20] впервые была предложена полифазная форма фильтра-дециматора и фильтра-интерполятора, позволяющая эффективно использовать простые математические модели односкоростных систем обработки сигналов для описания и программной реализации многоскоростных систем.

Начиная с 1975 года, проводятся активные исследования по многоскоростной фильтрации и в СССР [21 – 35]. В работе [21] была представлена одноступенчатая структура узкополосного низкочастотного фильтра с применением вторичной дискретизации и последующей интерполяции, в которой фильтр-дециматор впервые был построен по параллельной форме. Это позволило для используемых приложений уменьшить в десятки раз не только объем вычислений, но и число регистров памяти данных. С тем чтобы расширить рассмотренный подход на более общий случай – синтез узкополосных фильтров с произвольной центральной частотой полосы пропускания и высокой прямоугольностью АЧХ, в [22] была предложена двухступенчатая реализация с использованием дополнительного формирующего фильтра. В последующие 10 лет идея многоскоростной обработки получила свое развитие применительно к построению набора цифровых полосовых фильтров на основе эффектов прореживания по времени [23 – 28] и по

частоте [29 – 35]. Систематизированное изложение этих методов можно найти в монографии [2].

Одним из ярких событий в теории и применении многоскоростной обработки в эти годы было введение двухканального банка квадратурно-зеркальных фильтров (КЗФ) для компрессии речевого сигнала [36, 37]. В соответствии с данным методом сигнал раскладывается на низкочастотную и высокочастотную субполосные составляющие с использованием банка фильтров анализа. Каждый субполосный сигнал децимируется с понижением частоты дискретизации в два раза и кодируется (квантуется). Проквантованные субполосные сигналы могут быть рекомбинированы с использованием банка фильтров синтеза для восстановления исходного сигнала. При этом возникает ошибка восстановления, которая обусловлена частично компрессией (субполосным квантованием) и частично погрешностями, возникающими на этапе реализации фильтров анализа и синтеза.

Ключевым источником ошибки восстановления являются наложения спектра цифрового сигнала при его децимации, поскольку фильтры анализа являются неидеальными в зоне их непрозрачности. Это требует принятия каких-то решений по компенсации наложений. Другим источником ошибки являются амплитудно-фазовые искажения, вносимые банком фильтров. Всё это предполагает, что банк фильтров полного восстановления должен обладать свойствами, которые устраняют все виды искажений. Поэтому дальнейшие усилия ученых и специалистов по многоскоростной обработке сигналов были направлены на разработку теории компенсации наложений и полного восстановления [38 – 40].

Этап 2. Банки фильтров с полным и квазиполным восстановлением

Задача синтеза систем полного восстановления была прежде всего решена для двухканального банка КЗФ с использованием полифазного представления структуры фильтров и условий параунитарности полифазной матрицы без потерь [41]. Рассмотрим двухканальную систему анализа-синтеза с максимальной децимацией, представленную на рис. 1.9. Передаточные функции $H_0(z)$ и $H_1(z)$ описывают фильтры анализа соответственно нижних и верхних частот. Вследствие неидеальности их частотных характеристик при последующей децимации происходит наложение. Поэтому фильтры синтеза $F_0(z)$ и $F_1(z)$ следует выбирать таким образом, чтобы эти наложения были полностью скомпенсированы.

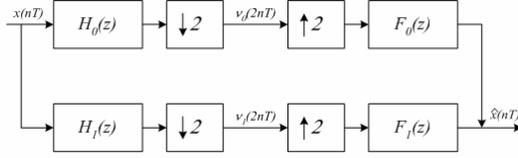


Рис. 1.9 Двухканальная система анализа-синтеза с максимальной децимацией

Пусть фильтры анализа при полифазном представлении описываются выражениями вида

$$H_k(z) = E_{k0}(z^2) + z^{-1}E_{k1}(z^2), \quad k = 0, 1.$$

Аналогично, для фильтров синтеза

$$F_k(z) = z^{-1}R_{0k}(z^2) + R_{1k}(z^2), \quad k = 0, 1.$$

Эти уравнения можно компактно объединить в матричную форму:

$$\begin{bmatrix} H_0(z) \\ H_1(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{00}(z^2) & E_{01}(z^2) \\ E_{10}(z^2) & E_{11}(z^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ z^{-1} \end{bmatrix}, \quad (1.5)$$

$$\begin{bmatrix} F_0(z) & F_1(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z^{-1} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_{00}(z^2) & R_{01}(z^2) \\ R_{10}(z^2) & R_{11}(z^2) \end{bmatrix}. \quad (1.6)$$

С учетом (1.5) и (1.6) структура двухканальной системы принимает вид, представленный на рис 1.10, где $\bar{\mathbf{P}}(z) = \bar{\mathbf{R}}(z)\bar{\mathbf{E}}(z)$.

Отсюда ясно, что если

$$\bar{\mathbf{R}}(z) = \bar{\mathbf{E}}^{-1}(z), \quad (1.7)$$

то двухканальная система на основе блока КЗФ с максимальной децимацией обеспечивает полное восстановление: $\hat{x}(nT) = x(nT)$.

Условие (1.7) является предельно жестким, не допускающим задержки и изменения амплитуды восстанавливаемого сигнала. Если это ограничение снять, то полное восстановление формы сигнала гарантируется при условии, что

$$\bar{\mathbf{R}}(z) = cz^{-k}\bar{\mathbf{E}}^{-1}(z), \quad (1.8)$$

где c и k – константы, отражающие изменение амплитуды и задержку сигнала. Наличие задержки z^{-k} обеспечивает каузальность блока синтеза.

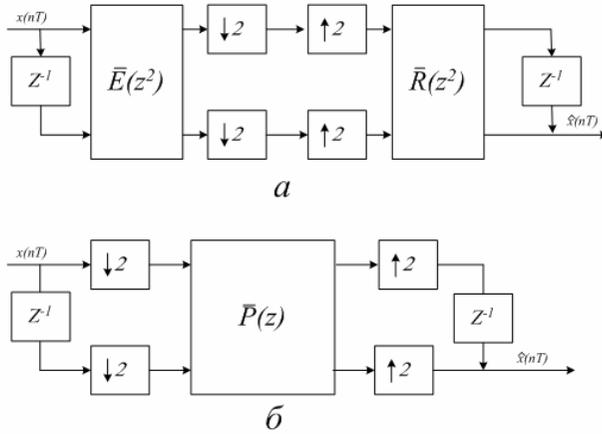


Рис. 1.10 Полифазные матричные формы представления двухканальной системы анализа-синтеза с максимальной децимацией

Отметим, что согласно (1.8), при синтезе фильтров анализа $H_k(z)$ и соответственно $\mathbf{E}(z)$ в классе КИХ-цепей фильтры синтеза $F_k(z)$ и соответственно $\mathbf{R}(z)$ являются БИХ-цепями. Для получения системы с полным восстановлением на одних лишь КИХ-фильтрах необходимо решить более трудную задачу. Надо исходить из принципа, что $\det \mathbf{E}(z)$ должен соответствовать задержке [41]. Как показано в [40, 42] подклассом КИХ-матриц, для которых определитель представляет собой задержку, является семейство матриц без потерь. Следует, однако, помнить, что отсутствие потерь матрицы $\mathbf{E}(z)$ не является необходимым условием полного восстановления [43, 44].

Передаточную матрицу $\mathbf{E}(z)$ дискретной системы с несколькими входами и выходами называют матрицей без потерь, если выходной сигнал системы будет иметь ту же энергию, что и входной сигнал. Это требование выполняется, если система устойчива (т.е. полюсы всех её элементов расположены внутри единичного круга) и удовлетворяет уравнению

$$\widetilde{\mathbf{E}}(z)\overline{\mathbf{E}}(z) = c\mathbf{I} \quad \text{для всех } z. \quad (1.9)$$

Здесь: $c \neq 0$, \mathbf{I} – единичная матрица, $\widetilde{\mathbf{E}}(z) = \overline{\mathbf{E}}_*(z^{-1})$, (звездочка * означает замену всех констант матрицы на комплексно-сопряженные).

Из (1.9) следует, что если $\mathbf{E}(z)$ – матрица без потерь, то обратная матрица

$$\bar{\mathbf{E}}^{-1}(z) = \tilde{\mathbf{E}}(z)/c. \quad (1.10)$$

Таким образом, существование обратной матрицы не только гарантируется, но она просто находится в форме записи (1.10).

Следовательно, (1.8) принимает вид

$$\bar{\mathbf{R}}(z) = z^{-k} \tilde{\mathbf{E}}(z), \quad (1.11)$$

и тем самым обеспечивается полное восстановление при синтезе фильтров в классе КИХ-цепей.

С целью выработки систематической процедуры расчета двухканального банка КЗФ на основе полифазной матрицы без потерь $\mathbf{E}(z)$ в [45] приводится описание всего семейства матриц данного класса. В частности, показано, что если функция $H_0(z)$ известна, то остальные передаточные функции $H_1(z)$, $F_0(z)$ и $F_1(z)$ полностью определяются. Остается рассчитать параметры фильтра анализа $H_0(z)$ таким образом, чтобы минимизировать энергию в полосе непропускания. При этом характеристика $H_0(z)$ в полосе пропускания оказывается автоматически воспроизводимой с высокой точностью, благодаря свойству полуполосности произведения $\tilde{H}_0(z)H_0(z)$. В [45] приводится методика расчета двухканального банка КЗФ в классе КИХ-цепей на основе эффективной решетчатой структуры, обеспечивающей полное восстановление даже при условии квантования коэффициентов.

В последующих исследованиях [41] был выработан более общий подход к синтезу банка фильтров с максимальной децимацией и полным восстановлением, расширенный на M -полосные системы анализа-синтеза (рис 1.7).

В случае равномерного разбиения исходного сигнала $x(nT)$ на субполосные составляющие ($v_i = M$ для всех $i = \overline{1, M}$) Z -образ восстановленного сигнала принимает вид

$$\hat{X}(z) = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} \sum_{l=0}^{M-1} F_k(z) H_k(zW^l) X(zW^l). \quad (1.12)$$

Из (1.12) видно, что наряду с исходным сигналом восстановленный сигнал содержит $(M-1)$ составляющих наложения $X(zW^l)$, $l > 0$. Поэтому главная задача на этапе синтеза – компенсация $(M-1)$ - кратных наложений.

Условие компенсации наложений в матричной форме принимает вид [41]

$$\begin{bmatrix} H_0(z) & H_1(z) & \cdots & H_{M-1}(z) \\ H_0(zW) & H_1(zW) & \cdots & H_{M-1}(zW) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ H_0(zW^{M-1}) & H_1(zW^{M-1}) & \cdots & H_{M-1}(zW^{M-1}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_0(z) \\ F_1(z) \\ \vdots \\ F_{M-1}(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} MT(z) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (1.13)$$

Если матрица компонент наложений $[H_k(zW^l)]$ допускает обращение, то теоретически можно найти фильтры синтеза $F_k(z)$, $k = \overline{0, M-1}$, компенсирующие наложения полностью. Однако при этом обратная матрица при обращении матрицы компонент может соответствовать БИХ-фильтрам и, как следствие, система становится неустойчивой или потребует использования фильтров очень высоких порядков [41]. По этим причинам обращение матрицы компонент наложения не приемлемо, и гораздо более удачным является подход, опирающийся, как и для двухканального КЗФ, на полифазное представление фильтров анализа-синтеза, рассматриваемое в классе параунитарных матриц без потерь [42, 46, 47].

Во многих приложениях построение системы анализа-синтеза с теоретически полным восстановлением является необязательным. Достаточно синтезировать сигнал с наперед заданной точностью. Для построения банка фильтров с «квазиполным» восстановлением разными авторами предложено большое количество разнообразных методик. Многие из них имеют эвристический характер и предназначены для расчета ограниченного класса банка фильтров [48]. Другие подходы, претендующие на общность, можно разделить на класс банков фильтров, получаемых при помощи так называемой « H_∞ -оптимизации» [49, 50], и на класс банков фильтров на основе косинусной модуляции фильтра-прототипа [51 – 57].

Особый класс банков фильтров, играющих для ряда приложений решающую роль, представляют банки фильтров с неравномерным разбиением по частоте [58 – 63]. Простым и надежным способом для их построения, с учетом требований полного восстановления, является использование древовидных структур на базе двух- и трехканальных КЗФ. Однако данный подход приемлем только для целочисленных значений коэффициентов децимации (интерполяции). Основы теории синтеза банка фильтров с рациональными коэффициентами децимации рассматриваются в [59, 60].

Многоскоростные банки фильтров, как показали параллельные исследования [8 – 11], очень тесно связаны с вейвлет-преобразованием. Вейвлет-преобразование выполняет декомпозицию сигнала по базис-

ным функциям с различным «весом» последних в различных частотно-временных участках. Каждая базисная функция является версией расширения и сдвига так называемой «материнской» (порождающей) вейвлет-функции. Вейвлеты – это очень полезное представление сигналов с переменными характеристиками.

Вейвлет-преобразование было изначально развито для аналоговых сигналов. Одним из наиболее важных достижений за прошедшее десятилетие является прежде всего установление математической зависимости между непрерывными по времени вейвлетами и банком дискретных фильтров, а также их связи с представлением сигналов, предполагающим множественное разрешение по частоте. Например, ортонормальное вейвлет-представление с базисными функциями конечной длительности относится к древовидному соединению двухканального ортонормального банка фильтров. Синтезируя один из фильтров анализа в двухканальном модуле таким образом, чтобы он имел достаточное число нулей в области высоких частот, можно добиться вейвлет-базиса, наиболее близкого к желаемому.

Этап 3. Оптимальное проектирование систем анализа-синтеза на сигнальных процессорах

В конце 90-х годов прошлого столетия и начале нового века продолжают дальнейшие интенсивные исследования и систематизация знаний в области общей теории многоскоростной обработки сигналов и синтеза банка фильтров [64]. Теория многоскоростного банка фильтров вызвала целое семейство теорем дискретизации, дополняющих классическую теорему Котельникова-Найквиста [65]. Вместе с тем основной акцент в эти годы смещается в сторону прикладных разработок, прежде всего применительно к системам телекоммуникаций и компрессии аудио- и видеосигналов [66, 67]. Решающую роль играет разработка методики, алгоритмов и программ моделирования и оптимального автоматизированного проектирования систем анализа-синтеза сигналов на основе банка фильтров и адаптивной обработки [68 – 70].

В основе дальнейшего развития субполосного кодирования, эффективной реализации эхо-компенсаторов и эквалайзеров лежит идея многоскоростной адаптивной фильтрации [71 – 73]. Суть идеи заключается в предварительном частотно-временном «расщеплении» входного сигнала с помощью банка фильтров и последующей адаптивной обработки каждой субполосной составляющей по заданному алгоритму. При необходимости на этапе синтеза выполняется дуальная процедура восстановления выходного сигнала, предварительно сжатого или «очищенного» от помех, шумов и искажений.

При проектировании систем адаптивной многоскоростной обработки сигналов встает целый комплекс проблем, связанных с поиском наиболее эффективных надежно работающих структур и оптимизацией параметров системы. Каким образом реализовать совместную адаптацию в субполосных каналах? Как будут влиять наложения при использовании децимации? Сколько субполосных каналов и с какими характеристиками обеспечат наивысшую производительность и качество работы всей системы адаптивной многоскоростной обработки сигналов? Все это и является предметом исследований в данной области на современном этапе.

Поиск эффективных структур системы анализа-синтеза с применением банка фильтров, требующий оптимизации «структурных» параметров (число фильтров в наборе, значение коэффициентов децимации, порядки фильтров, число ступеней преобразования), поставил вопрос о разработке методики оптимального проектирования. Поскольку в большинстве случаев аппаратно-программная реализация системы ЦОС ориентируется на применение ЦСП, то, как следствие, подобная методика должна была отражать все особенности архитектуры и внутренние ресурсы данного класса микропроцессорных средств обработки.

Основы методики оптимального проектирования на сигнальных процессорах систем ЦОС были заложены в [2] и получили дальнейшее развитие в последние годы [69, 70].

1.3 Многоскоростная обработка сигналов в радиотехнике и системах телекоммуникаций

Трансмultipлексоры

Преобразователи вида уплотнения каналов – трансmultipлексоры [74] относятся к исторически первому направлению применения многоскоростной обработки сигналов в системах телекоммуникаций. Необходимость существования двух способов уплотнения телефонных каналов: частотного (ЧУК) и временного (ВУК) была обусловлена широким распространением в технике связи аналогового оборудования, ориентированного на ЧУК, с одной стороны, и тенденцией всё более расширяющегося использования цифрового оборудования на основе ВУК, с другой стороны. Таким образом, возникла проблема преобразования частотного уплотнения каналов во временное и обратно. Эта задача эффективно решается сегодня с применением трансmultipлексоров (рис. 1.11).

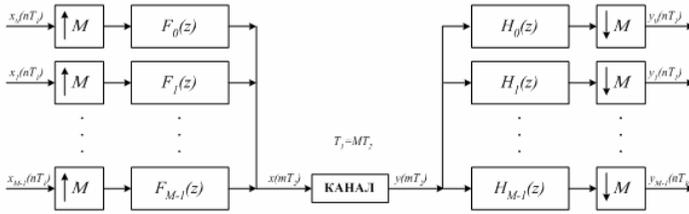


Рис. 1.11 Цифровой трансмультиплексор

Преобразование вида уплотнения каналов осуществляется с помощью набора полосовых фильтров с повышением и понижением частоты дискретизации. Например, при преобразовании ВУК-ЧУК на передающей стороне входные сигналы $x_i(nT_1)$, $i = \overline{0, M-1}$ после повышения частоты дискретизации в M раз трансформируются полосовыми фильтрами-модуляторами в свою область частот и с помощью смесителя получают окончательное объединение канальных полосовых сигналов в общий групповой сигнал с ЧУК. Для обратного преобразования на приемной стороне входной сигнал $y(mT_2)$ набором полосовых фильтров-демодуляторов разбивается на M канальных сигналов $y_i(nT)$, $i = \overline{0, M-1}$, с одновременным понижением частоты дискретизации в M раз каждой составляющей группового сигнала с ВУК.

Обычно при использовании ЧУК несущие частоты выбираются так, чтобы между соседними частотными каналами обеспечивался достаточный защитный интервал для последующего их разделения на приемной стороне относительно простыми фильтрами. Вместе с тем применение блоков фильтров синтеза-анализа с полной децимацией, допускающее перекрытие спектров частот соседних каналов, позволяет уменьшить суммарную ширину группового сигнала с ЧУК. Развитие теории построения банков цифровых фильтров дало возможность значительно повысить эффективность таких систем уплотнения за счет учета реальных характеристик канала связи и адаптивного распределения передаваемого в каждом субполосном канале количества бит информации.

Трансмультимплексор, изображенный на рис. 1.11, может быть использован для формирования сигнала с многотональной модуляцией (DMT-сигнала). Рассмотрим (рис. 1.12) пример подготовительного эта-

па формирования DMT-сигнала с помощью последовательно-параллельного кодера.

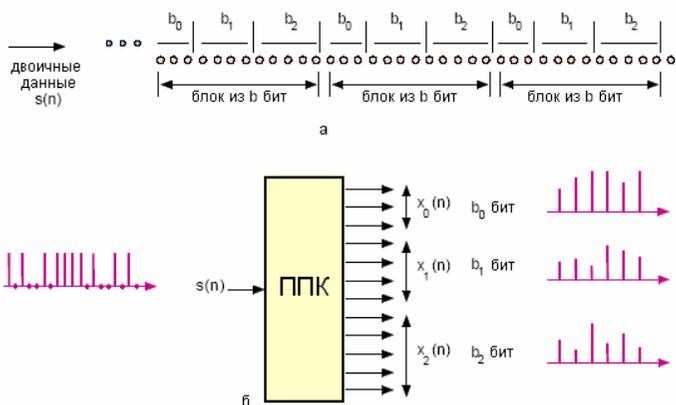


Рис. 1.12 Подготовительный этап формирования DMT-сигнала

Здесь: $s(n)$ – информационный сигнал, представленный последовательностью бит, который следует передать по каналу связи. Сигнал разбивается на блоки по b бит каждый. Далее каждый из блоков разбивается на M групп (в частном случае $M = 3$) по b_k бит, $k = \overline{0, M-1}$. Каждая группа из b_k бит соответствует одному символу $x_k(n)$, называемому символом модуляции для k -го канала. Обычно $x_k(n)$ представляет собой КАМ-символ (квадратурно амплитудно модулированный символ). Символы модуляции подвергаются интерполяции и фильтрации (аналогично ЧУК). Суммарный DMT-сигнал поступает в канал связи и далее на приемную сторону, где над ним выполняются обратные операции.

Кодирование речи, аудиосигналов и изображений

Используемые на практике сигналы, в частности речевые, аудио- и видеосигналы, отличаются тем, что имеют крайне неравномерное распределение энергии по частоте с преимущественной ее концентрацией в определенной области частот. Поэтому эффективным является метод субполосного кодирования с применением системы анализа-синтеза сигналов (рис. 1.13).

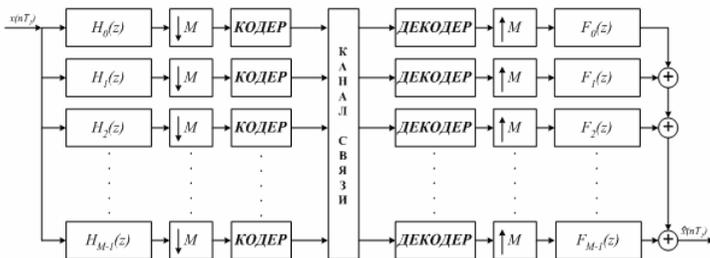


Рис. 1.13 Схема субполосного кодирования сигналов

Принцип субполосного кодирования заключается в разделе исходного сигнала $x(nT_1)$ на M частотных составляющих. Главным инструментом для такого разбиения являются банки фильтров анализа $H_i(z), i = \overline{0, M-1}$ и банки фильтров синтеза $F_i(z), i = \overline{0, M-1}$. Поскольку главная цель кодирования источника сигнала – максимальная степень сжатия информации, то желательно, чтобы банк фильтров анализа обеспечивал максимальную децимацию, а банк фильтров синтеза – полное восстановление.

Приоритетную работу по применению этого метода при кодировании речи выполнил Крошьер [37, 75]. Кодирование в каждой субполосе, как правило, более сложное по сравнению с обычным квантованием. Распространены, например, такие методы, как адаптивная импульсно-кодовая модуляция (ИКМ), адаптивная дифференциальная ИКМ и др. При кодировании аудиосигналов и видеозображений положительный результат дают еще более сложные методы кодирования на основе линейного предсказания, адаптивной фильтрации и векторного квантования. В частности, в работе [76] сообщается об использовании в каждой субполосе векторного квантования, в результате чего в кодированном изображении приходилось всего 0,48 бит на элемент.

Применение субполосного кодирования приводит к хорошим результатам, если известны априорные сведения о характере распределения энергии исходного сигнала. При обработке речи, аудиосигналов и изображений такие сведения имеются благодаря большому опыту кодирования подобных сигналов.

Аналоговые скремблеры – устройства защиты информации

Аналоговые скремблеры речевых сигналов на основе многополосного разбиения и частотных перестановок были в течение определенного времени основным инструментом, гарантирующим секретность связи при использовании аналоговых телефонных линий. Сегодня подобные устройства эффективно реализуются с применением методов и технологий ЦОС и строятся на базе частотно-временных перестановок, значительно повышающих степень закрытия информации [77].

Идея построения скремблера заключается в разбиении открытого сигнала $x(nT)$ на M субполосных составляющих с последующим разделением каждого субполосного сигнала на сегменты во временной области. Затем производятся перестановка сегментов субполосных сигналов и объединение последних путем перестановок в частотной области в единый зашифрованный таким образом выходной сигнал $y(nT)$, который и передается в канал связи.

На приемной стороне сигнал $y(nT)$ вновь разбивается на субполосы и временные сегменты, которые переставляются в обратном порядке и «собираются» с помощью полосовых фильтров-интерполяторов в единый сигнал. В результате восстанавливается исходный открытый сигнал $x(nT)$.

Цифровые аудиосистемы и аналого-цифровое преобразование

В цифровой аудиотехнике принят стандартный набор частот дискретизации в зависимости от носителя информации. Например, при высококачественной записи на лазерные диски минимальная частота дискретизации составляет 44 кГц, если предположить, что звуковой сигнал занимает полосу частот $0 \leq f \leq 22$ кГц. С тем чтобы гарантировать принятое для цифровой записи значение частоты дискретизации, равное 44,1 кГц, и не внести шум наложения, требуется аналоговый фильтр с не реализуемыми на практике характеристиками. Альтернативный подход состоит в использовании передискретизации (повышение частоты дискретизации в два и более раз по отношению к минимально необходимой) и последующей цифровой фильтрации с понижением частоты дискретизации в ν раз (рис. 1.14). При этом аналоговый фильтр имеет сравнительно простую передаточную функцию $H(p)$ и легко реализуется, а необходимые свойства частотной избирательности обеспечиваются цифровым фильтром с передаточной функцией $H(z)$.

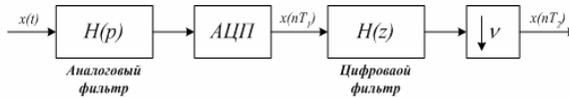


Рис. 1.14 Схема АЦП на основе эффекта передискретизации

Идея передискретизации и цифровой децимации лежит в основе целого семейства аналого-цифровых преобразователей, использующих так называемую сигма-дельта модуляцию [78]. Преобразователи данного класса отличаются высокой точностью цифрового представления в широком динамическом диапазоне.

Очевидно, что в таких системах приходится расплачиваться ценой увеличения внутренней скорости вычислений. Однако, благодаря использованию децимации, эффективность этих многоскоростных систем может быть в решающей степени улучшена.

Другой важной проблемой цифровой аудиотехники является необходимость преобразования частоты дискретизации при переносе информации с одного типа носителя на другой (лазерные диски, магнитная лента и т.п.). С решением этой задачи успешно справляются устройства преобразования с нецелочисленным соотношением частот дискретизации, определяемым рациональной дробью [41].

Адаптивные фильтры с протяженной импульсной характеристикой

Адаптивные фильтры, синтезируемые, как правило, в классе КИХ-цепей (гарантирующих их устойчивость), являются основным инструментом борьбы с межсимвольной интерференцией в цифровых системах связи. Источник потенциальных ошибок при приеме напрямую связан с двумя факторами: наличием эха, обусловленного отражениями сигналов-символов в процессе их приема-передачи, и частотно зависимыми замираниями в канале связи. В большей степени это проявляется в системах беспроводной связи с многолучевым распространением, когда переданный сигнал поступает в приемник несколькими путями [71]. Борьба с эхо, частотными искажениями и замираниями эффективно ведется с помощью адаптивного прямого и обратного моделирования канала связи. Вместе с тем с ростом интервала многолучевости, протяженности эхо-сигнала и увеличения глубины замираний пропорционально растет порядок вектора оптимизируемых параметров и, как следствие, значительно увеличиваются общие вычислительные затраты

на реализацию адаптивного фильтра, уменьшаются скорость сходимости алгоритма адаптации и точность самонастройки параметров фильтра.

Решение проблемы эффективной реализации адаптивных фильтров с протяженной импульсной характеристикой лежит на пути сочетания адаптивной и многоскоростной обработки сигналов с применением банка полосовых фильтров. Концепция адаптивной многоскоростной обработки состоит в сведении задачи построения адаптивного фильтра высокого порядка к параллельной самонастройке фильтров существенно меньших порядков. Это выполняется путем предварительного разбиения полосы рабочих частот канала связи на субполосы с помощью набора полосовых фильтров-демодуляторов с последующим понижением частоты дискретизации. При этом каждый субполосный канал настраивается своим адаптивным КИХ-фильтром, порядок которого и скорость обработки уменьшаются пропорционально числу каналов (коэффициенту децимации).

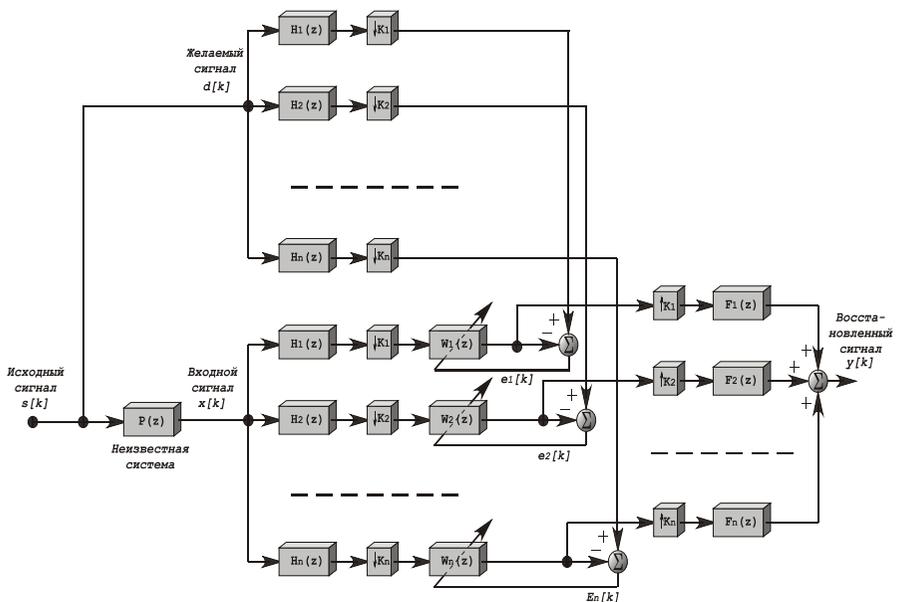


Рис. 1.15 Функциональная схема устройства обратного адаптивного моделирования с разбиением на субполосы

На рис. 1.15 представлен пример реализации субполосного адаптивного фильтра, решающего задачу обратного моделирования. Сигнал $x(n)$, искаженный неизвестной системой (каналом связи), разбивается на M субполос банком фильтров анализа $H_i(z), i = \overline{0, M-1}$. Затем в каждом субполосном канале производится прореживание отсчетов выходного сигнала с коэффициентами децимации $k_i, i = \overline{1, M}$. Такой же банк фильтров анализа используется для разделения на субполосы желаемого (обучающего) сигнала $d(n)$. Далее производятся независимая настройка каждым адаптивным фильтром $W_i(z), i = \overline{1, M}$ и восстановление отфильтрованного сигнала $y(n)$ банком фильтров синтеза $F_i(z), i = \overline{1, M}$.

Панорамные приемники и спектроанализаторы

Приемники панорамного обзора и спектроанализаторы предназначены для исследования спектральной структуры сигнала, измерения его частотно-временных характеристик, поиска скрытых периодичностей, разделения и распознавания источников излучения в общей полосе частот обзора и прочих целей, связанных с обнаружением и спектральной оценкой параметров принятого сигнала. Характерная область применения – радиотехнические системы, в том числе устройства радиолокации, радионавигации и радиопеленгации.

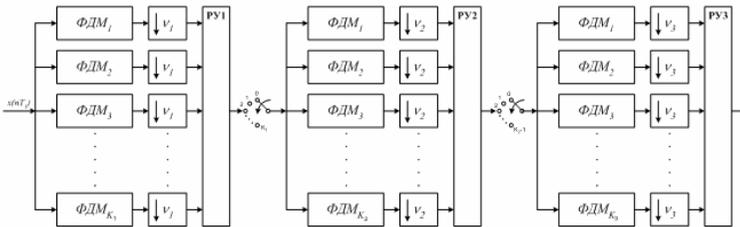


Рис. 1.16 Адаптивный приемник панорамного обзора

Общая структура приемника панорамного обзора может строиться по схеме M -компонентной системы анализа-синтеза сигналов на базе банка полосовых фильтров, представленной на рис. 1.16. При этом повышение разрешающей способности панорамного приемника достигается путем увеличения числа частотных каналов M . Однако такой подход приводит к пропорциональному увеличению вычислительных

затрат и емкости памяти данных. В то же время в реальных системах «сверхразрешение» по частоте необходимо только в тех участках области частот, где присутствуют близко расположенные узкополосные составляющие спектра входного сигнала с медленно меняющимися огибающими. Кроме того, в других частотных поддиапазонах может наблюдаться более динамичное изменение спектральных составляющих, сохранение характера которых потребует расширения полосы частот анализа. С этой целью в систему вносятся элементы адаптации к частотно-временной структуре сигнала.

На рис. 1.16 показан пример построения адаптивного приемника панорамного обзора с самонастраивающейся пирамидальной структурой. На первой ступени преобразования набор из K_1 фильтров-демодуляторов (ФДМ) разбивает весь диапазон рабочих частот на K_1 поддиапазонов с понижением частоты дискретизации выходного сигнала в ν_1 раз. По данным на выходе набора ФДМ решающее устройство $РУ_1$ оценивает «информативность» каждого из частотных поддиапазонов и настраивает набор из K_2 ФДМ последующей ступени преобразования на выделение информативных частотных составляющих с одновременным увеличением разрешающей способности в ν_1 раз. В зависимости от спектральной структуры входного сигнала все K_2 ФДМ второй ступени могут быть сконцентрированы в $R \leq K_1$ частотных поддиапазонах. На второй ступени преобразования с помощью набора из K_2 ФДМ в каждом поддиапазоне выделяется K_2 субполос с понижением частоты дискретизации в ν_2 раз. Решающее устройство $РУ_2$ анализирует по принятому признаку «информативность» каждого из K_2 частотных каналов и настраивает набор из K_3 ФДМ последующей ступени преобразования. При необходимости процесс преобразования по аналогичной структуре может быть продолжен до достижения необходимой частотной избирательности в каждом из поддиапазонов. Отметим, что структура адаптивной системы в результате окончательной настройки приобретает пирамидальный характер с сохранением только тех «ветвей» дерева, которые несут полезную информацию. При изменении частотно-временной структуры принимаемого сигнала автоматически перестраивается и структура адаптивного приемника. Кроме того, исключение из последующего анализа неинформативных поддиапазонов позволяет значительно уменьшить общие вычислительные затраты и емкости памяти данных.

Глава 2 Цифровые фильтры с многоступенчатой децимацией и интерполяцией сигналов

2.1 Основные понятия, связанные с преобразованием частоты дискретизации НЧ сигналов

Частота дискретизации $f_{кв} = 1/T$, во многом определяя эффективность и точность обработки сигналов, принадлежит к основным параметрам цифровых систем. В некоторых случаях более эффективным и удобным может оказаться выполнение различных частей алгоритмов ЦОС с различными частотами дискретизации. В этих случаях появляется необходимость перехода от частоты дискретизации $f_{кв}$ к новой частоте дискретизации $f'_{кв}$, который может быть выполнен двумя способами. Первый предполагает возможность полного восстановления аналогового сигнала с последующей дискретизацией с частотой $f'_{кв}$, а второй — цифровое преобразование частоты дискретизации.

Процесс цифрового преобразования частоты дискретизации сигнала от заданной частоты дискретизации $f_{кв}$ в другую более низкую частоту дискретизации $f'_{кв}$ называется вторичной дискретизацией или децимацией. Процесс цифрового преобразования частоты дискретизации сигнала от заданной частоты дискретизации $f_{кв}$ в другую более высокую частоту дискретизации $f'_{кв}$ называется интерполяцией. Децимация и интерполяция сигналов являются дуальными процессами. В процессе децимации производится прореживание отсчетов цифрового сигнала, а в процессе интерполяции — их восстановление.

Рассмотрим процесс понижения частоты дискретизации сигнала $x(nT_1)$ в целое число раз, равное ν , т.е.

$$f_{кв1} / f_{кв2} = \nu .$$

В этом случае частота вторичной дискретизации $f_{кв2} = f_{кв1} / \nu$ и соответственно период дискретизации $T_2 = \nu T_1$.

Если спектр $X(j\omega)$ сигнала $x(nT_1)$ занимает всю полосу частот $-\pi \leq \omega \leq \pi$, где $\omega = 2\pi f T_1$ — приведенная круговая частота, то согласно условиям Найквиста—Котельникова, для того чтобы понизить частоту дискретизации в ν раз и устранить эффект наложения на более

низкой частоте дискретизации, необходимо предварительно пропустить сигнал через цифровой НЧ фильтр, который в идеальном случае должен иметь следующую частотную характеристику:

$$H^*(j\omega) = \begin{cases} 1, & \text{если } |\omega| \leq \pi \nu; \\ 0 & \text{при других } \omega. \end{cases} \quad (2.1)$$

Понижение частоты дискретизации достигается посредством включения на выходе НЧ фильтра, работающего на частоте дискретизации $f_{кв1}$, элемента вторичной дискретизации, пропускающего на выход схемы только каждый ν -й отсчет выходного сигнала $y(nT_1)$. Выходной блок цифрового фильтра-дециматора (ЦФД), представленный графически в виде, показанном на рис. 2.1, а, называют компрессором частоты дискретизации. Это символическое изображение является общепринятым в литературе по ЦОС [1] и будет нами использоваться в дальнейшем для отображения функции элемента вторичной дискретизации с коэффициентом прореживания ν . На рис. 2.1, б показаны типичные спектры сигналов $x(nT_1)$, $y(nT_1)$ и $y(mT_2)$ в различных точках структурной схемы ЦФД.

Таким образом, децимация входного сигнала $x(nT_1)$ с коэффициентом прореживания ν , принимающим целочисленное значение, предполагает в общем случае вычисление линейной свертки вида

$$y(mT_2) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[(\nu m - k)T_1]h(kT_1),$$

где $h(kT_1)$ — импульсная характеристика НЧ фильтра, реализующего заданные свойства частотной избирательности в форме функции передачи $H(j\omega)$.

Установим отношение между отображением последовательностей $x(nT_1)$ и $y(mT_2)$ в Z -области, определяющее передаточную функцию фильтра-дециматора

$$H_D(z) = Y_D(z) / X(z).$$

Пусть

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_1)z^{-n}, \quad Y(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y(nT_1)z^{-n}$$

и

$$Y_D(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} y(mT_2)z^{-m}$$

— Z -преобразования последовательностей $x(nT_1)$, $y(nT_1)$ и $y(mT_2)$ соответственно и пусть

$$H(z) = Y(z) / X(z)$$

— передаточная функция входного блока. Задача состоит в определении функции преобразования выходного блока фильтра-дециматора.

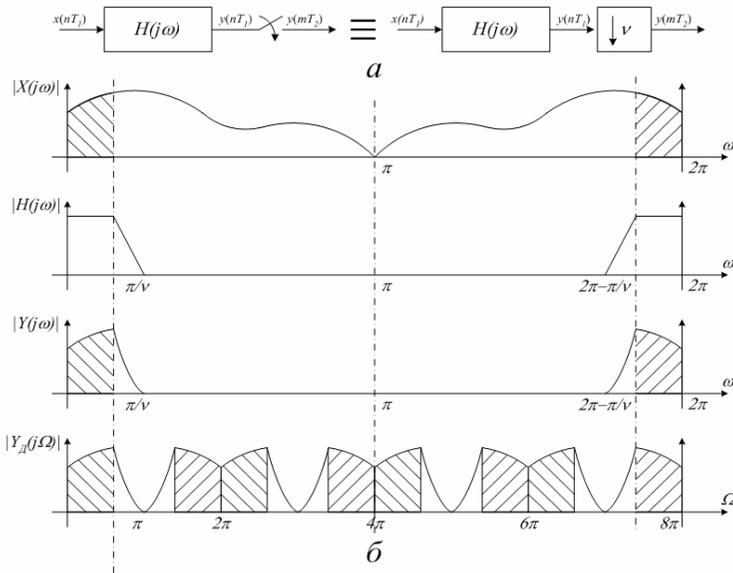


Рис. 2.1 Цифровой фильтр-дециматор: а — структурная схема; б — спектры сигналов в различных точках

Решение поставленной задачи предполагает введение вспомогательной последовательности данных $y'(nT_1)$ на выходе фильтра-дециматора:

$$y'(nT_1) = \begin{cases} y(nT_1) = y(mT_2), & n = 0, \pm v, \pm 2v, \dots; \\ 0 & \text{при других } n, \end{cases}$$

частота дискретизации которой совпадает с частотой дискретизации

входной последовательности $x(nT_1)$.

Последовательность $y'(nT_1)$ может быть получена из последовательности $y(mT_2)$ введением между отсчетами $\nu - 1$ нулей с периодом T_1 или из последовательности $y(nT_1)$ умножением на периодическую последовательность единичных импульсов:

$$\delta(nT_1) = \begin{cases} 1, & n = 0, \pm\nu, \pm 2\nu, \dots; \\ 0, & \text{при других } n. \end{cases} \quad (2.2)$$

Используем следующее представление периодической последовательности (2.2) с помощью дискретного преобразования Фурье:

$$\delta(nT_1) = \frac{1}{\nu} \sum_{l=0}^{\nu-1} e^{j \frac{2\pi}{\nu} ln}.$$

Таким образом, получим

$$y'(nT_1) = y(nT_1) \left[\frac{1}{\nu} \sum_{l=0}^{\nu-1} e^{j \frac{2\pi}{\nu} ln} \right]. \quad (2.3)$$

Запишем Z -преобразование последовательности $y(mT_2)$ в форме

$$Y_D(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} y(mT_1) z^{-m} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y'(nT_1) z^{-n/\nu} \quad (2.4)$$

с учетом, что последовательность $y'(nT_1)$ равна нулю при всех n , за исключением значений, кратных ν . Подставив выражение (2.3) в (2.4), получим

$$Y_D(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y(nT_1) \left[\frac{1}{\nu} \sum_{l=0}^{\nu-1} e^{j \frac{2\pi}{\nu} ln} \right] z^{-n/\nu} = \frac{1}{\nu} \sum_{l=0}^{\nu-1} \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} y(nT_1) z^{-n/\nu} e^{j \frac{2\pi}{\nu} ln} \right]. \quad (2.5)$$

Из (2.5) вытекает следующая зависимость между Z -преобразованиями последовательностей на входе и выходе элемента вторичной дискретизации:

$$Y_D(z) = \frac{1}{\nu} \sum_{l=0}^{\nu-1} Y_l(z^{1/\nu} e^{-j \frac{2\pi l}{\nu}}) = \frac{1}{\nu} \sum_{l=0}^{\nu-1} Y_l(z^{1/\nu}), \quad (2.6)$$

где $Y_l(z^{1/\nu}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \dot{y}_l(nT_1) z^{-n/\nu}$, $l = \overline{0, \nu-1}$ — трансформирующее (с коэффициентом «расширения» ν) Z -преобразование l -й комплекс-

ной составляющей $\dot{y}_l(nT_1)$, полученной из исходной последовательности с помощью квадратурной модуляции

$$\dot{y}_l(nT_1) = y(nT_1)e^{j\frac{2\pi}{v}ln}. \quad (2.7)$$

Заметим, что трансформирующее Z -преобразование последовательности $\dot{y}_l(nT_1)$, рассматриваемое на единичной окружности ($z = e^{j\Omega}$, где $\Omega = 2\pi fT_2 = 2\pi f\nu T_1 = \omega\nu$), отличается от Z -преобразования исходной последовательности $y(nT_1)$ смещением по частоте на величину $2\pi/\nu l$.

Так как $Y(z) = X(z)H(z)$ по определению, то при $z = e^{j\omega}$ спектр последовательности $y(nT_1)$ принимает значение $Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})H(e^{j\omega})$, $|\omega| \leq \pi$, а спектр l -й составляющей (2.7)

$$Y_l(e^{j\omega}) = X\left(e^{j\left(\omega - \frac{2\pi}{\nu}l\right)}\right)H\left(e^{j\left(\omega - \frac{2\pi}{\nu}l\right)}\right), \quad l = \overline{0, \nu-1}.$$

Вычисляя $Y_D(z)$ на единичной окружности $z = e^{j\Omega}$, спектр прореженной последовательности $y(mT_2)$ на выходе фильтра-дециматора с учетом (2.6) запишем в виде

$$Y_D(j\Omega) = \frac{1}{\nu} \sum_{l=0}^{\nu-1} X\left[j\left(\frac{\Omega}{\nu} - \frac{2\pi}{\nu}l\right)\right]H\left[j\left(\frac{\Omega}{\nu} - \frac{2\pi}{\nu}l\right)\right]. \quad (2.8)$$

Назначение фильтра нижних частот — отфильтровать сигнал $x(nT_1)$ таким образом, чтобы устранить его составляющие на частотах выше частоты $\omega = \pi/\nu$. Если частотная характеристика фильтра $H(j\omega)$ достаточно точно аппроксимирует идеальную характеристику (2.1), по крайней мере, в зоне непрозрачности фильтра, то выражение (2.8) примет форму

$$Y_D^*(j\Omega) \approx \frac{1}{\nu} X\left(j\frac{\Omega}{\nu}\right)H\left(j\frac{\Omega}{\nu}\right), \quad |\Omega| \leq \pi.$$

При отличном от нуля уровне боковых лепестков АЧХ фильтра $H(\omega)$ в зоне непрозрачности $\omega \geq \pi/\nu$ в основной полосе появляются дополнительные частотные составляющие, обусловленные наложением частот в процессе вторичной дискретизации. Суммарный спектр шума децимации принимает форму

$$\Delta Y_{\mathcal{D}}^*(j\Omega) = \frac{1}{\nu} \sum_{l=0}^{\nu-1} X \left[j \left(\frac{\Omega}{\nu} - \frac{2\pi l}{\nu} \right) \right] H \left[j \left(\frac{\Omega}{\nu} - \frac{2\pi l}{\nu} \right) \right], \quad |\Omega| \leq \pi. \quad (2.9)$$

Выражение (2.9) может быть использовано для последующего вывода оценки дисперсии шума децимации по заданным выражениям спектральной плотности входной последовательности данных $x(nT_1)$ и функции передачи фильтра $H(j\omega)$.

Рассмотрим процесс повышения частоты дискретизации сигнала в целое число раз, равное ν . В этом случае новая частота дискретизации $f_{кв2} = \nu f_{кв1}$ и соответственно период дискретизации $T_2 = T_1 / \nu$. Процесс повышения частоты дискретизации подразумевает интерполяцию $(\nu - 1)$ промежуточных отсчетов между каждой парой отсчетов сигнала $x(nT_1)$.

Повышение частоты дискретизации достигается посредством включения на входе НЧ фильтра, работающего на частоте дискретизации $f_{кв2}$, экспандера частоты дискретизации, который помещает нулевые отсчеты с периодом T_2 между каждой парой отсчетов сигнала $x(nT_1)$ (рис. 2.2, а). В результате на выходе экспандера формируется сигнал

$$x(mT_2) = \begin{cases} x(mT_1/\nu) = x(nT_1) & \text{при } m = 0, \pm\nu, \pm 2\nu, \dots; \\ 0 & \text{при других } m. \end{cases}$$

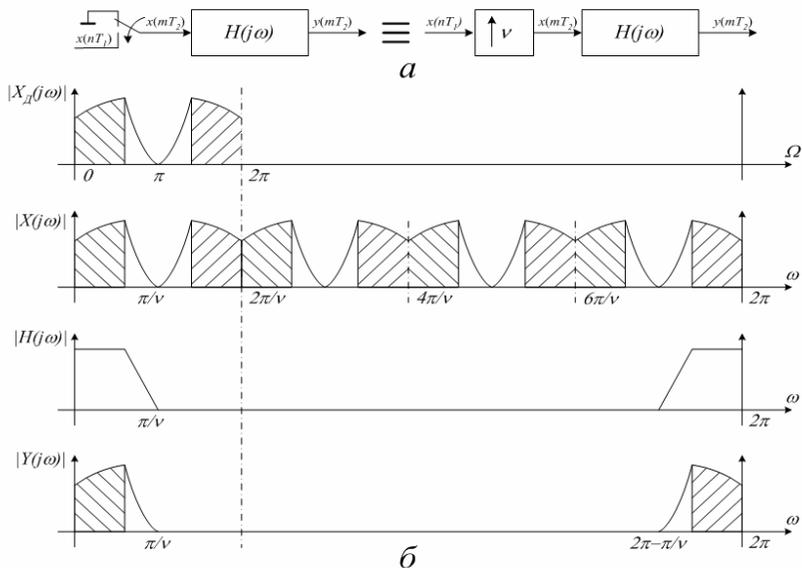


Рис. 2.2 Цифровой фильтр-интерpolator: а — структурная схема; б — спектры сигналов в различных точках

Спектр $X(j\omega)$ сигнала $x(mT_2)$ получается из спектра $X_d(j\Omega)$ входного сигнала $x(nT_1)$ «сжатием» в ν раз по оси частот и периодическим продолжением с периодом $2\pi/\nu$ (рис. 2.2, б). Для восстановления сигнала в основной полосе частот и режекции нежелательных высокочастотных составляющих необходимо пропустить сигнал $x(mT_2)$ через НЧ фильтр, который в идеале должен иметь следующую частотную характеристику:

$$H^*(j\omega) = \begin{cases} k & \text{при } |\omega| \leq \pi/\nu; \\ 0 & \text{при других } \omega, \end{cases} \quad (2.10)$$

где k — коэффициент усиления фильтра в полосе пропускания, обеспечивающий воспроизведение амплитуды интерполируемого сигнала.

Покажем, что коэффициент усиления k должен быть равным ν . Установим связь между уровнем выходного сигнала $y(mT_2)$ и входного сигнала $x(nT_1)$ на нулевой частоте. Пусть на вход фильтра-интерpolatorа подается постоянный сигнал $x(nT_1) = x(0)$. Тогда

$$y(0) = \int_{-\pi}^{\pi} X(j\omega)H(j\omega)d\omega = \int_{-\pi}^{\pi} X_{\mathcal{D}}(j\omega\nu)H(j\omega)d\omega. \quad (2.11)$$

Подставив (2.10) в выражение (2.11), получим

$$y(0) = k \int_{-\pi/\nu}^{\pi/\nu} X_{\mathcal{D}}(j\omega\nu)d\omega = \frac{k}{\nu} \int_{-\pi}^{\pi} X_{\mathcal{D}}(j\Omega)d\Omega = \frac{k}{\nu}x(0).$$

Следовательно, коэффициент усиления $k = \nu$ необходим для согласования амплитуд входного и выходного сигналов.

Таким образом, повышение частоты дискретизации в ν раз (принимающего целочисленное значение) с использованием фильтра-интерполятора $H(j\omega)$ предполагает в общем случае вычисление линейной свертки вида

$$y(mT_2) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(m-k)T_2]h(k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT_2)h_m(k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x\left(k\frac{T_1}{\nu}\right)h_m(k) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} x(lT_1)h_m(l), \quad (2.12)$$

$l = k/\nu, \quad k = 0, \pm\nu, \pm 2\nu, \quad m = 0, 1, 2, \dots, \nu-1,$

где $h_m(l)$ — прореженная с шагом ν последовательность отсчетов импульсной характеристики фильтра-интерполятора относительно m -го отсчета. На рис. 2.3 показан пример, иллюстрирующий способ получения импульсных характеристик $h_m(l)$, $m = 0, \nu-1$, из исходной импульсной характеристики $h(k)$ фильтра-интерполятора.

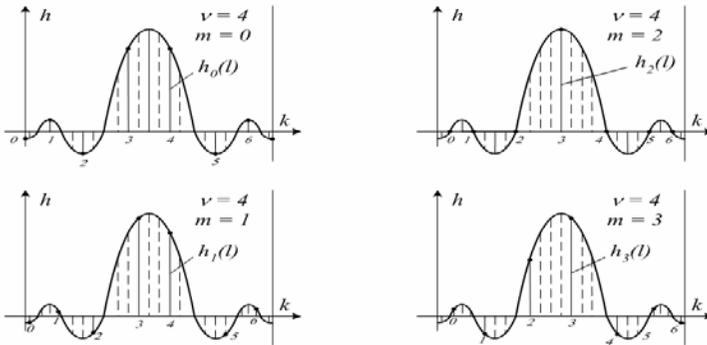


Рис. 2.3 Импульсные характеристики фильтра-интерполятора

В более общем случае преобразование частоты дискретизации $f_{кв1}$

может выполняться с рациональным коэффициентом $\nu = f'_{кв} / f_{кв} = L/M$, где L и M — целые числа. Такое преобразование будет осуществляться посредством поочередного выполнения двух описанных выше процессов целочисленного преобразования частоты дискретизации, то есть сначала частота дискретизации будет повышаться в L раз, а затем понижаться в M раз. При этом оба НЧ фильтра можно объединить в один фильтр, как показано на рис. 2.4.

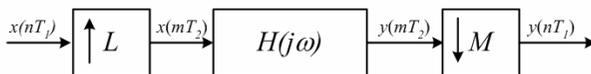


Рис. 2.4 Структурная схема преобразователя частоты дискретизации с рациональным коэффициентом L/M

Поскольку НЧ фильтр должен одновременно служить целям операций децимации с коэффициентом прореживания M и интерполяции с коэффициентом восстановления L , то он должен иметь частотную характеристику $H(j\omega)$, близкую к идеальной:

$$H^*(j\omega) = \begin{cases} L & \text{при } |\omega| \leq \min[\pi/L, \pi/M]; \\ 0 & \text{при других } \omega, \end{cases}$$

т.е. частота среза полосы пропускания такого фильтра должна быть равна минимальной из двух частот среза, требуемых для децимации и интерполяции.

2.2 Основные понятия, связанные с преобразованием частоты дискретизации полосовых сигналов

Преобразование частоты дискретизации полосового сигнала с произвольным расположением полосы частот наталкивается на известные ограничения, связанные с возможным наложением основной и боковых полос при выполнении децимации. Однако при определенных ограничениях на выбор полосы частот преобразование частоты дискретизации полосового сигнала реализуется столь же просто и эффективно, как и в случае НЧ сигнала.

Пусть спектр k -й составляющей сигнала $x(nT_1)$ симметричен относительно нулевой частоты и занимает полосу частот $k\pi/\nu \leq |\omega| \leq (k+1)\pi/\nu$, где ν — целое число. Преобразование сигнала

$x(nT_1)$ с выделением k -й составляющей и понижением частоты ее дискретизации в ν раз выполняется по структурной схеме, представленной на рис. 2.5, а. Здесь $H_k(j\omega)$ — частотная характеристика полосового фильтра, настроенного на k -ю полосу частот. Входной сигнал $x(nT_1)$ сначала пропускается через полосовой фильтр $H_k(j\omega)$ для выделения k -й полосы частот, а затем частота дискретизации выходного сигнала $y_k(nT_1)$ понижается элементом вторичной дискретизации в ν раз. При этом k -я полоса частот, состоящая из двух симметрично расположенных половинок шириной π/ν каждая, трансформируется в область нижних частот вследствие «заворачивания» частот относительно новой частоты дискретизации $f_{кв2} = f_{кв1}/\nu$ (рис. 2.5, б).

Поскольку рассматриваемая система преобразования идентична фильтру-дециматору НЧ сигнала с тем лишь отличием, что используется полосовой фильтр, спектр выходного сигнала можно записать в форме, аналогичной выражению (2.8):

$$Y_{Д_k}(j\Omega) = \frac{1}{\nu} \sum_{l=0}^{\nu-1} X \left[j \left(\frac{\Omega}{\nu} - \frac{2\pi l}{\nu} \right) \right] H_k \left[j \left(\frac{\Omega}{\nu} - \frac{2\pi l}{\nu} \right) \right], \quad |\Omega| \leq \pi,$$

где частотная характеристика полосового фильтра $H_k(j\omega)$, определяемая относительно приведенной частоты $\omega = 2\pi f T_1 = \Omega/\nu$, в идеальном случае принимает значение

$$H_k(j\omega) = \begin{cases} 1, & \text{при } k\pi/\nu \leq |\omega| \leq (k+1)\pi/\nu; \\ 0 & \text{при других } \omega, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \nu-1. \end{cases} \quad (2.13)$$

В практике построения систем цифровой частотной селекции сигналов большое распространение нашел способ однополосного представления сигналов. В этом случае k -я частотная составляющая сигнала $x(nT_1)$, занимающая полосу частот $(2k-1)\pi/\nu \leq \omega \leq (2k+1)\pi/\nu$, $k = \overline{0, (\nu-1)}$, описывается моделью комплексного сигнала $y_k(nT_1)$.

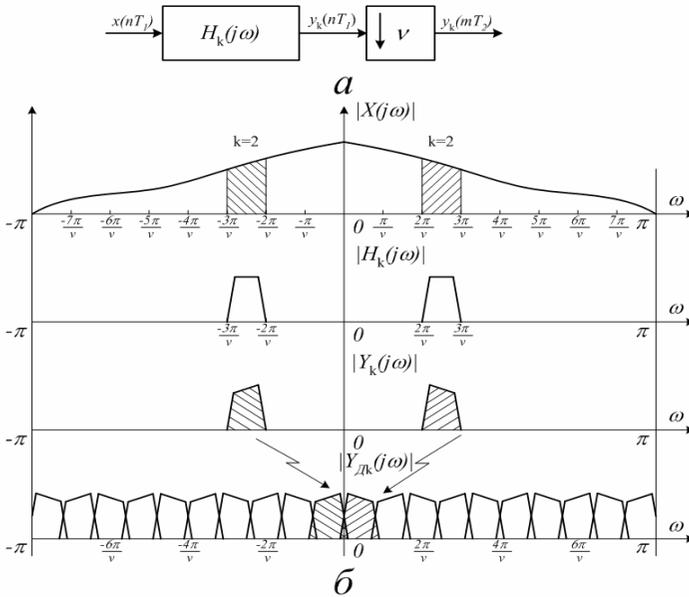


Рис. 2.5 Цифровой полосовой фильтр-дециматор: а — структурная схема; б—спектры сигналов в различных точках

Понижение частоты дискретизации сигнала $x(nT_1)$ в ν раз с выделением k -й составляющей выполняется по структурной схеме, представленной на рис. 2.6, а, которая отличается от ранее рассмотренной структуры только тем, что полосовой фильтр с функцией передачи $H_k(j\omega)$ настраивается на полосу частот $(2k-1)\pi/\nu \leq \omega \leq (2k+1)\pi/\nu$, не имеющую симметричного продолжения. Это обуславливает необходимость использования фильтра с комплексной импульсной характеристикой, и, как следствие, выходной сигнал фильтра-дециматора $y^k(mT_2)$ является комплексным (двухканальным с двумя квадратурными составляющими).

Понижение частоты дискретизации однополосного сигнала $y_k(nT_1)$ приводит к «заворачиванию» частот относительно новой частоты дискретизации, равной $2\pi/\nu$, и трансформации основной полосы в область нижних частот (рис. 2.6, б).

Повышение частоты дискретизации полосового сигнала при описанных выше ограничениях на расположение полосы частот выполняется по схеме, представленной на рис. 2.7, а, которая строится аналогично схеме фильтра-интерполятора НЧ сигнала (см. рис. 2.2, а), с тем лишь отличием, что НЧ фильтр заменяют полосовым с частотной характеристикой (3.13). На рис. 2.7, б показана трансформация спектров сигналов в процессе преобразования частоты дискретизации, иллюстрирующая особенности реализации схемы повышения частоты дискретизации двухполосного действительного сигнала.

Фильтр-интерполятор однополосного комплексного сигнала строится по дуальной структурной схеме фильтра-дециматора (см. рис. 2.6, а) с использованием двухканального полосового фильтра-интерполятора.

Альтернативным подходом к построению эффективных структур преобразователей частоты дискретизации полосовых сигналов является подход, в основе которого лежит идея предварительной трансформации основной полосы частот в область нижних частот с использованием квадратурной демодуляции полосового сигнала и последующей НЧ фильтрации в случае построения фильтра-дециматора или предварительной НЧ фильтрации с последующей трансформацией в область основной полосы частот посредством квадратурной модуляции НЧ сигнала в случае построения фильтра-интерполятора.

Рассмотрим построение структуры фильтра-дециматора полосового сигнала. Пусть основная полоса лежит в области частот $|\omega - \omega_0| \leq \omega_c$, где ω_0 — центральная частота; ω_c — частота среза, определяющая значения верхней $(\omega_0 + \omega_c)$ и нижней $(\omega_0 - \omega_c)$ границ основной полосы частот; ω_0 и ω_c принимают произвольные значения в диапазоне частот $|\omega| \leq \pi$, при этом $\omega_c \ll \omega_0$.

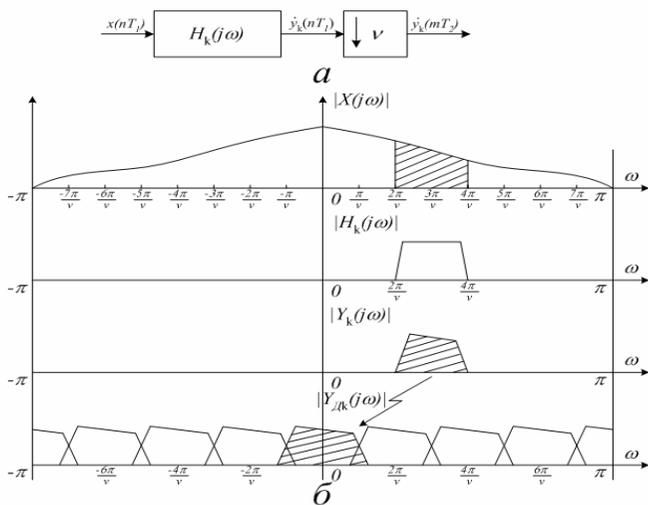


Рис. 2.6 Цифровой полосовой фильтр-дециматор однополосного сигнала; а — структурная схема; б — спектры сигналов в различных точках

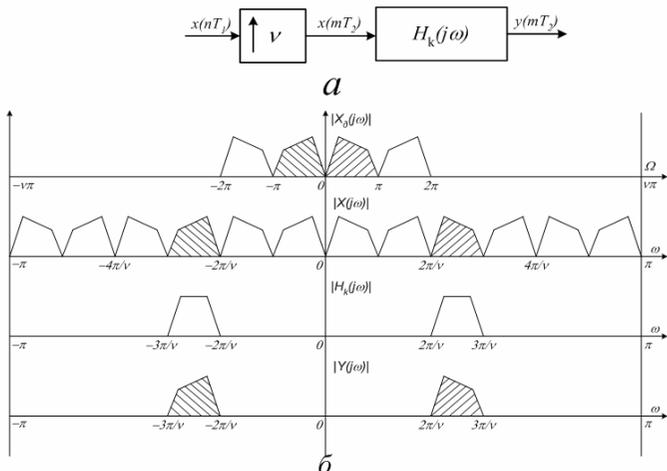


Рис. 2.7 Цифровой фильтр-интерполятор полосового сигнала: а — структурная схема; б — спектры сигналов в различных точках

В рамках альтернативного подхода понижение частоты дискретизации полосового сигнала в $\nu = \lfloor \pi / \omega_c \rfloor$ раз, где $\lfloor \cdot \rfloor$ — целая часть числа, выполняется по структурной схеме, представленной на рис. 2.8, а. Входной сигнал $x(nT_1)$ предварительно умножается на комплексную гармонику, частота которой ω_0 определяется значением центральной частоты основной полосы. В результате квадратурной «демодуляции» основная полоса трансформируется в область нижних частот (рис. 2.8, б). При этом задача полосовой фильтрации сводится к задаче НЧ фильтрации, и соответственно дальнейшая схема построения полосового фильтра-дециматора аналогична описанной ранее структуре НЧ фильтра-дециматора. Отличие заключается во введении двухканальной обработки по синусному и косинусному каналам одновременно. Таким образом, недостатком данной структуры является фактически двукратное увеличение основных затрат на реализацию по отношению к полосовому фильтру-дециматору, построенному по одноканальной структуре рис. 2.5. Достоинство - в снятии ограничений на положение полосы частот.

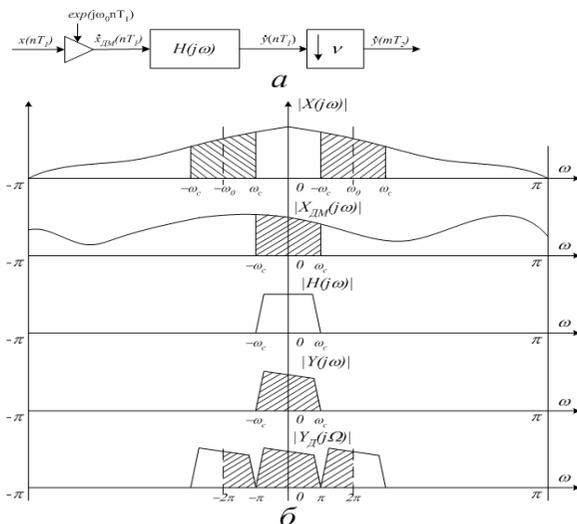


Рис. 2.8 Цифровой полосовой фильтр-дециматор, использующий квадратурную модуляцию: а — структурная схема; б — спектры сигналов в различных точках

Повышение частоты дискретизации в $\nu = \lceil \pi / \omega_c \rceil$ раз с восстановлением основной полосы частот $|\omega - \omega_0| \leq \omega_c$ реализуется по структуре, дуальной структуре полосового фильтра-дециматора, представленного на рис. 2.9. На первом шаге преобразования выполняется повышение частоты дискретизации комплексной «оггибающей» $x(nT_1)$ путем добавления $(\nu - 1)$ нулей между каждой парой отсчетов и затем - НЧ фильтрация на повышенной частоте дискретизации. На втором шаге с помощью квадратурной модуляции комплексная «оггибающая» $\dot{y}_{DM}(mT_2)$ трансформируется в полосовой сигнал $\dot{y}(mT_2)$ относительно центральной частоты ω_0 . Для восстановления промежуточной комплексной «оггибающей» $\dot{y}_{DM}(mT_2)$ посредством режекции нежелательных высокочастотных составляющих используется двухканальный НЧ фильтр-интерполятор, который в идеальном случае должен иметь частотную характеристику (2.10). Переход от комплексного сигнала $\dot{y}(mT_2)$ к действительному $y(mT_2) = \text{Re}[\dot{y}(mT_2)]$ приводит к появлению симметричной полосы в области отрицательных частот.

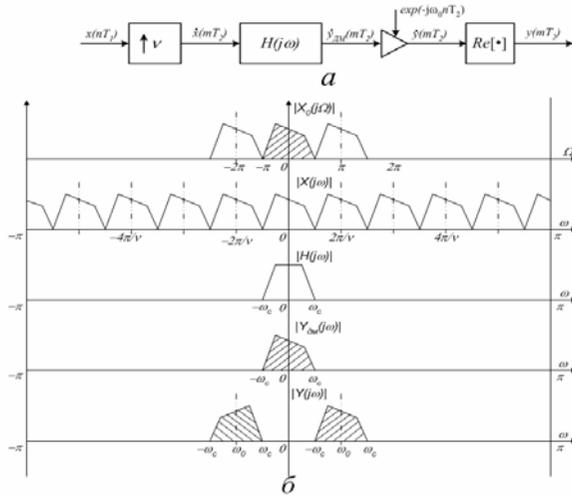


Рис. 2.9 Цифровой полосовой фильтр-интерполятор, использующий квадратурную модуляцию: а — структурная схема; б — спектры сигналов в различных точках

2.3 Методы синтеза узкополосного фильтра на основе децимации и интерполяции цифровых сигналов

Удобным способом построения полосовых фильтров-дециматоров и фильтров-интерполяторов, как было показано в предыдущем разделе, является использование квадратурной модуляции/демодуляции, позволяющей перейти от проектирования полосового фильтра к проектированию НЧ фильтра. Покажем, что в рамках структуры с квадратурной модуляцией по схеме Уивера синтез цифрового полосового фильтра с заданными свойствами частотной избирательности относительно некоторой центральной частоты ω_0 может быть сведен к синтезу эквивалентного НЧ фильтра. Впервые этот вывод применительно к цифровым системам был представлен в [24].

Пусть $x(nT_1)$ — дискретный входной сигнал; $X(z)$ — изображение сигнала $x(nT_1)$ в Z -области; $H(z)$ — передаточная функция НЧ фильтра с заданными свойствами частотной избирательности.

Пользуясь отображениями

$$z_1 = z \exp\{j\omega_0 T_1\} \text{ и } z_2 = z \exp\{-j\omega_0 T_1\},$$

перейдем к передаточной функции соответствующего цифрового полосового фильтра (ЦПФ) с центральной частотой ω_0 :

$$H_1(z) = [H(z e^{j\omega_0 T_1}) + H(z e^{-j\omega_0 T_1})]/2. \quad (2.14)$$

Запишем реакцию ЦПФ с передаточной функцией $H_1(z)$ на входной сигнал $x(nT_1)$:

$$y(nT_1) = F^{-1}\{X(z)H_1(z)\},$$

где $F^{-1}\{\cdot\}$ — обратное Z -преобразование.

Введем два комплексных сигнала:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(nT_1) &= x(nT_1)e^{-j\omega_0 nT_1}; \\ \dot{x}_2(nT_1) &= x(nT_1)e^{j\omega_0 nT_1}. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Реакция НЧ фильтра с передаточной функцией $H(z)$ на сигналы $\dot{x}_1(nT_1)$ и $\dot{x}_2(nT_1)$ имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{w}_1(nT_1) &= F^{-1}\{X(z e^{j\omega_0 T_1})H(z)\}; \\ \dot{w}_2(nT_1) &= F^{-1}\{X(z e^{-j\omega_0 T_1})H(z)\}. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Преобразуем полученные на выходе НЧ фильтра сигналы $\dot{w}_1(nT_1)$ и $\dot{w}_2(nT_1)$ в соответствии с теоремой о смещении изображения сигнала в частотной области на величину ω_0 и рассмотрим сумму сигналов на выходе двух параллельно работающих устройств, каждое из которых представляет собой последовательное соединение НЧ фильтра и соответствующих преобразователей на его входе и выходе:

$$\dot{y}(nT_1) = \dot{w}_1(nT_1)e^{j\omega_0 nT_1} + \dot{w}_2(nT_1)e^{-j\omega_0 nT_1}. \quad (2.17)$$

Нетрудно доказать, что дискретный сигнал $\dot{y}(nT_1)$ совпадает с точностью до постоянного множителя в моменты времени $t = nT_1$ с сигнала-

лом $y(nT_1)$ на выходе исходного ЦПФ с передаточной функцией $H_1(z)$, когда на вход последнего поступает сигнал $x(nT_1)$. С учетом (2.16) выражение (2.17) преобразуем к виду

$$y(nT_1) = F^{-1} \{ X(z) [H(z e^{-j\omega_0 T_1}) + H(z e^{j\omega_0 T_1})] \} = 2F^{-1} \{ X(z) [H_1(z)] \} = 2y(nT_1). \quad (2.18)$$

Таким образом, рассматриваемое устройство, реализующее выражения (2.15) — (2.17), эквивалентно исходному ЦПФ с передаточной функцией $H_1(z)$. Преобразования амплитудного спектра входного сигнала при его прохождении через ЦПФ, построенный по обычной схеме в соответствии с выражением (2.14), иллюстрирует рис. 2.10, а и по схеме с квадратурной модуляцией по алгоритму (2.15) — (2.17) — рис. 2.10, б.

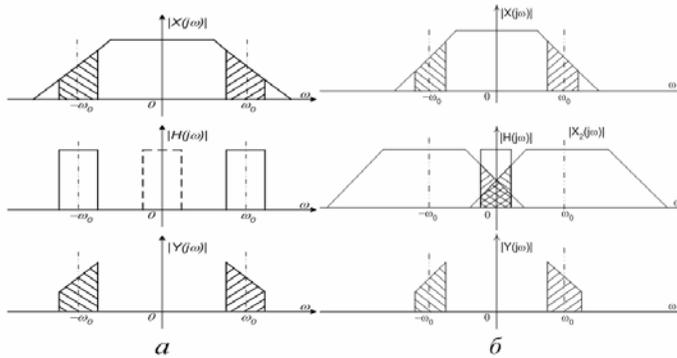


Рис. 2.10 Преобразование спектров сигналов: а — по обычной схеме; б — по схеме на основе квадратурной модуляции

Раскроем структуру ЦПФ, описываемого выражениями (2.15) — (2.17), исключив промежуточные переменные. Подставив (2.15) и (2.16) в выражение (2.17) с учетом (2.18), получим

$$y(nT_1) = \frac{1}{2} [x(nT_1) e^{-j\omega_0 nT_1} ** h(nT_1)] e^{j\omega_0 nT_1} + \frac{1}{2} [x(nT_1) e^{j\omega_0 nT_1} ** h(nT_1)] e^{-j\omega_0 nT_1}, \quad (2.19)$$

где $h(nT_1)$ — импульсная характеристика НЧ фильтра, Z — преобразование которой определяется передаточной функцией $H(z)$; ** — операция линейной свертки.

С помощью тригонометрических соотношений

$$e^{\pm j\omega_0 nT_1} = \cos \omega_0 nT_1 \pm j \sin \omega_0 nT_1$$

выражение (2.19) приведем к виду

$$y(nT_1) = [x(nT_1) \cos \omega_0 nT_1 ** h(nT_1)] \cos \omega_0 nT_1 + [x(nT_1) \sin \omega_0 nT_1 ** h(nT_1)] \sin \omega_0 nT_1. \quad (2.20)$$

Структурная схема, реализующая ЦПФ по выражению (2.20), представлена на рис. 2.11. Таким образом, используя структуру с квадратурной модуляцией, можно перейти от синтеза полосового фильтра к синтезу НЧ фильтра. Поэтому в дальнейшем будем рассматривать синтез структур фильтров частотной селекции на основе эффектов децимации и интерполяции только применительно к НЧ фильтру.

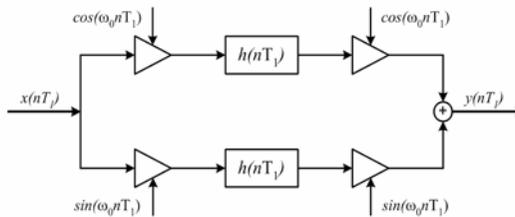


Рис. 2.11 Структурная схема ЦПФ с квадратурной модуляцией

Рассмотрим задачу синтеза структуры узкополосного НЧ фильтра с линейной ФЧХ в классе фильтров с конечной памятью. Пусть требуется синтезировать цифровой фильтр, отвечающий следующим свойствам частотной избирательности (рис. 2.12): ω_{c1} , ω_{c2} — частоты среза полосы пропускания и зоны непрозрачности; $\varepsilon_{1\text{доп}}$, $\varepsilon_{2\text{доп}}$ — допустимая неравномерность АЧХ фильтра в полосе пропускания и допустимый уровень боковых лепестков в зоне непрозрачности (затухание в полосе непропускания).

Для оценки порядка оптимального КП-фильтра воспользуемся следующим выражением:

$$N = \alpha \beta L(\varepsilon_{1\text{доп}}, \varepsilon_{2\text{доп}}), \quad (2.21)$$

где $\alpha = \omega_{c1} / (\omega_{c2} - \omega_{c1})$ — показатель прямоугольности АЧХ; $\beta = 2\pi / \omega_{c1}$ — показатель узкополосности фильтра; $L(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ — показатель частотной избирательности.

На основе экспериментальных данных по очень большому числу оптимальных фильтров было получено эмпирическое соотношение, связывающее параметры $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ проектируемого фильтра с показателем его частотной избирательности [79]:

$$L(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = [a_1(\lg \varepsilon_1)^2 + a_2 \lg \varepsilon_1 + a_3] \lg \varepsilon_2 + [a_4(\lg \varepsilon_1)^2 + a_5 \lg \varepsilon_1 + a_6],$$

где $a_1 = 5,309 \cdot 10^{-3}$; $a_2 = 7,114 \cdot 10^{-2}$; $a_3 = -4,761 \cdot 10^{-1}$;

$$a_4 = -266 \cdot 10^{-3}; \quad a_5 = -5,941 \cdot 10^{-1}; \quad a_6 = -4,278 \cdot 10^{-1}.$$

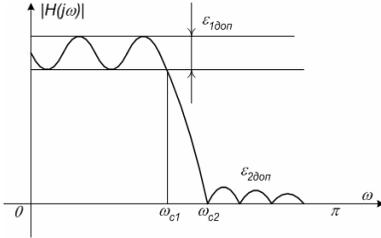


Рис. 2.12 АЧХ низкочастотного фильтра

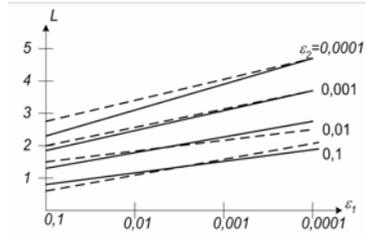


Рис. 2.13 Аппроксимация показателя частотной избирательности

Показатель частотной избирательности $L(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ при изменении параметров ε_1 и ε_2 в диапазоне $10^{-1} \dots 10^{-4}$, что отвечает фактически большинству используемых на практике вариантов, принимает значения от 1 до 5 и может быть аппроксимирован выражением [80]

$$L^*(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = -\frac{2}{3} \lg 10 \varepsilon_1 \varepsilon_2. \quad (2.22)$$

На рис. 2.13 сплошной линией представлены функциональные зависимости $L(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ для некоторой совокупности параметров ε_2 , а штриховой линией — их аппроксимация в форме (2.22), предложенная Белланже [80].

Выражение (2.21) показывает, что затраты на реализацию узкополосного КП фильтра, пропорциональные его порядку N , определяются главным образом двумя параметрами: показателем узкополосности β и показателем прямоугольности АЧХ α (при повышении требования к прямоугольности АЧХ фильтра показатель $\alpha \gg 1$). Поэтому поиск эффективных путей минимизации общих вычислительных и аппаратных затрат должен быть направлен на «снятие» или, по крайней мере, существенное уменьшение пропорциональной зависимости порядка N от показателей α и β .

В основе нового подхода лежит фундаментальная идея об использовании вторичной дискретизации при построении структуры узкополосного фильтра, которая впервые была предложена в [15, 16, 21].

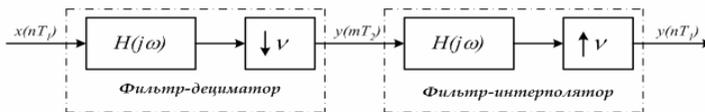
Сущность идеи заключается в следующем. Узкополосный фильтр, реализующий идеальные свойства частотной избирательности в полосе пропускания, представим в виде последовательного соединения фильтра-дециматора с коэффициентом прореживания:

$$\nu = f_{кв1} / f_{кв2} \leq 2\pi / (\omega_{c1} + \omega_{c2}) = \alpha\beta / (2\alpha + 1)$$

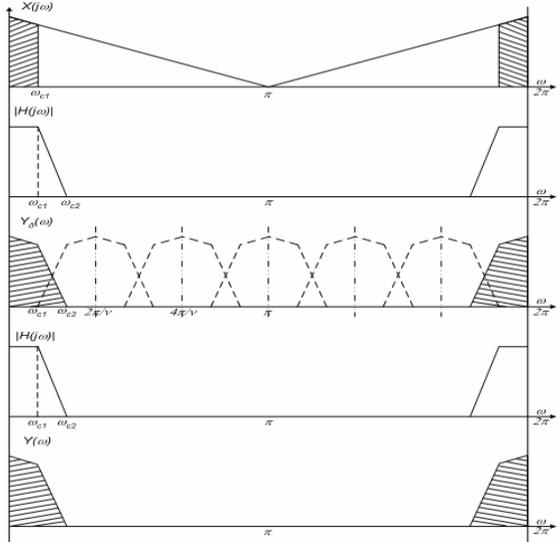
и фильтра-интерполятора с тем же коэффициентом интерполяции, как показано на рис. 2.14.

Сигнал $x(nT_1)$ поступает на вход фильтра-дециматора с частотной характеристикой $H(j\omega)$, определяющей заданные свойства частотной избирательности проектируемого НЧ фильтра. Фильтр-дециматор понижает частоту дискретизации выходного сигнала $y(mT_2)$ в ν раз, предварительно отфильтровав все высокочастотные составляющие, расположенные за полосой пропускания. Фильтр-интерполятор с той же функцией передачи $H(j\omega)$ восстанавливает промежуточные отсчеты, повышая частоту дискретизации выходного сигнала $y(nT_1)$ до исходной частоты $f_{кв1}$.

Наличие боковых лепестков АЧХ в полосе пропускания реальных фильтра-дециматора и фильтра-интерполятора приводит к погрешности преобразования, но при достаточно высокой частотной избирательности фильтров влияние этой погрешности незначительно, и данный способ можно рекомендовать как эффективный подход к построению структуры узкополосного фильтра. Действительно, вычислительные затраты, связанные с реализацией фильтра-дециматора и фильтра-интерполятора, уменьшаются в ν раз по отношению к исходной структуре проектируемого НЧ фильтра, так как фильтр-дециматор вычисляет только каждый ν -й отсчет выходной последовательности $y(mT_2)$, а фильтр-интерполятор работает с прореженной в ν раз последовательностью входных данных $y(mT_2)$. Вместе с тем при использовании прямого способа вычисления линейных сверток (2.2) и (2.12) в рамках представленной на рис. 2.14 структуры по-прежнему требуются большие аппаратные затраты, обусловленные сохраняющимся высоким порядком фильтров и, как следствие, большим объемом памяти данных и коэффициентов. Поэтому основной путь уменьшения общих аппаратных и вычислительных затрат связан с синтезом эффективных структур многоступенчатой децимации и интерполяции.



а



б

Рис. 2.14 Построение НЧ фильтра на основе вторичной дискретизации: а — структурная схема; б — спектры сигналов в различных точках

Известны три подхода к синтезу многоступенчатых структур. Первый подход был предложен и получил развитие в работах М. Белланже [14]. Идея метода заключается в каскадном включении предельно простых фильтров-дециматоров и фильтров-интерполяторов, каждый из которых понижает или соответственно повышает частоту дискретизации в 2 раза. Если максимально допустимое значение коэффициента прореживания равно ν , то число каскадов фильтра-дециматора и число каскадов фильтра-интерполятора определяется выражением $k = \lceil \log_2 \nu \rceil$, где $\lceil \cdot \rceil$ — целая часть числа. При этом общее число фильт-

ров равно $(2k + 1)$ с учетом дополнительного фильтра, работающего на предельно низкой частоте дискретизации.

Рис. 2.15 иллюстрирует построение структуры узкополосного НЧ фильтра по Белланже на примере, когда максимально допустимое значение коэффициента прореживания $\nu = 14$. Входной сигнал $x(nT_1)$ преобразуется первым фильтром-дециматором $H_1(j\omega)$ в сигнал $x_1(nT_2)$. Сигнал $x_1(nT_2)$, в свою очередь, преобразуется вторым фильтром-дециматором с функцией передачи $H_2(j\omega)$, работающим на уменьшенной в 2 раза частоте дискретизации, в сигнал $x_2(nT_3)$, а последний — в сигнал $x_2(nT_4)$ фильтром-дециматором с функцией передачи $H_3(j\omega)$, работающим на частоте дискретизации, в 4 раза меньшей частоты дискретизации сигнала на входе НЧ фильтра. И наконец, окончательное формирование частотной характеристики преобразуемого фильтра завершает фильтр с частотной характеристикой $H_0(j\omega)$, работающий на частоте дискретизации, в 8 раз меньшей частоты дискретизации на входе системы. Последующие три каскада фильтров-интерполяторов с частотными характеристиками $H_3(j\omega)$, $H_2(j\omega)$, $H_1(j\omega)$ последовательно восстанавливают частоту дискретизации входного сигнала $y(nT_1)$.

Первый фильтр-дециматор (ФД₁) имеет частотную характеристику $H_1(j\omega)$ с предельно широкой переходной зоной АЧХ: $(\omega_{c21} - \omega_{c11}) \rightarrow \pi$ и $\alpha\beta \rightarrow 2$, поэтому его порядок N_1 уменьшается по отношению к порядку N проектируемого узкополосного фильтра приблизительно в $\alpha\beta/2$ раз.

Следующий за ним фильтр-дециматор (ФД₂) с частотной характеристикой $H_2(j\omega)$ имеет в 2 раза меньшую ширину переходной зоны АЧХ, но поскольку частота дискретизации сигнала на его входе в 2 раза меньше частоты дискретизации на входе предыдущего каскада, то их порядки N_1 и N_2 приблизительно совпадают (при увеличении в 2 раза показателя прямоугельности α в 2 раза уменьшается показатель узкополосности β), составляя малую величину по отношению к порядку N . Такая же закономерность прослеживается и для всех остальных фильтров-дециматоров, каждый из которых понижает частоту дискретизации входного сигнала в 2 раза и имеет порядок, приблизительно в $\alpha\beta/2$ раз меньший по отношению к порядку N проектируе-

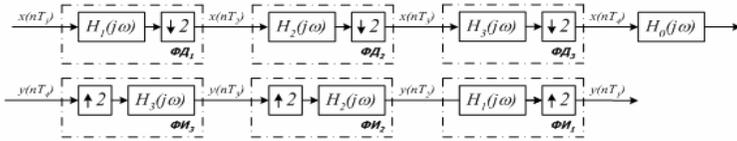
мого фильтра. Исключение составляет НЧ фильтр $H_0(j\omega)$, работающий на предельно низкой частоте дискретизации.

Порядок N_0 этого фильтра определяется показателем прямоугольности АЧХ проектируемого фильтра, но поскольку показатель его узкополосности уменьшается в V раз, то в V раз уменьшается и порядок формирующего фильтра

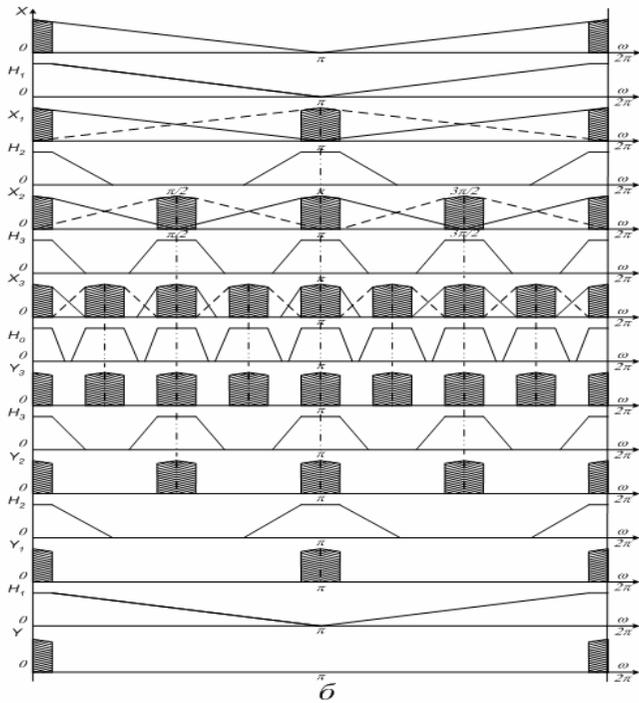
$$N_0 = \frac{\alpha\beta}{V} L(\varepsilon_{1\text{доп}}, \varepsilon_{2\text{доп}}) = N/V.$$

Цепочка фильтров-интерполяторов (ФИ_i), каждый из которых повышает частоту дискретизации в 2 раза, строится из фильтров с частотными характеристиками $H_3(j\omega)$, $H_2(j\omega)$ и $H_1(j\omega)$, подобными частотным характеристикам соответствующих фильтров-дециматоров (ФД_i). При этом общие затраты, связанные с децимацией и интерполяцией, удваиваются, не влияя существенно на общий показатель эффективности рассматриваемого подхода.

Несмотря на очевидные достоинства, метод Белланже имеет и ряд недостатков, особо проявляющихся при увеличении числа ступеней преобразования. С увеличением числа каскадно соединенных фильтров-дециматоров и фильтров-интерполяторов вследствие неидеальности их частотных характеристик пропорционально растет ошибка ε_1 воспроизведения заданной частотной характеристики в полосе пропускания. Чтобы «удержать» ее в допустимых пределах $\varepsilon_{1\text{доп}}$, приходится накладывать более жесткие ограничения на точность воспроизведения желаемых характеристик фильтров-дециматоров и фильтров-интерполяторов, что, в свою очередь, приводит к увеличению их порядков. Другим фактором, заставляющим искать новые подходы к построению эффективных структур узкополосных фильтров, является дополнительное ограничение на выбор коэффициента прореживания V . Коэффициент прореживания V должен быть кратным степени двойки. Например, если максимально допустимое значение коэффициента прореживания $v_{\text{max}}=30$, то фактическое его значение приходится принимать равным $v=16$, что повышает относительные затраты, связанные с реализацией НЧ фильтра с функцией передачи $H_0(j\omega)$, формирующего требуемые свойства частотной избирательности в переходной зоне АЧХ всей системы фильтров в целом.

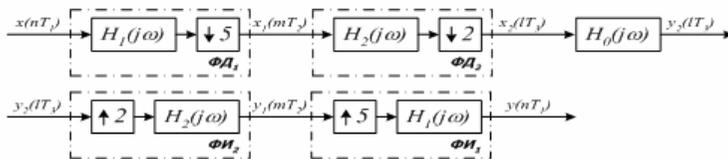


а

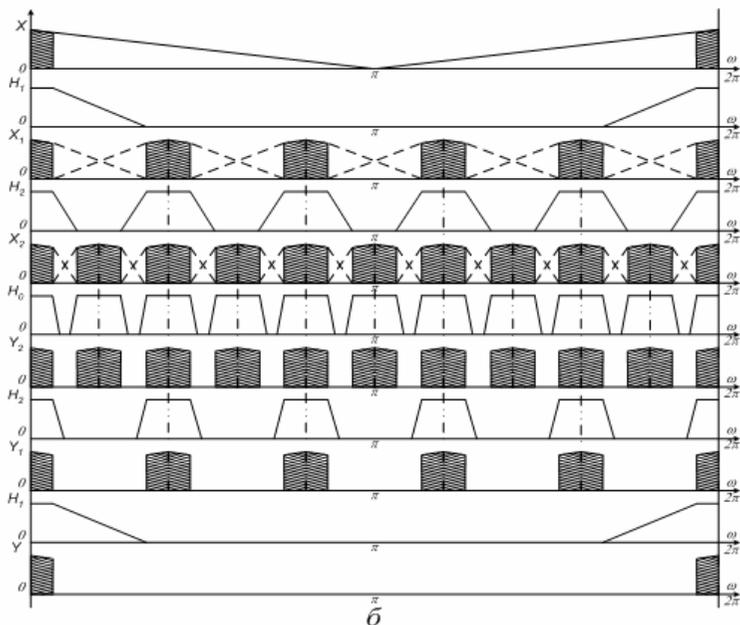


б

Рис. 2.15 Построение узкополосного НЧ фильтра по Белланже: а — структурная схема; б — спектры сигналов в различных точках



а



б

Рис. 2.16 Построение узкополосного НЧ фильтра по Крошье — Рабинеру: а — структурная схема; б — спектры сигналов в различных точках

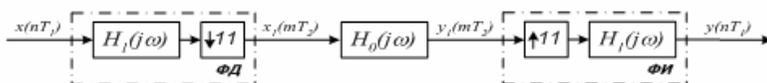
Р. Крошье, Л. Рабинер [16] и Р. Шилеви [17] подошли к этой проблеме с более общих позиций — как к проблеме оптимального синтеза многоступенчатой структуры узкополосного НЧ фильтра. С позиции постановки задачи оптимального синтеза число каскадов фильтров-дециматоров и фильтров-интерполяторов, а также значения коэффициентов прореживания на каждой ступени могут быть произвольными, обеспечивая в совокупности построение оптимальной структуры по

критерию минимума вычислительных затрат или минимума ячеек памяти данных и коэффициентов. На рис. 2.16 дан пример построения оптимальной многоступенчатой структуры по Крошье—Рабинеру. Входной сигнал $x(nT_1)$ преобразуется первым фильтром-дециматором ФД₁, имеющим частотную характеристику $H_1(j\omega)$, в сигнал $x_1(mT_2)$ с понижением частоты дискретизации в $\nu_1=5$ раз. Вторым фильтром-дециматором (ФД₂), имеющим частотную характеристику $H_2(j\omega)$, формирует требуемые свойства частотной избирательности в переходной зоне первого фильтра-дециматора и понижает частоту дискретизации в $\nu_2=2$ раза. При построении структуры НЧ фильтра с высокой прямоугольностью АЧХ в оптимальную структуру дополнительно может включаться формирующий фильтр с функцией передачи $H_0(j\omega)$, работающий на предельно низкой частоте дискретизации. Фильтры-интерполяторы ФИ₁ и ФИ₂, свойства частотной избирательности которых описываются теми же характеристиками $H_1(j\omega)$ и $H_2(j\omega)$, последовательно повышают частоту дискретизации сигнала $y_2(mT_3)$ до исходной частоты дискретизации выходного сигнала $y(nT_1)$.

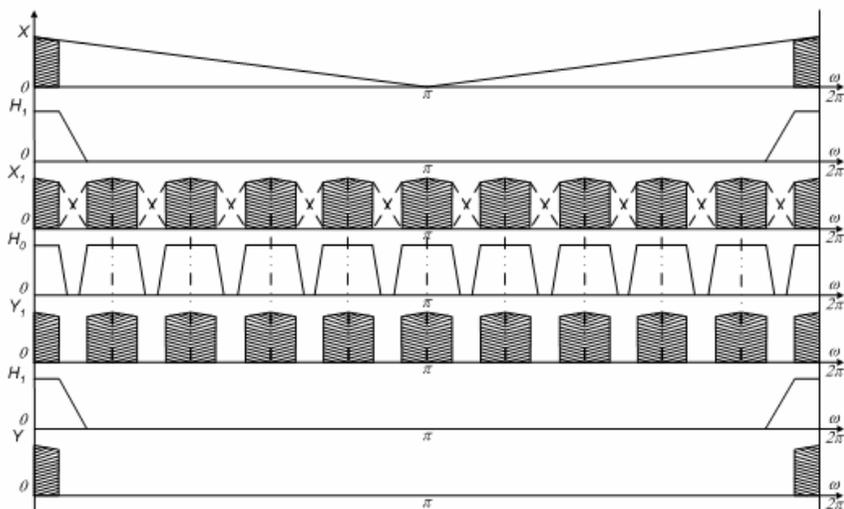
Существенное уменьшение общих затрат на реализацию узкополосного фильтра по оптимальной структуре связано, как и в предыдущем случае, во-первых, со значительным уменьшением суммы порядков всех фильтров, входящих в многоступенчатую структуру, по отношению к порядку N проектируемого фильтра и, во-вторых, с тем, что вычислительные затраты на реализацию фильтров-дециматоров и фильтров-интерполяторов уменьшаются пропорционально коэффициенту прореживания ν . Оценки эффективности рассмотренного подхода будут представлены в последующих разделах, посвященных вопросам оптимального синтеза многоступенчатых структур. В заключение представим еще один подход к построению структуры узкополосного НЧ фильтра на основе вторичной дискретизации, впервые предложенной в [21, 22].

В основе подхода [22] лежит та же идея промежуточного понижения частоты дискретизации с использованием входного фильтра-дециматора и выходного фильтра-интерполятора. Отличительная особенность состоит в оригинальном способе построения структуры фильтра-дециматора. Как правило, общая структура фильтра строится по двухступенчатой схеме, представленной на рис. 2.17. На первой ступени фильтр-дециматор ФД, имеющий частотную характеристику $H_1(j\omega)$, понижает частоту дискретизации в $\nu=11$ раз (как будет пока-

зано ниже, для рассматриваемого примера это значение коэффициента прореживания является оптимальным по критерию минимума числа ячеек оперативной памяти). На второй ступени основной фильтр, имеющий частотную характеристику $H_0(j\omega)$, формирует требуемую прямоугольность АЧХ проектируемого фильтра. Для узкополосного фильтра с показателем прямоугольности АЧХ $\alpha < 1$ вторая ступень оказывается избыточной, и фильтр-дециматор одновременно является и формирующим фильтром. Фильтр-интерpolator (ФИ), имеющий частотную характеристику $H_1(j\omega)$, подавляет все боковые составляющие спектра $Y_1(\omega)$ прореженного сигнала $y_1(mT_2)$ и тем самым повышает частоту дискретизации выходного сигнала $y(nT_1)$ до исходной.



a



б

Рис. 2.17 Построение узкополосного НЧ фильтра по структуре с параллельными накопителями: а — структурная схема; б — спектры сигналов в различных точках

Использование структуры, представленной на рис. 2.17, а, позволяет уменьшить в ν раз порядок формирующего фильтра $H_0(j\omega)$ по отношению к порядку N проектируемого фильтра и тем самым в ν раз снизить затраты на его реализацию по числу требуемых ячеек памяти данных и коэффициентов. При этом в ν^2 раз уменьшается требуемая скорость обработки: в ν раз за счет уменьшения порядка фильтра и еще в ν раз за счет увеличения интервала обработки. Затраты на реализацию фильтра-дециматора и фильтра-интерполятора будут также существенно меньше по отношению к затратам на реализацию исходного фильтра N -го порядка. Во-первых, вследствие того, что преобразующие фильтры работают с прореженной в ν раз последовательностью входных (ФИ) или выходных (ФД) данных, и, во-вторых, вследствие уменьшения порядка фильтров ФД и ФИ за счет расширения переходной зоны их АЧХ (рис. 2.17, б). Однако, если требования к скорости обработки снижаются пропорционально обоим факторам, то требуемое число ячеек оперативной памяти уменьшается пропорционально уменьшению только порядка фильтров ФД и ФИ. Обеспечить снижение затрат на их реализацию пропорционально коэффициенту прореживания ν в рамках прямой формы построения фильтра удастся только для фильтра-интерполятора, так как в основной памяти фильтра ФИ хранится прореженная последовательность входных данных. Чтобы уменьшить в ν раз требуемое число ячеек основной памяти фильтра-дециматора, в [21] была предложена параллельная форма построения его структуры.

Идея построения параллельной формы фильтра-дециматора N_1 -го порядка состоит в использовании параллельного набора из N_1/ν накопителей, соединенных по структуре, представленной на рис. 2.18, а. Здесь $h_i(n)$, $i = 0, (N_1/\nu - 1)$ — импульсная характеристика (весовая функция) i -го накопителя, определяемая из импульсной характеристики фильтра-дециматора путем сдвига на $i\nu$ отсчетов.

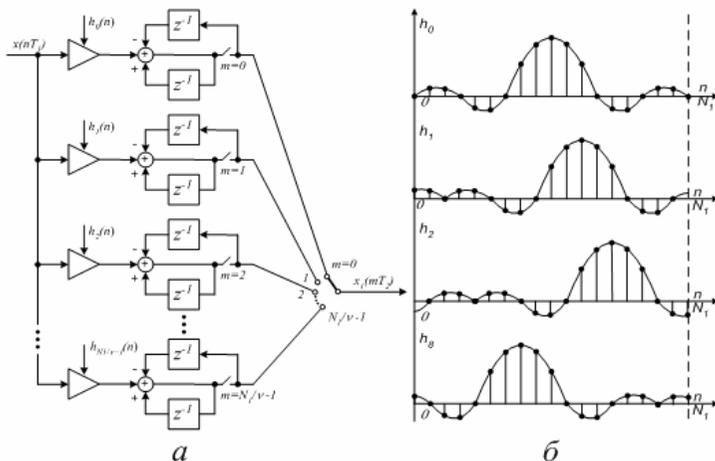


Рис. 2.18 Параллельная форма построения фильтра-дециматора: а — структурная схема; б — последовательность весовых функций

Рис. 2.18, б иллюстрирует способ получения весовых функций $h_i(n)$, $i = 0, (N_1/\nu - 1)$, при $N_1 = 18$ и $\nu = 2$. Текущий отсчет входного сигнала $x(nT_1)$ подается на входы одновременно всех N_1/ν параллельных накопителей. Каждый i -й накопитель в текущем периоде дискретизации T_1 входного сигнала $x(nT_1)$ реализует один цикл обработки, заключающийся в добавлении к уже накопленной в регистра-аккумуляторе сумме произведений нового значения произведения $x(nT_1)h_i(n)$. По окончании накопления N_1 произведений замыкается i -й выходной ключ и выходной сигнал $x_1(mT_2)$, соответствующий моменту времени $m = i$, считывается из i -го регистра-аккумулятора на выход фильтра. Одновременно обнуляется содержимое i -го регистра-аккумулятора, что автоматически обеспечивает его готовность к накоплению суммы произведений на последующем интервале вычислений длительностью N_1T_1 . Выходной коммутатор последовательно с периодом N_1T_1 и синхронно с работой выходных ключей опрашивает выходы всех N_1/ν регистров-аккумуляторов. Каждый из N_1/ν накопителей строится по аналогичной схеме и использует одну и ту же импульсную характеристику $h(n)$ для формирования текущей последова-

тельности значений весовой функции $h_i(n)$, $i = \overline{0, (N_1/\nu - 1)}$. Весовая функция $h_i(n)$ получается из исходной импульсной характеристики $h(n)$ путем ее сдвига на $i\nu$ периодов дискретизации (рис. 2.18, б). Таким образом, каждый i -й накопитель обеспечивает формирование выходного результата фильтра в iT_2 -й момент времени с периодом N_1T_1 . При этом общее число регистров-аккумуляторов в ν раз меньше требуемого числа регистров памяти данных прямой формы построения структуры фильтра-дециматора. Вместе с тем память коэффициентов фильтра-дециматора по-прежнему определяется его порядком N_1 . Поэтому в тех случаях, когда память данных и память коэффициентов равноценны, общий выигрыш в минимизации емкости основной памяти не столь существен.

Итак, рассмотрены в общих чертах три основных подхода к синтезу многоступенчатых структур на основе вторичной дискретизации. Ни один из методов не является универсальным. Какой из них будет наилучшим, определяют конкретные условия реализации. На практике чаще всего используется какая-либо комбинация из описанных методов.

2.4 Синтез многоступенчатой структуры на основе полуполосных фильтров

Полуполосным называется фильтр, функция передачи которого симметрична относительно частоты $\omega = \pi/2$:

$$H(j\omega) = 1 - H[j(\pi - \omega)], \quad (2.23)$$

причем на этой частоте $H(j\omega) = 0,5$. Полуполосный фильтр, частотная характеристика которого отвечает ограничению (2.23), обладает одним замечательным свойством — его импульсная характеристика $h(nT)$ является симметричной и пересекает ось абсцисс в моменты времени, кратные удвоенному значению периода дискретизации T , и, следовательно, принимает нулевые значения при всех четных n , кроме $n=0$ (рис. 2.19). Здесь $\omega_c = \pi/2$ — частота среза полосы пропускания на уровне — 6 дБ, $\Delta\omega$ — ширина переходной зоны АЧХ.

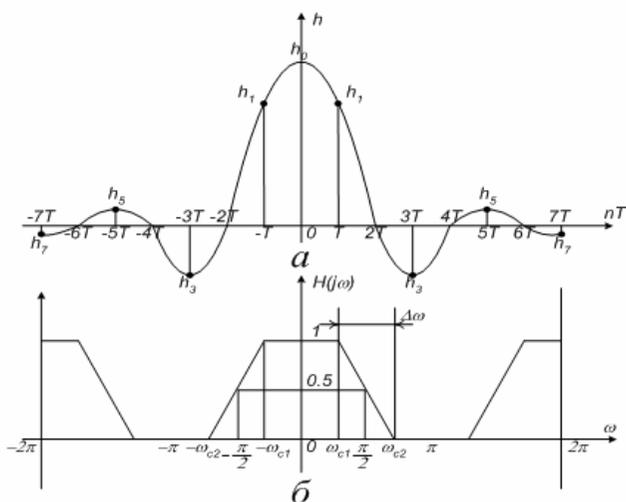


Рис. 2.19 Характеристики полуполосного фильтра: а — импульсная; б — частотная

Вычисление линейной свертки последовательности входных данных $x(nT)$ и последовательности отсчетов импульсной характеристики $h(nT)$ полуполосного фильтра может быть представлено в форме

$$y(nT) = h(0)x(nT) + \sum_{i=-M/2}^{M/2} x[(n-2i+1)T]h[(2i-1)T], \quad (2.24)$$

где M - число ненулевых отсчетов импульсной характеристики полуполосного фильтра.

Сложность реализации фильтра в форме (2.24) определяется числом коэффициентов M , которое задает порядок фильтра и определяет свойства его частотной избирательности. Поскольку полуполосный фильтр должен иметь симметричную частотную характеристику, допустимая неравномерность АЧХ задается одинаковой для полосы пропускания $|\Delta\omega| \leq \omega_c - \Delta\omega/2$ и полосы непропускания $|\Delta\omega| \geq \omega_c + \Delta\omega/2$.

На рис. 2.20 для числа коэффициентов M от 1 до 16 представлены функции достижимой точности воспроизведения желаемой частотной характеристики полуполосного фильтра, а следовательно, и его частотной избирательности в зависимости от отношения параметров $\Delta\omega$ и ω_c , определяющих прямоугольность АЧХ фильтра. Представленные

зависимости, которые впервые были получены в [81], позволяют оценить порядок полуполосного фильтра при заданных требованиях к его частотной избирательности.

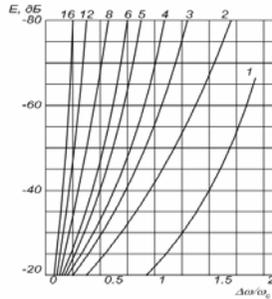


Рис. 2.20 Функции частотной избирательности полуполосного фильтра для различного числа коэффициентов M

Одним из первых, кто обратил внимание на замечательные свойства полуполосных фильтров и начал их использовать при построении многоступенчатых структур, был М. Белланже [82]. Уже в первой своей работе по многоступенчатым структурам [14] он показал высокую эффективность применения полуполосных фильтров для двукратного понижения или повышения частоты дискретизации. Наиболее общие результаты и выводы представлены в [80].

Покажем, что для понижения частоты дискретизации в ν раз (число, равное степени двойки) применение полуполосных фильтров дает минимум вычислительных затрат. Чтобы доказать это, достаточно показать, что если коэффициент прореживания $\nu = 2m$, то понижение частоты дискретизации в два этапа с применением полуполосного и обычного фильтров-дециматоров с коэффициентами прореживания $\nu_1 = 2$ и $\nu_1 = m$ требует меньшего объема вычислительных затрат по отношению к прямой одноступенчатой форме построения фильтра-дециматора с коэффициентом прореживания $\nu = 2m$.

В качестве оценки вычислительных затрат примем требуемое число операций умножения-накопления на аккумуляторе, выполняемых за $1c$ при реализации алгоритма линейной свертки фильтром N -го порядка, работающим в реальном времени на частоте дискретизации $f_{кв}$:

$$R_T = Nf_{кв} = \alpha\beta L(\varepsilon_{1дон}, \varepsilon_{2дон})f_{кв}.$$

Уменьшение частоты дискретизации на выходе фильтра в $\nu = 2m$ раз приводит к пропорциональному уменьшению требуемой скорости обработки:

$$R_T = \alpha \beta L(\varepsilon_{1\text{доп}}, \varepsilon_{2\text{доп}}) \frac{f_{кв}}{2m}. \quad (2.25)$$

Рассмотрим двухступенчатую форму построения фильтра-дециматора с использованием на первой ступени полуполосного фильтра (рис. 2.21). Фильтр-дециматор первой ступени с функцией передачи $H_1(j\omega)$ понижает частоту дискретизации в 2 раза, а фильтр-дециматор второй ступени с функцией передачи $H_2(j\omega)$ — в m раз.

Учитывая, что каждый второй отсчет импульсной характеристики полуполосного фильтра $H_1(j\omega)$ является нулевым, оценку вычислительных затрат на первой ступени запишем в виде

$$R_{T1} = \frac{N_1}{2} \frac{f_{кв}}{2} = \alpha_1 \beta_1 L_1(\varepsilon_0, \varepsilon_0) \frac{f_{кв}}{4}, \quad (2.26)$$

где $\alpha_1 = \omega_{c1} / \Delta\omega_1 = \omega_{c1} / (\pi - 2\omega_{c1})$ — показатель прямоугольности АЧХ фильтра-дециматора первой ступени; $\beta_1 = 2\pi / \omega_{c1} = \beta$ — показатель узкополосности фильтра-дециматора первой ступени, совпадающий с показателем узкополосности β проектируемого фильтра; $L(\varepsilon_0, \varepsilon_0)$, где $\varepsilon_0 = \min(\varepsilon_{1\text{доп}}/2, \varepsilon_{2\text{доп}})$, — показатель частотной избирательности фильтра-дециматора первой ступени.

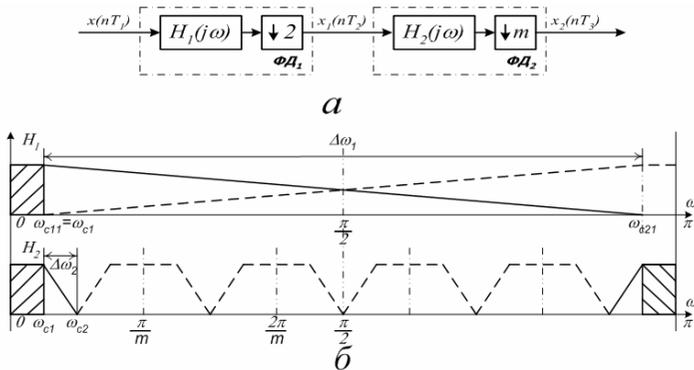


Рис. 2.21 Двухступенчатая форма построения фильтра-дециматора с использованием полуполосных фильтров: а — структурная схема; б — АЧХ фильтров

Фильтр-дециматор второй ступени $H_2(j\omega)$, работающий на пониженной частоте дискретизации, потребует следующей скорости обработки:

$$R_{T2} = N_2 \frac{f_{кв}}{2m} = \alpha\beta_2 L_2(\varepsilon_{1\text{дон}}/2, \varepsilon_{2\text{дон}}) \frac{f_{кв}}{2m}, \quad (2.27)$$

где $\beta_2 = \pi/\omega_{c1} = \beta/2$ — показатель узкополосности фильтра-дециматора второй ступени; $L_2(\varepsilon_{1\text{дон}}/2, \varepsilon_{2\text{дон}})$ — показатель частотной избирательности фильтра-дециматора второй ступени.

Как показывают аппроксимационные зависимости (см. рис. 2.13), функция $L(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ относительно малочувствительна к изменению параметров ε_1 и ε_2 , т.е.

$$L(\varepsilon_{1\text{дон}}, \varepsilon_{2\text{дон}}) \approx L_1(\varepsilon_0, \varepsilon_0) \approx L_2(\varepsilon_{1\text{дон}}/2, \varepsilon_{2\text{дон}}),$$

и, следовательно, с учетом выражений (2.26) и (2.27)

$$R_{T1} + R_{T2} \leq R_T, \quad (2.28)$$

если $\alpha/\alpha_1 > m$ или $\Delta\omega_1/\Delta\omega_2 \geq m$.

Из ограничений, накладываемых на выбор параметров ω_{c21} и m (см. рис. 2.21, б), имеют место следующие неравенства: $\Delta\omega_1 \geq \pi - \pi/m$ и $\Delta\omega_2 \leq \pi/2m$. Отсюда $\Delta\omega_1/\Delta\omega_2 \geq 2(m-1)$ и, следовательно, неравенство (2.28) справедливо при всех $m \geq 2$. Таким образом, если коэффициент прореживания равен степени двойки $\nu = 2^m$, то использование m -каскадного соединения полуполосных фильтров-дециматоров дает наилучшее решение с точки зрения минимизации вычислительных затрат.

Найдем верхнюю границу оценки вычислительных затрат на реализацию m -каскадного соединения полуполосных фильтров-дециматоров. Пусть реализуется фильтр-дециматор с коэффициентом прореживания $\nu = 2^m$ и пусть $\varepsilon_{1\text{дон}}$ и $\varepsilon_{2\text{дон}}$ — допустимые значения отклонений АЧХ фильтра в полосе пропускания и зоне непрозрачности. Поскольку при m -каскадном соединении полуполосных фильтров результирующая неравномерность АЧХ в полосе пропускания растет пропорционально числу каскадов m , то выполнение заданного ограничения на отклонение $\varepsilon_{1\text{дон}}$ будет гарантировано, если допустимое значение отклонений АЧХ каждого полуполосного фильтра будет взято из условия $\varepsilon_{0\text{дон}} = \min(\varepsilon_{1\text{дон}}/m, \varepsilon_{2\text{дон}})$.

Оценку вычислительных затрат на реализацию первой ступени (2.28) представим в виде

$$R_{T1} = \alpha_1 \beta_1 L(\varepsilon_0, \varepsilon_0) \frac{f_{кв}}{4} = \frac{2\pi}{\Delta\omega_1} L(\varepsilon_0, \varepsilon_0) \frac{f_{кв}}{4},$$

где $\Delta\omega_1 = \pi - 2\omega_{c1}$ — ширина переходной зоны АЧХ (см. рис.2.21, а).

Из условия, гарантирующего отсутствие наложения боковых составляющих спектра сигнала в основной полосе частот при использовании вторичной дискретизации $2\pi/2^m \geq 2\omega_{c1}$, накладывается следующее ограничение на ширину переходной зоны АЧХ полуполосного фильтра-дециматора:

$$\Delta\omega_1 \geq \pi - 2\pi/2^m,$$

и, следовательно, $R_{Ti} \leq \frac{L(\varepsilon_0, \varepsilon_0)}{1/2 - 1/2^m} \frac{f_{кв}}{4}$.

Аналогично можно показать, что вычислительные затраты, связанные с реализацией i -й ступени фильтра-дециматора,

$$R_{Ti} \leq \frac{L(\varepsilon_0, \varepsilon_0)}{1/2^i - 1/2^m} \frac{f_{кв}}{2^i} \frac{1}{2^{i-1}} \frac{1}{2}, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

Таким образом, общий объем вычислительных затрат в единицу времени на реализацию m -каскадного соединения полуполосных фильтров-дециматоров не превышает следующего значения:

$$\sum_{i=1}^m R_{Ti} \leq L(\varepsilon_0, \varepsilon_0) f_{кв} \left(\sum_{i=1}^m \frac{1}{2^i} \frac{1}{1 - 2^{i-m}} \right) \approx L(\varepsilon_0, \varepsilon_0) f_{кв}. \quad (2.29)$$

Использование той же последовательности m полуполосных фильтров в качестве фильтров-интерполяторов дает аналогичный эффект при их каскадном соединении по восходящей многоступенчатой структуре. На каждой ступени полуполосный фильтр-интерполятор повышает частоту дискретизации в 2 раза, требуя при этом в 2 раза меньшую скорость обработки за счет «прореженности» его импульсной характеристики. При этом общий объем вычислительных затрат в единицу времени на реализацию всей структуры не превышает установленного выше граничного значения (2.29).

Таким образом, при построении многоступенчатой структуры ($m \gg 1$) узкополосного НЧ фильтра N -го порядка с использованием полуполосных фильтров-дециматоров и фильтров-интерполяторов для оценки требуемой скорости обработки можно воспользоваться приближенным выражением

$$R_T^* = 2L(\varepsilon_0, \varepsilon_0) f_{\kappa\beta} + \frac{N}{2^m} \frac{f_{\kappa\beta}}{2^m}, \quad (2.30)$$

где $\varepsilon_0 = \min(\varepsilon_{1\text{доп}}/2m+1, \varepsilon_{2\text{доп}})$.

Если заданы порядки N_i полуполосных фильтров на каждой i -й ступени преобразования, $i = \overline{1, m}$, то более точный результат оценки вычислительных затрат дает следующее выражение:

$$R_T = \frac{f_{\kappa\beta}}{2} \left[N_1 + \frac{N_2}{2} + \frac{N_3}{4} + \dots + \frac{N_m}{2^{m-1}} \right] + \frac{N}{2^m} \frac{f_{\kappa\beta}}{2^m} = \frac{f_{\kappa\beta}}{2} \sum_{i=1}^m \frac{N_i}{2^{i-1}} + \frac{f_{\kappa\beta}}{2^m} \frac{N}{2^m}. \quad (2.31)$$

Для заданных значений допустимого отклонения ε_0 и ширины переходной зоны АЧХ $\Delta\omega_i$ требуемый порядок $N_i = 2M_i + 1$ полуполосного фильтра на каждой i -й ступени преобразования можно рассчитать по графикам, представленным на рис. 2.20. Зная порядки фильтра N_i , нетрудно оценить и другие затраты, связанные с построением многоступенчатой структуры узкополосного НЧ фильтра.

Другим по значимости критерием качества при выборе структуры фильтра является требуемая емкость памяти данных, измеряемая обычно числом ячеек памяти, используемых для хранения входных, выходных данных и результатов промежуточных вычислений:

$$S = \sum_{i=1}^m N_i + N / 2^m. \quad (2.32)$$

Найдем аналитический способ вычисления оценок (2.31) и (2.32), не требующий применения графических зависимостей (см. рис. 2.20). Порядок i -го полуполосного фильтра представим в виде

$$\begin{aligned} N_i &= \alpha_i \beta_i L(\varepsilon_0, \varepsilon_0) \frac{\omega_{c1}}{\pi/2^{i-1} - 2\omega_{c1}} \frac{\beta}{2^{i-1}} L(\varepsilon_0, \varepsilon_0) = \frac{\beta L(\varepsilon_0, \varepsilon_0)}{\pi/\omega_{c1} - 2^i} = \\ &= \frac{\beta L(\varepsilon_0, \varepsilon_0)}{\beta/2 - 2^i} = \left(\frac{1}{2} - \frac{2^i}{\beta} \right)^{-1} L(\varepsilon_0, \varepsilon_0). \end{aligned} \quad (2.33)$$

Подставив (2.33) в выражения (2.31) и (2.32), получим

$$R_T = \sum_{i=1}^m \frac{1}{2^{i-1}} \left(\frac{1}{2} - \frac{2^i}{\beta} \right)^{-1} L(\varepsilon_0, \varepsilon_0) \frac{f_{\kappa\beta}}{2} + \alpha\beta L\left(\frac{\varepsilon_1}{2m+1}, \varepsilon_2\right) \frac{f_{\kappa\beta}}{2^{2m}}; \quad (2.34)$$

$$S = 2 \sum_{i=1}^m \left(\frac{1}{2} - \frac{2^i}{\beta} \right)^{-1} L(\varepsilon_0, \varepsilon_0) + \frac{\alpha\beta}{2^{2m}} L\left(\frac{\varepsilon_1}{2m+1}, \varepsilon_2\right). \quad (2.35)$$

Для приближенной оценки показателей частотной избирательности $L(\varepsilon_0, \varepsilon_0)$ и $L(\varepsilon_1/(2m+1), \varepsilon_2)$ можно воспользоваться приближенным выражением (2.22)

$$L^*(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = -\frac{2}{3} \lg 10 \varepsilon_1 \varepsilon_2$$

или более точным выражением (2.21).

Одним из оригинальных подходов к построению многоступенчатых структур узкополосных фильтров с использованием специального семейства полуполосных фильтров является подход Д. Гудмана и М. Кэйри [83]. В данной работе предлагается набор из девяти фильтров, обозначенных $F1—F9$ в табл. 2.1, и простой метод выбора каскадных комбинаций этих фильтров, удовлетворяющих весьма широкому диапазону требований к точности (затухание в полосе непропускания до -77 дБ и уровень пульсаций в полосе пропускания до 0,00014). Фильтры выбраны с учетом аппаратурной эффективности, некоторые из них можно реализовать рекурсивно с помощью одних лишь сумматоров, а у большинства других разрядность коэффициентов весьма велика.

Таблица 2.1

Фильтр	N	$h(0)$	$h(1)$	$h(3)$	$h(5)$	$h(7)$	$h(9)$
F1	3	1	1				
F2	3	2	1				
F3	7	16	9	-1			
F4	7	32	19	-3			
F5	11	256	150	-25	3		
F6	11	346	208	-44	9		
F7	11	512	302	-53	7		
F8	15	802	490	-116	33	-6	
F9	19	8192	5042	-1277	429	-116	18

Первый фильтр $F1$ в табл. 2.1 — это фильтр с M_1 единичными коэффициентами, который может быть использован для децимации и интерполяции с произвольным коэффициентом M_1 . Фильтры $F2—F9$ представляют собой полуполосные фильтры для децимации и интерполяции с коэффициентом 2. Импульсные характеристики указанных фильтров имеют длительность от 3 до 9 отсчетов, и для цифрового

представления их коэффициентов требуются короткие машинные слова. Фильтры $F2$, $F3$ и $F5$ имеют монотонные частотные характеристики в полосе пропускания, фильтры $F4$, $F6$ — $F9$ имеют две и более пульсаций в полосе пропускания.

Способ, посредством которого осуществляется выбор конкретных фильтров из табл. 2.1 для каждой i -й степени, состоит в следующем. Для заданных значений параметров проектируемого фильтра ω_{c1} , ω_{c2} и $\varepsilon_{1\text{дон}}$, $\varepsilon_{2\text{дон}}$ рассчитывается коэффициент уровня пульсаций D , который для фильтров $F1$ — $F3$ и $F5$ определяется выражением $D = -20 \lg \varepsilon_{2\text{дон}}$, а для фильтров $F4$ и $F6$ — $F9$ — выражением $D = -20 \lg [\min(\varepsilon_{1\text{дон}}/m, \varepsilon_{2\text{дон}})]$.

Затем для каждой i -й степени m -ступенчатой структуры фильтра определяется коэффициент частоты «передискретизации» $Q_i = f_{кв\,i-1}/f_{кв\,m}$, где $f_{кв\,i-1}$, $f_{кв\,m}$ — частота дискретизации сигналов на выходах $(i-1)$ -й и m -й ступеней преобразования, и пределы изменения величин D и Q_i , в которых применимы фильтры из табл. 2.1. Для каждого фильтра строится зависимость D от Q_i , которая и определяет границы, где этот фильтр удовлетворяет заданным требованиям. Полученные расчетные диаграммы [99] используются в дальнейшем для выбора типа фильтра из табл. 2.1 на каждой i -й степени.

Рассмотрим пример построения многоступенчатой структуры цифрового узкополосного НЧ фильтра со следующими параметрами частотной избирательности: $f_{c1} = 100$ Гц; $f_{c2} = 110$ Гц; $\varepsilon_{1\text{дон}} = 10^{-2}$; $\varepsilon_{2\text{дон}} = 10^{-3}$. Фильтр должен работать в реальном времени на частоте дискретизации не менее 3 кГц.

Перейдем к приведенным значениям частот среза ω_{c1} , ω_{c2} и рассчитаем значения показателей прямоугольности, узкополосности и частотной избирательности НЧ фильтра:

$$\begin{aligned} \omega_{c1} &= 2\pi f_{c1} / f_{кв} = \pi / 15; & \omega_{c2} &= 2\pi f_{c2} / f_{кв1} = 1,1\pi / 15; \\ \alpha &= \omega_{c1} / (\omega_{c2} - \omega_{c1}) = 10; & \beta &= 2\pi / \omega_{c1} = 30; \\ L(\varepsilon_{1\text{дон}}, \varepsilon_{2\text{дон}}) &= -\frac{2}{3} \lg 10^{-4} = 2,67. \end{aligned}$$

Порядок фильтра, отвечающий заданным требованиям частотной избирательности, принимает значение

$$N = \alpha\beta L(\varepsilon_{1\text{дон}}, \varepsilon_{2\text{дон}}) = 801.$$

Максимально допустимое значение коэффициента прореживания ν оценим по выражению (2.23):

$$\nu_{\max} = \lfloor \alpha\beta / (2\alpha + 1) \rfloor = 14.$$

Многоступенчатая структура узкополосного фильтра по Белланже (рис. 2.15) включает три полуполосных фильтра-дециматора, три полуполосных фильтра-интерполятора, каждый из которых понижает и соответственно повышает частоту дискретизации в 2 раза, и формирующий фильтр, работающий на частоте дискретизации $f_{\text{кв}} = f_{\text{кв1}} / 8$.

Для каждой i -й ступени преобразования рассчитаем по выражению (2.33) требуемые значения порядков полуполосных фильтров:

$$N_1 = \alpha_1 \beta_1 L(\varepsilon_0, \varepsilon_0) = \frac{\pi/15}{\pi - 2\pi/15} 30 \cdot 3,33 = 7,68;$$

$$N_2 = \alpha_2 \beta_2 L(\varepsilon_0, \varepsilon_0) = \frac{\pi/15}{\pi/2 - 2\pi/15} 15 \cdot 3,33 = 9,07;$$

$$N_3 = \alpha_3 \beta_3 L(\varepsilon_0, \varepsilon_0) = \frac{\pi/15}{\pi/4 - 2\pi/15} \frac{15}{2} \cdot 3,33 = 14,23,$$

где $L(\varepsilon_0, \varepsilon_0) = L(10^{-3}, 10^{-3}) = \frac{2}{3} \lg 10^{-5} = 3,33$. При этом порядок формирующего фильтра принимает значение $N_0 = \alpha\beta / 8 L(\varepsilon_{1\text{дон}} / 7, \varepsilon_{2\text{дон}}) = 10 \cdot 30 / 8 \cdot 3,23 = 121,1$.

Округляя до ближайшего целого нечетного, получаем следующие порядки фильтров многоступенчатой структуры: $N_1 = 7$; $N_2 = 9$; $N_3 = 15$; $N_0 = 121$.

Оценки вычислительных затрат и емкости оперативной памяти рассчитаем по выражениям (2.31) — (2.32):

$$R_T = \frac{f_{\text{кв}}}{2} \left(N_1 + \frac{N_2}{2} + \frac{N_3}{4} \right) + \frac{f_{\text{кв}}}{8} N_0 = 68\,250 \text{ умн/с};$$

$$S = 2(N_1 + N_2 + N_3) + N_0 = 183 \text{ ячейки памяти}.$$

2.5 Оптимальный синтез многоступенчатых структур

2.5.1 Прямая форма построения

Рассмотрим двухступенчатую структуру узкополосного фильтра (рис. 2.22, а). На первой ступени фильтр-дециматор с функцией передачи $H_1(j\omega)$ понижает частоту дискретизации входного $x(nT_1)$ сигнала в ν раз. На второй ступени основной фильтр с функцией передачи $H_2(j\omega)$ формирует требуемые свойства избирательности всей системы в переходной зоне АЧХ фильтра-дециматора, а фильтр-интерполятор с функцией передачи $H_1(j\omega)$ восстанавливает промежуточные отсчеты сигнала $y(nT_2)$, повышая частоту его дискретизации в ν раз.

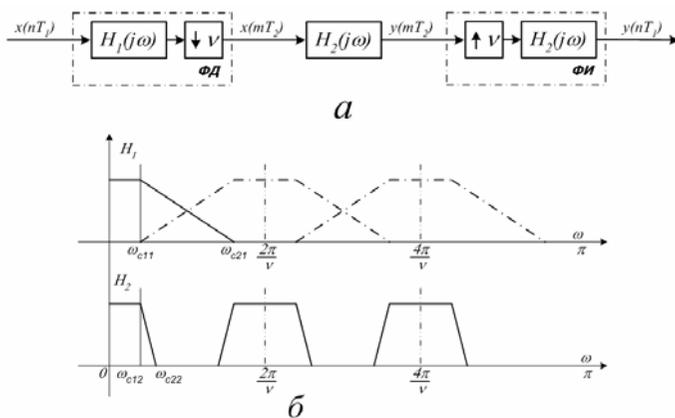


Рис. 2.22 Двухступенчатая форма построения оптимального фильтра: а — структурная схема; б — АЧХ фильтров

Двухступенчатую форму построения структуры узкополосного фильтра будем считать оптимальной, если выбор параметра ν - коэффициента прореживания отвечает одному из критериев оптимальности. При расчете оптимальной структуры фильтра используют обычно один из двух критериев: минимум вычислительных затрат в

единицу времени R_T или минимум ячеек памяти данных S [16, 18]. Постановка и формализация задачи оптимального синтеза предполагает прежде всего установление функциональной зависимости критериев R_T и S от значения коэффициента прореживания ν , а это, в свою очередь, связано с определением порядков фильтров с функциями передачи $H_1(j\omega)$ и $H_2(j\omega)$ через основные параметры двухступенчатой структуры.

Порядок фильтра-дециматора (интерполятора) N_1 запишем в виде (2.21):

$$N_1 = \alpha_1 \beta L \left(\frac{\varepsilon_{1\text{дон}}}{3}, \varepsilon_{2\text{дон}} \right), \quad (2.36)$$

где показатель прямоугольности АЧХ (см. рис. 2.22, б)

$$\alpha_1 = \frac{\omega_{c11}}{\omega_{c21} - \omega_{c11}} = \frac{\omega_{c11}}{2\pi/\nu - 2\omega_{c11}} = \frac{\nu}{2\pi/\omega_{c11} - 2\nu} = \frac{\nu}{\beta - 2\nu}. \quad (2.37)$$

Подставив (2.37) в (2.36), получим

$$N_1 = \frac{\nu\beta}{\beta - 2\nu} L \left(\frac{\varepsilon_{1\text{дон}}}{3}, \varepsilon_{2\text{дон}} \right). \quad (2.38)$$

Порядок основного фильтра (вторая ступень) уменьшается в ν раз по отношению к порядку фильтра, реализуемого по одноступенчатой структуре, вследствие уменьшения в ν раз показателя его узкополосности:

$$N_2 = \frac{\alpha\beta}{\nu} L \left(\frac{\varepsilon_{1\text{дон}}}{3}, \varepsilon_{2\text{дон}} \right). \quad (2.39)$$

Оценки общих вычислительных затрат в единицу времени R_T и емкости памяти данных S представим в виде

$$R_T = (2N_1 + N_2) \frac{f_{\text{кв}}}{\nu}; \quad S = N_1 + \frac{N_1}{\nu} + N_2 = \frac{\nu+1}{\nu} N_1 + N_2. \quad (2.40)$$

В выражение (2.40) входят суммарные затраты, связанные с реализацией как фильтра-дециматора (интерполятора) с функцией передачи $H_1(j\omega)$, так и основного фильтра с функцией передачи $H_2(j\omega)$.

Подставив в (2.40) выражения (2.38) и (2.39), получим

$$R_T = \left(\frac{2}{\beta - 2\nu} + \frac{\alpha}{\nu^2} \right) \beta L \left(\frac{\varepsilon_{1\text{дон}}}{3}, \varepsilon_{2\text{дон}} \right) f_{\text{кв}}, \quad (2.41)$$

$$S = \left(\frac{\nu+1}{\beta - 2\nu} + \frac{\alpha}{\nu} \right) \beta L \left(\frac{\varepsilon_{1\text{дон}}}{3}, \varepsilon_{2\text{дон}} \right). \quad (2.42)$$

Поиск оптимального аналитического решения по критерию вычислительных затрат (2.41) приводит к кубическому уравнению относительно искомого параметра ν :

$$\nu^3 - 2\alpha\nu^2 + 2\alpha\beta\nu - \alpha\beta^2 / 2 = 0, \quad (2.43)$$

а поиск оптимального аналитического решения по критерию емкости памяти (2.42) — к квадратичному уравнению:

$$(2 + \beta - 4\alpha)\nu^2 + 4\alpha\beta - \alpha\beta^2 = 0. \quad (2.44)$$

Оба уравнения имеют строгое аналитическое решение, но если решение уравнения (2.44) имеет сравнительно простое представление

$$\nu_{1opt} = (-2\alpha \pm \sqrt{\alpha(\beta+2)})\beta / (\beta - 4\alpha + 2), \quad (2.45)$$

то решение уравнения (3.43), реализуемого по методике Кардано [84], предполагает переход к «неполному» виду кубического уравнения

$$x^3 + px + q = 0, \quad (2.46)$$

где $p = -4\alpha^2/3 + 2\alpha\beta$; $q = -16\alpha^3/27 + 4\alpha^2\beta/3 - \alpha\beta^2/2$.

С использованием подстановки $\nu = x + 2\alpha/3$ действительное решение уравнения (2.46), отвечающее известным ограничениям на соотношение коэффициентов p и q , имеет следующее представление:

$$x_{opt} = \sqrt[3]{-q/2 + \sqrt{(p/3)^3 + (q/2)^2}} + \sqrt[3]{-q/2 - \sqrt{(p/3)^3 + (q/2)^2}}. \quad (2.47)$$

При этом оптимальное значение коэффициента прореживания

$$\nu_{opt2} = x_{opt} + 2\alpha/3. \quad (2.48)$$

Для рассматриваемого примера синтеза полосового фильтра с параметрами частотной избирательности $\alpha = 10$; $\beta = 30$; $\varepsilon_{1don} = 10^{-2}$; $\varepsilon_{2don} = 10^{-3}$ и $f_{кв} = 3кГц$ оптимальное значение коэффициента прореживания, рассчитанное по выражению (2.45) и округленное до целого числа, $\nu_{opt1} = 8$, а рассчитанное по выражениям (2.47) и (2.48) с последующим округлением до целого числа, $\nu_{opt1} = 9$. Подставив полученные оптимальные значения коэффициентов прореживания в (2.41) и (2.42), получим следующие оценки затрат: $R_T(\nu_{opt1}) = 80474$; $S(\nu_{opt1}) = 170$ при минимизации по критерию емкости памяти данных и $R_T(\nu_{opt2}) = 78082$; $S(\nu_{opt2}) = 175$ при минимизации по критерию вычислительных затрат.

Для сравнения напомним, что реализация исходного фильтра порядка $N = 801$ при использовании прямой формы построения структу-

ры без предварительной децимации потребовала бы выполнения $R_T = 2403 \times 10^3$ операций в секунду при объеме оперативной памяти данных $S = 801$. Переход к двухступенчатой структуре дает существенный выигрыш в минимизации как вычислительных затрат, так и емкости памяти данных, практически соизмеримый с результатами, полученными для многоступенчатой структуры полуполосных фильтров. Дальнейшее повышение эффективности оптимального фильтра может быть получено при переходе к многоступенчатой, и в частности трехступенчатой, структуре, представленной на рис. 2.16.

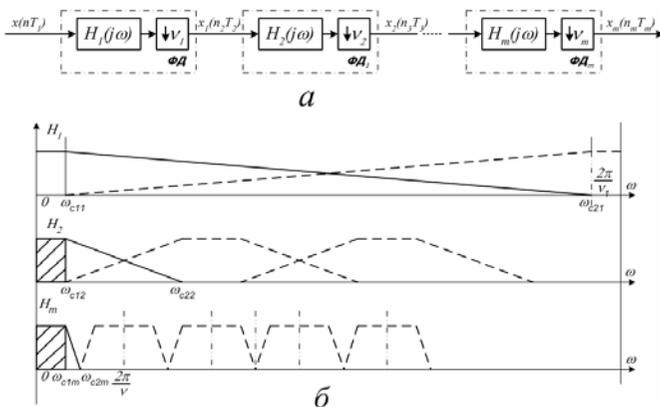


Рис. 2.23 Оптимальный многоступенчатый фильтр-дециматор

В многоступенчатой структуре фильтр-дециматор и соответственно фильтр-интерполятор содержат две и более ступени. Рассмотрим m -ступенчатый фильтр-дециматор, полный коэффициент прореживания которого равен ν (рис. 2.23).

Частота дискретизации на выходе i -й ступени

$$f_{к\omega i} = f_{к\omega i-1} / \nu_i = f_{к\omega 1} / \prod_{j=1}^i \nu_j.$$

от 0 до ω_{c11} должны быть защищены от наложения. В любой другой частотной полосе наложение допускается в пределах переходной зоны АЧХ, так как последующая обработка сигнала устранил все его составляющие из этой полосы.

Если число ступеней m и значения коэффициентов прореживания v_i , $i = \overline{1, m}$ на каждой i -й ступени заданы, то порядки фильтров-дециматоров (интерполяторов) будут следующими:

$$N_i = \alpha_i \beta_i L \left(\frac{\varepsilon_{1\delta on}}{2m+1}, \varepsilon_{2\delta on} \right), \quad (2.49)$$

где показатель прямоугольности АЧХ

$$\alpha_i = \frac{\omega_{c1}}{2\pi / \prod_{j=1}^i v_j - 2\omega_{c1}} = \frac{\omega_{c1} \prod_{j=1}^i v_j}{2\pi - 2\omega_{c1} \prod_{j=1}^i v_j} = \frac{\prod_{j=1}^i v_j}{\beta - 2 \prod_{j=1}^i v_j} \quad (2.50)$$

и показатель узкополосности i -го фильтра-дециматора (интерполятора)

$$\beta_1 = \beta, \quad \beta_i = \beta / \prod_{j=1}^i v_j, \quad i = 2m. \quad (2.51).$$

Подставив (2.50) и (2.51) в выражение (2.49), получим

$$N_i = \frac{\beta v_i}{\beta - 2 \prod_{j=1}^i v_j} L \left(\frac{\varepsilon_{1\delta on}}{2m+1}, \varepsilon_{2\delta on} \right). \quad (2.52)$$

Порядок основного фильтра, формирующего заданную прямоугольность АЧХ проектируемого фильтра на частоте дискретизации $f_{кв m} = f_{кв1} / v$,

$$N_0 = \alpha \frac{\beta}{v} L \left(\frac{\varepsilon_{1\delta on}}{2m+1}, \varepsilon_{2\delta on} \right). \quad (2.53)$$

Выражение для оценки общих вычислительных затрат в единицу времени R_T и емкости памяти данных S на реализацию m -ступенчатой структуры узкополосного фильтра запишем в виде

$$R_T = \left(2 \sum_{i=1}^m \frac{N_i}{\prod_{j=1}^i v_j} + \frac{N_0}{v} \right) f_{кв1}, \quad (2.54)$$

$$S = \sum_{i=1}^m \frac{v_i + 1}{v_i} N_i + N_0. \quad (2.55)$$

Удвоение первой составляющей суммарных затрат (2.54) и введение весовых коэффициентов $(v_i+1)/v_i$ в (2.55) учитывают затраты на реализацию фильтра-интерполятора, построенного по восходящей многоступенчатой структуре, дуальной нисходящей структуре фильтра-дециматора.

Используя полученные выше функциональные зависимости (2.52) и (2.53), устанавливающие связь между расчетными значениями порядков N_i и оптимальными значениями параметров системы v_i , $i = \overline{1, m}$, целевые функции (2.54) и (2.55) задачи оптимального синтеза представим в виде

$$R_T = \left[2 \sum_{i=1}^m \frac{1}{\prod_{j=1}^{i-1} v_j \left(\beta - 2 \prod_{j=1}^i v_j \right)} + \frac{\alpha}{v^2} \right] \beta L \left(\frac{\varepsilon_{1don}}{2m+1}, \varepsilon_{2don} \right) f_{ксл}; \quad (2.56)$$

$$S = \left[\sum_{i=1}^m \frac{v_i + 1}{\beta - 2 \prod_{j=1}^i v_j} + \frac{\alpha}{v} \right] \beta L \left(\frac{\varepsilon_{1don}}{2m+1}, \varepsilon_{2don} \right). \quad (2.57)$$

Решение задачи оптимального синтеза многоступенчатой структуры в соответствии с критериями (2.56) и (2.57) предполагает выбор рационального значения числа ступеней m и поиск оптимального распределения коэффициентов прореживания (интерполяции) v_i , $i = \overline{1, m}$ отвечающих ограничению

$$v = \prod_{j=1}^i v_j \leq v_{\max} = \alpha \beta / (2\alpha + 1), \quad (2.58)$$

где α, β - показатели частотной избирательности проектируемого фильтра.

Выбор рационального числа ступеней опирается на следующие факторы практической реализации. Увеличение числа ступеней, как правило, приводит к более сложной схемотехнической или программной реализации фильтра. Растет порядок N_0 основного фильтра при том же суммарном коэффициенте прореживания V вследствие повышения требований к допустимому уровню неравномерности АЧХ в

полосе пропускания. Увеличивается задержка сигнала из-за увеличения как порядка основного фильтра, так и непосредственно числа фильтров-дециматоров и фильтров-интерполяторов, каждый из которых задерживает сигнал на половину длительности его импульсной характеристики. Поэтому увеличение числа ступеней m целесообразно только в том случае, если оно дает заметный выигрыш с позиции принятого критерия качества.

Если число ступеней m задано, то поиск оптимального значения параметров $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_m$, минимизирующих целевую функцию (2.56) или (2.57) в зависимости от принятого критерия качества, выполняется с помощью методов машинной оптимизации [16]. В частности, решая задачу оптимального синтеза многоступенчатой структуры фильтра-дециматора (интерполятора) с помощью процедуры Хука и Дживса [19], не требующей вычисления производных, Крошье и Рабинер получили набор расчетных кривых, устанавливающих зависимости минимизируемых целевых функций от «идеальных» значений коэффициентов прореживания $\nu_j, j = \overline{1, m}$ [16]. Проведенные расчеты позволили сделать следующие выводы.

1. При оптимизированных вычислениях наибольший «прирост» выигрыша по эффективности достигается в двухступенчатой структуре ($m=1$) и чуть меньший - при переходе от двухступенчатой к трех- и четырехступенчатой структурам (для достаточно больших значений коэффициента прореживания ν).

2. При оптимизированной емкости памяти данных значительная ее экономия (более ощутимая по сравнению с экономией вычислений) может быть достигнута при переходе от двухступенчатой к трех- или четырехступенчатым структурам, хотя наибольшее снижение емкости памяти достигается при переходе от одно- к двухступенчатой структуре.

3. В конструкциях с оптимизированной емкостью памяти данных число вычислений незначительно увеличивается по отношению к числу вычислений, требуемых в конструкциях с оптимизированным числом вычислений. Следовательно, конструкция, которая минимизирует объем требуемой памяти данных, минимизирует также и число требуемых вычислений. Этот результат является следствием того факта, что целевая функция, описывающая вычислительные затраты R_T , имеет широкий, а функция, описывающая затраты памяти S , несколько более узкий минимумы.

4. Выигрыш по эффективности при переходе к многоступенчатой структуре резко возрастает при больших значениях показателя прямоугольности АЧХ α и коэффициента прореживания ν .

5. Коэффициенты прореживания m -ступенчатого оптимизированного дециматора (интерполятора) удовлетворяют условию

$$\nu_j > \nu_{j+1} > \dots > \nu_m. \quad (2.59)$$

6. Требуемое число вычислений (или емкости памяти данных) оптимизируемого m -ступенчатого дециматора (интерполятора) относительно нечувствительно к небольшим изменениям параметров ν_j каждой ступени. Следовательно, в практических конструкциях вычисленные значения параметров ν_j можно округлять до ближайших целых значений без существенной потери в эффективности.

Эти выводы в известной степени можно распространить и на синтез многоступенчатой структуры узкополосного фильтра, включающего в качестве входных каскадов оптимизируемую структуру фильтра-дециматора, а выходных — оптимизируемую структуру фильтра-интерполятора. Вместе с тем оптимизация многоступенчатой структуры фильтра по критериям (2.56) и (2.57) может дать существенно различные результаты, особенно при сравнительно небольших значениях коэффициента прореживания V .

Принимая во внимание, что коэффициенты прореживания (интерполяции) ν_i на каждой i -й ступени принимают целочисленные значения, отвечающие ограничению (2.58) и условиям (2.59), поиск оптимального распределения коэффициентов ν_i , $i = \overline{1, m}$ можно выполнить, используя простой перебор всех допустимых сочетаний коэффициентов.

Рассмотрим пример оптимизации трехступенчатой структуры ($m = 2$) фильтра со следующими параметрами частотной избирательности: $\alpha = 10$; $\beta = 30$; $\varepsilon_{1\text{дон}} = 10^{-2}$; $\varepsilon_{2\text{дон}} = 10^{-3}$ и $f_{\text{кв1}} = 3\text{кГц}$. В этом случае допустимое значение общего коэффициента прореживания (2.58) $\nu \leq \nu_{\text{max}} = \alpha\beta / (2\alpha + 1) = 14$ и возможны следующие сочетания коэффициентов прореживания ν_1 и ν_2 (табл. 2.2) в выражениях (2.56) и (2.57).

Таблица 2.2

ν_1	ν_2	$R_T(\nu_1, \nu_2)$	$S(\nu_1, \nu_2)$	ν_1	ν_2	$R_T(\nu_1, \nu_2)$	$S(\nu_1, \nu_2)$
7	2	89829	255	4	2	79679	159

6	2	66573*	162	4	3	68643	162
5*	2*	67608	151*	3	3	73903	152

Оптимальные значения коэффициентов прореживания v_1 и v_2 (отмечены звездочками) существенно различны для критериев вычислительных затрат $R_T(v_1, v_2)$ и емкости памяти данных $S(v_1, v_2)$. За оптимальное сочетание коэффициентов прореживания примем значения $v_{1opt} = 5$, $v_{2opt} = 2$, приближающие к минимуму одновременно оба критерия качества $R_T(v_{1opt}, v_{2opt}) = 67608$; $S(v_{1opt}, v_{2opt}) = 151$.

Таким образом, переход от двух- к трехступенчатой структуре дает заметный выигрыш по минимизации как вычислительных затрат, так и емкости памяти. Более того, полученный результат превосходит по эффективности показатели, которые достижимы в рамках многоступенчатой структуры, использующей полуполосные фильтры.

2.5.2 Параллельная форма построения

Построение оптимальной многоступенчатой структуры узкополосного фильтра с использованием параллельной формы реализации фильтров-дециматоров опирается на тот же подход и те же основные принципы формализации задачи оптимального синтеза, которые были рассмотрены ранее для прямой формы построения. Отличие состоит только в том, что новая форма построения структуры фильтра-дециматора (см. рис. 2.18) позволяет в v_i раз уменьшить требуемое число ячеек памяти данных для каждой i -й степени преобразования.

Для двухступенчатой структуры оценки общих вычислительных затрат в единицу времени R_T и емкости памяти данных S принимают значения

$$R_T = (2N_1 + N_2) \frac{f_{KB1}}{v}; \quad S = \frac{2N_1}{v} + N_2 \quad (2.60)$$

или с учетом полученных ранее выражений (2.38) и (2.39)

$$R_T = \left(\frac{2}{\beta - 2v} + \frac{\alpha}{v^2} \right) \beta L \left(\frac{\varepsilon_{1don}}{3}, \varepsilon_{2don} \right) f_{KB1}, \quad (2.61)$$

$$S = \left(\frac{2}{\beta - 2v} + \frac{\alpha}{v} \right) \beta L \left(\frac{\varepsilon_{1don}}{3}, \varepsilon_{2don} \right). \quad (2.62)$$

Оценка (2.61) фактически повторяет оценку (2.41), и, следовательно, оптимизация структуры по критерию вычислительных затрат приведет к уже полученным ранее выражениям (2.47) и (2.48).

Поиск оптимального аналитического решения по критерию емкости памяти данных (2.62) сводится к решению квадратного уравнения $4(1-\alpha)v^2 + 4\alpha\beta v - \alpha\beta^2 = 0$ и дает следующий результат:

$$v_{opt1} = \frac{\sqrt{\alpha\beta}(\sqrt{\alpha}-1)}{2(\alpha-1)}, \quad (2.63)$$

отвечающий ограничению (2.58).

Для рассматриваемого примера оптимального синтеза узкополосного фильтра с параметрами частотной избирательности $\alpha = 10$; $\beta = 30$; $\varepsilon_{1\partial on} = 10^{-2}$; $\varepsilon_{2\partial on} = 10^{-3}$ и $f_{к61} = 3кГц$ оптимальное значение коэффициента прореживания, рассчитанное по выражению (2.63) и округленное до целого числа, $v_{opt1} = 11$. Оптимизированное значение емкости памяти данных в соответствии с (2.62) составит $S(v_{opt1}) = 104$ при объеме вычислительных затрат в единицу времени $R_T(v_{opt1}) = 89400$.

Таким образом, при незначительном увеличении вычислительных затрат по отношению к прямой форме уже в рамках двухступенчатой реализации на параллельных накопителях удастся получить существенный выигрыш в минимизации емкости памяти.

Переход к m -ступенчатой структуре узкополосного фильтра дает следующие оценки затрат (R_T, S) в функции от значений порядков N_i и коэффициентов прореживания v_i i -й ступени преобразования:

$$R_T = \left(2 \sum_{i=1}^m \left(N_i / \prod_{j=1}^i v_j \right) + N_0 / v \right) f_{к61}; \quad (2.64)$$

$$S = 2 \sum_{i=1}^m (N_i / v_i) + N_0. \quad (2.65)$$

Выражение (2.64) полностью совпадает с оценкой (2.54), а выражение (2.65) в отличие от (2.55) учитывает уменьшение числа ячеек памяти данных фильтра-дециматора для каждой i -й ступени преобразования в v_i раз.

Подставив в (2.65) выражения (2.52) и (2.53), получим

$$S = \left[2 \sum_{i=1}^m \frac{1}{\beta - 2 \prod_{j=1}^i v_j} + \frac{\alpha}{v} \right] \beta L \left(\frac{\varepsilon_{1\text{доп}}}{2m+1}, \varepsilon_{2\text{доп}} \right). \quad (2.66)$$

Решение задачи оптимального синтеза многоступенчатой структуры в соответствии с критерием (2.56), раскрывающим функцию (2.64), и критерием (2.66) предполагает выбор рационального значения числа ступеней m и поиск оптимального распределения коэффициентов прореживания (интерполяции) v_i , $i = 1, m$, отвечающих ограничению (2.58). Поиск оптимального решения строится по схеме, рассмотренной для прямой формы построения многоступенчатой структуры. На первом шаге строится двухступенчатая структура ($m = 2$) фильтра-дециматора (фильтра-интерполятора) и по выражениям (2.56) или (2.66) в зависимости от принятого критерия качества рассчитываются оптимальные значения коэффициентов прореживания v_1 и v_2 , минимизирующие целевые функции $R_T(v_1, v_2)$ или $S(v_1, v_2)$ соответственно. Выбор оптимальных значений параметров v_1 , v_2 может быть выполнен простым перебором всех целочисленных сочетаний, отвечающих ограничениям (2.58) и (2.59). Далее рассчитываются оптимизированные значения показателей качества $R_T(v_{1opt}, v_{2opt})$ и $S(v_{1opt}, v_{2opt})$. На втором шаге строится трехступенчатая структура ($m = 3$) фильтра-дециматора (фильтра-интерполятора) и по тем же выражениям (2.58) и (2.66) находятся оптимальные значения коэффициентов прореживания (интерполяции) v_{1opt} , v_{2opt} , v_{3opt} , после чего рассчитываются оптимизированные значения показателей качества $R_T(v_{1opt}, v_{2opt}, v_{3opt})$ и $S(v_{1opt}, v_{2opt}, v_{3opt})$. Полученные оценки затрат сопоставляются с аналогичными оценками для трехступенчатой структуры фильтра ($m = 2$). Если выигрыш является существенным, то процесс увеличения числа ступеней и оптимизация структур продолжают. В противном случае принимается решение об окончании процесса оптимизации.

В табл. 2.3 сведены результаты расчета параметров трехступенчатой структуры, выполненного с использованием выражений (2.56) и (2.66).

Таблица 2.3

v_1	v_2	$R_T(v_1, v_2)$	$S(v_1, v_2)$	v_1	v_2	$R_T(v_1, v_2)$	$S(v_1, v_2)$
7	2	89829	173	4	2	79679	140
6*	2*	66573*	120*	4	3	68643	119*
5	2	67608	122	3	3	73903	269

Проведенный расчет и анализ полученных результатов позволяют сделать следующие выводы.

1. При оптимальном сочетании коэффициентов прореживания на первой и второй ступенях преобразования $v_{1opt} = 6$ и $v_{2opt} = 2$ фактически минимизируются оба критерия качества: $R_T(v_{1opt}, v_{2opt}) = 66\,513$;

$$S(v_{1opt}, v_{2opt}) = 120.$$

2. Переход от двух- к трехступенчатой структуре эффективен только с позиции минимума вычислительных затрат, при этом требуемая емкость памяти данных возрастает.

3. По отношению к прямой форме построения трехступенчатой структуры достигается значительный выигрыш в минимизации емкости памяти при одних и тех же вычислительных затратах.

Обобщая представленные результаты анализа и синтеза многоступенчатых структур для всех трех рассмотренных выше подходов, в заключение подведем некоторые итоги. Прежде всего было установлено, что использование вторичной дискретизации (децимации) и последующей интерполяции является эффективным инструментом минимизации как общих вычислительных затрат, так и памяти данных. Наибольший эффект достигается при переходе к двухступенчатой реализации ($m=1$) узкополосного фильтра; в особой степени это проявляется для структуры с параллельными накопителями. Многоступенчатая реализация по Белланже с использованием полуполосных фильтров не требует решения задачи оптимизации и дает выигрыш в минимизации общих вычислительных затрат, близкий к оптимальному решению.

К числу наиболее важных достоинств полуполосных фильтров относится возможность уменьшения вдвое объема вычислительных затрат на реализацию многоступенчатой структуры фильтра-дециматора и фильтра-интерполятора. Однако общие вычислительные затраты, включающие затраты на реализацию основного фильтра (формирующего заданную прямоугльность АЧХ), уменьшаются в меньшей степени, что дополнительно связано с ограничениями, накладываемыми на выбор коэффициентов прореживания ($v_i = 2$ для всех $i = \overline{1, m}$), и с

«избыточно» завышенными требованиями к допустимой неравномерности АЧХ в полосе пропускания каждого из каскадно соединенных фильтров многоступенчатой структуры. Поэтому оптимальная многоступенчатая структура с произвольным выбором коэффициентов прореживания (интерполяция) на каждой ступени преобразования дает, как правило, определенный выигрыш и в минимизации общих вычислительных затрат.

Построение оптимальной многоступенчатой структуры может проводиться с использованием одного из двух подходов. Первый подход (Крошье-Рабинера) использует прямую форму, а второй подход (Витязева — Степашкина) — параллельную форму построения структуры фильтра-дециматора. Оба подхода равнозначны с позиции открывающейся возможности минимизации общих вычислительных затрат, по крайней мере, в рамках принятого критерия качества (2.56), но при этом второй подход более эффективен с позиции минимизации емкости памяти данных. Однако это не означает, что использование параллельной формы построения фильтра-дециматора всегда будет более предпочтительным. Во-первых, становится более сложной структурная организация фильтра и, как следствие, управление этой структурой, что особенно негативно проявляется при микропроцессорной реализации на цифровых процессорах обработки сигналов (ЦПОС), архитектура и система команд которых ориентирована в наибольшей степени на реализацию прямой формы линейной свертки. Во-вторых, оптимизация многоступенчатой структуры по критерию, минимизирующему емкость памяти данных (2.66), оставляет без внимания общую емкость памяти коэффициентов, которая может существенно превышать емкость памяти данных оптимальной многоступенчатой структуры. Выбор той или иной формы построения многоступенчатой структуры зависит от конкретных условий реализации фильтра, и определяющую роль в этом играет та физическая среда, в которой воспроизводятся требуемые функции. Внутренняя организация одних классов ЦПОС лучше приспособлена для высокоскоростных алгоритмов, реализуемых с применением внешней памяти данных, а организация других ориентирована на использование только внутренней памяти, и проблема оптимизации по критерию емкости памяти данных становится определяющим фактором.

Глава 3 Цифровые узкополосные фильтры с многоступенчатой децимацией и интерполяцией импульсных характеристик

3.1 Цифровые гребенчатые и сглаживающие фильтры

В ряде практических приложений методов ЦОС, в частности связанных с фильтрацией импульсных последовательностей, возникает необходимость построения фильтров частотной селекции, «прореживающих» спектральные составляющие $S_1(\omega)$ одной последовательности импульсов $s_1(nT)$ на фоне спектральных составляющих $S_2(\omega)$ других последовательностей $s_2(nT)$ (рис. 3.1).

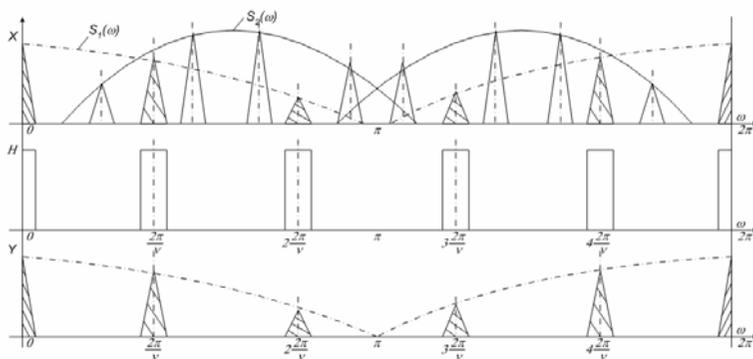


Рис. 3.1 Выделение последовательности импульсов с помощью гребенчатого фильтра

Если спектральные составляющие $S_1(\omega)$ выделяемой последовательности импульсов $s_1(nT)$ расположены равномерно с шагом по частоте $\omega_0 = 2\pi/\nu$, то частотная характеристика фильтрующей системы $H(j\omega)$ будет обладать свойством периодичности в диапазоне рабочих частот $0 \leq \omega \leq 2\pi$ и может быть реализована с помощью одного «гребенчатого» фильтра.

Цифровой фильтр назовем гребенчатым, если в диапазоне рабочих частот $0 \leq \omega \leq 2\pi$ его частотная характеристика $H(j\omega)$ является периодической с периодом $\omega_0 = 2\pi/\nu$, где ν — целое число.

Рассмотрим основные характеристики и свойства цифровых гребенчатых фильтров (ЦГФ). Периодический характер частотных характеристик гребенчатого фильтра обуславливает «прореженность» его импульсной характеристики:

$$h_{Г.Ф.}(nT) = \begin{cases} h^*(mT) & \text{при } n = \nu m; \\ 0 & \text{при } n \neq \nu m, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \end{cases} \quad (3.1)$$

Здесь $h^*(mT)$ — импульсная характеристика базового НЧ фильтра, работающего на пониженной в $\nu = T'/T$ раз частоте дискретизации входного сигнала.

Импульсная характеристика $h_{Г.Ф.}(nT)$ гребенчатого фильтра может быть получена из импульсной характеристики $h^*(mT)$ базового НЧ фильтра (3.1) путем простого добавления $\nu - 1$ нулей между каждой парой соседних отсчетов (рис. 3.2, а).

Передающую функцию ЦГФ с импульсной характеристикой $h_{Г.Ф.}(nT)$ запишем в виде

$$H_{Г.Ф.}(z^{-1}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_{Г.Ф.}(nT) z^{-n} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h^*(mT) z^{-\nu m} = H^*(z^{-\nu}), \quad (3.2)$$

где $H^*(z^{-\nu}) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h^*(mT)(z^{-\nu})^{-m} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h^*(mT_1)w^{-m} = H^*(w^{-1})$ — передающая функция базового НЧ фильтра.

Таким образом, передающая функция гребенчатого фильтра $H_{Г.Ф.}(z^{-1})$ связана с передающей функцией базового НЧ фильтра $H^*(w^{-1})$ отображением вида $w = z^{\nu}$. При этом частотная характеристика гребенчатого фильтра $H_{Г.Ф.}(j\omega)$, $0 \leq \omega \leq 2\pi$, формируется из частотной характеристики базового НЧ фильтра $H^*(j\Omega)$, $0 \leq \Omega \leq 2\pi$, сжатием по оси частот в ν раз и периодическим продолжением с периодом $\omega_0 = 2\pi/\nu$ (рис. 3.2, б).

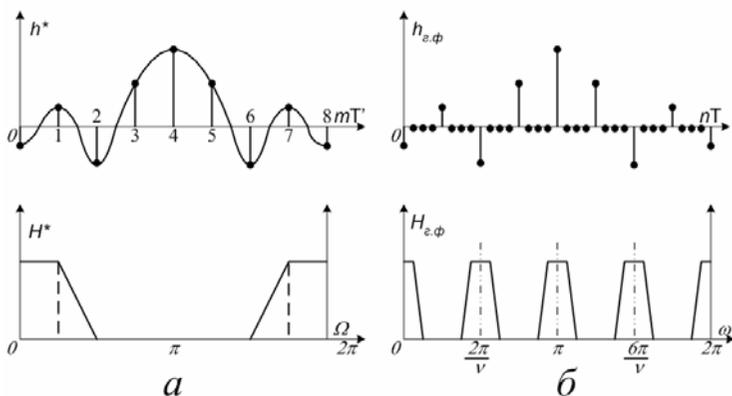


Рис. 3.2 Преобразования характеристик при переходе от базового НЧ фильтра к гребенчатому фильтру: *а* — импульсной; *б* — частотной

Отличительные свойства ЦГФ определим по отношению к базовому НЧ фильтру с передаточной функцией $H^*(z^{-\nu})$ и однополосному фильтру с передаточной функцией $H(z^{-1})$, «пропускающему» только одну из ν спектральных составляющих гребенчатого фильтра (например, составляющую, расположенную в окрестности нулевой частоты в случае построения узкополосного НЧ фильтра).

Для гребенчатого фильтра N -го порядка с импульсной характеристикой $h_{Г.Ф.}(nT)$, синтезируемого в классе КП-цепей, последовательность выходных данных вычисляется по алгоритму линейной свертки

$$y(nT) = \sum_{l=0}^{N-1} x[(n-l)T] h_{Г.Ф.}(lT) = \sum_{m=0}^{N/\nu-1} x[(n-\nu m)T] h^*(\nu mT). \quad (3.3)$$

На рис. 3.3 представлена прямая форма построения гребенчатого КП-фильтра, реализуемая по способу прямого вычисления линейной свертки (3.3).

Заметим, что при равенстве порядков и, как следствие, одинаковой емкости памяти данных S объем вычислительных затрат в единицу времени R_T на реализацию гребенчатого фильтра в ν раз меньше по отношению к узкополосному НЧ фильтру вследствие ν -кратной «про-реженности» его импульсной характеристики, но в ν раз больше по

отношению к базовому фильтру вследствие увеличения частоты дискретизации входного сигнала в ν раз.

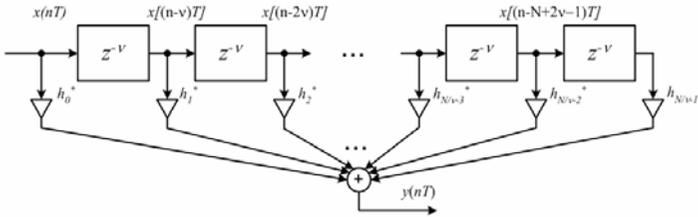


Рис.3.3 Прямая форма гребенчатого КП-фильтра

Вычисление линейной свертки непосредственно по выражению (3.3) требует организации сдвига памяти всего N -мерного массива входных данных за период обработки T , в то время как на каждом текущем периоде формирования последовательности выходных данных используются только N/ν из N отсчетов последовательности входных данных. Поэтому во многих случаях более эффективна полифазная форма построения гребенчатого фильтра, вариант построения которой показан на рис. 3.4.

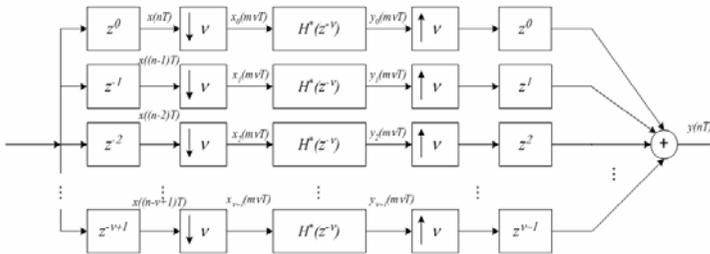


Рис.3.4 Полифазная форма гребенчатого фильтра

Последовательность входных данных $x(nT)$ разбивается на ν «прореженных» последовательностей, каждая из которых пропускается через базовый НЧ фильтр с передаточной $H^*(z^{-\nu})$. Экспандеры частоты дискретизации повышают частоту дискретизации до исходного

значения путем простого добавления $(\nu - 1)$ нулей между соседними отсчетами, а выходной сумматор фактически выполняет роль коммутатора каналов полифазного фильтра, так как в любой момент времени $t = nT$ только на одном из ν каналов последовательность выходных данных принимает отличное от нуля значение. Таким образом, синтез полифазной формы ЦФ сводится к построению ν -канального базового НЧ фильтра с использованием входного и выходного коммутаторов каналов с циклом опроса каналов $T' = \nu T$. Отметим, что полифазная форма гребенчатого фильтра, представленная на рис. 3.4, может быть в равной степени использована как для построения КП-фильтров, так и для построения БП-фильтров в зависимости от того, в каком классе цифровых цепей реализуется базовый НЧ фильтр.

Для гребенчатого фильтра M -го порядка (M — целое число, кратное коэффициенту прореживания импульсной характеристики ν), синтезируемого в классе БП-цепей по некаскадной форме, последовательность выходных данных вычисляется по алгоритму

$$y(nT) = \sum_{r=0}^{N_1=N/\nu} b_r x[(n - \nu r)T] - \sum_{k=1}^{M_1=M/\nu} a_k y[(n - \nu k)T],$$

графически отображенному в виде структурной схемы фильтра, представленной на рис. 3.5. Здесь a_k, b_r — коэффициенты фильтра, определяемые из синтеза базового НЧ фильтра M_1 -го порядка по заданным свойствам частотной избирательности гребенчатого фильтра.

Переход к другим формам построения структуры ЦФ выполняется по структуре базового НЧ фильтра путем простой замены элементов задержки z^{-1} на элементы задержки $z^{-\nu}$. При этом емкость памяти данных увеличивается в ν раз. Это определяет «плату» за возможность одновременной фильтрации ν полос входного сигнала с шириной полосы пропускания, в ν раз меньшей по отношению к полосе пропускания базового НЧ фильтра. Покажем, что ν -кратное сужение полосы пропускания гребенчатого фильтра вместе с тем не приводит к дополнительным потерям по отношению к базовому НЧ фильтру, связанным с эффектами конечной разрядности представления чисел, что является определяющим фактором при построении узкополосных фильтров в классе БП-цепей.

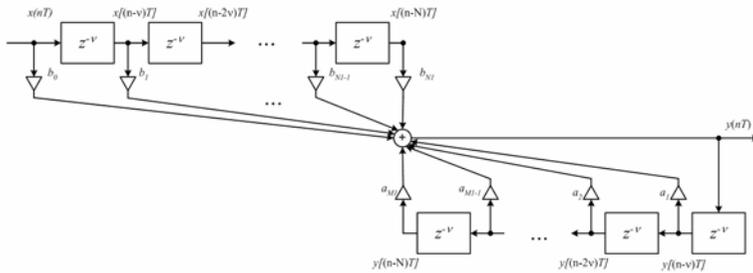


Рис. 3.5 Некаскадная форма гребенчатого БП-фильтра

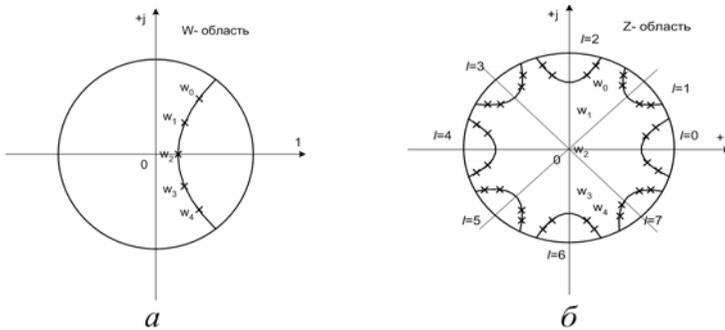


Рис. 3.6 Положение полюсов передаточной функции: а — базового НЧ фильтра; б — гребенчатого фильтра

Пусть $H^*(w^{-1})$ — передаточная функция базового НЧ фильтра, синтезируемого в W -области, связанной с Z -областью отображением $w = z^v$. Переход от передаточной функции $H^*(w^{-1})$ к передаточной функции $H_{Г.Ф.}(z^{-1})$, описывающей в Z -области динамические свойства соответствующего ЦГФ, выполняется с помощью подстановки $w = z^v$. При этом полюсы $z_{k,l}$, $k = \overline{1, M_1}$; $l = \overline{0, (v-1)}$, передаточной функции проектируемого ЦГФ связаны с полюсами w_k , $k = \overline{1, M_1}$, передаточной функции базового НЧ фильтра M_1 -го порядка соотношением (рис. 3.6)

$$z_{k,l} = \omega_k^{1/\nu} e^{j \frac{2\pi l}{\nu}} \quad (3.4)$$

или с учетом представлений

$$z_{k,l} = r_{k,l} e^{j\omega_{k,l}}; \quad \omega_k = R_k e^{j\Omega_k}$$

совокупностью выражений

$$r_{k,l} = R_k^{1/\nu}; \quad \omega_{k,l} = \Omega_k / \nu + 2\pi l / \nu, \quad l = \overline{0, (\nu-1)},$$

где $(r_{k,l}, \omega_{k,l})$ и (R_k, Ω_k) — полярные координаты k -го полюса соответственно ЦГФ и базового НЧ фильтра; l — порядковый номер периодической последовательности полюсов ЦГФ.

Таким образом, плотность полюсов ЦГФ в области частот l -й полюсы пропускания увеличивается в ν раз по отношению к базовому НЧ фильтру. Пропорционально значению параметра ν увеличивается и смещение полюсов ЦГФ к единичной окружности Z -области. Однако, как будет показано далее, чувствительность полюсов к изменению коэффициентов гребенчатого фильтра приблизительно в ν раз меньше чувствительности полюсов базового НЧ фильтра и в ν^{M_1} раз меньше чувствительности полюсов узкополосного фильтра M_1 -го порядка, проектируемого по обычной некаскадной структуре. При этом обеспечивается равенство относительного смещения полюсов базового НЧ фильтра и ЦГФ.

Выразим согласно Кайзеру [85] смещение Δz_k k -го полюса цифрового фильтра относительно расчетного положения через ошибки в коэффициентах Δa_i , $i = \overline{1, M_1}$, знаменателя $P(z^{-1})$ передаточной функции $H(z^{-1}) = Q(z^{-1}) / P(z^{-1})$:

$$\Delta z_k = \sum_{i=1}^{M_1} \left(\frac{\partial z_k}{\partial a_i} \right) \Delta a_i \quad \text{при} \quad k = \overline{1, M_1},$$

где

$$\frac{\partial z_k}{\partial a_i} = z_k^{-i+2} / \prod_{\substack{m=1 \\ m \neq k}}^{M_1} (z_k - z_m) \quad (3.5)$$

является мерой чувствительности k -го полюса к изменению в i -м коэффициенте знаменателя $P(z^{-1})$.

В качестве меры чувствительности k -го полюса базового НЧ фильтра аналогично (3.5) примем показатель

$$\alpha_{k,i}^* = \frac{\partial w_k}{\partial a_i} = w_k^{-i+2} / \prod_{\substack{m=1 \\ m \neq k}}^{M_1} (w_k - w_m) \quad (3.6)$$

и показатель

$$\beta_{k,l,i}^* = \frac{\partial z_{k,l}}{\partial a_i} = z_{k,l}^{v(1-i)+1} \nu \prod_{\substack{m=1 \\ m \neq k}}^{M_1} (z_{k,l}^v - z_{m,l}^v), \quad k = \overline{1, M_1}, \quad l = \overline{0, (v-1)} \quad (3.7)$$

в качестве меры чувствительности (k, l) -полюса проектируемого ЦГФ. При выводе выражения (3.7) использованы представление передаточной функции ЦГФ в форме

$$H_{Г.Ф.}(z^{-1}) = \sum_{r=0}^{N_1} b_r z^{-rv} / \left(1 - \sum_{i=1}^{M_1} a_i z^{-rv} \right)$$

и методика Кайзера [85].

Для установления связи между показателями (3.6) и (3.7) подставим в (3.7) выражение (3.4). Тогда

$$\begin{aligned} \beta_{k,l,i}^* &= w_k^{1-i} e^{j2\pi l} z_{k,l} / \nu \prod_{\substack{m=1 \\ m \neq k}}^{M_1} e^{j2\pi l} (w_k - w_m) = w_k^{1-i} z_{k,l} / \nu \prod_{\substack{m=1 \\ m \neq k}}^{M_1} (w_k - w_m) = \\ &= z_{k,l} \alpha_{k,i}^* / w_k \nu = w_k^{(1-\nu)/\nu} \alpha_{k,i}^* e^{j2\pi l / \nu}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Заметим из (3.8), что, во-первых, модуль показателя $\beta_{k,l,i}^*$ не зависит от порядкового номера l периодической последовательности полюсов ЦГФ, а во-вторых, поскольку для узкополосных фильтров $|w_k|$ стремится к единице при всех $k = \overline{1, M_1}$, чувствительность полюсов гребенчатого фильтра в ν раз меньше чувствительности полюсов базового НЧ фильтра. Далее, в силу того, что чувствительность полюсов последнего, в свою очередь, в ν^{M_1-1} раз меньше чувствительности полюсов узкополосного НЧ фильтра, имеющего в том же диапазоне рабочих частот $0 \leq \omega \leq 2\pi$ при прочих равных условиях в ν раз меньшую ширину полосы пропускания (согласно (3.5) используемая мера чувствительности при равных порядках фильтров обратно пропорциональна расстоянию между полюсами), чувствительность полюсов ЦГФ приблизительно в ν^{M_1} раз меньше чувствительности полюсов узкополосного фильтра, реализуемого по обычной некаскадной структуре. Этот вывод следует и непосредственно из анализа выражения (3.7), если предположить, что полюсы $z_{k,0}$ гребенчатого фильтра при-

нимают значения, точно совпадающие с координатами z_k , $k = \overline{1, M_1}$ задающими положение полюсов узкополосного НЧ фильтра, и представить знаменатель выражения (3.7) рядом Тейлора в окрестности точки $z_{k,0} = z_{m,0}$, $k = \overline{1, M_1}$.

Проведенный анализ чувствительности полюсов гребенчатого фильтра к уходу коэффициентов показывает, что проявление эффектов конечной разрядности чисел может быть полностью описано по аналогичным эффектам, возникающим в структуре базового НЧ фильтра. Это заключение наглядно иллюстрирует полифазная форма построения гребенчатого БП-фильтра, отличающаяся от некаскадной формы фактически только способом «группирования» последовательности входных данных. Плотность полюсов базового НЧ фильтра в ν раз меньше по отношению к плотности полюсов узкополосного фильтра при одновременном увеличении в ν раз их удаленности от единичной окружности. Следовательно, многократно уменьшается влияние эффектов конечной разрядности чисел на точность воспроизведения частотных характеристик гребенчатого фильтра по отношению к однополосному фильтру. Именно это замечательное свойство гребенчатых фильтров является определяющим фактором с позиции построения малощумящих структур узкополосных фильтров в классе БП-цепей на основе каскадного соединения ЦГФ.

3.2 Методы синтеза структуры узкополосного фильтра на основе децимации и интерполяции импульсной характеристики

Проектирование фильтров частотной селекции рассмотрим применительно к узкополосному НЧ фильтру, полагая, что использование структуры с квадратурной модуляцией (см. рис. 2.11) дает возможность перехода от синтеза полосового фильтра к синтезу эквивалентного по свойствам частотной избирательности НЧ фильтра.

Пусть показатели частотной избирательности проектируемого фильтра с желаемой АЧХ $H(\omega)$ (рис. 2.12) принимают следующие значения:

$$\alpha = \omega_{c1} / (\omega_{c2} - \omega_{c1}); \quad \beta = 2\pi / \omega_{c1}; \quad L(\varepsilon_{1\text{доп}}, \varepsilon_{2\text{доп}}) = -\frac{2}{3} \lg(10 \cdot \varepsilon_{1\text{доп}} \cdot \varepsilon_{2\text{доп}}).$$

При этом порядок КП-фильтра, реализуемого по обычной структуре трансверсального фильтра, $N = \alpha\beta L(\varepsilon_{1\text{доп}}, \varepsilon_{2\text{доп}})$, однозначно опреде-

ляет требуемый объем вычислительных затрат в единицу времени R_T и требуемую емкость памяти данных S .

Структуру проектируемого НЧ фильтра N -го порядка с желаемой характеристикой $H(\omega)$ представим в виде последовательного соединения гребенчатого фильтра ЦГФ с периодической частотной характеристикой $H_{Г.Ф.}(\omega)$, составляющие которой в диапазоне рабочих частот $0 \leq \omega \leq 2\pi$ повторяют ν раз свойства частотной избирательности узкополосного НЧ фильтра, и цифрового сглаживающего фильтра (ЦСФ) с функцией передачи $H_{С.Ф.}(\omega)$, который выделяет основной лепесток, расположенный в окрестности нулевой частоты, из совокупности боковых составляющих на выходе ЦСФ (рис. 3.7).

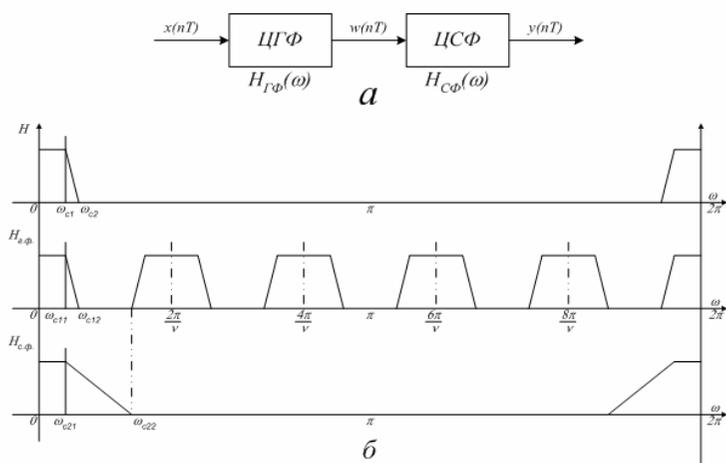


Рис. 3.7 Двухкаскадная реализация НЧ фильтра: а — структурная схема; б — частотные характеристики отдельных каскадов

Какое преимущество дает переход к двухкаскадной структуре с использованием гребенчатого фильтра, «прореживающего» спектр входного сигнала? Поскольку на один отличный от нуля отсчет импульсной характеристики ЦГФ приходится $(\nu - 1)$ нулевых отсчетов, реализация входного фильтра потребует в ν раз меньшее число арифметических операций, чем некаскадная реализация проектируемого НЧ фильтра. В то же время затраты на реализацию сглаживающего фильтра тем меньше, чем меньше значение коэффициента прореживания ν , вслед-

ствии возможности пропорционального уменьшения порядка ЦСФ с увеличением относительной ширины полосы пропускания и переходной зоны его АЧХ. Ответ на поставленный вопрос с позиции количественной оценки эффективности дают формализация и решение задачи оптимизации параметров двухкаскадной структуры [29].

В качестве оценки вычислительных затрат примем требуемое число операций умножения в единицу времени R_T . Пусть N_1 и N_2 — порядки фильтров ЦГФ и ЦСФ соответственно. Вычислительные затраты на реализацию двухкаскадной структуры НЧ фильтра составят

$$R_T = (N_1 / \nu + N_2) f_{кв}. \quad (3.9)$$

С тем чтобы найти оптимальное значение параметра ν , минимизирующее общие вычислительные затраты (3.9), воспользуемся прежде всего совокупностью соотношений, связывающих порядки N_1 и N_2 с параметрами частотной избирательности $\alpha_1 \beta_1$, $\alpha_2 \beta_2$ фильтров ЦГФ и ЦСФ:

$$N_1 = \alpha_1 \beta_1 L(\varepsilon_1/2, \varepsilon_2); \quad N_2 = \alpha_2 \beta_2 L(\varepsilon_1/2, \varepsilon_2), \quad (3.10)$$

где показатели прямоугольности АЧХ α_1 и α_2 , показатели узкополосности β_1 и β_2 и показатель частотной избирательности $L(\varepsilon_1/2, \varepsilon_2)$ принимают значения

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{\omega_{c11}}{\omega_{c12} - \omega_{c11}}; & \beta_1 &= \frac{2\pi}{\omega_{c11}}; \\ \alpha_2 &= \frac{\omega_{c21}}{\omega_{c22} - \omega_{c21}}; & \beta_2 &= \frac{2\pi}{\omega_{c21}}; \\ L\left(\frac{\varepsilon_1}{2}, \varepsilon_2\right) &= -\frac{2}{3} \lg(5\varepsilon_1\varepsilon_2). \end{aligned}$$

Предполагается, что для воспроизведения с заданной точностью $\varepsilon_{1\text{дон}}$ желаемой частотной характеристики в полосе пропускания двухкаскадного соединения фильтров достаточно ввести ограничение $\varepsilon_{1\text{дон}}/2$ на неравномерность АЧХ в полосе пропускания фильтров ЦГФ и ЦСФ.

Отметим, что для ЦГФ параметры α_1 и β_1 являются строго фиксированными и определяются требуемыми свойствами частотной избирательности (параметры α и β) проектируемого КП-фильтра: $\alpha_1 = \alpha$ и $\beta_1 = \beta$, в то время как для ЦСФ выбор параметров α_2 и β_2 произво-

лен. При этом коэффициент прореживания ν связан с параметрами α_2 и β_2 выражением

$$\nu = 2\pi / (2\omega_{c21} + \omega_{c22} - \omega_{c21}) = \alpha_2 \beta_2 / (1 + 2\alpha_2). \quad (3.11)$$

Если принять $\omega_{c21} = \omega_{c1}$, что целесообразно с позиции максимального расширения переходной зоны АЧХ сглаживающего фильтра и, как следствие, минимизации его порядка N_2 при прочих равных условиях, то $\beta_2 = \beta$ и из (3.11)

$$\alpha_2 = \nu / (\beta - 2\nu). \quad (3.12)$$

Подставив выражение (3.10) и (3.12) в (3.9), получим

$$R_T = \left[\frac{\alpha}{\nu} + \frac{\nu}{\beta - 2\nu} \right] \beta L \left(\frac{\varepsilon_1}{2}, \varepsilon_2 \right) f_{кв}. \quad (3.13)$$

Взяв производную правой части выражения (3.13) по ν и решив уравнение $\partial R_T / \partial \nu = 0$, найдем оптимальное значение коэффициента прореживания:

$$\nu_{1opt} = (\beta \sqrt{\alpha\beta} - 2\alpha\beta) / (\beta - 4\alpha). \quad (3.14)$$

Минимальный объем вычислительных затрат на реализацию двухкаскадной структуры НЧ фильтра при оптимальном значении параметра ν (3.14) составит

$$R_T(\nu_{opt}) = \min_{\nu} R_T = \frac{2\sqrt{\alpha\beta}(\beta - \sqrt{\alpha\beta} - 2\alpha)}{\beta - 2\sqrt{\alpha\beta}} L \left(\frac{\varepsilon_1}{2}, \varepsilon_2 \right) f_{кв}. \quad (3.15)$$

Для узкополосных фильтров $\beta \gg \alpha$, и оценка вычислительных затрат (3.15) принимает приближенное значение

$$R_T^* = 2\sqrt{\alpha\beta} L(\varepsilon_1/2, \varepsilon_2) f_{кв},$$

которым можно воспользоваться для оценки эффективности рассматриваемого метода по отношению к некаскадной структуре НЧ фильтра N -го порядка:

$$\mathcal{D} = \frac{R_T(N)}{R_T^*(N)} = \frac{\sqrt{\alpha\beta}}{2} = \frac{\sqrt{N}}{2\sqrt{L(\varepsilon_1, \varepsilon_2)}},$$

где $R_T(N) = \alpha\beta L(\varepsilon_1, \varepsilon_2) f_{кв}$ — оценка вычислительных затрат на реализацию НЧ фильтра по обычной некаскадной структуре. При выводе рассматриваемой оценки эффективности метода сделано допущение, что

$$L(\varepsilon_1/2, \varepsilon_2) \approx L(\varepsilon_1, \varepsilon_2).$$

Таким образом, эффективность перехода от некаскадной к двухкаскадной структуре НЧ фильтра с применением гребенчатого и сглаживающего фильтров пропорциональна \sqrt{N} и для узкополосного КП-фильтра, когда порядок N достигает тысячи и десятка тысяч единиц, лежит в пределах нескольких десятков и сотен единиц. При этом в отличие от методов на основе вторичной дискретизации рассматриваемый метод не вносит источник дополнительного шума — погрешность, обусловленную эффектами цифровой децимации и интерполяции. Другим важным преимуществом метода «прореживания» по частоте является уменьшение пропорционально \sqrt{N} размерности массивов обрабатываемых данных на входах фильтров ЦГФ и ЦСФ, причем в первом случае за счет использования «прореженной» импульсной характеристики проектируемого НЧ фильтра, а во втором случае вследствие уменьшения порядка сглаживающего фильтра по отношению к порядку проектируемого НЧ фильтра. Следовательно, приблизительно в $\sqrt{N}/2$ раз уменьшается уровень собственного шума как на выходе ЦГФ, так и на выходе ЦСФ, а учитывая сглаживающие свойства выходного каскада фильтров, можно утверждать, что при одинаковой размерности массивов данных на входах фильтров ЦГФ и ЦСФ собственный шум на выходе двухкаскадной структуры будет определяться в основном шумовой составляющей выходного каскада.

Далее отметим, что пропорционально коэффициенту прореживания ν уменьшается емкость ПЗУ коэффициентов фильтров. Вместе с тем емкость оперативной памяти данных увеличивается на величину, пропорциональную порядку N_2 выходного сглаживающего фильтра. Однако эти дополнительные затраты составляют незначительную часть от общей емкости памяти данных, так как $N_2 \ll N$.

Рассмотрим пример построения оптимальной двухкаскадной структуры НЧ фильтра со следующими параметрами частотной избирательности: $\alpha = 10$; $\beta = 30$; $\varepsilon_{1\text{дон}} = 10^{-3}$; $f_{\text{кв}} = 3\text{кГц}$. Для оптимального согласно (3.14) значения параметра $\nu_{\text{opt}} = 8$ минимальный объем вычислительных затрат составит $R_T(\nu_{\text{opt}}) = 471 \times 10^3 \text{ умн/с}$, при затратах памяти данных $S = N_1 + N_2 = 910$ ячеек памяти.

Таким образом, переход от некаскадной к двухкаскадной структуре позволяет в 5,1 раза уменьшить объем вычислительных затрат при увеличении емкости памяти данных на 5,7 %.

Напомним, что оптимальная двухступенчатая структура НЧ фильтра на основе децимации и интерполяции при тех же условиях требует $R_T = 78 \times 10^3$ умн/с; $S = 175$ ячеек памяти, т.е. обеспечивает дополнительный выигрыш приблизительно в 6 раз. Использование методов прореживания по времени, как показывает рассмотренный пример, дает существенно больший эффект по отношению к методам прореживания по частоте. Однако применение вторичной дискретизации не всегда допустимо, в частности при проектировании фильтров с недостаточно большим затуханием боковых лепестков в зоне непрозрачности фильтра.

Поэтому разработка методов проектирования цифровых фильтров на основе использования эффектов прореживания по частоте сохраняет свою актуальность и, как будет показано ниже, дает положительный результат при построении многокаскадных и пирамидальных структур систем частотной селекции сигналов.

Анализ свойств приведенной выше двухкаскадной структуры узкополосного НЧ фильтра (рис. 3.7) показывает, что с увеличением коэффициента прореживания ν уменьшаются вычислительные затраты на реализацию гребенчатого фильтра. Однако с увеличением параметра ν увеличиваются показатель узкополосности сглаживающего фильтра β_2 , его порядок N_2 и, как следствие, общие затраты на реализацию. Вместе с тем очевидно, что вычислительные затраты на реализацию узкополосного ЦСФ можно уменьшить приблизительно в $N_2/2$ раз, если воспользоваться для его построения двухкаскадной структурой аналогично рассмотренному выше методу. Если при этом выходной ЦСФ трехкаскадной структуры окажется узкополосным, то процесс эффективного наращивания числа каскадов можно продолжить и далее.

На рис. 3.8 представлен вариант построения трехкаскадной структуры узкополосного НЧ фильтра с двукратным использованием эффекта прореживания по частоте. Пусть, как и ранее, $H(\omega)$ — желаемая функция передачи проектируемого НЧ фильтра; $\alpha, \beta, \varepsilon_{1don}, \varepsilon_{2don}$ — заданные значения показателей его частотной избирательности.

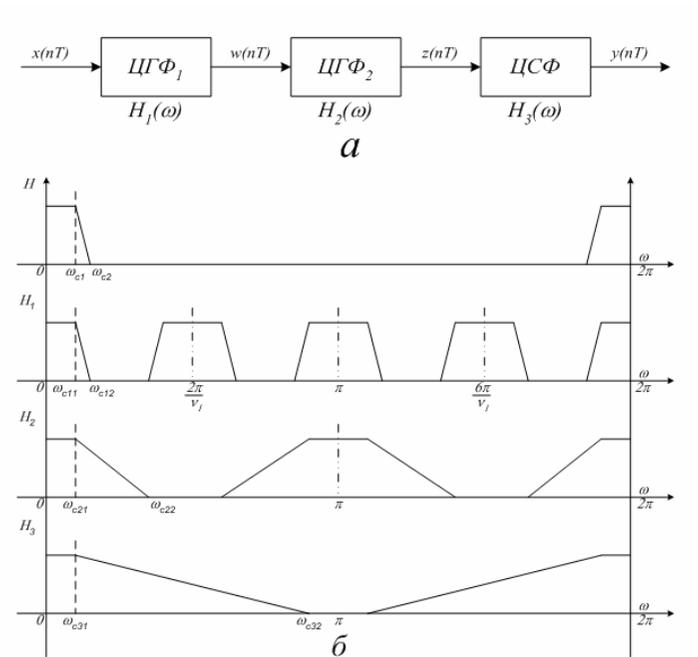


Рис. 3.8 Трехкаскадная реализация НЧ фильтра: а — структурная схема; б — частотные характеристики отдельных каскадов

В качестве входного фильтра предварительной селекции спектральных составляющих примем гребенчатый фильтр ЦГФ₁, основной лепесток функции передачи $H_1(\omega)$ которого совпадает с функцией передачи $H(\omega)$ проектируемого НЧ фильтра (при этом $\alpha_1 = \alpha$ и $\beta_1 = \beta$), а период повторения боковых лепестков ω_{Γ_1} определяется выбором значения коэффициента прореживания ν_1 :

$$\omega_{\Gamma_1} = 2\pi / \nu_1. \quad (3.16)$$

Для выделения основного лепестка функции передачи $H_1(\omega)$ из совокупности $(\nu_1 - 1)$ боковых спектральных составляющих на выходе ЦГФ₁ воспользуемся двухкаскадной структурой, включающей гребенчатый фильтр ЦГФ₂ с функцией передачи $H_2(\omega)$, параметры частотной избирательности которого принимают значения

$$\alpha_2 = \nu_1 / (\beta - 2\nu_1); \quad \beta_2 = \beta; \quad \omega_{\Gamma_2} = 2\pi / \nu, \quad (3.17)$$

и сглаживающий фильтр ЦСФ с функцией передачи $H_3(\omega)$, параметры частотной избирательности которого принимают значения

$$\alpha_3 = \nu_2 / (\beta - 2\nu_2); \quad \beta_3 = \beta. \quad (3.18)$$

Предполагается, что для обеспечения заданной точности $(\varepsilon_{1\text{доп}}, \varepsilon_{2\text{доп}})$ воспроизведения результирующей функции передачи $H(\omega) = H_1(\omega)H_2(\omega)H_3(\omega)$ достаточно для каждого отдельно взятого фильтра принять значение показателя частотной избирательности равным

$$L\left(\frac{\varepsilon_1}{3}, \varepsilon_2\right) = -\frac{2}{3} \lg \frac{10\varepsilon_1\varepsilon_2}{3}.$$

3.3 Оптимальный синтез многоступенчатых структур

Оценку вычислительных затрат на реализацию трехкаскадной структуры запишем в виде

$$R_T = \left(\frac{N_1}{\nu_1} + \frac{N_2}{\nu_2} + N_3 \right) f_{\kappa\phi}, \quad (3.19)$$

где $N_1 = \alpha\beta L(\varepsilon_1/3, \varepsilon_2)$ — порядок гребенчатого фильтра ЦГФ₁; $N_2 = \alpha_2\beta L(\varepsilon_1/3, \varepsilon_2)$ — порядок гребенчатого фильтра ЦГФ₂; $N_3 = \alpha_3\beta L(\varepsilon_1/3, \varepsilon_2)$ — порядок сглаживающего фильтра ЦСФ. Подставив в (3.19) выражения (3.17) и (3.18), получим

$$R_T = \left(\frac{\alpha}{\nu_1} + \frac{\nu_1}{(\beta - 2\nu_1)\nu_2} + \frac{\nu_2}{\beta - 2\nu_2} \right) \beta L\left(\frac{\varepsilon_1}{3}, \varepsilon_2\right) f_{\kappa\phi}. \quad (3.20)$$

Поиск аналитического решения задачи оптимального выбора параметров ν_1 и ν_2 , минимизирующих функцию (3.20), приводит к системе нелинейных уравнений

$$\begin{cases} 4\alpha\nu_1^2\nu_2^2 - \beta\nu_1^2\nu_2 - 4\alpha\beta\nu_1\nu_2^2 + \alpha\beta^2\nu_2^2 = 0; \\ 2(\beta + 2)\nu_1\nu_2^2 - 4\beta\nu_1\nu_2 - \beta^2\nu_2^2 + \beta^2\nu_1 = 0. \end{cases} \quad (3.21)$$

Используя численные методы решения системы уравнений (3.21), можно найти оптимальные значения параметров ν_1 и ν_2 . Однако, учи-

тывая целочисленный характер параметров ν_1 и ν_2 и естественное ограничение $\nu_2 \leq 2\nu_1$ в рамках построения эффективной структуры фильтра, на практике предпочтение отдают поиску оптимального решения с применением численных методов определения экстремума функции $R_T(\nu_1, \nu_2)$ непосредственно по выражению (3.20).

При дальнейшем увеличении числа каскадов m пропорционально увеличивается число «свободных» параметров ν_i , $i = \overline{1, (m-1)}$, что в значительной степени затрудняет поиск оптимального решения. Поэтому при построении многокаскадных структур на основе использования эффектов прореживания по частоте удобно воспользоваться относительно простым подходом к выбору параметров гребенчатых фильтров, предложенным в [29]. Идея метода [29] состоит в построении многоступенчатой структуры предельно простых каскадно соединенных гребенчатых фильтров.

В качестве входного фильтра многоступенчатой структуры, как и в случае трехкаскадной реализации, примем гребенчатый фильтр, основной лепесток функции передачи $H_0(\omega)$ которого совпадает с функцией передачи $H(\omega)$ проектируемого НЧ фильтра, а период повторения боковых лепестков ω_{Γ_0} определяется выбранным значением коэффициента прореживания ν_0 (3.16). Предположим, что параметр ν_0 принимает значение, кратное степени двойки. Для выделения основного лепестка функции передачи $H_0(\omega)$ воспользуемся m -каскадным соединением элементарных гребенчатых фильтров с функциями передачи $H_i(\omega)$, $i = \overline{1, m}$, где число каскадов $m = \log_2 \nu_0$. Каждый последующий гребенчатый фильтр ЦГФ _{i} , $i = \overline{1, m}$, помимо основного лепестка, выделяет совокупность четных боковых составляющих на фоне нечетных составляющих спектра сигнала на его входе. В результате m -ступенчатого преобразования на выходе фильтра присутствует только основной лепесток из совокупности ν спектральных составляющих, выделяемых гребенчатым фильтром ЦГФ₀.

Коэффициент прореживания импульсной характеристики i -го ЦГФ связан с коэффициентом прореживания входного гребенчатого фильтра ЦГФ₀ соотношением $\nu_i = \nu_0 2^{-i}$, $i = \overline{1, m}$.

Если далее принять, что показатели узкополосности $\beta_i = \beta$ для всех $i = \overline{1, m}$, то показатели прямоугольности АЧХ

$$\alpha_i = \frac{v_{i-1}}{\beta - 2v_{i-1}} = \frac{v_0}{2^{i-1}\beta - 2v_0}, \quad i = \overline{1, m}. \quad (3.22)$$

Выражение для оценки вычислительных затрат на реализацию $(m+1)$ -ступенчатой структуры запишем в виде

$$R_T = \left[\sum_{i=0}^m \frac{N_i}{v_i} \right] f_{кв},$$

где

$$N_i = \alpha_i \beta L(\varepsilon_1/m+1, \varepsilon_2). \quad (3.23)$$

Подставив в (3.23) выражение (3.22), получим

$$R_T = \left[\frac{\alpha}{v_0} + \sum_{i=1}^m \frac{2}{\beta - v_0 2^{-i+2}} \right] \beta L\left(\frac{\varepsilon_1}{m+1}, \varepsilon_2\right) f_{кв}. \quad (3.24)$$

Выбор оптимального значения параметра v_0 связан с минимизацией функции (3.24). Если показатель прямоугольности АЧХ проектируемого фильтра $\alpha \gg 1$, то параметр v_0 следует выбирать максимально приближающимся к предельно допустимому значению $v_0 \leq \alpha\beta/2(1+\alpha)$ с целью минимизации затрат на реализацию входного гребенчатого фильтра. Однако при этом увеличиваются число ступеней m и дополнительные затраты, связанные с реализацией последующей m -ступенчатой структуры элементарных гребенчатых фильтров. Учитывая, что параметр $v_0 = 2^m$, оценку вычислительных затрат (3.24) приведем к виду

$$R_T = \left[\frac{\alpha}{2^m} + \sum_{i=1}^m \frac{2}{\beta - 2^{m-i+2}} \right] \beta L\left(\frac{\varepsilon_1}{m+1}, \varepsilon_2\right) f_{кв}. \quad (3.25)$$

Последовательно наращивая число ступеней m , можно найти его оптимальное значение и соответственно значение коэффициента прореживания $v_0 = 2^m$, минимизирующее функцию (3.25). В табл. 3.1 приведены результаты расчета оптимальной многокаскадной структуры НЧ фильтра с заданными для контрольного примера параметрами частотной избирательности: $\alpha = 10$; $\beta = 30$; $\varepsilon_{1don} = 10^{-2}$; $\varepsilon_{1don} = 10^{-2}$; $f_{кв} = 3 \text{ кГц}$.

Таблица 3.1

m	ν_0	R_T , умн/с	S , ячеек памяти
1	2	$1311 \cdot 10^3$	868
2	4	$718 \cdot 10^3$	921
3	8	$431 \cdot 10^3$	997

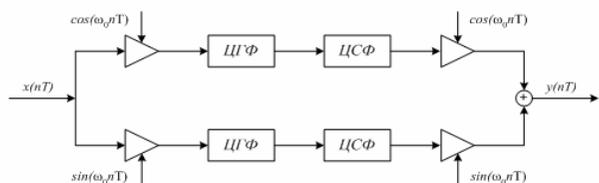
Таким образом, переход от оптимальной двухкаскадной структуры к многокаскадной дает дополнительный выигрыш с позиции минимизации вычислительных затрат. Этот выигрыш не очень значителен, так как показатель узкополосности фильтра принимает в рассматриваемом примере относительно небольшое значение. При дальнейшем увеличении показателя узкополосности β следует ожидать более существенного повышения эффективности перехода к многокаскадной реализации фильтра.

3.4 Синтез многоступенчатых структур в классе БИХ-цепей

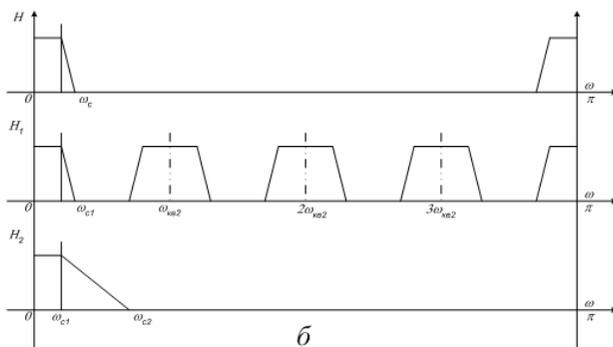
Проектирование узкополосных фильтров с бесконечной импульсной характеристикой, известных также как фильтры с бесконечной памятью (БП-фильтры), приводит к необходимости высокоточного представления коэффициентов передачи цифровых звеньев, так как при смещении полюсов проектируемого фильтра к единичной окружности Z -области и увеличении плотности их концентрации в окрестности полосы пропускания наблюдается значительное увеличение чувствительности характеристик цифровой цепи к ошибкам квантования коэффициентов [85]. Существенную роль при этом играют два фактора: порядок фильтра M и плотность концентрации его полюсов. Известно [79], что наиболее общими подходами к решению этой проблемы являются переход к многокаскадной структуре цифровых звеньев первого и второго порядков и увеличение минимально требуемого порядка фильтра в обмен на возможность некоторого уменьшения разрядности коэффициентов. Однако при проектировании узкополосных БП-фильтров указанные приемы не всегда дают желаемый результат. Так, при реализации на ЦПОС некаскадная форма построения структуры фильтра более предпочтительна с позиции минимизации объема вычислительных затрат.

В [31] предложена двухкаскадная структура (рис. 3.9, а) узкополосного БП-фильтра на основе последовательного соединения ЦГФ, частотная характеристика $H_1(\omega)$ которого отличается от частотной характеристики проектируемого фильтра $H(\omega)$ наличием периодической последовательности однотипных с последней боковых составляющих (рис. 3.9, б), и ЦСФ с частотной характеристикой $H_2(\omega)$, выделяющего основной лепесток (его положение совпадает с областью частот полосы пропускания проектируемого фильтра) из совокупности боковых составляющих сигнала на выходе ЦГФ.

Предполагается, что синтез полосового фильтра сводится к синтезу двухканального НЧ фильтра по структуре с квадратурной модуляцией (см. рис. 2.11). Отличие структуры, представленной на рис. 3.9, от структуры фильтра на рис. 3.7 состоит только в том, что синтез цифровых фильтров ЦГФ и ЦСФ проводится в классе БП-цепей. Покажем, что рассматриваемая двухкаскадная структура отличается малой чувствительностью к изменению коэффициентов фильтра.



а



б

Рис. 3.9 Двухкаскадная форма построения узкополосного БП-фильтра: а – структурная схема; б – частотные характеристики фильтров ЦГФ, ЦСФ и эквивалентного НЧ фильтра.

Анализ структуры на рис. 3.9 прежде всего связан с вопросами проектирования гребенчатых БП-фильтров. Расчет и проектирование ЦГФ с требуемыми свойствами частотной избирательности его составляющих рассматриваются (см. разд. 3.1) как синтез некоторого базового НЧ фильтра, частота дискретизации сигнала на входе которого равна интервалу периодичности частотной характеристики проектируемого гребенчатого фильтра. Отношение частоты дискретизации $\omega_{кв1}$ входного сигнала ЦГФ к частоте дискретизации $\omega_{кв2}$ сигнала на входе базового НЧ фильтра определяет показатель периодичности АЧХ гребенчатого фильтра $\nu = \omega_{кв1} / \omega_{кв2}$, характеризующий одновременно «прореженность» его импульсной характеристики.

В разд. 3.1 показано, что чувствительность полюсов ЦГФ, уход которых от расчетного положения в конечном итоге определяет точность воспроизведения желаемых частотных характеристик, приблизительно в ν^M раз меньше чувствительности полюсов полосового фильтра, построенного по обычной некаскадной структуре. В то же время чувствительность полюсов ЦСФ также значительно меньше чувствительности полюсов полосового фильтра, реализующего требуемые свойства частотной избирательности $H(\omega)$ по некаскадной структуре, даже при условии равенства их полос пропускания в общем диапазоне рабочих частот. Действительно, мера чувствительности k -го полюса (3.5) существенно зависит от порядка M проектируемого БП-фильтра, а порядок ЦСФ заметно уменьшается с расширением переходной зоны его АЧХ. Более того, чувствительность полюсов ЦСФ можно дополнительно уменьшить, увеличив ширину его полосы пропускания. Однако при этом пропорционально уменьшается коэффициент прореживания ν импульсной характеристики ЦСФ и, как следствие, увеличивается чувствительность полюсов входного каскада фильтров. Постановка и решение соответствующей задачи оптимизации двухкаскадной структуры зависят от конкретно выбранной модели цифровой БП-цепи и является предметом самостоятельного исследования.

В качестве иллюстрации эффективности двухкаскадной структуры узкополосного фильтра, представленной на рис. 3.9, а, рассмотрим методику расчета и анализа чувствительности полюсов фильтра Баттерворта с параметрами частотной избирательности: затухание—3 дБ на частоте $f_{c1} = 10$ Гц и, по крайней мере, — 40 дБ на частоте $f_{c2} = 20$ Гц; частота дискретизации входного сигнала $f_{кв} = 10$ кГц.

Квадрат модуля функции передачи фильтра Баттерворта M -го порядка принимает вид [85]

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{\operatorname{tg}^{2N}(\omega_{c1}/2)}{\operatorname{tg}^{2N}(\omega_{c1}/2) + \operatorname{tg}^{2N}(\omega/2)}, \quad (3.26)$$

где $\omega = 2\pi f / f_{кв}$ — приведенная круговая частота; $\omega_{c1} = 2\pi f_{c1} / f_{кв}$ — частота среза полосы пропускания на уровне —3 дБ. Требуемое значение порядка M в (3.26) составит $M = 7$. Действительно, если считать $\omega_{c1} = 0,00628$ и $\omega_{c2} = 2\pi f_c / f_{кв} = 0,0125$, то затухание АЧХ в зоне непрозрачности фильтра будет не менее —40 дБ для всех $M \geq 7$.

Для определения координат (u_k, v_k) полюсов фильтра Баттерворта, расположенных внутри единичной окружности Z -области, воспользуемся совокупностью выражений [85]

$$\begin{aligned} u_k &= \frac{1 - \operatorname{tg}^2(\omega_{c1}/2)}{1 - 2\operatorname{tg}(\omega_{c1}/2)\cos(k\pi/M) + \operatorname{tg}^2(\omega_{c1}/2)}; \\ v_k &= \frac{2\operatorname{tg}(\omega_{c1}/2)\sin(k\pi/M)}{1 - 2\operatorname{tg}(\omega_{c1}/2)\cos(k\pi/M) + \operatorname{tg}^2(\omega_{c1}/2)}, \end{aligned} \quad (3.27)$$

где $k = 0, 1, 2, \dots, 2M - 1$; M — нечетное число.

Поскольку положение полюсов представляет интерес только для сравнительной оценки их чувствительности к изменению коэффициентов при реализации фильтра по обычной и каскадной структурам, то в дальнейшем ограничимся расчетом чувствительности полюсов, наиболее близко расположенных к единичной окружности Z -области, а именно пары комплексно-сопряженных полюсов, порядковые номера которых $k = 4$ и $k = 10$.

Подставив в (3.27) исходные данные $\omega_{c1} = 0,00628$ и $k = 4$, получим $u_4 = 0,998585$, $v_4 = 0,00614$ или в полярных координатах

$$r_4 = \sqrt{u_4^2 + v_4^2} = 0,998603; \quad \varphi_4 = \operatorname{arctg} \frac{v_4}{u_4} \approx 0,35^\circ.$$

Минимальное расстояние полюсов от единичной окружности Z -области, определяющее запас устойчивости БП-фильтра, составит $\Delta r_{\min} = \Delta r_4 = (1 - r_4) = 0,0014$. Аналогичный результат можно получить для комплексно-сопряженного полюса.

Чувствительность k -го полюса согласно (3.5) зависит от порядкового номера i коэффициента a_i полиномиального представления знаменателя системной функции $H(z^{-1})$. Однако эта зависимость имеет второстепенный характер и при $\Delta r_k \rightarrow 0$ практически не влияет на чувствительность k -го полюса. Поэтому примем $i = 1$ и рассмотрим

чувствительность полюса z_k к изменению коэффициента a_1 . Принимая во внимание, что используемая мера чувствительности (3.5) — величина комплексная, выделим ее модуль, определяющий радиальный уход полюса z_k при изменении коэффициента a_1 на величину Δa_1 :

$$\left| \frac{\Delta z_k}{\Delta a_1} \right| = r_k / \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^N |z_k - z_l|. \quad (3.28)$$

Подставив в (3.28) $k = 4$ с учетом, что порядковые номера полюсов z_k , находящихся внутри единичной окружности, принимают значения $k = 4, 10$ и при $|\nu_k - \nu_l| \gg |u_k - u_l|$ имеет место допущение $|z_k - z_l| \sim |u_k - u_l|$, получим

$$\left| \frac{\Delta z_4}{\Delta a_1} \right| \sim r_4 / \prod_{l=5}^{10} |\nu_4 - \nu_l| = 0,3306 \cdot 10^{14}. \quad (3.29)$$

Чтобы проектируемый полосовой фильтр, мера чувствительности полюсов которого определяется значением (3.29), оставался устойчивым, т. е. радиальное смещение полюса z_4 не превысило величины $\Delta r_{\text{дон}} = 0,001397$, модуль ошибки Δa_1 должен отвечать граничному условию $|\Delta a_{1\text{дон}}| \leq \Delta r_{\text{дон}} / |\partial z_4 / \partial a_1| = 0,423 \cdot 10^{-16}$, т.е. точное представление коэффициентов фильтра должно исчисляться 16 десятичными знаками после запятой, что соответствует двоичному представлению чисел с длиной регистра памяти $p \geq 54$ дв. ед. Таким образом, рассматриваемая реализация цифрового фильтра требует такой точности задания коэффициентов, которая практически не приемлема даже при моделировании на ЭВМ.

Для реализации требуемой частотной избирательности системы фильтров в рамках рассматриваемой двухкаскадной структуры зададимся исходными данными: базовый НЧ фильтр — фильтр Баттерворта 7-го порядка, затухание АЧХ которого — 3 дБ на частоте $f_{c11} = 10$ Гц и не менее 40 дБ на частоте $f_{c2} = 20$ Гц; частота дискретизации входного сигнала 400 Гц; сглаживающий фильтр — фильтр Баттерворта 3-го порядка, затухание АЧХ которого — 3 дБ на частоте $f_{c12} = 80$ Гц; частота дискретизации входного сигнала $f_{кв1} = f_{кв} = 10$ кГц. Воспользовавшись (3.26), нетрудно доказать, что для принятых исходных данных затухание АЧХ сглаживающего

фильтра не менее 40 дБ при $f \geq 320 \text{ Гц}$, что обеспечивает подавление боковых частотных составляющих входного ЦГФ с коэффициентом передачи не более 0,01. В то же время коэффициент передачи последнего на частотах $f \leq f_{c11} = 10 \text{ Гц}$ фактически равен единице и не вносит заметного искажения в коэффициент передачи каскадного соединения фильтров в области частот полосы пропускания базового НЧ фильтра.

Для анализа чувствительности полюсов базового НЧ фильтра и ЦСФ воспользуемся рассмотренной ранее методикой и совокупностью выражений (3.27) и (3.28). Относительно базового НЧ фильтра модуль чувствительности полюса z_4 , наиболее близко расположенного к единичной окружности Z -области ($\Delta r_4 = 0,034224$), составляет $|\partial z_4 / \partial a_{11}| = 4725$. При этом для обеспечения устойчивости рассматриваемого НЧ фильтра и соответствующего ему ЦГФ допустимая ошибка в представлении коэффициентов фильтра должна отвечать граничному условию $\Delta a_{11\text{дон}} \leq \Delta r_{\text{дон}} / |\partial z_4 / \partial a_{11}| = 0,72 \cdot 10^{-5}$, что выполняется при разрядности регистра памяти коэффициентов фильтра $p_1 \geq 18$.

Расчет ЦСФ по аналогичной методике дает $\Delta r_{\text{min}} = \Delta r_2 = 0,0248$; $|\partial z_2 / \partial a_1| = 271$; $\Delta n_{12\text{дон}} \leq 0,095 \cdot 10^{-3}$.

Требуемая точность представления коэффициентов ЦСФ достигается при $p_2 \geq 18$. Таким образом, длина регистра памяти коэффициентов фильтра Баттерворта, реализуемого по рассматриваемой двухкаскадной структуре, в 3 раза меньше по отношению к некаскадной реализации.

Рассматриваемая структура БП-фильтра отличается не только малой чувствительностью полюсов к изменению коэффициентов, но и небольшим уровнем собственного шума, прежде всего вследствие того, что шум ЦГФ значительно меньше собственного шума узкополосного фильтра. Собственный шум ЦГФ дополнительно сглаживается последующим каскадом фильтров — фильтром ЦСФ, а уровень шума самого ЦСФ существенно уменьшается с увеличением ширины его полосы пропускания и порядка синтезируемой цепи. Общий объем вычислительных затрат определяется фактически порядком базового НЧ фильтра и несущественно увеличивается по отношению к обычной реализации БП-фильтра. Недостатком метода является ν -кратное увеличение требуемого числа регистров оперативной памяти. Отмеченные потери «окупаются» при реализации набора полосовых фильтров, пе-

рекрывающих заданный диапазон рабочих частот, так как при этом один ЦГФ используется на $\nu/2$ сглаживающих фильтров.

Стремление к наиболее полной реализации потенциальной возможности уменьшения чувствительности полюсов ЦГФ, что достигается при предельно больших значениях параметра ν , ограничивается «потерями» на ЦСФ — существенным увеличением чувствительности полюсов сглаживающего фильтра с уменьшением относительной ширины полосы его пропускания. Проблему уменьшения чувствительности полюсов ЦСФ можно решить в рамках трехкаскадной структуры, отличающейся построением узкополосного ЦСФ по рассмотренной выше двухкаскадной реализации с введением дополнительного гребенчатого фильтра. При этом новый ЦСФ на выходе структуры фильтра, имеющий несколько большую полосу пропускания и меньший порядок, будет менее чувствителен к изменению коэффициентов по отношению к ранее используемому ЦСФ. Продолжая далее процесс наращивания числа элементарных ЦГФ, получаем $(m+1)$ -каскадную реализацию узкополосного НЧ фильтра, включающую m элементарных ЦГФ.

На рис. 3.10 дан пример построения четырехкаскадной структуры фильтра. Выходной ЦСФ с функцией передачи $H_3(\omega)$ является широкополосным с предельно пологой переходной зоной АЧХ. Расстояние между полюсами z_i и z_l его передаточной функции $H_3(z^{-1})$ соизмеримо со значениями модулей $z_k, k = \overline{1, M_3}$, а порядок M_3 , как правило, не превышает трех, и мера чувствительности $\beta_{k,i}^* = |\partial z_k / \partial a_i|$ его полюсов составляет несколько единиц.

Чувствительность полюсов каждого предшествующего элементарного гребенчатого фильтра с функциями передачи $H_1(\omega)$ и $H_2(\omega)$, как следует из (3.8), в $\nu_1 = 2$ и $\nu_2 = 4$ раз меньше чувствительности полюсов выходного ЦСФ, который одновременно является базовым НЧ фильтром при расчете элементарных ЦГФ. При этом чувствительность полюсов входного ЦГФ, типичный вид АЧХ которого представлен на рис. 3.10 функцией передачи $H_0(\omega)$, будет несколько больше по отношению к последующим каскадно соединенным цифровым звеньям вследствие заметного увеличения порядка соответствующего базового НЧ фильтра и приблизительно в ν^M раз ($\nu = 8$) меньше, чем у узкополосного фильтра M -го порядка, проектируемого по обычной некаскадной структуре.

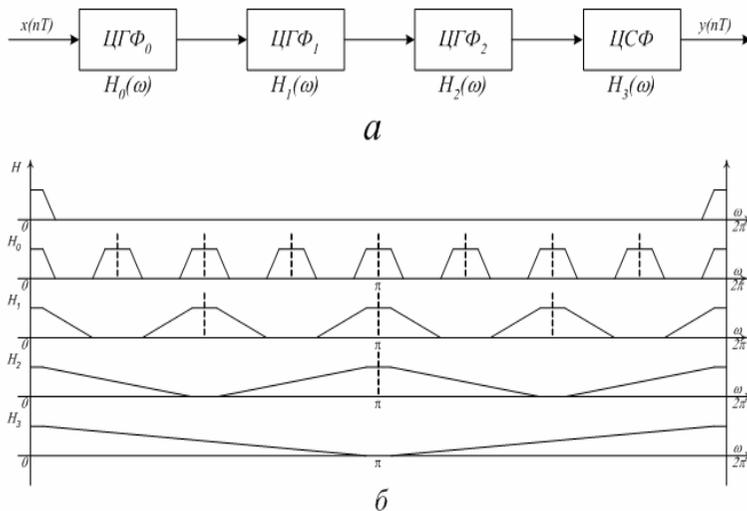


Рис. 3.10 Многокаскадная форма построения низкочастотного БП-фильтра: а — структурная схема; б — частотные характеристики элементарных полуполосных ЦГФ, формирующих желаемую функцию передачи

3.5 Метод частотной выборки и его модификация

Сравнительный анализ методов проектирования цифровой системы узкополосной фильтрации показывает [2], что одним из наиболее экономичных с точки зрения числа операций умножения и требуемой емкости памяти данных является метод частотной выборки, реализуемый последовательным соединением гребенчатого фильтра и набора рекурсивных косинусных или синусных резонаторов. Для получения текущего отсчета сигнала на выходе элементарного фильтра, воспроизводящего функцию передачи вида

$$H(j\omega) = \frac{\sin[(\omega - \omega_r)N/2]}{N \sin[(\omega - \omega_r)/2]} e^{-j\frac{\omega N}{2}}, \quad (3.30)$$

где ω_r — приведенная резонансная частота; N — порядок гребенчатого фильтра, требуются всего две операции умножения. Емкость опера-

тивной памяти определяется при этом памятью гребенчатого фильтра N и тремя дополнительными регистрами на каждый резонатор. Существенно, что память гребенчатого фильтра используется одновременно для всех резонаторов и может быть выполнена в виде цифровой линии задержки, представляющей собой сравнительно недорогой и компактный тип запоминающего устройства. Однако аппаратная и программная реализации метода частотной выборки предполагают возможность использования специализированных микропроцессорных БИС и микроЭВМ с большой длиной регистра памяти данных и коэффициентов, находящейся в пределах 20 ... 30 дв. ед., что не всегда приемлемо, и, в первую очередь, при реализации на ЦПОС. К недостаткам классического исполнения метода частотной выборки следует отнести нелинейность ФЧХ, возникающую при радиальном смещении полюсов цифровых резонаторов внутрь единичной окружности (выполняемом для достижения устойчивости последних), а также эффект «пульсаций» АЧХ проектируемого фильтра в полосе пропускания вследствие углового смещения полюсов цифровых резонаторов относительно нулей гребенчатого фильтра [85].

В [86] предложена модификация метода частотной выборки, идея которой заключается в построении набора цифровых резонаторов на основе структуры с квадратурной модуляцией входного сигнала, позволяющей свести синтез цифрового резонатора к синтезу элементарного цифрового интегратора, не требующего операций умножения. Предложенная модификация не дает выигрыша в общем объеме вычислительных затрат, но позволяет достигнуть строгого углового совмещения полюсов резонаторов и нулей входного гребенчатого фильтра и, как следствие, заметного уменьшения требуемой длины регистра памяти коэффициентов проектируемого фильтра. Рассмотрим более подробно способ построения структуры цифрового элементарного фильтра по методу [86].

Импульсная характеристика элементарного фильтра с функцией передачи (3.30) принимает вид

$$h(nT) = \begin{cases} \cos(k\omega_0 nT) & \text{при } n = 0, 1, \dots, N-1; \\ 0 & \text{при других } n, \end{cases} \quad (3.31)$$

где $k\omega_0 = k2\pi/N = \omega_{r,k}$ — резонансная частота k -го элементарного фильтра.

Запишем сигнал на выходе элементарного фильтра с импульсной характеристикой (3.31):

$$y_1(nT) = \sum_{l=n-N+1}^n x(lT) \cos[k\omega_0(n-l)T], \quad (3.32)$$

где $x(lT)$ — отсчеты входного сигнала.

Произведя замену переменных в (3.32) и учитывая периодичность функции $\cos[x]$, получим

$$y_1(nT) = \sum_{l=-\infty}^n x(lT) \cos[k\omega_0(n-l)T] - \sum_{l=-\infty}^n x(lT - NT) \cos[k\omega_0(n-l)T] \quad (3.33)$$

После элементарных преобразований выражения (3.33) имеем

$$y_1(nT) = \sum_{l=-\infty}^n \Delta x(lT) \cos(k\omega_0 lT) \cos(k\omega_0 nT) + \sum_{l=-\infty}^n \Delta x(lT) \sin(k\omega_0 lT) \sin(k\omega_0 nT), \quad (3.34)$$

где $\Delta x(lT) = x(lT) - x(lT - NT)$. Структурная схема обработки, соответствующая алгоритму (3.34), приведена на рис. 3.11.

В представленной на рис. 3.11 структуре элементарного фильтра имеется блок, аналогичный гребенчатому фильтру, который выполняет задержку входного сигнала на N отсчетов и реализует операцию вычитания $\Delta x(lT) = x(lT) - x(lT - NT)$. По существу он служит для ограничения импульсной характеристики косинусного резонатора, функцию которого выполняет остальная часть схемы. Используя его для всех частотных полос и суммируя выходы соседних элементарных фильтров с необходимыми весами, можно сформировать систему фильтров, обладающих заданными шириной полосы пропускания, затуханием в зоне непрозрачности и линейной ФЧХ. При этом выходы резонаторов с нечетными номерами следует брать со знаком минус, так как фазы в последовательности элементарных фильтров будут отличаться на π .

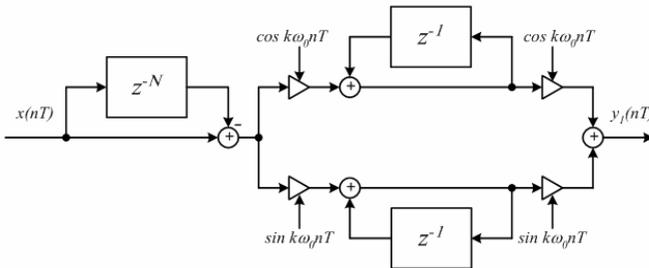


Рис.3.11 Структурная схема фильтра частотной выборки с линейной ФЧХ на основе двухканального цифрового интегратора

В полученном алгоритме реализации фильтра нет необходимости представлять гармонические функции большим количеством разрядов. Поэтому, несмотря на то, что этот алгоритм требует четыре операции умножения на каждый элементарный фильтр, специализированное вычислительное устройство, построенное на его основе, например, с применением ПЛИС, будет обладать большим быстродействием при меньших «размерах» кристаллов, чем при использовании процедур, реализующих рекурсивные косинусные резонаторы. Вместе с тем необходимо отметить, что операции умножения на гармонические функции, производимые перед накоплением, должны выполняться без округления результатов. Объясняется это тем, что для ошибок, вызванных квантованием этих произведений, импульсная характеристика фильтра является бесконечной по длительности, вследствие чего ошибки будут неограниченно накапливаться в сумматоре. Отсчеты, поступающие на умножитель после накопления, и результаты умножения могут быть квантованы до необходимого числа разрядов. Квантование, выполняемое после накопления, вносит практически несущественные шумы в конечный результат, так как накопление ошибок в данном случае отсутствует. Приведенный алгоритм наиболее эффективен при реализации системы узкополосных цифровых фильтров на ЦПОС с существенно ограниченной разрядностью представления коэффициентов фильтра и в то же время отличающихся отсутствием округления при умножении.

Описанный способ реализации цифровых резонаторов можно применять и при построении фильтров с произвольной в классе функций отсчетов комплексной частотной характеристикой. Импульсную характеристику фильтра с произвольной функцией передачи $H(j\omega)$, заданной в $N = 2M + 1$ равноотстоящих частотах на интервале $-\pi \leq \omega \leq \pi$, можно записать в виде

$$h(nT) = \frac{1}{N} \left\{ a_0 + 2 \sum_{k=1}^M (-1)^k [a_k \cos(k\omega_0 nT) + b_k \sin(k\omega_0 nT)] \right\}, \quad (3.35)$$

где $n = 0, 1, 2, \dots, 2M$.

Предполагается, что комплексная частотная характеристика такого фильтра $H(j\omega) = G(j\omega)e^{-j\omega M}$, где $G(j\omega)$ — функция передачи эквивалентного по свойствам частотной избирательности фильтра с нулевой фазовой характеристикой, может быть представлена в базисе функций отсчетов в следующем виде:

$$H(j\omega) = \{ \text{Re}[G(j\omega)] + j \text{Im}[G(j\omega)] \} e^{-j\omega M}, \quad (3.36)$$

где

$$\operatorname{Re}[G(j\omega)] = \frac{1}{N} \left\{ \sum_{k=0}^M a_k \left[\frac{\sin NT/2(k\omega_0 - \omega)}{\sin T/2(k\omega_0 - \omega)} + \frac{\sin NT/2(k\omega_0 + \omega)}{\sin T/2(k\omega_0 + \omega)} \right] \right\},$$

$$\operatorname{Im}[G(j\omega)] = -\frac{1}{N} \left\{ \sum_{k=0}^M b_k \left[\frac{\sin NT/2(k\omega_0 - \omega)}{\sin T/2(k\omega_0 - \omega)} - \frac{\sin NT/2(k\omega_0 + \omega)}{\sin T/2(k\omega_0 + \omega)} \right] \right\}.$$

В точках отсчета $\omega_k = k\omega_0$, $k = \overline{0, M}$, функция передачи $G(j\omega)$ принимает заданные значения $G(jk\omega_0) = G^*(jk\omega_0) = a_k - jb_k$, отклоняясь в промежутках от желаемой характеристики $G^*(j\omega)$ на величину, определяемую выбранным способом представления (3.36).

Для воспроизведения функции передачи (3.36) цифрового фильтра, импульсная характеристика которого описывается выражением (3.35), необходимо построить набор элементарных фильтров с импульсными характеристиками вида

$$h_k(nT) = a_k \cos(k\omega_0 nT) + b_k \sin(k\omega_0 nT). \quad (3.37)$$

Появление в (3.37) дополнительной составляющей требует, наряду с косинусным резонатором, формирования синусного резонатора. Аналогично выводу выражения (3.34) выходной сигнал синусного резонатора можно представить в виде

$$y_2(nT) = \sum_{l=-\infty}^n \Delta x(lT) \cos(k\omega_0 lT) \sin(k\omega_0 nT) - \sum_{l=-\infty}^n \Delta x(lT) \sin(k\omega_0 lT) \cos(k\omega_0 nT). \quad (3.38)$$

Совместный анализ выражений (3.34) и (3.38) показывает, что фильтру с импульсной характеристикой (3.37) соответствует структурная схема, приведенная на рис. 3.12. Из полученных элементарных фильтров можно построить систему фильтров с требуемыми амплитудно-фазовыми свойствами.

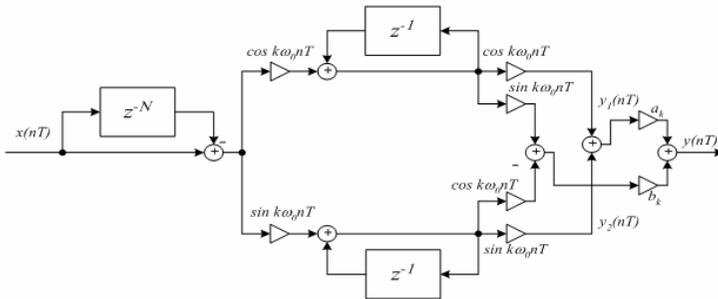


Рис. 3.112 Структурная схема фильтра частотной выборки с комплексной функцией передачи

Реализация фильтров частотной выборки по структурным схемам, представленным на рис. 3.11 и 3.12, как уже было отмечено, не допускает округления результатов умножения на входах цифровых интеграторов, что приводит к необходимости значительного увеличения длины регистров памяти данных. Более того, фактическая длина операндов на входах интеграторов, а следовательно, и длина регистров памяти данных проектируемой микропроцессорной системы определяются в этом случае не только разрядностью представления результатов умножения, но и требуемым динамическим диапазоном используемых интеграторов. В результате расчетная длина регистров памяти данных цифровой системы, проектируемой по методу [86], может превысить длину регистра памяти фильтра, реализуемого по классической структуре метода частотной выборки. Ниже описываются новые модификации метода частотной выборки, лишенные в значительной степени отмеченных недостатков [30].

Отличительная особенность новых модификаций заключается в использовании структуры с квадратурной модуляцией для эффективной реализации не отдельно взятого цифрового резонатора, а элементарного фильтра выборки в целом. При этом схема фильтра выборки сводится к обычному цифровому накопителю, порядок которого определяется порядком проектируемого фильтра.

Реакцию k -го фильтра выборки порядка N на входное воздействие $x(nT)$ запишем в виде

$$y(nT) = \sum_{l=0}^{N-1} x[(n-l)T] \cos(k\omega_0 l) = \sum_{l=n-N+1}^n x(lT) \cos[k\omega_0(n-l)T]. \quad (3.39)$$

С помощью простых тригонометрических преобразований выражения (3.39) получим

$$y(nT) = \cos(k\omega_0 n) \sum_{l=0}^{N-1} x_1[(n-l)T] + \sin(k\omega_0 n) \sum_{l=0}^{N-1} x_2[(n-l)T], \quad (3.40)$$

где $x_1(nT) = x(nT) \cos(k\omega_0 nT)$; $x_2(nT) = x(nT) \sin(k\omega_0 nT)$.

Реализация фильтра выборки непосредственно по алгоритму (3.40) потребует четыре операции умножения и $2N+1$ сложений на каждый текущий отсчет выходного сигнала, что существенно превышает вычислительные затраты известных методов.

Рассмотрим возможные варианты уменьшения числа операций сложения в рамках предложенного подхода. Отметим прежде всего, что при накоплении входных данных $x_1(nT)$ и $x_2(nT)$ с коэффициентом перекрытия соседних массивов, близким к единице, целесообразно воспользоваться результатами предыдущей обработки. Сигнал на вы-

ходе цифрового накопителя первого (второго) квадратурного каналов обозначим $\omega_{1,2}(nT)$ и запишем общее выражение для текущих значений:

$$\begin{aligned}\omega_{1,2}(nT) &= \sum_{l=0}^{N-1} x_{1,2}[(n-l)T] = x_{1,2}(nT) + \sum_{l=0}^{N-1} x_{1,2}[(n-l-1)T] - x_{1,2}[(n-N)T] = (3.41) \\ &= x_{1,2}(nT) - x_{1,2}[(n-N)T] + \omega_{1,2}[(n-1)T].\end{aligned}$$

Таким образом, при введении двух дополнительных регистров памяти данных для хранения предыдущих результатов накопления реализация фильтра выборки потребует шесть операций умножения и семь сложений на каждый текущий отсчет выходного сигнала.

Структурная схема фильтра выборки, реализуемого по алгоритму (3.40) с учетом (3.41), приведена на рис. 3.13. Как показывает сравнение со структурой на рис. 3.11, рассматриваемый вариант реализации фильтра частотной выборки отличается только тем, что гребенчатый фильтр не выносится на вход параллельного набора цифровых резонаторов, а реализуется в каждом элементарном фильтре. Однако введенная «избыточность» позволяет выполнять округление при умножении на выходе и входе фильтра выборки. При этом дисперсия собственного шума на выходе фильтра будет в N раз меньше дисперсии шума округления результатов умножения, если значение нормирующего множителя на выходе цифрового интегратора, выбираемое из условия

$$\max_n |y(nT)| \leq 1, \quad (3.42)$$

принять равным $1/N$. Это означает, что при округлении результатов умножения до единицы младшего разряда входных данных уровень собственного шума на выходе фильтра существенно меньше уровня шума квантования входных данных.

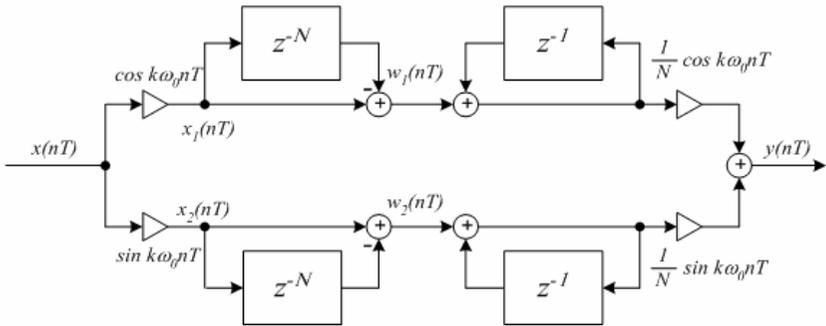


Рис. 3.13 Структурная схема фильтра частотной выборки на основе квадратурной модуляции

Вместе с тем требуемый динамический диапазон цифрового накопителя, как и для цифрового интегратора, определяется не только разрядностью представления, но и размерностью N накапливаемого массива данных, причем для достаточно больших N число дополнительных разрядов накопителя ($\log_2 N$) может быть соизмеримо с длиной информационной части входных данных.

Другой вариант повышения эффективности метода частотной выборки в рамках рассматриваемого подхода (3.40) состоит в многокаскадной реализации цифрового накопителя с использованием масштабирования промежуточных переменных. Покажем, что передаточную функцию $H(z^{-1})$ цифрового накопителя $(N-1)$ -го порядка, принимающую вид

$$H(z^{-1}) = 1 + z^{-1} + z^{-2} + \dots + z^{-N+1}, \quad (3.43)$$

(где $N = 2^R$ — двоично-рациональное число), можно представить как R -каскадное соединение элементарных гребенчатых фильтров. Выражение (3.49) запишем в виде произведения двух сомножителей соответственно $(N/2)$ -го и $(N/2-1)$ -го порядков:

$$\begin{aligned} H(z^{-1}) &= (1 + z^{-1} + z^{-2} + \dots + z^{-N/2+1}) + z^{-N/2}(1 + z^{-1} + z^{-2} + \dots + z^{-N/2+1}) = \\ &= (1 + z^{-N/2})(1 + z^{-1} + z^{-2} + \dots + z^{-N/2+1}). \end{aligned} \quad (3.44)$$

Продолжая процесс разбиения и объединения слагаемые правой части выражения (3.43), аналогично получим

$$H(z^{-1}) = \sum_{j=0}^{R-1} H_j(z^{-1}), \quad (3.45)$$

где

$$H_j(z^{-1}) = 1 + z^{-2^j}. \quad (3.46)$$

Цифровой фильтр, передаточная функция которого описывается выражением (3.46), представляет собой элементарный гребенчатый фильтр 2^j -го порядка, содержащий 2^j нулей, равномерно распределенных на единичной окружности Z -области. Идею метода многокаскадной реализации цифрового накопителя по алгоритму (3.45), где $N = 16$, на примере полигармонической модели входного сигнала, частоты составляющих которого кратны основной частоте выборки ω_0 проектируемой системы фильтров, иллюстрирует рис. 3.14. На рис. 3.15 представлена структурная схема фильтра выборки, построенного по предложенному методу. Здесь $X_1(\omega)$ — амплитудный спектр сигнала $x(nT)$ на входе первого квадратурного канала; $W_i(\omega)$, $i = \overline{1, R}$, — амплитудный спектр сигнала $\omega_{1,i}(nT)$ на выходе i -го гребенчатого фильтра с функцией передачи $H_i(\omega)$. Предполагается, что спектральные преобразования сигнала $x_2(nT)$ во втором квадратурном канале аналогичны первому. Масштабирование сигнала на выходе каждого i -го гребенчатого фильтра (с коэффициентом $1/2$) введено для предотвращения возможности переполнения регистра памяти операндов последующего каскада фильтров при выполнении операций с фиксированной запятой без дополнительного наращивания разрядности операндов. При этом уровень выходного сигнала $y(nT)$ отвечает условию нормирования (3.42).

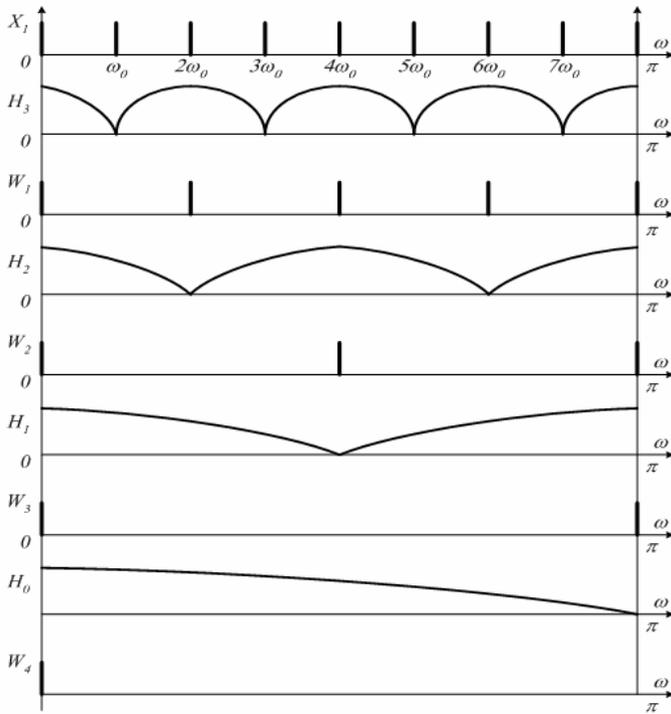


Рис. 3.14 Иллюстрации способа выделения нулевой частоты многокаскадным гребенчатым фильтром

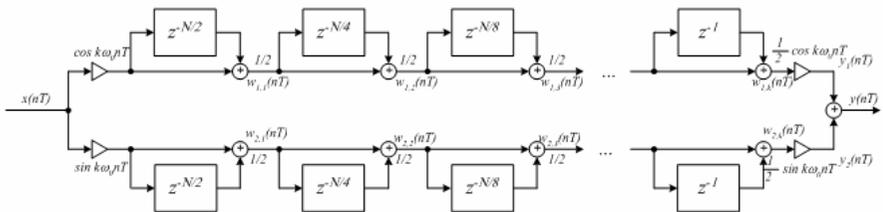


Рис. 3.15 Структурная схема фильтра частотной выборки на основе многокаскадного соединения гребенчатых фильтров

Анализ полученной структуры (см. рис. 3.15) показывает, что уровень собственного шума на выходе фильтра выборки определяется фактически шумами округления при масштабировании промежуточных переменных оконечных каскадов элементарных гребенчатых фильтров, так как шумы входных каскадов сглаживаются последующими каскадами фильтров. Таким образом, рассматриваемая модификация метода частотной выборки отличается малой длиной регистра памяти операндов проектируемого фильтра: требуемая длина регистра памяти результатов промежуточных вычислений фактически только на один — два разряда больше длины регистра памяти входных данных.

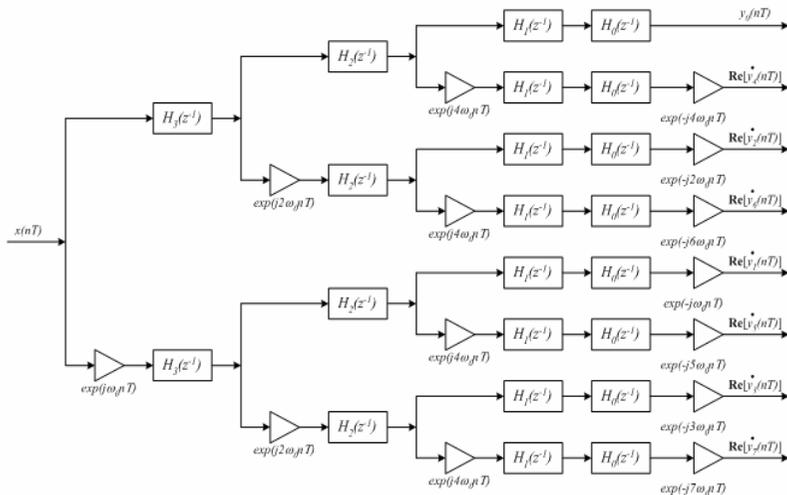


Рис. 3.16 Пирамидальная структура набора фильтров частотной выборки

Реализация фильтра частотной выборки по структуре рис. 3.15 требует четырех операций умножения, $2 \log_2 N + 1$ сложений и не более $2N$ регистров оперативной памяти. Недостатком метода при построении набора M фильтров выборки, перекрывающих заданный диапазон рабочих частот ($M = N/2$), является квадратичный рост числа регистров (ячеек) памяти пропорционально числу фильтров M . Отмеченного недостатка лишена в определенной степени пирамидальная структура элементарных гребенчатых фильтров, общий вид которой при $M = 8$ представлен на рис. 3.16.

Покажем, что по выходу k -го частотного канала рассматриваемой пирамидальной структуры реализуется фильтр выборки с центральной частотой $\omega_k = k\omega_0$. Анализируя структуру на рис. 3.16, заметим, что, во-первых, каскадное соединение гребенчатых фильтров, соединяющих k -й выход с общим входом набора фильтров, формирует передаточную функцию элементарного цифрового накопителя по структуре, аналогичной структуре на рис. 5.14; во-вторых, промежуточные сигналы между соседними каскадами пирамидальной структуры подвергаются квадратурной модуляции так, что выходной сигнал k -го частотного канала последовательно трансформируется в окрестность нулевой частоты. Следовательно, этот сигнал представляет собой комплексную огибающую k -й частотной составляющей входного сигнала. С целью обратной трансформации спектра отфильтрованного сигнала в окрестность исходной центральной частоты на выходах последнего каскада пирамидальной структуры используются квадратурная модуляция и объединение составляющих квадратурных каналов аналогично структуре на рис. 3.15.

Основной выигрыш рассматриваемой модификации метода частотной выборки состоит в существенном сокращении (пропорционально $R-1$ при $M = N/2$) общего числа элементарных гребенчатых фильтров по отношению к реализации непосредственно по структуре на рис. 3.15, что достигается специальной процедурой поитерационного разбиения и объединения соседних частотных каналов. Суть этой процедуры очевидна из рис. 3.14 и 3.16. Отметим, что в варианте построения набора фильтров частотной выборки по пирамидальной структуре требуемый объем памяти данных не превышает $N \log_2 N$ ячеек.

Рассмотренные модификации метода частотной выборки, отличающиеся небольшой длиной регистра памяти операндов проектируемого набора фильтров, могут найти применение при разработке цифровых систем частотной селекции сигналов, реализуемых на специализированных сверх большие интегральные схемы (СБИС), ПЛИС и микропроцессорах с фиксированной и относительно малой длиной слова.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Crochiere R.E., Rabiner L. Multirate Digital Signal Processing. Prentice Hall. Englewood Cliffs.- NJ, 1983.
2. Витязев В.В. Цифровая частотная селекция сигналов. М.: Радио и связь, 1993. 240 с.
3. Vaidyanathan P.P. Multirate Systems and Filter Banks. Prentice Hall. Englewood Cliffs.- NJ, 1993.
4. Mitra S.K. Digital Signal Processing: a computer-based approach. McGraw-Hill. Comp. Inc., 1998.
5. Основы цифровой обработки сигналов: Курс лекций / А.И. Солонина, Д.А. Улахович, С.М. Арбузов и др. СПб.: БХВ-Петербург, 2003. 608 с.
6. Айфичер Э.С., Джервис Б.У. Цифровая обработка сигналов: практический курс : Пер. с англ. М.: Изд.дом «Вильямс», 2004. 992 с.
7. The Digital Signal Processing Handbook / Ed. Vijay K. Madisetti, Douglas B. Williams by CRC Press LLC, 1998.
8. Meyer Y. Wavelets and Operators // Cambridge University Press. Cambridge.- UK, 1990.
9. Meyer Y. Wavelets: Algorithms and Applications // SIAM. Philadelphia.- PA, 1993.
10. Vetterli M., Kovacevic J. Wavelets and Subband Coding. Prentice Hall. Englewood Cliffs.- NJ, 1995.
11. Strang G., Nguyen T. Wavelets and Filter Banks. Wellesley-Cambridge Press. Cambridge.- UK, 1996.
12. Shafer R.W., Rabiner L.R. A digital signal processing approach to interpolation // Proc. IEEE. V. 61. June, 1973. P. 692-702.
13. Oetken G., Parks T.W., Schussler W. New results in the design of interpolators // IEEE Trans. Acoust., Speech and Signal Processing. V. ASSP-23. June, 1975. P. 301-309.
14. Bellanger M.G., Daguët J.L., Hépagnot G.P. Interpolation, extrapolation and reduction of computation speed in digital filter // IEEE Trans. Acoust., Speech and Signal Processing. V. ASSP-22. Aug., 1974. P. 231-235.
15. Rabiner L.R., Crochiere R.E. A novel implementation for narrow-band FIR digital filters // IEEE Trans. Acoust., Speech and Signal Processing. V. ASSP-23. Oct., 1975. P. 457-464.
16. Crochiere R.E., Rabiner L.R. Optimum FIR digital filter implementations for decimation, interpolation and narrow band filtering // IEEE

- Trans. Acoust., Speech and Signal Processing. V. ASSP-23. Oct., 1975. P. 444-456.
17. Shively R.R. On multistage FIR filters with decimation // IEEE Trans. Acoust., Speech and Signal Processing. V. ASSP-23. Aug., 1975. P. 353-357.
 18. Crochiere R.E., Rabiner L.R. Further considerations in the design of decimators and interpolators // IEEE Trans. Acoust., Speech and Signal Processing. V. ASSP-24. Aug., 1976. P. 296-311.
 19. Crochiere R.E., Rabiner L.R. Interpolation and decimation of digital signals: a tutorial review // Proc. IEEE. V. 69. March, 1981. P. 300-331.
 20. Bellanger M.G., Bonnerot G., Coudreuse M. Digital filtering polyphase network: Application to sample rate alteration and filter banks // IEEE Trans. Acoust., Speech and Signal Processing. V. ASSP-24. Apr., 1976. P. 109-114.
 21. Витязев В.В., Степашкин А.И. Метод синтеза цифровых узкополосных фильтров с усеченной импульсной характеристикой // Изв. вузов. Приборостроение. 1977. Т. 20. № 6. С. 25—29.
 22. Витязев В.В., Степашкин А.И. Синтез структуры цифрового узкополосного фильтра с использованием вторичной дискретизации // Изв. вузов. Приборостроение. 1980. Т. 23. № 6. С. 32—38.
 23. Витязев В.В., Алпатов Б.А., Степашкин А.И. Синтез цифровых узкополосных фильтров для частотного разделения каналов // Электросвязь. 1979. № 7. С. 47—51.
 24. Витязев В.В., Степашкин А.И. Синтез цифровых полосовых фильтров // Радиотехника. 1978. Т. 33. № 3. С. 75—77.
 25. Витязев В.В., Муравьев С.И., Степашкин А.И. Метод синтеза цифровых узкополосных КИХ-фильтров // Изв. вузов. Радиоэлектроника. 1981. Т. 24. № 7. С. 55—59.
 26. Витязев В.В., Степашкин А.И. К синтезу цифрового фильтра-демодулятора на основе двойного быстрого преобразования Фурье // Радиотехника 1981. Т. 36. № 7. С. 20—24.
 27. Витязев В.В., Степашкин А.И. Метод синтеза цифровых фильтров-демодуляторов на основе двойного быстрого преобразования Фурье // Электросвязь. 1982. № 3. С. 45—47.
 28. Витязев В.В. Синтез пирамидальной структуры набора цифровых фильтров-демодуляторов // Электросвязь. 1983. № 7. С. 45—49.
 29. Витязев В.В., Муравьев С.И., Степашкин А.И. Метод проектирования цифровых полосовых фильтров с конечной памятью // Изв. вузов. Радиоэлектроника. 1983. Т. 26. № 9. С. 3—9.

30. Витязев В.В., Муравьев С.И. Модификации метода частотной выборки на основе структуры с квадратурной модуляцией // Радиотехника. 1984. № 2. С. 19—23.
31. Витязев В.В., Муравьев С.И., Степашкин А.И. Метод проектирования цифровых полосовых фильтров с бесконечной памятью // Радиотехника. 1984. № 2, С. 19—23.
32. Витязев В.В., Муравьев С.И., Степашкин А.И. Синтез пирамидальной структуры набора цифровых полосовых фильтров // Электросвязь. 1985. № 8. С. 52—56.
33. Витязев В.В., Муравьев С.И. Пирамидальная структура цифровых полосовых фильтров с бесконечной памятью // Радиотехника. 1985. № 9. С. 45—49.
34. Витязев В.В., Муравьев С.И. Синтез цифровой системы частотной селекции сигналов на основе полуполосовых гребенчатых фильтров // Электросвязь. 1988. № 3. С. 57—61.
35. Витязев В. В. Оптимальное проектирование многоступенчатых структура цифровых фильтров на процессорах обработки сигналов // Электросвязь. 1992. № 4. С. 23—27.
36. Esteban D, Galand C. Application of quadrature mirror filters to split band voice coding schemes // Proc. IEEE Int. Conf. Acoust. Speech and Signal Processing. May, 1977. P. 191-195.
37. Crochiere R.E. Subband coding // Bell Syst. Tech. J. V. 60, Sept. 1981.
38. Smith M.J.T., Barnwell III. Exact reconstruction techniques for tree-structured subband coders // IEEE Trans. Acoust., Speech and Signal Processing. V. ASSP-34. June, 1986. P. 434-441.
39. Vetterli M. Filter banks allowing for perfect reconstruction // Signal Processing. V. 10. April, 1986. P. 219-244.
40. Vaidyanathan P.P. Quadrature mirror filter banks, M-band extensions and perfect-reconstruction techniques // IEEE ASSP Mag. V. 4. July, 1987. P. 4-20.
41. Vaidyanathan P.P. Multirate digital filters, filter banks, polyphase networks and applications: a tutorial // Proc. IEEE. V. 78. January, 1990. P. 56-93.
42. Vaidyanathan P.P. Theory and design of M-channel maximally decimated quadrature mirror filters with arbitrary M having perfect reconstruction property // IEEE Trans. Acoust., Speech and Signal Processing. V. ASSP-35. Apr., 1987. P. 476-492.
43. Vaidyanathan P.P., Vincent C. Liu. Classical sampling theorems in the context of multirate and polyphase digital filter bank structures // IEEE Trans. Acoust., Speech and Signal Processing. V. ASSP-36. Sept., 1988. P. 1480-1495.

44. Viscito E., Allebach J. The design of tree-structured M-channel filter banks using perfect reconstruction filter blocks // In Proc. IEEE Int. Conf. on ASSP. NY: Apr., 1988. P. 1475-1478.
45. Vaidyanathan P.P., Hoang P.-Q. Lattice structures for optimal design and robust implementation of two-channel perfect reconstruction QMF banks // IEEE Trans. Acoust., Speech and Signal Processing. V. ASSP-36. Jan., 1988. P. 81-94.
46. Vaidyanathan P.P., Nguyen T.Q., Doganata Z., Saramaki T. Improved approach for design of perfect reconstruction FIR QMF banks with lossless polyphase structures // IEEE Trans. Acoust., Speech and Signal Processing. V. ASSP-37. July, 1989.
47. Doganata Z., Vaidy P.P., Nguyen T.Q. General synthesis procedures for FIR lossless transfer matrices for perfect reconstruction multirate filter bank applications // IEEE Trans. Acoust., Speech and Signal Processing. V. ASSP-36. Oct., 1988. P. 1561-1574.
48. Spurbeck M.S., Mullis C.T. Least squares approximation of perfect reconstruction filter banks // IEEE Trans. Acoust., Speech and Signal Processing. V. ASSP-46. Apr., 1998. P. 968.
49. Huang J., Gu G. A direct approach to the design of QMF banks via frequency domain optimization // IEEE Trans. Acoust., Speech and Signal Processing. V. ASSP-46. Aug., 1998. P. 2131.
50. Chen T., Francis B.A. Design of multirate filter banks by hinf optimization // IEEE Trans. Acoust., Speech and Signal Processing. V. ASSP-43. Dec., 1995. P. 2822-2830.
51. Koilpillai R.D., Vaidyanathan P.P. Cosine-modulated FIR filter banks satisfying perfect reconstruction // IEEE Trans. on Signal Processing. V. SP-40. April, 1992. P. 770.
52. Yuan-Pei Lin, Vaidyanathan P.P. Linear phase cosine modulated maximally decimated filter banks with perfect reconstruction // IEEE Trans. Signal Proc. V. SP-43. Nov., 1995. P. 2525.
53. Nguien T.Q., R. D. Koilpillai R.D. The theory and design of arbitrary-length cosine-modulated filter banks and wavelets, satisfying perfect reconstruction // IEEE Trans. Signal Proc. V. SP-44. March, 1996. P. 473.
54. Xu H., Lu W.S., Antoniou A. Efficient iterative design method for cosine-modulated QMF banks // IEEE Trans. Signal Proc. V. SP-44. July, 1996. P. 1657.
55. Goh C.-K., Lim Y-C. An Efficient Algorithm for the Design of Weighted Minimax M -Channel Cosine-Modulated Filter Banks // IEEE Trans. Signal Proc. V. 46. May, 1998. P. 1426.

56. Mertins A. Subspace Approach for the Design of Cosine-Modulated Filter Banks with Linear-Phase Prototype Filter // IEEE Trans. Signal Proc. V. 46. Oct., 1998. P. 2812.
57. Argenti F., Del E. Re. Design of Biorthogonal M -Channel Cosine-Modulated FIR/IIR Filter Banks // IEEE Trans. Signal Proc. V. 48. March, 2000. P. 876.
58. Kovacevic, Vetterli M. Perfect Reconstruction Filter Banks with Rational Sampling Factors // IEEE Trans. Signal Proc. V. 41. June, 1993. P. 2047.
59. Nayebi K., Barnwell T.P., Spith J.T. Nonuniform filter banks: A reconstruction and design theory // IEEE Trans. Signal Proc. V. SP-41. March, 1993. P. 1114.
60. Akkarakaran S., Vaidyanathan, P.P. New results and open problems on nonuniform filter-banks // Proc. IEEE Int. Conf. Acoust. Speech, and Signal Proc. Phoenix. March 1999.
61. Chen T. L. Qiu, Bai E. General Multirate Building Structures with Application to Nonuniform Filter Banks, Special Issue on Multirate Systems, Filter Banks, Wavelets, and Applications // IEEE Trans. on Circuits and Systems II: Analog and Digital Signal Processing. V. 45. 1998. P. 948.
62. Princen J. The Design of nonuniform modulated filterbanks // IEEE Trans. Signal Proc. V. SP-43. Nov., 1995. P. 2550.
63. Chen T. Nonuniform Multirate Filter Banks: Analysis and Design with an Hinf Performance Measure // IEEE Trans. on Signal Processing. V. 45. March, 1997. P. 572.
64. Зайцев А.А. Методы построения банков цифровых фильтров: тематический обзор // Цифровая обработка сигналов. 2003. № 1. С. 2-10.
65. Djokovic I., Vaidyanathan P.P. Generalized sampling theorems in multiresolution subspaces // IEEE Trans. SP-45. March, 1997. P. 583-599.
66. Wornell G.W. Emerging applications of multirate signal processing and wavelets in digital communications // Proc. IEEE. V. 84-1. April, 1996. P. 586-603.
67. Зубарев Ю.Б., Витязев В.В., Дворкович В.П. Цифровая обработка сигналов – информатика реального времени // Цифровая обработка сигналов. 1999. № 1. С. 5-17.
68. Витязев В.В., Бодров К.А., Иванов С.И. Адаптивная многоскоростная фильтрация узкополосных процессов // Цифровая обработка сигналов и ее применение-DSPA'1999: Тр. 1-й Международной науч.-техн. конф. М., 1999. Т. 1. С. 150-160.

69. Витязев В.В., Бодров К.А., Сорокин Д.В. Оптимальный синтез многоскоростных систем фильтрации на цифровых сигнальных процессорах // Цифровая обработка сигналов и ее применение-DSPA'1999: Тр. 1-й Международной науч.-техн. конф. М., 1999. Т. 1. С. 50-54.
70. Витязев В.В., Зайцев А.А. Оптимальное проектирование многоступенчатых структур фильтров-дециматоров на сигнальных процессорах // Цифровая обработка сигналов. 2001. № 2. С. 2-9.
71. Линович А.Ю., Витязев В.В. Субполосная адаптивная фильтрация в задачах обратного моделирования // Цифровая обработка сигналов. 2004. № 1. С. 41-48.
72. Гусинская Е.И., Зайцев А.А. Оптимизация банка фильтров в задачах субполосного кодирования // Цифровая обработка сигналов. 2004. № 3. С. 18-28.
73. Линович А.Ю. Методы многоскоростной обработки сигналов в задачах обратного моделирования динамических систем // Цифровая обработка сигналов и ее применение-DSPA'2005: Тр. 7-й Международной науч.-техн. конф. М., 2005. Т. 1. С. 50-54.
74. Шойерманн Х., Геклер Х. Систематизированный обзор цифровых методов преобразования вида уплотнения каналов // ТИИЭР. 1981. Т. 69. № 11. С. 52—84.
75. Crochiere R.E. On the design of sub-band coders for low bit rate speech communication // Bell Syst. Tech. J. May-June, 1977. P. 747-771.
76. Safranek R.J, Mackay K., Jayant N.S., Kim T. Image coding based on selective quantization of the reconstruction noise in the dominant sub-band // In Proc. IEEE Int. Conf. on ASSP. Apr. 1988. P. 765-768.
77. Барсуков В.С., Дворянкин С.В., Шеремет И.А. Безопасность связи в каналах телекоммуникаций. Т. 20. М.: СП «Эко-Трендз», 1992. 123 с.
78. Шлеев С.Е. Элементная база и архитектура цифровых радиоприемных устройств // Цифровая обработка сигналов. 1999. № 1. С. 36-47.
79. Рабинер Л., Гоулд Б. Теория и применение цифровой обработки сигналов. М.: Мир, 1978. 848 с.
80. Bellanger M.G. Traitement numérique Du signal. Masson: Paris, 1980. 375 p.
81. Bellanger M.G., Bonnerot G. Premultiplication scheme for digital FIR filters with application to multirate filtering // IEEE Trans. V. ASSP-26. Feb., 1978. P. 50—55.

82. Bellanger M.G. Computation Rate and storage estimation in multirate digital filtering with half-band filters // IEEE Trans. V. ASSP-25. Aug., 1977. P. 471-485.
83. Goodman D.J., Carey M.J. Nine digital filters for decimation and interpolation // IEEE Trans. V. ASSP-25. Feb., 1977. P. 121-126.
84. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике. М.: Наука, 1973. 832 с.
85. Голд Б., Рэйдер Ч. Цифровая обработка сигналов / Под ред. А.М. Трахтмана. М.: Сов. радио, 1973. 367 с.
86. Алпатов Б.А., Витязев В.В., Степашкин А.И. Синтез цифровых резонаторов для систем узкополосной фильтрации // Радиотехника. 1979. Т. 34. № 12. С. 57—59.